This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

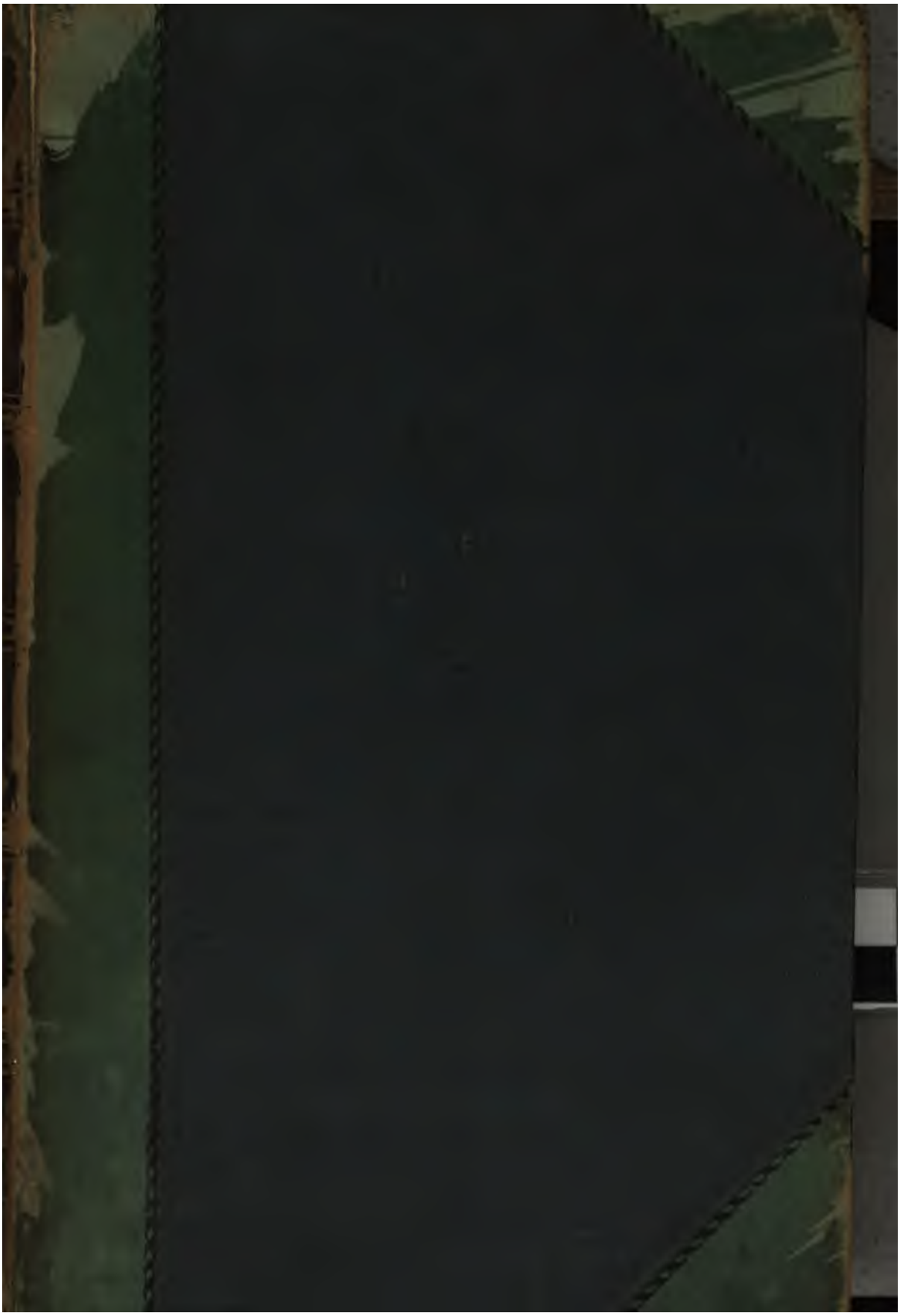
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

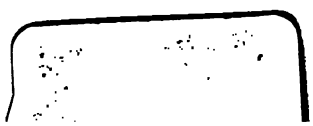
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`





MATHEMATISCHES

WÖRTERBUCH

ALPHABETISCHE ZUSAMMENSTELLUNG

SÄMMTLICHER

IN DIE MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN GEHÖRENDER GEGENSTÄNDE IN ERKLÄRENDEN UND BEWEISENDEN SYNTHETISCH UND ANALYTISCH BEARBEITETEN ABHANDLUNGEN

VON

LUDWIG HOFFMANN

BAUMEISTER IN BERLIN.

III. BAND

E—J.

BERLIN

VERLAG VON GUSTAV BOSSELMANN

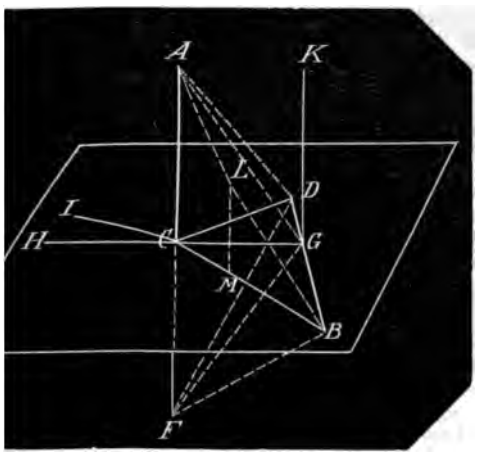
1861.

187. e. 5

E.

Eine Ebene ist eine Fläche
Beschaffenheit, dafs wenn 2 in
gelegene beliebige Punkte durch
de Linie verbunden werden, diese
it allen ihren Punkten in der
ch befindet.
ndere gerade Linie, welche gegen
e geführt wird, berührt die E.
einem Punkt und verlängert
let sie die E. in diesem Punkt.
ersten Fall steht die gerade L.
L., deren Berührungspunkt heifst
idpunkt oder Fufspunkt der
Linie.
ne gerade L. eine solche Lage
e E., dafs sie dieselbe nicht be-
r schneidet, so weit man beide
ängern mag, so läuft die ge-
mit der E. parallel.

Fig. 584.



Steht eine gerade L. auf einer E. der Art, dafs sie mit allen durch ihren Standpunkt gezogenen in der Ebene befindlichen geraden Linien rechte Winkel bildet, so heifst die Linie winkelrecht, lothrecht, normal auf der E., sie ist ein Loth auf der E. Jede gerade Linie, die auf einer E. nicht lothrecht steht, heifst schief oder schräg.

2. Steht eine gerade L. auf zweien in einer Ebene durch ihren Standpunkt gezogenen geraden Linien lothrecht, so ist sie ein Loht auf der Ebene.

Denn ist AC mit den beiden in der Ebene gelegenen geraden Linien CB und CD lothrecht und CG eine beliebige andere durch C in derselben E gezogene gerade L, und man zieht eine beliebige gerade Linie BD, welche die 3 Linien CB, CD, CG schneidet, verlängert AC bis CF, so dafs $CF = CA$, und zieht die Linien von A und F nach den Punkten B, D, G, so sind auch die $\angle BCF$ und DCF rechte Winkel, folglich ist

$\triangle ABC \cong \triangle FBC$
und $\triangle ACD \cong \triangle FDC$
folglich $AB = FB$
und $AD = FD$
hierzu $BD = BD$

folglich $\triangle ABD \cong \triangle FBD$
also $\angle ABG = \angle FBG$
hierzu $BG = BG$

folglich $\triangle ABG \cong \triangle FBG$
also $AG = FG$
hierzu $AC = FC$
und $CG = CG$

folglich $\triangle ACG \cong \triangle FCG$

und hieraus $\angle ACG = \angle FCG$
die als Nebenwinkel zusammen = 2 rechten Winkeln sind, und also $\angle ACG = R\angle$.

Da nun CG eine ganz beliebig gewählte Linie ist, so bildet auch AC mit jeder durch C in der E gezogenen geraden L. einen rechten Winkel.

3. 3 beliebig im Raum gegebene Punkte bestimmen die Lage einer Ebene und durch solche 3 Punkte ist nur eine E. und nicht noch eine zweite möglich.

Denn sind die 3 Punkte B, C, D gegeben und man verbindet dieselben durch gerade Linien, so mufs die gerade Linie BD mit den Punkten B und D in derselben Ebene liegen; desgleichen die Linie CD mit den Punkten C und D und die Linie BC mit den Punkten B und C in einerlei Ebene. Wollte man nun annehmen, dafs die 3 Punkte B, C, D nicht nur in der Ebene BCD sondern noch in einer zweiten Ebene lägen, so existirt ein aufserhalb BCD liegender Punkt, z. B. A in der 2ten Ebene, und da diese zweite Ebene die erste in CD, in BC und zugleich in BD schneiden müfste, so würden die drei Dreiecke ACD, ABC und ABD in dieser zweiten E. zugleich sich befinden müssen; jedes dieser Dreiecke schliefst aber einen der gegebenen Punkte als aufserhalb liegend von der zweiten Ebene aus. Es folgt hieraus:

Die Schenkel eines geradlinigen Winkels liegen nur in einer Ebene. Zwei sich schneidende gerade Linien, zwei mit einander parallel laufende Linien liegen nur in einer E.

Zwei Ebenen schneiden sich in einer geraden Linie, denn schnitten sie sich in noch einem aufserhalb der graden L. liegenden Punkt, so würde dieser mit noch zweien beliebigen Punkten der geraden Linie zusammen 3 Punkte ausmachen, zwischen welche nicht zwei Ebenen zu legen sind.

4. Wenn von zweien sich schneidenden Linien die eine lothrecht auf einer Ebene ist, so ist die andere nicht lothrecht auf derselben E.

Denn legt man durch die beiden sich schneidenden Linien eine E., so mufs diese die erstere E. schneiden. Es sei AC auf der E. in C lothrecht, AB die zweite, die AC in A schneidende gerade L., und CB die Durchschnittslinie zwischen beiden Ebenen CDB und ACB, so ist $\angle ACB$ ein rechter $\angle$ in dem $\triangle ACB$, folglich mufs $\angle ABC$ spitz und AB kann kein Loth auf E sein.

Hieraus folgt, dafs in einem Punkt einer E. immer nur ein Loth errichtet und von einem Punkt aufserhalb einer E. auf dieselbe nur ein Loth gefällt werden kann.

5. Sind auf einer geraden Linie in einem ihrer Punkte mehrere winkelrechte Linien errichtet, so liegen diese alle in einer E. Denn es seien auf der geraden Linie AC in C die Lothe CD, CB, CH errichtet, und man legt durch CD und CB eine E , so ist AC ein Loth auf dieser E., weil die beiden $\angle ACD$ und ACB rechte sind. Gesetzt nun CH läge nicht in derselben E., und man legt durch ACH eine E., welche die erstere E. in CJ schneidet, so ist nach No 2, $\angle ACJ$ ein rechter; da aber auch ACH ein rechter $\angle$ ist, so müssen CJ und CH zusammenfallen.

6. Die von einem Punkt A auf eine E. gefällte lothrechte ist die kürzeste Verbindungslinie zwischen dem Punkt A und der E. Jede andere Verbindungslinie wird gröfser und um so gröfser je weiter der Standpunkt derselben von dem Standpunkt des Loths entfernt ist. AC ist die kürzeste Linie, AD ist $> AC$; ist $CD < CB$ so ist auch $AD < AB$ und sind CD und CB einander gleich so sind auch AD und AB einander gleich. Die lothrechte AC heifst der Abstand des Punkts A von der Ebene.

7. Steht eine gerade Linie AC auf einer E. lothrecht und man fällt von irgend einem Punkt A der L. auf irgend eine in der E liegende gerade Linie BD eine Normale AG und verbindet diesen Punkt G mit dem Standpunkt C des Loths AC durch eine gerade Linie CG, so ist auch diese mit BD normal.

Denn macht man $GD = GB$, legt durch die Dreiecke ABD, ACD, ACB und ACG Ebenen, so ist

$DG = BG$
$\angle AGD = \angle AGB = R$
$AG = AG$
$\triangle AGD \cong \triangle AGB$
folglich $AD = AB$
hierzu $AC = AC$
und $\angle ACD = ACB = R$
$\triangle ACD \cong \triangle ACB$
folglich $CD = CB$
hierzu $CG = CG$
und $DG = BG$
$\triangle CDG \cong \triangle CBG$
folglich $\angle CGD = \angle CGB = R$

Eben so wird bewiesen, dafs wenn die Linie CG auf die beliebige in der E. befindliche gerade Linie BD normal ist, die von irgend einem Punkt A des Loths CA nach G gezogene gerade Linie AG auf BD normal ist.

8. 2 gerade Linien, die auf einer E. senkrecht stehen, sind mit einander parallel.

Denn sind AC und KG lothrecht auf der E. und man verbindet beider Standpunkte C und G durch CG, zieht in der E. auf CG die Normale BD und die Linie AG so ist auch AG auf BD normal; da nun auch GK auf BD normal ist, so liegen die 3 geraden Linien GC, GA und GK in einerlei Ebene, und da in derselben $\angle ACG = R = \angle CGK$ so ist $AC \parallel KG$.

Eben so wird bewiesen, dafs wenn von 2 parallelen L. die eine lothrecht auf einer E. ist auch die andere auf derselben E. lothrecht steht.

9. Hieraus folgt, dafs zwei gerade Linien im Raum mit einander $\parallel$ sind wenn jede von beiden mit einer dritten $\parallel$ ist.

Ferner, dafs zwei Winkel im Raum einander gleich sind, wenn ihre Schenkel je 2 und 2 nach derselben Seite der Verbindungslinie ihrer Scheitelpunkte mit einander parallel laufen.

10. Werden aus beliebigen Punkten einer auf einer E. schräg stehenden geraden L. auf die E. Lothe gefällt, so liegen deren Standpunkte mit dem Standpunkt der schrägen in derselben geraden Linie; denn fällt man die Lothe AC, LM der schrägen AB auf die E., so befinden sich AC und LM in einerlei E., und zwar, da sie mit der Linie AB zwei Punkte A und L gemein haben in derselben E., in welcher AB liegt; legt man daher durch die Linien AC, LM und AB die ihnen gemeinschaftliche E., so schneidet diese die erste Ebene in einer geraden Linie und in dieser liegen also auch die Standpunkte jener Linien.

Die gerade Linie, in welcher die Standpunkte sämmtlicher Lothe einer schräg auf einer E. befindlichen geraden L. liegen, heifst die Projection der schrägen L. auf der E.

11. Der Winkel, den eine schräge L. mit ihrer Projection auf einer Ebene macht, ist der kleinste von allen anderen Winkeln, welche die schräge L. mit anderen geraden aus ihrem Standpunkt auf der E. gezogenen Linien bilden kann.

Denn ist CG die Projection der schrägen AG, AC das Loth auf der E., und man zieht eine beliebige andere gerade GB, macht diese $= GC$ und zieht AB, so ist $AB > AC$.

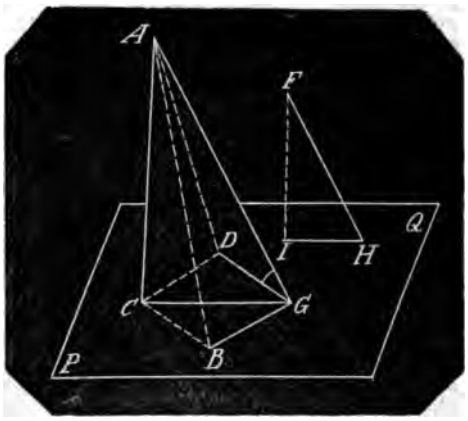
Nun ist in den beiden Dreiecken AGC und AGB

$AG = AG$
$GC = GB$
und $AC < AB$
folglich $\angle AGC < \angle AGB$

12. Bilden die geraden Linien GD und GB mit der Projection GC der schrägen AG gleiche Winkel, so sind auch die $\angle AGD$ und AGB, welche die Schräge AG mit GD und GB bildet einander gleich

Denn macht man $GD = GB$, so ist in den Dreiecken CDG und CBG

Fig. 585.



$CG = CG$
$GD = GB$
$\angle DGC = \angle BGC$

daher $\triangle DGC \cong \triangle BGC$
also $CD = CB$
hierzu $AC = AC$
$\angle ACD = \angle ACB = R$

$\triangle ACD \cong \triangle ACB$
also $AD = AB$
hierzu $DG = BG$
$AG = AG$

folglich $\triangle AGD \cong \triangle AGB$
woraus $\angle AGD = \angle AGB$

13. Sind die Winkel, welche die Projection GC von GA mit den Linien GD und GB bilden ungleich, so sind auch die Winkel zwischen diesen Linien und der schrägen AG ungleich und zwar gehören die beiden gröfseren und die beiden kleineren Winkel zusammen.

Denn wenn man wie No. 12 beweist, so erhält man

für $\angle DGC > \angle BGC$
in den Dreiecken DGC und BGC
$CD > BC$
also in den bei C rechtwinkligen Dreiecken ACD und ACB
$AD > AB$
folglich in den Dreiecken AGD und AGB
$\angle AGD > \angle AGB$

14. Der Winkel AGC den eine Schräge

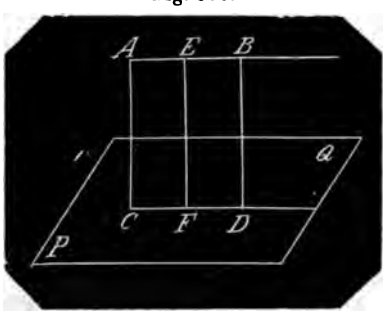
AG mit ihrer Projection auf einer E. bildet heifst der Neigungswinkel der schrägen L. gegen die E.

15. Schneidet eine von zwei parallelen Linien eine E., so trifft auch die andere dieselbe E., und beide haben mit derselben gleiche Neigungswinkel.

Denn sind *AG* und *FH* ∓ und trifft *AG* die Ebene *PQ* in *G*, so schneidet die E. der beiden Parallelen dieselbe Ebene *PQ* in einer geraden Linie, in welcher der Punkt *G* liegt; dieselbe Durchschnittslinie liegt aber auch in der Ebene zu welcher *AG* und *FH* gehören und folglich mufs auch *FH* die Ebene in einem Punkt *H* schneiden, so dafs die grade Linie *GH* in beiden Ebenen liegt. Fällt man nun die Lothe *AC* und *FJ*, so sind auch diese (nach No. 8) mit einander ∓ und nach No. 9 $\angle CAG = \angle JFH$. Zieht man nun die geraden Linien *GC* und *HJ*, so sind in den beiden Dreiecken *AGC* und *FHJ* auch die dritten $\angle AGC$ und *FHJ*, d. h. die Neigungswinkel der beiden Parallelen einander gleich.

16. Eine gerade Linie ist mit einer Ebene ∓, wenn sie mit einer in der Ebene liegenden geraden Linie ∓ ist.

Fig. 586.



Denn ist *AB* aufserhalb der Ebene *PQ* und mit der in *PQ* liegenden Linie *CD* ∓, so liegen beide Linien in einer Ebene, welche die Ebene *PQ* in der geraden Linie *CD* schneidet. Es kann also die *AB* keinen Punkt aufserhalb der *CD* mit der Ebene *PQ* gemein haben, und da sie mit *CD* ∓ ist, so hat sie mit der Ebene *PQ* gar keinen Punkt gemein und ist folglich mit *PQ* parallel.

18. Fällt man aus beliebig vielen Punkten einer mit einer E. parallelen Linie Lothe auf die Ebene, so liegen diese alle in einerlei E. und sind gleich lang.

Denn fällt man von der mit *E* parallelen *AB* zwei Lothe *AC*, *EF*, so sind diese mit einander ∓ und liegen also in einerlei Ebene und zwar in derselben in welcher zugleich *AB* liegt. Verbindet man die Standpunkte *C*, *F* durch eine gerade Linie, so liegt auch diese mit den 3 Linien in derselben Ebene und ist der *AE* ∓, weil diese mit der E. ∓ ist, folglich sind *AC* und *EF* als Parallelen zwischen Parallelen gleich lang.

Fällt man nun von der unbegrenzten *AB* ein drittes Loth *BD* auf *E*, so ist *BD* ∓ mit *AC* und *EF*, liegt mit *EF* und *AB* in einerlei Ebene, also auch mit *AC* in derselben Ebene, *FD* liegt mit *CF* in einerlei Linie und $BD = EF = AC$.

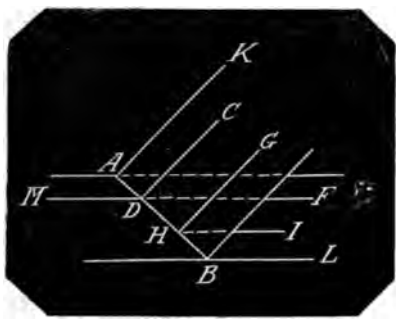
17. Läuft eine gerade Linie mit einer E. ∓, und man legt durch die Linie Ebenen, welche jene E. schneiden, so sind die Durchschnittslinien unter einander und mit ersterer geraden Linie ∓.

Denn träfe eine Durchschnittslinie mit der geraden L. zusammen, so müfste dies in der Ebene geschehen mit welcher die Grade ∓ ist, welches nicht sein kann. Da nun die gerade mit jeder Durchschnittslinie der sich schneidenden Ebenen ∓ ist, so sind diese auch unter einander ∓.

19. Da die Lothe aus allen Punkten einer mit einer E. parallelen geraden L. auf die Ebene gleich lang sind, so hat eine mit einer E. parallelen Linie in allen ihren Punkten einen gleichen Abstand von der Ebene.

20. Schneiden sich zwei Ebenen in einer geraden Linie *AB* und es werden auf dieser in verschiedenen Punkten *D*, *H* Normalen errichtet, die in beiden Ebenen liegen und nach einerlei Seite hingerichtet sind, so sind die von denselben eingeschlossenen Winkel alle einander gleich.

Fig. 587.



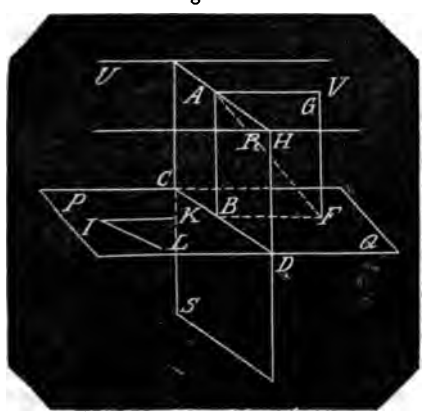
Denn sind *CD* und *GH* normal *AB* in der Ebene *KB*, so ist *CD* ∓ *GH*, eben so sind die in der Ebene *AC* auf *AB* be-

findlichen Normalen FD und JH einander ∓
also (nach No. 9) $\angle CDF = \angle GHJ$.

21. Ein solcher durch Normalen in einem Punkt der Durchschnittslinie zweier Ebenen gebildeter Winkel heifst der Neigungswinkel der Ebenen, wenn er von beiden möglichen Nebenwinkeln wie $\angle CDF$ und CDM der kleinere ist. Ist der Neigungswinkel zweier Ebenen ein Rechter, so heifsen die beiden Ebenen normal, winkelrecht, lothrecht, perpendiculär auf einander.

22. Wird durch eine auf einer Ebene normale gerade Linie eine E. gelegt, so sind beide Ebenen auf einander normal.

Fig. 588.



Denn ist die gerade Linie AB in B auf der Ebene PQ normal, und ist RS eine durch AB gelegte E., welche die PQ in CD schneidet, so ist auch AB auf CD normal. Errichtet man nun auf CD in B die in PQ fallende Normale BF, so ist AB auch normal BF und $\angle ABF$ ist ein rechter Winkel, und da dieser (nach No. 21) der Neigungswinkel zwischen beiden Ebenen ist, so sind dieselben auf einander normal.

Eben so wird bewiesen, dafs wenn man in einem Punkt der Durchschnittslinie zweier auf einander normaler Ebenen PQ und RS eine lothrechte errichtet, die in einer der beiden Ebenen liegt, diese lothrechte auch eine lothrechte auf der anderen Ebene ist.

23. Ferner wenn 2 E. auf einander normal stehen und man fällt aus einem in der einen E. befindlichen Punkt ein Loth auf die andere E., so liegt dies Loth mit allen Punkten in der ersten Ebene.

Hieraus folgt wieder, dafs wenn zwei sich schneidende Ebenen beide auf einer dritten E. normal stehen, auch deren Durchschnittslinie auf der dritten E. normal steht.

24. Haben zwei Ebenen eine solche Lage gegen einander, dafs sie sich nirgend schneiden wie viel man dieselben auch erweitern mag, so heifsen die Ebenen parallel, sie sind Parallelebenen.

25. Steht eine gerade L. auf zwei Ebenen normal, so sind beide E. ∓ mit einander.

Denn sind (Fig. 588) A und B die Standpunkte der auf den Ebenen UV und PQ gemeinschaftlichen Normalen AB, so ziehe in PQ die beliebige gerade Linie BF und verbinde F mit A, so ist in dem $\triangle ABF$ der $\angle ABF$ ein Rechter, folglich ist BAF ein spitzer Winkel. Es kann also der Punkt F, so weit er auch von B entfernt ist, kein Punkt der Ebene UV sein, weil sonst AB auf dieser Ebene nicht normal wäre, und da dies von allen in PQ beliebig liegenden Punkten gilt, so ist $UV \mp PQ$.

26. Werden 2 parallele Ebenen von einer dritten geschnitten, so sind auch deren Durchschnittslinien mit einander parallel.

Denn da beide Durchschnittslinien in der schneidenden E. liegen, so können sie nur in dieser zusammentreffen; da sie aber zugleich in beiden parallelen E. liegen, so treffen sie nirgend zusammen und sind folglich parallel.

27. Parallele Ebenen sind überall gleich weit von einander entfernt.

Denn es seien (Fig. 588) von den beliebigen Punkten A, G der Ebene UV die Lothe AB, GF gefällt, so sind diese einander ∓, und liegen beide in der Ebene $AGFB$, wenn man die Linien AG und BF zieht. Es sind also AG und BF ∓ und daher ist $AB = GF$, weil diese beiden Linien Parallelen zwischen Parallelen sind, und da die Punkte A und G ganz willkührliche Punkte sind, so gilt diese Gleichheit der Lothe zwischen allen anderen Punkten der beiden Ebenen.

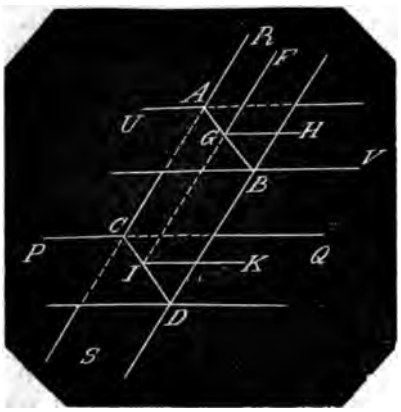
28. Die Ebenen zweier Winkel, deren Schenkel ∓ laufen, sind selbst mit einander parallel.

Denn sind (Fig. 588) die Schenkel AG und JK, AH und JL der $\angle GAH$ und KJL mit einander parallel, UV und PQ die durch die Winkel gelegten Ebenen, und man fällt das Loth AB auf PQ, zieht $BF \mp JK$, $BD \mp JL$, so sind (nach No. 9) diese Linien auch ∓ AG und AH. Da nun $\angle ABF = R$, so ist auch $\angle BAG = R$

und da $\angle ABD = R$, so ist auch $\angle BAH = R$, mithin ist AB normal auf PQ und UV, also nach No. 25, $UV \fallingdotseq PQ$.

29. Zwei parallele E. werden von einer dritten unter gleichen Neigungswinkeln geschnitten.

Fig. 589.



Denn sind (Fig. 589) AB und CD die beiden parallelen Linien, in welchen die beiden parallelen Ebenen UV und PQ von der Ebene RS geschnitten werden, und man errichtet in einem Punkt G der Linie AB das Loth GH in der Ebene UV und das Loth GF in der Ebene RS, so ist $\angle FGH$ der Neigungswinkel zwischen den Ebenen RS und UV. Verlängert man nun FG bis J, legt durch FJ und GH eine Ebene, welche die Ebene PQ in JK schneidet,

so ist (nach No. 26) $JK \fallingdotseq GH$

daher $\angle GJK = \angle FGH$

Da nun (nach No. 26) $CD \fallingdotseq AB$, und AB normal auf der durch FJ und GH gelegten Ebene ist, so ist auch CD dieser E. normal, folglich CD auch normal auf GJ und JK, also $\angle DJF = R$ und $\angle DJK = R$, folglich GJK der Neigungswinkel zwischen den Ebenen RS und PQ und dem Neigungswinkel FDH gleich.

30. Werden 2 Ebenen von einer dritten unter parallelen Linien und unter gleichen auf derselben Seite der schneidenden E. liegenden Neigungswinkeln geschnitten, so sind die E. parallel.

Denn ist $AB \fallingdotseq CD$ und man errichtet in J die Normale JF auf CD, so ist sie auch normal auf AB, errichtet man nun die Normalen GH auf AB in UV und JK auf CD in PQ so sind $\angle FGH$ und FJK die Neigungswinkel zwischen den Ebenen RS und UV und RS und PQ.

Sind nun diese Winkel einander gleich, so sind auch die Linien JK und GH parallel, da nun auch die Linien CD und AB parallel sind, so sind nach No. 28 die Ebenen PQ und UV parallel.

Folgende Sätze sind sehr leicht zu beweisen.

31. Wenn eine gerade Linie eine von 2 parallelen Ebenen schneidet, so schneidet sie auch die andere Ebene.

32. Wenn eine Ebene eine von 2 parallelen Ebenen schneidet, so schneidet sie auch die andere Ebene.

33. Wenn zwei E. einer dritten parallel sind, so sind sie unter einander parallel.

Ebenenwinkel oder **Flächenwinkel** ist der Winkel, den zwei zusammentreffende Ebenen mit einander bilden; er wird durch den Neigungswinkel beider Ebenen gemessen (s. Ebene No. 20).

Ecke, Körperecke ist die Vereinigung mehrerer ebenen Winkel, von denen je zwei und zwei einen gemeinschaftlichen Schenkel haben und die in verschiedenen Ebenen liegen um eine gemeinschaftliche Spitze. Die gemeinschaftlichen Schenkel aller Winkelpaare oder die Durchschnittslinien der Ebenen dieser Winkel heifsen die Kanten, die Winkel selbst die Seiten und die gemeinschaftliche Spitze aller Winkel die Spitze der Ecke. Die Neigungswinkel je zweier in einer Kante zusammentreffenden Ebenen heifsen die Winkel der Ecke. Sind diese Winkel, welche von den Seiten eingeschlossen werden einzeln kleiner als zwei Rechte, so heifst die Ecke erhaben oder eine Ecke mit ausspringenden Winkeln. Sind die Winkel einzeln gröfser als zwei Rechte, so heifst die Ecke hohl oder eine Ecke mit einspringenden Winkeln. Die Ecken werden ferner nach der Anzahl ihrer Seiten dreiseitige, vier, fünf .... nseitige genannt; die dreiseitigen Ecken heifsen auch Körperdreiecke.

2. In jeder dreiseitigen Ecke sind je zwei Seiten zusammengenommen gröfser als die dritte Seite.

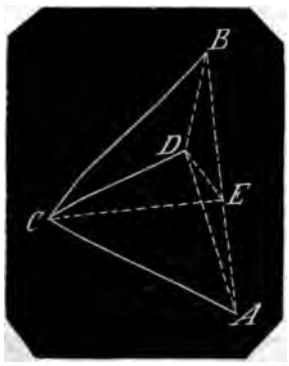
In der Ecke $ABDC$ mit der Spitze C seien die Seiten BCD und ACD einzeln kleiner als die Seite ACB, so ist zu beweisen dafs

$$ACB < ACD + BCD$$

Man nehme von der Seite ACB einen Theil $ACE = ACD$, ziehe die beliebige gerade Linie AB, welche die CE in E

schneidet, mache $CD = CE$ und ziehe die Linien AD und BD,

Fig. 590.



so ist	$\triangle ACD \cong \triangle ACE$
hieraus	$AD = AE$
nun ist	$AD + BD > AB$
d. h.	$AD + BD > AE + BE$
folglich	$BD > BE$
hierzu	$CD = CE$
und	$BC = BC$

folglich liegt in den Dreiecken BCD und BCE der gröfseren Seite BD der gröfsere $\angle BCD$ und der kleineren Seite BE der kleinere $\angle BCE$ gegenüber, also

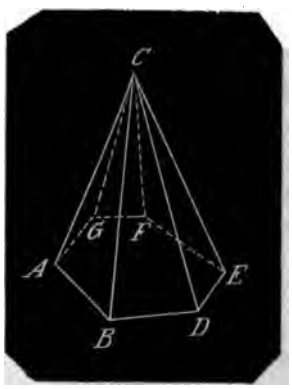
	$\angle BCD > \angle BCE$
hierzu	$\angle ACD = \angle ACE$
folglich	$\angle ACD + \angle BCD > \angle ACB$

3. Hieraus folgt: wenn 3 gerade Linien von einem Punkt aus der Art gezogen sind, dafs von den 3 Winkeln, welche diese Linien mit einander bilden je 2 gröfser sind als der dritte, so liegen die 3 Linien nicht in einer Ebene sondern bilden eine dreiseitige Ecke.

4. In jeder dreiseitigen oder mehrseitigen erhabenen Ecke betragen die Seiten zusammengenommen weniger als 4 Rechte.

Denn schneidet man sämmtliche Kanten der vielseitigen Ecke C durch eine Ebene $AB \ldots G$, so bildet diese ein Vieleck von so vielen Seiten als die Ecke Seiten hat, deren Seiten bilden mit der Spitze C der Ecke eben so viele Dreiecke und deren Winkelpunkte $AB \ldots G$ mit

Fig. 591.



jenen Dreiecksflächen $ABC \ldots$. eben so viele dreiseitige Ecken.

Nun hat man die Summe der 3 Winkel eines jeden Dreiecks wie $CAB = 2$ Rechten, also

$$\angle CAB + \angle CBA = 2R - \angle ACB$$
$$\angle CBD + \angle CDB = 2R - \angle BCD$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Sind nun n solcher Dreiecke vorhanden, so ist die Summe links, nämlich die Summe sämmtlicher an den Vieleckseiten befindlichen Dreieckswinkel $= 2nR$ weniger der Summe sämmtlicher n Seiten der Ecke.

Ferner ist die Summe sämmtlicher Umfangswinkel der Vielecks:

$$\angle GAB + \angle ABD + \ldots. = 2nR - 4R$$

und von jenen Dreieckswinkeln sind nach No. 2 immer 2 gröfser als der anliegende Umfangswinkel, wie

$$\angle CAG + \angle CAB > \angle GAB$$
$$\angle CBA + \angle CBD > \angle ABD$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

folglich ist auch die den links stehenden Dreieckswinkeln gleiche Summe

$2nR - (\angle ACB + \angle BCD + \ldots. \angle GCA)$

gröfser als die sämmtlichen Umfangswinkeln gleiche Summe $2nR - 4R$ oder es ist

$$2nR - (\angle ACB + \angle BCD + \ldots. \angle GCA) > 2nR - 4R$$

woraus

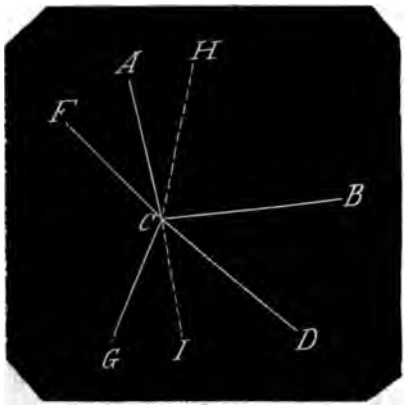
$$\angle ACB + \angle BCD + \ldots \angle GCA < 4R.$$

5. Errichtet man in der Spitze einer Ecke auf deren Seiten Normalen, legt durch je 2 und 2 neben einander stehende derselben Ebenen, so entsteht eine neue Ecke. In beiden Ecken sind die Seiten der einen die Ergänzungen der Winkel der anderen Ecke zu 2 rechten Winkeln.

Es seien ACB und BCD zwei Seiten einer Ecke mit der gemeinschaftlichen Kante CB, FC eine Normale auf der Seite

ACB also auch auf der Kante CB, und CG normal auf der Seite BCD also auch auf der Kante CB.

Fig. 592.



Construirt man nun den Neigungswinkel HCJ der beiden Seiten ACB und BCD, so dafs CH in der Seite ACB normal BC und CJ in der Seite BCD normal BC ist, so sind die Linien CH, CF, CJ, CG alle normal auf CB und liegen in einerlei Ebene (s. Ebene No. 5) und deren Winkel sind in Summa = 4 Rechten.

Nun liegt CH in der Ebene ACB auf welcher CF normal steht, es ist also $\angle FCH = R$, und CJ liegt in der Ebene BCD auf welcher CG normal steht, es ist also $\angle JCG = R$ demnach $\angle FCG + \angle HCJ = 2R$ d. h. die Seite FCG der neuen Ecke ergänzt den Winkel HCJ der alten Ecke zu $2R$, und dies gilt von allen übrigen Seiten der neuen Ecke.

Nun ist GC auf der Ebene BCD normal, also auch auf deren Kante BC; FC ist auf der Ebene ACB normal, also auch auf deren Kante BC. Gegenseitig also ist die Kante BC auf den Kanten GC und FC normal, also normal auf der Ebene ACG, d. h. auf der Seite der neuen Ecke und dies gilt von allen übrigen Kanten der gegebenen Ecke in Beziehung auf die übrigen Seiten der neuen Ecke. Mithin steht die neue Ecke zu der gegebenen Ecke in derselben Beziehung wie die gegebene Ecke zu der neuen Ecke und folglich ergänzen die Seiten der gegebenen Ecke die Winkel der neuen Ecke zu 2 Rechten.

6. Man nennt daher von den beiden wie No. 5 construirten Ecken die eine die Supplementsecke oder die Ergänzungsecke der anderen.

7. In einer $n$seitigen Ecke ist die Summe sämmtlicher Winkel gröfser als $(2n-4)R$ und kleiner als $2n$ Rechten Winkeln.

Denn bezeichnet man die Winkel der Ecke mit α, β, γ, δ.... die zu diesen gehörenden Seiten der Supplementarecke mit a, b, c, d... so ist nach No. 6

$$\alpha + a = 2R$$
$$\beta + b = 2R$$
$$\gamma + c = 2R$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

mithin
$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots+a+b+c+\ldots. = n \cdot 2R \qquad (1)$$

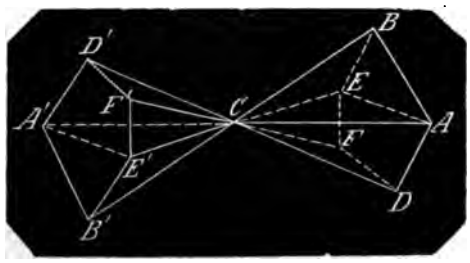
folglich sind die $\angle \alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots.$ immer kleiner als $2nR\angle$.

Nach No. 4 ist die Summe der Seiten einer Ecke immer kleiner als $4R$, oder
$$a+b+c+d+\ldots < 4R \qquad (2)$$
diese Vergleichung mit Gl. 1 verbunden gibt
$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots.. > (2n-4)R$$

8. Wenn die Kanten einer Ecke über den Scheitel hinaus verlängert werden und man betrachtet diese Verlängerungen als Kanten einer neuen Ecke, so sind die Seiten und Winkel in beiden Ecken einander gleich aber in entgegengesetzter Anordnung, so dafs die Ecken nicht zur Congruenz gebracht werden können.

Es folgt die Gleichheit der Seiten und der Winkel von einerlei Bezeichnung unmittelbar aus der Construction, eben so die entgegengesetzte Anordnung der einzelnen Stücke der Ecke der Reihenfolge nach, also keine Congruenz der Ecken sondern symmetrische Gleichheit, wie es mit beiden Hän-

Fig. 593.



den und Füßen eines Menschen statt findet.

9. Wenn in 2 dreiseitigen Ecken 2 Seiten und die von ihnen eingeschlossenen Winkel einzeln gleich sind, so sind die beiden Ecken entweder $\cong$ oder symmetrisch gleich.

Wenn in zwei Ecken wie $ABEC$ und $A'B'E'C$ mit der gemeinschaftlichen Spitze C, Seite ACB = Seite $A'CB'$, Seite ACE = Seite $A'CE'$ und die eingeschlossenen $\angle BACE = \angle B'A'CE'$, beide in einerlei Anordnung, so lassen sich beide Ecken mit den gleichen Stücken in einander schieben und sie congruiren. Liegt aber, wie hier, die Kante CE' so, daſs sie in die Ebene ACB fällt, und die Kante CA' so, daſs sie in die Ebene BCE fällt, wenn man beide Ecken in einander schieben will, so sind beide Ecken symmetrisch gleich, die Seite $B'CE'$ fällt auf die Seite BCA und die Seite $B'CA'$ auf die Seite BCE.

10. In einer dreiseitigen Ecke liegen gleiche Winkel gleichen Seiten und gleiche Seiten gleichen Winkeln gegenüber.

Denn ist in der Ecke $BADC$ (Fig. 590) die Seite BCD = der Seite ACD und man halbirt durch eine Ebene DCE den Flächenwinkel $ADCB$, so hat man 2 Ecken $BDEC$ und $ADEC$.

In beiden ist

Seite ACD = Seite BCD

Seite DCE = Seite DCE

und $\angle ADCE = \angle BDCE$

daher die Ecke $ADEC \cong$ oder symmetrisch gleich der Ecke $BDEC$

folglich $\angle DCBE = \angle DACE$.

Sind in 2 Ecken zwei Winkel einander gleich, so denke man sich die Supplementsecke construirt; in dieser sind dann die Seiten die Supplemente der in der ersten Ecke befindlichen Winkel, diese Seiten sind also einander gleich, folglich auch die ihnen gegenüberliegenden Winkel und diese sind die Supplemente der in der ersten Ecke liegenden Seiten, welche daher einander gleich sind.

11. In jeder dreiseitigen Ecke liegt dem gröſseren Winkel die gröſsere Seite und der gröſseren Seite der gröſsere Winkel gegenüber.

Denn ist in der Ecke $BADC$, $\angle ADCB < \angle DACB$ und man legt durch die Kante CD eine Ebene DCE so daſs

$\angle ADCE = \angle DACE$

so ist Seite DCE = Seite ACE

hierzu Seite BCE = Seite BCE

daher $DCE + BCE = BCA$

aber $DCE + BCE > BCD$ (nach No. 2)

folglich Seite $BCA >$ Seite BCD

Gegenseitig liegt auch der gröſseren Seite der gröſsere Winkel gegenüber, denn wenn $BCA > BCD$ und man wollte annehmen, daſs $\angle ADCB = \angle BACD$, so würde nach No. 10 auch Seite ACB = Seite BCD sein; und wollte man annehmen, daſs $\angle ADCB < \angle BCAD$, so würde nach dem ersten Theil dieses Satzes Seite $BCA <$ Seite BCD sein müssen.

12. Sind in 2 dreiseitigen Ecken 2 Seiten der einen zweien Seiten der anderen einzeln gleich, die von den Seiten eingeschlossenen Winkel aber ungleich, so liegt dem gröſseren Winkel auch die gröſsere Seite gegenüber.

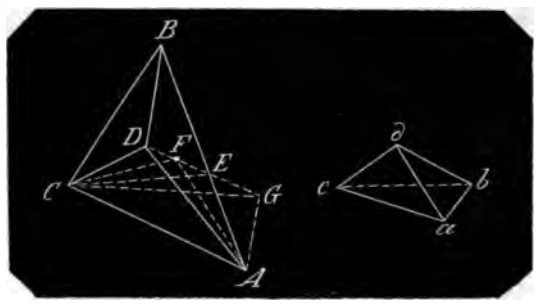
Denn ist in der Ecke $abdc$ und in der Ecke $ABDC$ Seite acd = Seite ACD

Seite bcd = Seite BCD

$\angle adcb < \angle ADCB$

so kann man durch die Kante CD eine Ebene DCE führen, so daſs $\angle ACDE = \angle acdb$. Diese Ebene schneidet die Seite ACB in einer geraden Linie CE, wenn also die neue Seite DCE der zugehörigen Seite dcb in der zweiten Ecke gleich ist, so ist die neue Ecke $ADEC$ = der zweiten Ecke $adbc$ und Seite $ACB >$ Seite acb.

Fig. 594.



Ist die Seite $dcb < DCE$

so sei $DCF = dcb$

Nun ist in der Ecke $DBEC$

Seite $DCB + BCE > DCE$

hierzu $ACE = ACE$

gibt $DCB + ACB > DCE + ACE$ (1)

Ferner ist in der Ecke $AEFC$

Seite $ECF + ACE > ACF$

hierzu $DCF = DCF$

gibt $DCE + ACE > ACF + DCF$ (2)

hierzu Vergleichung 1 addirt gibt

$DCB + ACB > ACF + DCF$

Nun ist Seite $DCB = dcb = DCF$

folglich $ACB > (ACF = acb)$

Ist die Seite $dcb > DCE$, so sei $DCG = dcb$

dann ist in der Ecke $BDEC$
Seite $BCE + DCE > BCD$
und in der Ecke $AGEC$
ist Seite $GCE + ACE > ACG$

addirt gibt $BCA + DCG > BCD + ACG$
Nun ist Seite $dcb =$
$DCG = BCD$

daher Seite $BCA > (ACG = acb)$

13. Sind in zwei dreiseitigen Ecken 3 Seiten der einen den 3 Seiten der anderen einzeln gleich, so sind auch die 3 Winkel, die den gleichen Seiten gegenüber liegen einander gleich; und sind die 3 Winkel einzeln einander gleich so sind es auch die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten.

Es folgt der erste Theil des Satzes unmittelbar aus dem vorigen Satz. Denn lägen den gleichen Seiten ungleiche Winkel gegenüber, so wären ungleiche Winkel von einzelnen gleichen Seiten eingeschlossen; nach dem vorigen Satz müfsten aber die diesen ungleichen Winkeln gegenüberliegende Seiten ungleich sein, welches gegen die Voraussetzung ist.

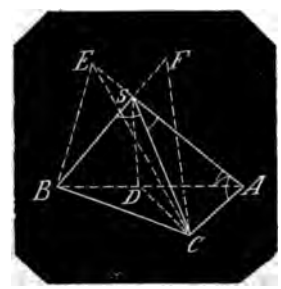
Für den zweiten Theil denke man sich zu der Ecke die Supplementsecke, in welcher nach No. 5 die Seiten die Supplemente der in der ersten Ecke befindlichen Winkel sind, so hat man hier nach dem ersten Theil des Satzes die Winkel gleich also auch deren Supplemente und diese sind die Seiten der ersten Ecke.

14. Eine dreiseitige Ecke wird durch 2 Seiten und dem einer von beiden gegenüberliegenden Winkel bestimmt.

1. **Wenn der Winkel und die anliegende Seite jede kleiner als ein Rechter, die gegenüberliegende Seite aber gröfser als die anliegende Seite ist.**
2. **Wenn der Winkel kleiner als ein Rechter ist, die anliegende Seite gröfser als ein Rechter und die Summe beider Seiten gröfser ist als 2 rechte Winkel.**
3. Wenn der Winkel gröfser als 1 Rechter, die anliegende Seite kleiner als ein Rechter ist, die Summe der beiden Seiten aber kleiner ist als 2 Rechte.
4. Wenn der Winkel gröfser als ein Rechter, die anliegende Seite gröfser als 1 Rechter ist und die gegenüberliegende Seite kleiner ist als die anliegende.

ad 1. Es sei $ABCS$ eine dreiseitige Ecke, der Winkel $BASC$ ist $< 90°$, die anliegende Seite $ASC < 90°$ und die gegenüberliegende Seite $BSC > ASC$. Fällt man aus C das Loth CD auf die Seite ASB, zieht DS so ist $\angle CSD$ der Neigungswinkel der Kante CS gegen die Ebene ASB, der kleinste unter allen Winkeln, die CS mit einer aus S auf der Ebene ASB gezogenen Linie bildet, und da nach Voraussetzung $\angle BSC > \angle ASC$, so ist auch $\angle BSD > \angle ASD$ (s. Ebene No. 13). Innerhalb des $\angle ASD$ kann also von S aus keine Linie SB' gezogen werden, so dafs $\angle CSB' = \angle CSB$ wird, und jede Linie SB' die in der Ebene ASB links über B hinausgezogen wird, würde wieder einen $\angle LSB'$ geben, der gröfser als LSB wird, mithin ist die Ecke vollkommen bestimmt.

Fig. 595.



ad. 2. Es seien in der Ecke $ABCS$ die Seiten BSC und ASC und der der Seite BSC gegenüberliegende $\angle BASC$ gegeben.

$\angle BASC < 90°$
Seite $ASC > 90°$
Seite $ASC + BSC > 180°$
so dafs Seite $BSC <$ und $> 90°$ sein kann.

Verlängert man nun die Kante AS um ein beliebiges Stück SE, zieht EB und EC, legt durch ESC eine Ebene, so entsteht eine Nebenecke $BCES$. In dieser ist

Seite $ESC = 180° - ASC$
und da Seite $ASC > 90°$
so ist Seite $ESC < 90°$
ferner ist
$\angle BESC = \angle BASC < 90°$
und Seite $ASC + ESC = 180°$
da nun $ASC + BSC > 180°$

so ist Seite $ESC < BSC$

Es ist also in der Nebenecke $BCES$ der $\angle BESC < 90°$, die ihm anliegende Seite $ESC < 90°$, die dem Winkel gegenüberliegende Seite $BSC >$ als die anliegende ESC, mithin der erste Fall des Satzes, es ist also die anliegende Ecke bestimmt, und folglich ist es auch die gegebene Ecke.

ad 3. Es seien in der Ecke $ABCS$ die Seiten ASC und BSC und der der Seite ASC gegenüberliegende $\angle ABSC$ gegeben

$$\angle ABSC > 90^\circ$$
$$\text{Seite } BSC < 90^\circ$$
$$\text{Seite } BSC + ASC < 180^\circ$$

Verlängert man nun die Kante AS um ein Stück SE, construirt wie ad 2, so ist in der Nebenecke $BCES$

	$\angle EBSC + \angle ABSC = 180^\circ$	
da nun	$\angle ABSC > 90^\circ$	
so ist	$\angle EBSC$	$< 90^\circ$
Ferner ist	Seite $ASC + ESC = 180^\circ$	
da nun	Seite $ASC + BSC < 180^\circ$	
so ist	Seite ESC	$> BSC$

Es ist also in der Nebenecke $BCES$ der $\angle EBSC < 90^\circ$, die ihm anliegende Seite BSC ist $< 90^\circ$ und die ihm gegenüberliegende Seite $ESC >$ als die anliegende. Folglich ist nach No. 1 des Satzes nur eine Nebenecke möglich und folglich auch nur eine gegebene Ecke.

ad 4. In der Ecke $ABCS$ seien die Seiten BSC und ASC und der der Seite ASC gegenüberliegende $\angle ABSC$ gegeben.

$$\angle ABSC > 90^\circ$$
$$\text{Seite } BSC > 90^\circ$$
$$\text{Seite } ASC < BSC$$

Verlängert man die Kanten der beiden Seiten AS und BS, welche die ihnen gemeinschaftliche Kante CS einschliefsen um die beliebigen Stücke SE und SF, so entsteht eine Nebenecke $CEFS$.

In dieser ist	$\angle EFSC + ABSC = 180^\circ$	
da nun	$\angle ABSC > 90^\circ$	
so ist	$\angle EFSC$	$< 90^\circ$
ferner ist	Seite $ESC + ASC = 180^\circ$	
eben so	$FSC + BSC = 180^\circ$	
aber	Seite ASC	$< BSC$
folglich	Seite ESC	$> FSC$

In der Nebenecke $CEFS$ ist also der $\angle EFSC < 90^\circ$, die ihm anliegende Seite $FSC = 180^\circ - BSC$ ist, da Seite $BSC > 90^\circ$ ist, $< 90^\circ$ und die dem $\angle$ gegenüberliegende Seite $ESC >$ als die anliegende FSC, folglich ist nach No. 1 des Satzes nur eine Nebenecke und folglich auch nur eine gegebene Ecke möglich.

15. Sind in 2 dreiseitigen Ecken 2 Seiten und ein gegenüberliegender Winkel eben den Stücken des anderen einzeln gleich und findet eine der 4 Bedingungen des vorigen Satzes statt, so sind die Ecken entweder $\cong$ oder symmetrisch gleich.

Denn sind die gegebenen Bestimmungsstücke in beiden Ecken in gleicher Anordnung neben einander, so sind die Ecken nach dem vorigen Satz $\cong$, sind sie in entgegengesetzter Anordnung neben einander und man construirt von der einen Ecke die Scheitelecke (No. 8) so ist diese ihrer zugehörigen Ecke symmetrisch gleich, und da in ihr die Stücke nun in gleicher Anordnung mit denen der zweiten Ecke liegen, so ist sie dieser zweiten Ecke $\cong$, folglich diese zweite Ecke der ersten symmetrisch gleich.

16. Zwei dreiseitige Ecken sind entweder $\cong$ oder symmetrisch gleich, wenn eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel der einen eben den Stücken der anderen Ecke einzeln = sind.

Denn sind die gleichen Stücke in beiden Ecken in einerlei Anordnung, so erfolgt die Congruenz beider durch die bloſse Anschauung wenn man eine Ecke in die andere legt; ist deren Anordnung in beiden Ecken entgegengesetzt und man construirt von einer die Scheitelecke, so ist diese $\cong$ der zweiten Ecke, diese also symmetrisch gleich der ersten Ecke.

17. Zwei dreiseitige Ecken sind entweder $\cong$ oder symmetrisch gleich wenn eine Seite ein anliegender und ein gegenüberliegender Winkel in der einen Ecke denselben Stücken der anderen Ecke einzeln gleich sind und wenn die 4 Bedingungen des Satzes No. 14 statt finden, jedoch so, dafs die dortigen Bedingungen für die Seiten und den Winkel hier für die Winkel und die Seite gelten.

Nennt man die gegebene Seite a, den dieser gegenüberliegenden Winkel α, den ihr anliegenden β, und man construirt die Supplementarecken, so sind die gegebenen Ecken $\cong$ wenn die Supplementarecken es sind. In den Supplementarecken wird nun der Winkel $= 180^\circ - a$; die gegenüberliegende Seite $= 180^\circ - \alpha$ und die anliegende Seite $= 180^\circ - \beta$.

Ist nun mit No. 14, 1:

$$a < 90^\circ$$
$$\beta < 90^\circ$$
$$\alpha > \beta$$

so ist in den Supplementarecken
der $\angle(180^\circ - a) > 90^\circ$
die anliegende Seite $(180^\circ - \beta) > 90^\circ$
die gegenüberliegende Seite

$$180^\circ - \alpha < 180^\circ - \beta$$

Dies sind die Bedingungen No. 14, 4; folglich sind die Supplementarecken und mit diesen die gegebenen Ecken $\cong$.

Ist ferner mit No. 14, 2;

$$a < 90^\circ$$
$$\beta > 90^\circ$$
$$\alpha + \beta > 180^\circ$$

so ist in den Supplementarecken
der $\angle(180^\circ - a) > 90^\circ$
die anliegende Seite $180^\circ - \beta < 90^\circ$
und $180^\circ - \alpha + 180^\circ - \beta < 180^\circ$

Dies sind die Bedingungen No. 14, 3 folglich sind die Ecken ≅.

Ist ferner mit No. 14, 3

$$\alpha > 90^\circ$$
$$\beta < 90^\circ$$
$$\alpha + \beta < 180^\circ$$

so ist in den Supplementarecken

der $\angle(180^\circ - \alpha) < 90^\circ$
die anliegende Seite $(180^\circ - \beta) > 90^\circ$
und $180^\circ - \alpha + 180^\circ - \beta > 180^\circ$

Dies sind die Bedingungen No. 14, 2 folglich sind die Ecken ≅.

Ist endlich mit No. 14, 4

$$\alpha > 90^\circ$$
$$\beta > 90^\circ$$
$$\alpha < \beta$$

so ist in den Supplementarecken

der $\angle(180^\circ - \alpha) < 90^\circ$
die anliegende Seite $(180^\circ - \beta) < 90^\circ$
und $(180^\circ - \alpha) > (180^\circ - \beta)$

Dies sind die Bedingungen No. 14, 1 folglich sind die Ecken ≅.

Eine entgegengesetzte Anordnung der gleichen Stücke beider Ecken gibt deren symmetrische Gleichheit (s. No. 8).

18. Zwei dreiseitige Ecken sind ≅ oder symmetrisch gleich wenn die drei Winkel der einen den drei Winkeln der anderen einzeln gleich sind.

Es beweifst sich dieser Satz wenn man die Supplementsecken nach No. 5 bildet, indem er dann auf den No. 13 zurückgeführt wird.

19. Constructionen.

Wenn die 3 Seiten einer dreiseitigen Ecke gegeben sind so construirt man deren Winkel folgender Art.

Fig. 596.

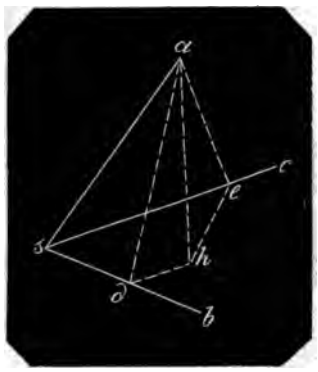
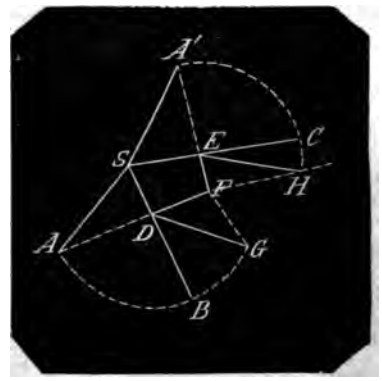


Fig. 597.



Man zeichne die Seiten $ASB = asb$ und $BSC = bsc$, deren eingeschlossenen $\angle ABSC$ man construiren will, neben einander, hieran die 3te Seite $CSA' = csa$, alle drei Seiten in derselben Ebene, in welcher man ebenfalls den $\angle absc$ darstellen will.

Nimmt man nun $SA' = SA$, fällt die Lothe $A'E$ auf SC und AD auf SB; verlängert dieselben bis zu ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt F, errichtet in F auf AF das Loth FG, schneidet dasselbe aus D mit dem Abstand AD als Halbmesser in G, zieht DG, so ist $\angle FDG$ der $\angle absc$. Errichtet man ferner in F auf $A'F$ das Loth FH, schneidet dasselbe aus E mit EA' in H, zieht EH, so ist $\angle FEH = \angle acsb$.

Denn nimmt man $as = AS$, fällt die Lothe ad und ae auf die Kanten bs und cs, ferner das Loth ah auf die Seite bsc, verbindet d und e mit h so ist hd normal auf bs und he normal auf cs (s. Ebene No. 7).

folglich ist $\angle adh = \angle abse$
und $\angle aeh = \angle acsb$

Nun ist $as = AS = A'S$
$\angle asb = \angle ASB$
$\angle asc = \angle A'SC$

daher $\triangle asd \cong \triangle ASD$ (1)
und $\triangle ase \cong \triangle A'SE$ (2)

daher $sd = SD$
$se = SE$
ferner $\angle sdh = \angle SDF = R$
$\angle seh = \angle SEF = R$
endlich $\angle dse = \angle DSE$

folglich da 2 Seiten und 3 Winkel einander gleich sind:

Viereck $dseh \cong$ Viereck $DSEF$
hieraus $dh = DF$
und $eh = EF$

Aus 1 und 2 hat man noch

$$ad = AD = DG$$
und $$ae = A'E = EH$$
$$\angle ahd = \angle ahe = \angle DFG = \angle EFH = R$$

also $\triangle adh \cong \triangle GDF$
und $\triangle aeh \cong \triangle HEF$

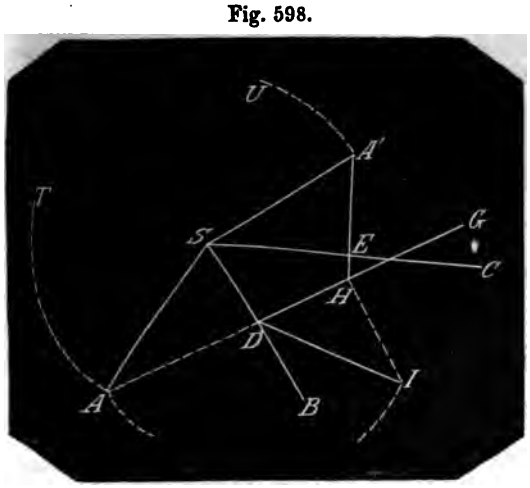
woraus $\angle adh = \angle GDF$
und $\angle aeh = \angle HEF$

Den dritten $\angle basc$ erhält man bei derselben Construction, wenn man die Seiten BSC und $A'SC$ ihrer Lagen nach mit einander vertauscht.

20. Wenn die 3 Winkel einer dreiseitigen Ecke gegeben sind und man soll in einer Ebene die 3 Seiten construiren, so nimmt man die Supplemente der Winkel als die Seiten der Supplementarecke (No. 5), construirt wie No. 19, so erhält man die Supplemente der verlangten Seiten.

21. Sind von einer dreiseitigen Ecke 2 Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben, so construirt man die dritte Seite und die beiden fehlenden Winkel nach Fig. 598 wie folgt.

Fig. 598.



Man zeichne $\angle ASB =$ der Seite asb (Fig 596), $BSC =$ der Seite bsc, nimmt $AS = as$, beschreibt aus S mit AS einen Kreis $ATUA'$, fällt das Loth AD auf BS mit Verlängerung DG, trägt an DG den $\angle GDJ =$ dem von beiden Seiten eingeschlossenen $\angle asbc = \angle adh$, nimmt $DJ = DA$, fällt aus dem Punkt J ein Loth JH auf DG, fällt von H auf CS ein Loth HE, verlängert dies bis A' in die Peripherie des Kreises, zieht $A'S$, so ist $A'SC$ die verlangte Seite asc.

Denn es ist

$$as = AS$$
$$sd = SD$$
$$ad = AD = JD$$
$$\angle abh = \angle JDH$$

also $dh = DH$
hierzu $\angle esd = \angle ESD$
$\angle sdh = \angle SDH = R$
$\angle seh = \angle SEH = R$
und $sd = SD$

daher Viereck $esdh \cong$ Viereck $ESDH$
folglich $se = SE$
da nun $sa = SA'$
$\angle aes = \angle A'ES = R$
so ist Seite $asc = A'SC$

Da nun alle 3 Seiten in der Ebene angegeben sind, so kann man nach No. 19 die beiden noch fehlenden Winkel construiren.

22. Sind von einer dreiseitigen Ecke eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben, so erhält man die fehlenden Stücke durch Construction, wenn man von den gegebenen Stücken die Supplemente nimmt; man erhält hier zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel der Supplementarecke und nach No. 21 construirt man nun die Supplemente der verlangten Stücke von der ersten Ecke.

23. Sind von einer dreiseitigen Ecke zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel gegeben, so construirt man die fehlenden Stücke nach Fig. 599.

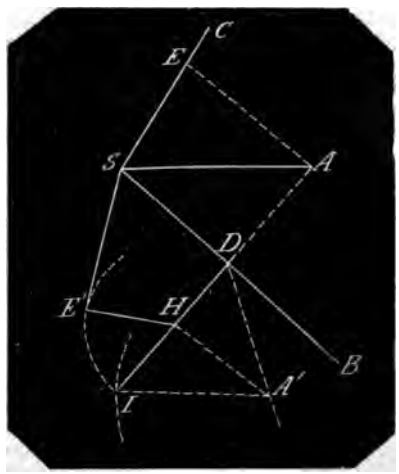
Man trägt die beiden Seiten $ASB = asb$ (Fig. 596) und $ASC = asc$ an den gemeinschaftlichen Schenkel AS neben einander, nimmt $AS = as$, fällt aus A auf die Schenkel BS und CS die Lothe AD und AE, verlängert dasjenige Loth AD, welches auf der Kante BS des anliegenden $\angle absc$ fällt, trägt daran $\angle JDA' = \angle absc = \angle adh$, macht $DA' = DA$ und fällt auf DJ das Loth $A'H$, beschreibt dann aus A' mit dem Halbmesser AE einen Bogen, der die verlängerte DJ in J schneidet, zeichnet aus H einen Kreis mit dem Halbmesser HJ, zieht aus S an dieser die Tangente SE' so ist $\angle E'SD$ die verlangte 3te Seite.

Denn zieht man $E'H$ so hat man

$$\triangle ASD \cong \triangle asd$$
also $$SD = sd$$
$$AD = ad = A'D$$

	$\angle A'DH = \angle adh$
und	$\angle A'HD = \angle ahd = R$
daher	$\triangle A'HD \cong \triangle ahd$
hieraus	$A'H = ah$
	$DH = dh$
da nun	$A'J = AE = ae$
so ist	$HJ = he = HE'$
hierzu	$\angle SE'H = \angle seh = R$
und	$\angle SDH = \angle sdh = R$
hieraus	Viereck $SDHE' \cong$ Viereck $sdhe$
hieraus	$\angle DSE' =$ Seite bsc.

Fig. 599



Da nun sämmtliche 3 Seiten construirt sind, so lassen sich die noch fehlenden Winkel nach No. 19 construiren.

24. Wenn in der Aufgabe 23 die Linie $DH < HJ$, so schneidet der Kreis aus H die Linie HD und es existiren 2 Ecken von gleichen gegebenen Stücken, weil innerhalb HD noch eine zweite Tangente aus S gezeichnet werden kann. Dies stimmt auch mit der ersten Bedingung No. 14, unter welcher nur eine und keine zweite Ecke möglich ist.

Denn wenn	$DH > HE'$
oder	$dh > eh$
so ist	$\angle adh < \angle aeh$
folglich	Seite $asc <$ Seite asb

Nun ist $\angle A'DJ = \angle adh$ kleiner als 90° gezeichnet, desgleichen die ihm anliegende Seite $ASB = asb < 90°$ und nach No. 14, 1 existirt daher nur eine Ecke wenn die gegenüber liegende Seite $asc >$ als die anliegende asb ist, wenn also $he > hd$ oder $HE' > HD$ ist.

Wenn man die Seiten und Winkel nach Vorschrift der 4 Bedingungen No. 14 nimmt oder zum Theil nicht nimmt erhält man die Richtigkeit auch der übrigen Sätze No. 14 mit Hülfe der Construction No. 23 anschaulich.

25. Sind von einer dreiseitigen Ecke 2 Winkel gegeben und eine Seite, welche einem dieser Winkel gegenüber liegt, so findet man die übrigen Stücke durch Construction, wenn man von den gegebenen Stücken die Supplemente nimmt; man erhält mit diesen 2 Seiten und einen der einen Seite gegenüberliegenden Winkel Construirt man daher nach No. 23, so erhält man die Supplemente der verlangten Stücke von der gegebenen Ecke.

26. Die Bestimmungen über vier- und mehrseitige Ecken erhält man dadurch, dafs man sie in dreiseitige Ecken zerlegt.

Ecken (in einem Krystall) sind die Punkte in welchen mehrere Kanten, oder was dasselbe ist, mehrere Flächen zusammen treffen. Die E werden nach der Anzahl der sie bildenden Flächen oder Kanten benannt und heifsen 3flächig, 4flächig u. s. w. oder 3kantig, 4kantig u. s. w. Je nach Beschaffenheit der Kanten werden die von diesen gebildeten Ecken regulär, symmetrisch und irregulär oder unsymmetrisch genannt.

Reguläre Ecken sind solche, die von lauter gleichen Kanten gebildet werden; d. h. wenn die in der E. zusammentreffenden Flächen gleiche Neigungswinkel unter einander haben.

Symmetrische Ecken sind solche, in welchen die Kanten zweierlei Gröfse haben, die aber der Reihe nach mit einander regelmäfsig abwechseln.

Irreguläre oder unsymmetrische Ecken sind solche, die weder regulär noch symmetrisch sind, die also entweder von lauter ungleichen Kanten gebildet werden oder wenn die gleichen Kanten, welche darunter sind, mit den anderen nicht regelmäfsig abwechseln.

Zwei Ecken sind einander **gleich**, wenn deren gleichliegende Kanten in beiden einander gleich sind, sonst **ungleich**

Die Ecken in einem Krystall unterscheidet man je nach deren Lage: die Ecken, welche in den Endpunkten der Normalaxe liegen heifsen **Scheitelecken** oder **Endecken**, die übrigen **Seitenecken**.

Eigentlicher Bruch s. v. w. ächter Bruch.

Eilferprobe ist eine Probe oder Prü-

fang für richtige Addition. Das in dem Art. Addition No. 4 angegebene Verfahren beruht auf einer Eigenschaft des dekadischen Systems in Beziehung auf die Zahl 11. Es sei die Zahl $\ldots fedcba$ eine dekadisch geschriebene Zahl so ist =

$$a + 10b + 100c + 1000d + 10000e + 100000f + \ldots.$$

und diese ist zu schreiben

$$a + (11-1)b + (11\cdot 9+1)c + (11\cdot 91-1)d + (11\cdot 909+1)e + (11\cdot 9091-1)f + \ldots$$
$$= a - b + c - d + e - f + \ldots + 11(b + 9c + 91d + 909e + 9091f + \ldots)$$

die in der Klammer stehende Gröfse ist noch zu zerlegen in

$$b - c + d - e + f + \ldots. + 10c + 90d + 910e + 9090f + \ldots.$$

und die Zahl $\ldots fedcba =$

$$a - b + c - d + e - f + \ldots + 11(b - c + d - e + f + \ldots) + 11(10c + 90d + 910e + 9090f + \ldots)$$

Betrachtet man nun diese Zahl als die Summe mehrerer Summanden, so findet in jedem einzelnen Summand dasselbe Gesetz dieser Zerlegung statt. Es kommen also für die Probe nur die Differenzen der Ziffern in Betracht, und wenn die Addition richtig ausgeführt ist, so müssen die Differenzen zwischen den Summen der geraden und ungeraden Stellenziffern in den Summanden mit den in der Summe übereinstimmen, wenn beide Differenzen kleiner als 11 sind. Ist aber die eine oder sind beide Differenzen gröfser als 11, so gehören in die erste Klammergröfse $11(b-c+d-e+f-\ldots)$ noch eine oder mehrere Einheiten, und die Gleichheit beider Differenzen findet erst statt, wenn von denselben die Zahl 11 so oft sie darin enthalten ist, abgezogen wird. Es ist aber aus der Uebereinstimmung der Differenzen bei dieser übrigens weitläufigen Probe ein sicherer Rückschlufs auf die Richtigkeit der Rechnung nicht zu machen, denn es können Rechnungsfehler für die Uebereinstimmung der Differenzen sich mit einander verbinden.

Einaxige Form der Krystalle s. u. Axen der Krystalle am Schlufs.

Einer sind in jedem Zahlensystem die ersten mit einzelnen Ziffern zu schreibenden Zahlen von Eins bis zur Grundzahl des Systems, welche die Einheit der zweiten Zahlenklasse ausmacht und mit der Ziffer 1 und dem Nullzeichen dahinter geschrieben wird. In unserm dekadischen System sind 1, 2, .. bis 9 die Einer.

Einfacher Bruch s. u. Bruch No. 2.

Einfache Form hat ein Krystall, wenn dieser von lauter gleichnamigen Flächen gebildet wird, wie z. B. das Hexaeder Band I, Fig. 135, pag. 256, dessen Flächen aus 6 Quadraten bestehen. Ein Krystall, dessen Flächen unter sich ungleichnamig sind hat eine zusammengesetzte Form, ist eine Combination, wie die Combination des Hexaeders und Octaeders, Band II, Fig. 301, pag. 36, die C. der quadratischen Säule und des Octaeders Fig. 303.

Es ist übrigens zu merken, dafs wenn auch zu einer einfachen Form lauter gleichnamige Flächen, d. h. lauter congruente Begrenzungsebenen gehören, dennoch Ecken und Kanten ungleich sein können wie z. B. bei dem Didodekaeder Fig. 558, pag. 254, und dafs die einfachen Formen der Krystallographie nur selten mit den regulären Körpern der Geometrie übereinstimmen.

Einfallsebene (Dioptrik) ist die bei der Brechung der Lichtstrahlen (s. d. und Ablenkung des Lichtstrahls) durch den einfallenden Lichtstrahl und das Einfallsloth gelegte Ebene.

Einfallsloth, Einfallspunkt s. u. Brechung der Lichtstrahlen, No. 2, A.

Einfallssinus ist der Sinus des Einfallswinkels bei Brechung der Lichtstrahlen.

Einfallswinkel s. u. Ablenkung des Lichtstrahls No. 1.

Eingebildete Gröfsen, imaginäre, unmögliche Gröfsen sind Gröfsen, die nur in der Einbildung existiren, die nur der mathematischen Form nach vorhanden sind, indem sie mit wirklichen Gröfsen einerlei Form annehmen können. Z. B. $\sqrt{-1}$, welche nicht möglich ist, weil keine Zahl mit sich selbst multiplicirt $= -1$ werden kann, die aber mit $\sqrt{+1}$, welche eine wirkliche Gröfse ist, einerlei Form hat.

Eingehender Winkel oder **einspringender Winkel** (Kriegsw.) s. u. Ausspringender Winkel.

Eingesprengt heifst ein Fossil, wenn

es von einer fremdartigen Masse umschlossen ist. Hat diese Masse mehr als ½ Zoll Stärke so wird das Fossil derb genannt.

Einheit ist der Begriff, welcher ausdrückt, dafs irgend Etwas nur einmal gedacht werden soll. Sind mehrere derselben Einheiten in einer Gröfse vereinigt, so ist diese Gröfse eine Vielheit und besteht aus so vielen Einheiten, als deren in ihr vorhanden sind. In einer Gröfse ist demnach jeder gleichartige Theil derselben, welcher in ihr mehrmals vorhanden ist eine Einheit; diese Einheiten sind also gleich grofs und gleichartig, so dafs man eine für die andere setzen kann.

Ein Centner ist eine E; denkt man sich denselben aus 100 Zollpfund bestehend, so ist er eine Vielheit und begreift in sich 100 Einheiten, von denen jede das Zollpfund ist. Solche Einheit und jede die zu einem bestimmten Gegenstande gehört, ist eine concrete E., die abstracte E. ist die Zahl Eins. Denkt man sich diese in n gleiche Theile zerlegt, so ist jeder dieser n Theile $= \frac{1}{n}$ wieder eine E. und zwar eine Bruch-einheit.

Einmaleins, eine Tabelle, auch pythagorisches Rechentäfelchen genannt:

1 mal 1 ist 1	3 mal 1 ist 3
1 mal 2 ist 2	3 mal 2 ist 6
. . . . .	. . . . .
1 mal 10 ist 10	3 mal 10 ist 30
	u. s. w. bis
2 mal 1 ist 2	9 mal 1 ist 9
2 mal 2 ist 4	9 mal 2 ist 18
. . . . .	. . . . .
2 mal 10 ist 20	9 mal 10 ist 90

Die Tafel von 11 × 1 ist 11, bis 11 × 11 ist 121 u. s. w. bis 19 × 19 ist 361 wird von Rechnenlehrern auch das grofse Einmaleins genannt (s. Eins in eins-, Eins und eins-, Eins von eins-Tabelle).

Eins ist die erste ganze Zahl und die Einheit der ganzen Zahlen. Vergl. Einheit.

Einschalten, interpoliren heifst zwischen 2 Glieder einer Reihe eine oder mehrere Zahlen setzen, so dafs diese eingeschalteten Zahlen mit den beiden Gliedern nach demselben Gesetz fortschreiten wie die Glieder der gegebenen Reihe; die Stellenzahlen der eingeschalteten Glieder werden gebrochene Zahlen.

Hat das gegebene erste Glied die Stellenzahl m, das zweite also die Stellenzahl $m+1$, so hat ein zwischen beide eingeschaltetes Glied die Stellenzahl $m+\frac{1}{2}$. Zwei eingeschaltete Zahlen haben die Stellenzahlen $m+\frac{1}{3}$, $m+\frac{2}{3}$; drei eingeschaltete Glieder haben die Stellenzahlen $m+\frac{1}{4}$, $m+\frac{2}{4}$, $m+\frac{3}{4}$; das $p$te von q eingeschalteten Gliedern hat die Stellenzahl $m+\frac{p}{q+1}$.

2. Sind 4 und 16 zwei aufeinander folgende Zahlen der arithmetischen Reihe

Stellenzahl	1	2	3	4	5	
Reihe	4	16	28	40	52	....

Differenz = 12

so ist ein eingeschaltetes Glied = 10, dessen Stellenzahl $1\frac{1}{2}$; Differenz $= \frac{12}{2} = 6$

zwei eingeschaltete Glieder sind 8, 12; deren Stellenzahlen $1\frac{1}{3}$ und $1\frac{2}{3}$; Differenz $= \frac{1}{3} \times 12 = 4$

drei eingeschaltete Glieder sind 7, 10, 13; deren Stellenzahlen $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{3}{4}$; Differenz $= \frac{1}{4} \times 12 = 3$

n eingeschaltete Glieder sind $4+\frac{12}{n+1}$; $4+2\cdot\frac{12}{n+1}$; $4+3\cdot\frac{12}{n+1}$ .... $4+n\cdot\frac{12}{n+1}$; deren Stellenzahlen sind $1+\frac{1}{n+1}$; $1+\frac{2}{n+1}$; $1+\frac{3}{n+1}$ .... $1+\frac{n}{n+1}$; Differenz $= \frac{12}{n+1}$.

3. Sind die Zahlen 4 und 16 aufeinanderfolgende Glieder der geometrischen Reihe

Stellenzahl	1	2	3	4	5	
Reihe	1	4	16	64	256	....

Exponent = 4

so ist ein eingeschaltetes Glied = 8, Stellenzahl $= 2\frac{1}{2}$, Exponent $= \sqrt[3]{4} = 2$

zwei eingeschaltete Glieder sind $4\sqrt[3]{4}$; $4\sqrt[3]{4^2}$; deren Stellenzahlen $2\frac{1}{3}$, $2\frac{2}{3}$; Exponent $= \sqrt[3]{4}$

drei eingeschaltete Glieder sind $4\sqrt[4]{4}$; $4\sqrt[4]{4^2}$; $4\sqrt[4]{4^3}$; deren Stellenzahlen $2\frac{1}{4}$, $2\frac{2}{4}$, $2\frac{3}{4}$; Exponent $\sqrt[4]{4}$

n eingeschaltete Glieder sind $4\sqrt[n+1]{4}$; $4\sqrt[n+1]{4^2}$ .... $4\sqrt[n+1]{4^n}$; deren Stellenzahlen $2+\frac{1}{n+1}$, $2+\frac{2}{n+1}$, ... $2+\frac{n}{n+1}$; deren Exponent $= \sqrt[n+1]{4}$.

4. Sind 4 und 16 neben einander ste-

hende Glieder der arithmetischen Reihe zweiter Ordnung

Stellenzahlen	1	2	3	4	5
Reihe	1	4	16	37	67....
1. Differenzenreihe	3	12	21	30	....
2. Differenzenreihe	9	9	9	.....	

so findet man ein eingeschaltetes Glied y von der Beschaffenheit, dafs eine Reihe folgender Form entsteht

Stellenzahlen	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3 ....
Reihe	1	$(1+s)$	4	y	16 ....
1. Differenzenreihe	s	$s+v$	$s+2v$	$s+3v$	....
2. Differenzenreihe	v	v	v	v	....

Man hat demnach

I. $2s + v = 4 - 1 = 3$

II. $2s + 5v = 16 - 4 = 12$

hieraus $v = 2\frac{1}{4}$

$s = \frac{3}{4}$

und $y = 8\frac{1}{8}$

Es entsteht die Reihe

Stellenzahlen	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3 ....
Reihe	1	$1\frac{7}{8}$	4	$8\frac{1}{8}$	16....
1. Differenzenreihe	$\frac{7}{8}$	$2\frac{1}{8}$	$4\frac{1}{8}$	$7\frac{1}{8}$	....
2. Differenzenreihe	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{4}$	.....	

5. Sind zwischen 4 und 16 zwei Zahlen einzuschalten, so erhält man die Gleichungen

$$3s + 3v = 4 - 1 = 3$$
$$3s + 12v = 16 - 4 = 12$$

woraus $v = 1$

$s = 0$

die gesuchten Zahlen sind $4 + s + 3v = 7$

und $7 + s + 4v = 11$

und die Reihe ist:

Stellenzahlen	1	$1\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{3}$	2	$2\frac{1}{3}$	$2\frac{2}{3}$	3 ....
Reihe	1	1	2	4	7	11	16 ...
1. Differenzenreihe	0	1	2	3	4	5	.....
2. Differenzenreihe	1	1	1	1	1	.....	

6. Sind zwischen 4 und 16 drei Glieder einzuschalten, so erhält man die beiden Gleichungen:

$$4s + 6v = 3$$
$$4s + 22v = 12$$

hieraus $v = \frac{9}{16}$

$s = -\frac{3}{32}$

und die Reihe ist

Stellenzahlen	1	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$	2	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	3 ....
Reihe	1	$\frac{93}{32}$	$1\frac{1}{8}$	$2\frac{13}{32}$	4	$6\frac{3}{32}$	$8\frac{1}{8}$	$12\frac{3}{32}$	16....
1. Differenzenreihe	$\frac{93}{32}$	$\frac{11}{32}$	$1\frac{1}{32}$	$1\frac{13}{32}$	$2\frac{3}{32}$	$2\frac{13}{32}$	$3\frac{9}{32}$	$3\frac{13}{32}$	.....
2. Differenzenreihe		$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{16}$	.....

7. Sind zwischen 4 und 16 n Glieder einzuschalten, so erhält man die beiden Gleichungen:

$$(n+1)s + \tfrac{1}{2}n(n+1)v = 3$$
$$(n+1)s + \tfrac{1}{2}(n+1)(3n+2) = 12$$

woraus $v = \left(\frac{3}{n+1}\right)^2$

$$s = \tfrac{3}{4}\frac{2-n}{(n+1)^2}$$

Das erste der zwischen 4 und 16 einzuschaltenden Glieder ist

$$= 4 + s + (n+1)v$$

Das $m$te derselben

$$= 4 + ms + \tfrac{1}{2}m[2(n+1) + (m-1)]v$$

8. Auf dieselbe Weise geschieht die Einschaltung von Gliedern bei arithmetischen Reihen noch höherer Ordnungen.

9. In einer arithmetischen Reihe von n Gliedern der allgemeinen Form (s. Bd. I, pag. 119, No. 3).

$$a \cdot a + d \cdot a + 2d \cdot a + 3d \ldots\ldots$$

hat man die Formel für das $n$te Glied pag. 120, Formel 1).

$$u = a + (n-1)d \qquad (1)$$

Für die Summe der ersten n Glieder (pag. 120, Formel 5).

$$s = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \qquad (2)$$

Die Entstehungsweise dieser beiden Formeln zeigt, dafs die erste auch für gebrochene Stellenzahlen gilt, die zweite nicht.

In folgender Reihe z. B.

Stellenzahl	$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4\frac{1}{2} \cdot 5$ ....
Reihe	$1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 11\frac{1}{2} \cdot 13$ ....

erhält man für $n = 4\frac{1}{2}$ aus der ersten Formel:

$$u = 1 + (4\tfrac{1}{2} - 1)3 = 11\tfrac{1}{2}$$

Die Summe nach der zweiten Formel

$$s = \frac{4\frac{1}{2}}{2}[2 \cdot 1 + (4\tfrac{1}{2} - 1)3] = 28\tfrac{1}{8}$$

Es ist aber $1+4+7+10+11\frac{1}{2}=33\frac{1}{2}$.

10. Wenn zwischen dem $m$ten und dem $(m+1)$ten Gliede einer Reihe r Glieder eingeschaltet sind und man will die Summe s bei $n=m+\frac{k}{r}$ finden, so heifst dies: man will die Summe der ersten m ursprünglichen Glieder der Reihe + den ersten k der r eingeschalteten Glieder bestimmen, und man mufs daher die Formel für s zweimal anwenden

$$s'=\frac{m}{2}[2a+(m-1)d]$$

gibt die Summe der ersten m Glieder der ganzen Stellenzahlen.

Um die Summe s'' der ersten k eingeschalteten Glieder zu erhalten hat man das erste Glied derselben

$$a'=a+(m-1)d+\frac{1}{r+1}d=a+\left(m-\frac{r}{r+1}\right)d$$

die Summe derselben

$$s^n=\frac{k}{2}\left[2a'+\frac{k-1}{r+1}d\right]$$
$$=k\left[a+\left(m+\frac{k-2r-1}{2(r+1)}\right)d\right]$$

Es ist mithin

$$s=s'+s''$$
$$=(m+k)a+\left[\frac{m(m-1)}{2}+k\left(m+\frac{k-2r-1}{2(r+1)}\right)\right]d$$

Sind in der obigen Reihe zwischen dem 4ten und 5ten Gliede 5 Glieder eingeschaltet, so hat man dieselbe

$$1\cdot 4\cdot 7\cdot 10_{10\frac{1}{2}}\cdot 11\cdot 11\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 12\frac{1}{2}\ 13\ldots.$$

Die Summe der ersten 4 Glieder ist

$$s'=\tfrac{4}{2}[2\cdot 1+(4-1)3]=22$$

Die Summe der ersten 3 eingeschalteten Glieder ist

$$s''=3\cdot\left[1+\left(4+\frac{3-10-1}{2\cdot(5+1)}\right)3\right]=33$$

Die Summe beider

$$s=(4+3)1+\left[\frac{4\cdot 3}{2}+3\left(4+\frac{3-10-1}{2\cdot 6}\right)\right]3=55.$$

11. Eine Anwendung des Vortrags No. 9 findet man in dem Correspondenzblatt des naturforschenden Vereins zu Riga, XI, No. 6 in einem Aufsatz von Dr. Carl Hechel über gebrochene Stellenzahlen (Indices), welche bei naturwissenschaftlichen Fragen oft eingeführt werden müssen und über die Fälle, in welchen die Formeln für ganze Stellenzahlen auf die gebrochenen anzuwenden sind oder nicht.

Die Reihe No. 9 ist hier als Beispiel genommen, die Stellenzahlen bedeuten Secunden und die Glieder der Reihe sind Wege. Die Aufgabe lautet:

Wenn ein Körper in der ersten Secunde seiner Bewegung einen Fufs, in jeder folgenden aber 3 Fufs zurücklegt, welchen Raum durchläuft er in $4\frac{1}{2}$ Secunden? — Es entsteht nach Formel 1, No. 8 der Weg $=11\frac{1}{2}$ Fufs.

Dafs die Formel 2, No. 8 für s nicht stimmt, dafs $28\frac{1}{2}$ Fufs anstatt $33\frac{1}{2}$ Fufs resultiren schadet hier nichts, denn da jedes Glied der Reihe schon eine Summe von Wegen ist, so kann nach der Summe der Glieder gar nicht gefragt werden.

Ein zweites Beispiel, in welchem die Summenformel stimmt, die für's $n$te Glied aber nicht, gibt bei derselben Reihe der Aufsatz in folgender Aufgabe:

Wenn der Körper in der ersten Secunde seiner Bewegung einen Fufs, in jeder folgenden Secunde aber 3 Fufs mehr als in der nächstvorhergehenden zurücklegt, welchen Raum durchläuft er in der $4\frac{1}{2}$ten (oder $\frac{1}{2}$ten) Secunde? —

Hier ist klar, dafs die erste Formel, welche $11\frac{1}{2}$ Fufs liefert, nicht gelten kann, weil der Körper wegen seiner gleichförmig beschleunigten Bewegung, wenn er in der ersten Hälfte der 5ten Secunde $11\frac{1}{2}$ Fufs durchliefe, in der ganzen 5ten Secunde, statt 13 Fufs, mehr als 23 Fufs durchlaufen würde; es mufs die Summenformel angewendet werden; diese gibt

für $n=4\frac{1}{2}$ die Summe $s=28\frac{1}{2}$ Fufs
für $n=4$ die Summe $s'=22$ Fufs

woraus der Weg in
der $4\frac{1}{2}$ten Sec. $=6\frac{1}{2}$ Fufs

und die Richtigkeit des Verfahrens erweist sich, wenn man $28\frac{1}{2}$ Fufs von der Summe 35 für $n=5$ abzieht, wo dann für die zweite Hälfte der 5ten Secunde der Weg $6\frac{1}{2}$ Fufs sich ergibt.

Die vorstehende Aufgabe und alle ähnlichen werden meiner Ansicht nach am zuverlässigsten durch diejenigen Formeln gelöst, welche in der Mechanik aufgestellt sind:

Die erste Aufgabe gehört in die gleichförmige Bewegung. Es ist nach Band I, pag. 351, rechts, Formel 1:

$$s=c\cdot t$$

Nun ist hier der Fall betrachtet, wo der Körper in der ersten Secunde den Weg 1 Fufs (c') zurücklegt; nach Been-

digung dieser ersten Secunde erhält er einen Impuls, der ihn um 2 Fuſs per Secunde forttreibt, so daſs er von jetzt ab 3 Fuſs (c) per Secunde zurücklegt; mithin hat er nach t Secunden zurückgelegt

$$c' + (t-1)\,c \text{ Fuſs}$$

oder $c' \cdot t + (c - c')(t-1)$ Fuſs;

also $c' = 1$, $c = 3$, $t = 4\frac{1}{2}$ gesetzt, überhaupt $11\frac{1}{2}$ Fuſs.

Die zweite Aufgabe gehört in die gleichförmig beschleunigte Bewegung, welche nicht mit 0 sondern mit einer Anfangsgeschwindigkeit beginnt.

Band 1, pag. 355 ist Formel 4

$$S = cT + GT^2$$

wo c die Anfangsgeschwindigkeit, G die Beschleunigung, T die Zeit in Secunden, S den Weg bedeutet, der in T Secunden zurückgelegt ist. Nun ist in der Reihe der Weg in der 1ten Secunde = 1, der Weg in der 2ten Secunde = 4, in den beiden ersten Secunden = 5 folglich hat man

$$1 = c \cdot 1 + G \cdot 1^2 = c + G$$
$$5 = c \cdot 2 + G \cdot 2^2 = 2c + 4G$$

woraus $c = -\frac{1}{2}$

und $G = +\frac{1}{2}$

d. h. der Körper will mit $\frac{1}{2}$ Fuſs in der entgegengesetzen Richtung gleichförmig sich bewegen, wird aber mit der Beschleunigung $+\frac{1}{2}$ vorwärts getrieben.

Nun erhält man

für $t = 4$; $S = -\frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} 4^2 = 22$ Fuſs

für $t = 4\frac{1}{2}$; $S = -\frac{1}{2} \cdot 4\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (4\frac{1}{2})^2 = 28\frac{1}{2}$ Fuſs

folglich der Weg in der $4\frac{1}{2}$ten Sec. $= 6\frac{1}{2}$ Fuſs

12. Die geometrische Reihe von allgemeiner Form ist

Stellenzahl	1	2	3	4	.....	n
Reihe	a	ae	ae^2	ae^3	.....	ae^{n-1}

Sollen zwischen dem $m+1$ten und dem $m+2$ten Gliede $(r-1)$ Glieder eingeschaltet werden, so erhält man

Stellenzahl $m+1,\quad m+1+\frac{1}{r},\quad m+1+\frac{2}{r},\quad m+1+\frac{3}{r} \ldots m+1+\frac{r-1}{r},\quad m+2$

Reihe $ae^m,\quad ae^m \cdot \sqrt[r]{e},\quad ae^m \cdot \sqrt[r]{e^2},\quad ae^m \cdot \sqrt[r]{e^3},\quad \ldots ae^m \cdot \sqrt[r]{e^{r-1}} \cdot ae^{m-1}$

Das $k$te der $r-1$ Glieder, also das Glied für die Stellenzahl

$$m + 1 + \frac{k}{r} \text{ ist } = ae^m \cdot \sqrt[r]{e^k} = ae^{m+\frac{k}{r}}$$

Die Formel für's $n$te Glied gilt also auch für gebrochene Stellenzahlen. Anders ist es mit der Summenformel. Multiplicirt man die Reihe mit e und setzt beide Reihen untereinander

$$a + ae + ae^2 + ae^3 + \ldots + ae^{n-1} = S$$
$$ae + ae^2 + ae^3 + ae^4 + \ldots + ae^n = eS$$

so erhält man $ae^n - a = eS - S = (e-1)\,S$

woraus $S = a\dfrac{e^n - 1}{e-1}$

Die Summe bis zum $m+1$ten Gliede ist

$$S' = a\frac{e^{m+1} - 1}{e-1}$$

Die Summe der ersten k der $(r-1)$ eingeschalteten Glieder ist

$$S'' = ae^m \cdot \sqrt[r]{e}\,\frac{\sqrt[r]{e^k} - 1}{\sqrt[r]{e} - 1}$$

beide Summen

$$S = a\frac{e^{m+1} - 1}{e-1} + ae^m \sqrt[r]{e}\,\frac{\sqrt[r]{e^k} - 1}{\sqrt[r]{e} - 1}$$

Die Formel auf die gebrochene Stellenzahl angewendet gibt

$$S = a\frac{e^{m+1+\frac{k}{r}} - 1}{e-1}$$

welche von der ersten richtigen verschieden und auf gebrochene Stellenzahlen nicht anzuwenden ist.

Einschattige, s. v. w. Gegenschattige, Antiscii (s. d.), Heteroscii.

Eins-in-einstabelle, die erste Hülfstabelle für das Dividiren:

1	in	1	geht	1	mal	2	in	2	geht	1	mal
1	„	2	„	2	„	2	„	4	„	2	„
1	„	3	„	3	„	2	„	6	„	3	„
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1	„	8	„	8	„	2	„	16	„	8	„
1	„	9	„	9	„	2	„	18	„	9	„

3	in	3	geht	1	mal	9	in	9	geht 1 mal
3	„	6	„	2	„	9	„	18	„ 2 „
3	„	9	„	3	„	9	„	27	„ 3 „
.	.	.	.	.	.	.	.	.	. . . . .
3	„	24	„	8	„	9	„	72	„ 8 „
3	„	27	„	9	„	9	„	81	„ 9 „

u. s. w. bis

Eins-und-einstabelle, die erste Hülfstabelle für's Addiren.

1	und	1	macht	2		3	und	1	macht	4	
1	„	2	„	3		3	„	2	„	5	
1	„	3	„	4		3	„	3	„	6	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1	„	8	„	9		3	„	8	„	11	
1	„	9	„	10		3	„	9	„	12	

u. s. w. bis

2	und	1	macht	3		9	und	1	macht	10	
2	„	2	„	4		9	„	2	„	11	
2	„	3	„	5		9	„	3	„	12	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	„	8	„	10		9	„	8	„	17	
2	„	9	„	11		9	„	9	„	18	

Eins-von-einstabelle, die erste Hülfstabelle für's Subtrahiren.

1	von	1	bleibt	0		3	von	3	bleibt	0	
1	„	2	„	1		3	„	4	„	1	
1	„	3	„	2		3	„	5	„	2	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1	„	9	„	8		3	„	11	„	8	
1	„	10	„	9		3	„	12	„	9	

u. s. w. bis

2	von	2	bleibt	0		9	von	9	bleibt	0	
2	„	3	„	1		9	„	10	„	1	
2	„	4	„	2		9	„	11	„	2	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	„	10	„	8		9	„	17	„	8	
2	„	11	„	9		9	„	18	„	9	

Einspringende Winkel, s. v. w. eingehende Winkel, s. u. auspringende Winkel.

Eintritt eines Gestirns, s. u. Austritt.

Ein und einaxiges Krystallisationssystem, s. u. Axensystem.

Ein und eingliedriges Krystallisationssystem, s. u. Axensystem.

Eklipse ist Finsterniſs oder Verfinsterung eines Gestirns wenn ein näher befindliches Gestirn es bedeckt; wie die Verfinsterung der Sonne durch den davor tretenden Mond oder wenn die Erde zwischen Sonne und Mond tritt die Verfinsterung des Mondes.

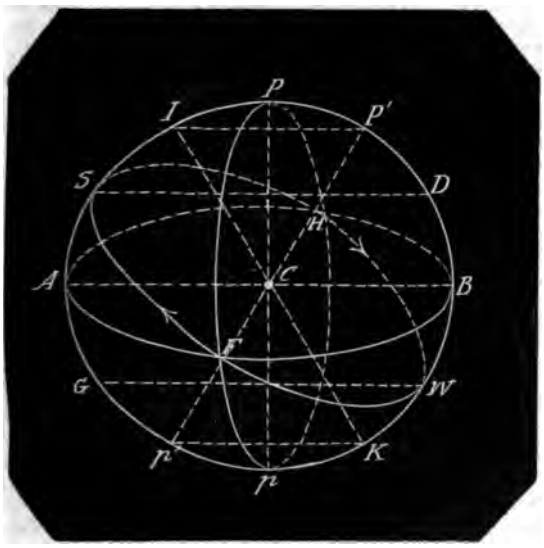
Ekliptik, Sonnenbahn ist die Bahn, welche die Sonne von Abend über Mittag gegen Morgen am Himmel jährlich zu durchlaufen scheint. In dem Art.: Aequator der Erde ist die E. schon als die Bahn erklärt, in welcher die Erde in der Zeit, welche wir Jahr nennen, um die Sonne sich bewegt und daſs also die E. der Ort ist, in welchem der Mittelpunkt unserer Erde sich fortdauernd befindet. In dem Art. Centralbewegung ist auf den die Erde begleitenden und umkreisenden Mond gerücksichtigt und nachgewiesen, daſs nicht der Mittelpunkt der Erde es ist, der in der E. sich befindet, sondern der in der beweglichen Axe zwischen Erde und Mond befindliche gemeinschaftliche Schwerpunkt beider Weltkörper und der mit der Bewegung des Mondes um die Erde in jedem Augenblick sich ändert.

Ferner ist in dem erstgenannten Art. die Schiefe der Ekliptik, d. h. der Winkel, den die E. mit dem ≠ mit sich selbst bleibenden Aequator bildet, im Mittel zu $23\frac{1}{2}°$ angegeben worden, der daraus hervorgehende Wechsel in der Beleuchtung der Erde durch die Sonne mit Fig. 34 bildlich dargestellt und es sind die 4 Hauptpunkte der E., der Frühlings-, Sommer-, Herbst- und Winterpunkt erklärt und nachgewiesen.

Endlich sind in dem Art. Bahn der Weltkörper, No. 24, pag. 301 als Beispiel vorangegangener Formeln die Bewegung der Erde um die Sonne und die Masse der Sonne berechnet und dafür die aus Beobachtungen hergeleiteten Dimensionen der E. angegeben.

Uebereinstimmend mit Fig. 34, pag. 33 sei umstehende Figur, die um die Ekliptik *SHWF* gelegte Himmelskugel also mit einem Durchmesser von etwa 42 Millionen Meilen, die auch mit allen darin befindlichen Kreisen bis ins Unendliche erweitert gedacht werden kann. *AHBF* die durch den Mittelpunkt *C* gelegte erweiterte Ebene unsres Erdaequators der in allen Punkten der E., wo die Erde sich auch befinden möge, ≠ mit sich selbst bleibt. Beide gröſsten Kreise, die E. und der Aequator schneiden sich in den Punkten *F* und *H*. Die auf der Ebene *AB* durch *C* gezogene senkrechte *Pp* ist die Axe des Aequators, die Punkte *P*, *p* sind dessen Pole; die auf der Ebene *SW* in *C* senkrechte Linie *P'p'* heiſst die Axe der E., deren Endpunkte *P'*, *p'* sind die Pole der E., die Bogen *AS* = *BW* sind die gröſsten Entfernungen zwischen dem Aequator und der E, sie messen die Schiefe der E, sind von den Durchschnittspunkten *F*, *H* gleich weit entfernt und gleich groſs den Bogen *PP'* und *pp'*.

Fig. 600.



Anstatt nun, dafs wie Fig. 34 die Erde in der Ekliptik um die in *C* befindliche Sonne sich bewegt, soll hier die scheinbare Bewegnng der Sonne um die scheinbar in *C* feststehende Erde betrachtet werden.

Steht die Sonne in *F* und *H* so ist auf der ganzen Erde Tag und Nacht gleich, Aequinoctium (vergl. Astronomische Dämmerung, No 4, pag. 136), *F* und *H* sind die Punkte der Nachtgleiche, die Aequinoctialpunkte. Steht die Sonne in *S*, so ist auf der nördlichen, steht sie in *W*, so ist auf der südlichen Halbkugel der Erde der längste Tag. Weil die Sonne an diesen Punkten eine Zeit lang zu verbleiben scheint, so heifsen *S* und *W* die Solstitialpunkte, Sonnenstillstandspunkte und weil die Sonne hier entgegengesetzte Richtungen annimmt, Punkte der Sonnenwende.

Von *F* tritt die Sonne in die nördliche Halbkugel, geht während der Frühlingszeit daselbst bis *S*, während des Sommers bis *H*, tritt hier in die südliche Halbkugel, geht während des Herbstes bis *W* und während des Winters von *W* bis *F*.

Daher ist *F* der Punkt der Frühlingsnachtgleiche, *H* der Punkt der Herbstnachtgleiche, *S* der Sommer-, *W* der Winterstillstandspunkt.

Ein gröfster Kreis *PFpHP* durch die Weltpole (vergl. Aequator, Himmelsaequator pag. 31) heifst der Kolurus der Nachtgleichen; ein gröfster Kreis *PSpWP* durch die Weltpole und die Sonnenwendepunkte der Kolurus der Stillstandspunkte.

Parallelkreise *SD*, *GW* mit dem Aequator, durch die Sonnenwendepunkte *S* und *W* gezogen, heifsen Wendekreise, Wendezirkel weil diese die Sonne zu den Zeiten der Sonnenwende zu durchlaufen scheint; der Kreis *SD* in der nördlichen Halbkugel der Wendekreis des Krebses, weil von hier ab die Sonne eine rückgängige Bewegung macht; der Kreis *WG* in der südlichen Halbkugel der Wendekreis des Steinbocks, weil von hier ab die Sonne eine aufsteigende Bewegung macht.

Parallelkreise mit dem Aequator durch die Pole *P*, *p'* der E. heifsen Polarkreise, *PJ* der nördliche, *p'K* der südliche Polarkreis.

Von diesen Kreisen an der Himmelskugel sind auch die gleichnamigen der Erdkugel abgeleitet; sie werden durch die Punkte bestimmt, welche auf der Erdoberfläche entstehen, wenn man von *S*, *W*, *P' p'* nach dem Erdmittelpunkt *C* gerade Linien zieht. Stellt also der Kreis *PApBP* die Erdkugel vor so sind von den unter den einander gleichen etwa 23½° betragenden Winkeln *SCA*, *WCB*, *PCP'*, *pCp'* gezogenen Kreisen die Kreise *SD* und *WG* die Wendekreise, die Kreise *P'J*, *p'K* die Polarkreise auf der Erdoberfläche.

Die Schiefe der Ekliptik ist nicht nur durch das Schwanken der Erdaxe, sondern auch durch die Gesammteinwirkung sämmtlicher Planeten der Aenderung unterworfen. Diese Aenderung, welche seit 2000 Jahren in einer Abnahme besteht, beträgt in 100 Jahren noch nicht ganz eine Minute.

Da nun die Schiefe der E. eine der Grundlagen aller astronomischen Berechnungen ist, so sind wiederholte Messungen und Beobachtungen derselben erforderlich. Sie ist bestimmt worden durch

Eratosthenes	250 J. v. Chr.	= 23° 51′ 20″
Almamon	830 „ n. Chr.	= 23° 35′ 0″

Copernicus	1540 J. n. Chr.	$=23°28'\ 8''$
Flamstead	1691 „ „ „	$=23°28'23''$
Condamine	1737 „ „ „	$=23°28'24''$
Struve	1750 „ „ „	$=23°28'17{,}44''$
Tob. Mayer	1756 „ „ „	$=23°28'16''$
Piazzi	1800 „ „ „	$=23°27'56{,}3''$
Peters	1800 „ „ „	$=23°27'54{,}22''$

Die Schiefe der E. wird 9 Jahre lang immer gröfer, in den folgenden 9 Jahren immer kleiner, jedoch so dafs die Summe der Zuwachse durch die der Abnahmen übertroffen wird. Diese periodischen Aenderungen heifsen das Schwanken oder die Nutation der E. Man hat eine wahre oder scheinbare Schiefe der E., in derjenigen, welche zu einer Zeit wirklich beobachtet wird, und eine mittlere Schiefe der E.; letztere ist diejenige, welche man durch die Beobachtung gefunden haben würde, wenn eine Nutation nicht stattgefunden hätte und die also nur durch Berechnung zu finden ist.

Die Schiefe der E. ist offenbar gleich der gröfsten nördlichen oder südlichen Abweichung der Sonne (s. Abweichung eines Gestirns) also deren Abweichung wenn der Mittelpunkt der Sonne in einem der Wendepunkte steht, und sie würde unmittelbar durch die Beobachtung der Sonne in dem Augenblick deren Eintritts in den Sommer- oder in den Winterpunkt gefunden werden können, wenn die Sonne in diesem Augenblick durch den Beobachtungsort culminirte; geschieht dies nicht, so erhält man die Schiefe der Ekliptik allerdings um eine oder einige Secunden geringer.

Gestirne die in der Ekliptik liegen haben keine Breite und wenn sie zugleich im Frühlingspunkt liegen, auch keine Länge. Die Sonne hat also keine Breite, im Frühlingspunkt weder Länge noch Breite, in beiden Nachtgleichen, dem Frühlings- und dem Herbstpunkt keine Declination. Gestirne, die in einerlei Parallelkreis mit der Ekliptik liegen, haben einerlei Breite.

Die halbe grofse Axe der E. wird nach verschiedenen Beobachtungen angegeben von 20 644130 bis 20 682329 geogr. Ml. und nach dieser mittleren Entfernung der Erde von der Sonne auch die übrigen Dimensionen derselben:

Die Excentricität der E. ist festgestellt zu 0,01679226 als Theil der halben grofsen Axe oder des Halbmessers des excentrischen Kreises. Man drückt dieselbe auch in Bogensecunden aus. Es ist nämlich der Halbmesser eines Kreises = einem Bogen von 57° 17' 44,8" = 20624,8 Secunden, so dafs die Excentricität $0{,}01679226 \times 20624{,}8 = 3464$ Secunden $= 57'\ 44''$ des excentrischen Kreises beträgt.

Demnach ist die Entfernung des Perihels von der Sonne = 20297474 bis 20335031 geogr. Ml. Die Entfernung des Aphels von der Sonne 20990786 bis 21029627 geogr. Ml. Die vorher angegebene freilich noch nicht ganz bestimmt anzugebende mittlere Entfernung der Erde von der Sonne ist der astronomische Maafsstab (die Einheit = 1) für alle astronomischen Längen.

Elasticität ist die Eigenschaft eines starren Körpers, dafs dessen Massentheile, wenn sie durch eine äufsere auf ihn einwirkende Kraft verrückt worden, nach Hinfortnahme der Kraft ihre frühere Stelle wieder einnehmen. Die E. ist also eine dem Körper inne wohnende Kraft, welche wie die Festigkeit der Verrückung seiner Massentheile als Widerstand entgegenwirkt und zugleich als thätige Kraft die Wiederherstellung des natürlichen Orts der Massentheile vollbringt; oder auch die Kraft, mit welcher die einzelnen Massentheile das Bestreben haben in dem ihnen durch die Natur angewiesenen Ort zu verbleiben.

Je gröfser die äufsere Kraft ist, desto gröfser ist die Länge, um welche die Massentheile in ihrem gegenseitigen Ort geändert werden und Kraft und Länge der Verrückung sind proportional.

2. Der Körper wird durch Zug ausgedehnt, durch Druck zusammengepreſst. Eine Kraft, welche die Massentheile eines Körpers um das $n$fache ihrer natürlichen Entfernung l von einander entfernt, ist gleich derjenigen Kraft, welche diese Massentheile auf $\frac{1}{n}\,l$ einander nähert. Einen Beweis davon liefert die Wärme als ausdehnende Kraft.

Wenn nämlich ein eiserner Stab von der Länge l bei der Temperatur von $T°$, durch $t°$ vermehrt auf die Länge $l + \frac{1}{n}\,l = \frac{n+1}{n}\,l$ gebracht wird, so wird derselbe Stab, wenn die Temperatur von $T°$ um $t°$ vermindert wird, auf die Länge x zusammengepreſst werden, dafs

$$x + \frac{1}{n}\,x = l$$

woraus

$$x = \frac{n}{n+1}\,l = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)}\,l$$

Werden beide Kräfte hinfort genom-

men, d. h. wird in beiden Fällen die Temperatur wieder auf T° gebracht, so entsteht die ursprüngliche Länge l. Die ersten t° Temperatur wirkten als Kraft ausdehnend, die zweiten $(-t^\circ)$ Temperatur als Kraft zusammenpressend, beide Kräfte sind als Wärmemengen von einerlei Temperatur gleich grofs, folglich ist das Gesetz richtig.

3. Wenn der Körper aus homogenem Stoff besteht, so besitzt jedes einzelne Massentheilchen desselben eine gleich grofse E., daher verhalten sich zwei Kräfte, welche n Theile und m Theile desselben Stoffs um eine gleiche Länge λ ausdehnen oder zusammendrücken wie $m:n$, und die in beiden Stoffen befindlichen jenen Kräften gleichen E. verhalten sich ebenfalls wie $m:n$.

4. Es gibt keinen starren Körper, der bis ins Unendliche ausgedehnt werden kann; er zerreifst und zwar bei derjenigen auf ihn einwirkenden Zugkraft, welche seiner Cohäsionskraft gleich grofs ist. Die E. in einem Körper hat also ihre Grenze und diese liegt unterhalb seiner absoluten Festigkeit.

Jeder Körper hat 2 Elasticitätsgrenzen. Die erste besteht in dem Grade der Ausdehnsamkeit, dafs wenn dieser überschritten, die Ausdehnung also darüber hinaus vermehrt wird, die Massentheilchen nach Hinfortnahme der Zugkraft sich zwar zusammenziehen, aber nicht wieder in ihre natürliche Lage zurückkehren, sondern in einer gröfseren Entfernung als vorher von einander verbleiben. Wird die Ausdehnung noch weiter getrieben, so entsteht zuletzt ein Zustand, dafs bei Hinfortnahme der Kraft gar kein Zurückweichen der Massentheilchen statt findet und diese Grenze kann mit dem Zustand, in welchem der Körper eben zerreifsen will, gleich gesetzt werden.

Innerhalb der ersten Grenze ist die E. vollkommen, innerhalb der ersten und zweiten Grenze unvollkommen. Wird die erste Grenze bei einem Körper überschritten, so hat der Körper seine natürliche Structur verloren, er ist ein Körper von ganz anderer und untergeordneter Beschaffenheit geworden.

Innerhalb der ersten Grenze könnte demnach ein Baustück auf die Dauer belastet werden ohne dafs es mit der Zeit an Tragfähigkeit verliert; mit Ueberschreitung dieser Grenze durch Belastung wird seine Tragfähigkeit vermindert, seine erste E.-grenze ist geringer als sie vorher war und das Baustück mufs bis zu derselben auf die Dauer entlastet werden.

Dagegen lehrt die Erfahrung, dafs Gestaltänderungen von Körpern unter Belastungen auf nur kurze Zeit lang mit der Entlastung wieder verschwinden, jedoch unter denselben Belastungen lange Zeit verbleibend ebenfalls verbleiben, so dafs die Körper unter anhaltendem Druck ihre ursprüngliche E. ganz oder zum Theil verlieren. Die Bestimmung einer E.-grenze der ersten Art oder für vollkommen bleibende E. bei Körpern ist also unsicher und es wird für die Tragfähigkeit von Baustücken der Coefficient für den Bruch zu Grunde gelegt (s. Brechungscoefficient und Belastung).

Für die Untersuchung der Elasticitätsgesetze hat man nach dem Vorschlag von Thomas Young den Elasticitätsmodul eingeführt. Dieser ist eine hypothetische Gröfse, nämlich diejenige Kraft in Pfunden, welche erforderlich ist um einen Stab von 1 □Zoll Querschnitt von der Länge l auf die Länge $2l$ auszudehnen oder auf die Länge $\frac{1}{2}l$ zusammenzupressen, ohne dafs die Elasticitätsgrenze überschritten wird, wenn also diese E.-grenze solches gestattete. Man bezeichnet diesen Modul mit E.

Die Länge l des Stabes ist gleichgültig, denn die Kraft, nach der Längenrichtung des Stabes angebracht wirkt zwar unmittelbar nur auf das ihr zunächst befindliche von ihr angegriffene Massenelement, dieses aber pflanzt vermöge der nun erhaltenen der Kraft gleich grofsen Spannung dieselbe Wirkung auf das ihm unmittelbar vorhergehende Element fort, dieses dieselbe Wirkung auf das ihm vorhergehende dritte Element u. s. w., so dafs die Kraft auf alle Massenelemente des Stabes eine gleich grofse Wirkung ausübt, die Länge des Stabes und die Anzahl der Massentheilchen sei welche sie wolle; und wenn die Kraft einen Stab von der beliebigen Länge l um l oder auf $2l$ ausdehnt, so geschieht dies dadurch, dafs jede 2 Massenelemente, die der Länge nach neben einander um die sehr kleine Länge λ von einander entfernt sind um die Länge 2λ auseinander gerückt werden.

6. Ist E gegeben, so erhält man die Kraft P, welche den Stab von 1 □Zoll Querschnitt von der Länge L um die Länge l, also auf die Länge $L+l$ ausdehnt, nach dem Gesetz No. 1.

$$P:E=l:L$$

woraus

$$P=\frac{l}{L}E \qquad (1)$$

Ist $l=\frac{m}{n}L$ so erhält man $P=\frac{m}{n}E$ (2)

Die Kraft P', welche denselben Stab von der Länge L um die Länge l, oder auf die Länge $L - l$ zusammendrückt, ist nach No. 2 gleich derjenigen Kraft, welche im Stande ist den Stab von der Länge $L - l$ auf die Länge L auszudehnen. Daher

$$P' = \frac{l}{L-l} E = \frac{m}{n-m} E \qquad (3)$$

Hat der Stab k □Zoll Querschnitt, so ist die Kraft

$$P = k \frac{l}{L} E = k \frac{m}{n} E \qquad (4)$$

und $$P' = k \frac{l}{L-l} E = k \cdot \frac{m}{n-m} E \qquad (5)$$

7. Aus den Formeln 1 bis 5 findet man, wenn E gegeben ist bei einem Stab von gegebener Länge L die Länge l, um welche bei gegebener Belastung P der Stab ausgedehnt und zusammengedrückt wird, und die Länge $L + l = L'$ und $L - l = L'$ auf welche beides geschieht:

Nämlich für die Ausdehnung bei 1 □Zoll Querschnitt

$$l = \frac{P}{E} L \qquad (6)$$

$$L + l = L' = \frac{E+P}{E} L \qquad (7)$$

Bei k □Zoll Querschnitt

$$l = \frac{P}{kE} L \qquad (8)$$

$$L + l = L' = \frac{kE+P}{kE} \cdot L \qquad (9)$$

für die Zusammendrückung bei 1 □Zoll Querschnitt

$$l = \frac{P}{P+E} L \qquad (10)$$

$$L - l = L' = \frac{E}{P+E} L \qquad (11)$$

bei k □Zoll Querschnitt

$$l = \frac{P}{P+kE} L \qquad (12)$$

$$L - l = L' = \frac{kE}{P+kE} L \qquad (13)$$

8. Um den Modul E für einen Stoff zu finden, hat man nur nöthig Versuche zu machen. Man nimmt den Stab von k □Zoll Querschnitt, von L Fufs Länge, belastet diesen mit einem bestimmten Gewicht P, mifst die neue Länge $L' = L + l$, so hat man nach Gl. 4.

$$E = \frac{L}{l} P = \frac{L}{L'-L} \cdot \frac{P}{k} \qquad (14)$$

Je zahlreicher die Versuche sind, die man mit verschiedenen Stäben desselben Stoffs und unter verschiedenen Belastungen vornimmt, desto genauer und zuverlässiger erhält man E.

Man kann Versuche mit Zusammenpressungen den vorigen hinzufügen und nach Formel 5.

$$E = \frac{L-l}{l} \cdot \frac{P'}{k} = \frac{L'}{L-L'} \cdot \frac{P'}{k} \qquad (15)$$

finden, wenn L die ursprüngliche Länge, L' die Länge unter dem Druck P' bedeutet.

9. Der Modul E ist von der Temperatur des Stabes unabhängig. Denn gesetzt ein Stab von der Temperatur 0° werde durch Einwirkung von t° Temperatur von der Länge L zur Länge $L + l = L'$ ausgedehnt, so hat man nach Formel 2 die Kraft P, welche auf den Stab von 0° dieselbe Wirkung ausübt

$$P = \frac{l}{L} E = \frac{L'-L}{L} E$$

Offenbar ist diejenige Kraft, welche diesen Stab von der nun ursprünglichen Länge L' auf die Länge L zusammenpreſst, dieselbe Kraft P. Geschähe aber diese Zusammenpressung, wenn der Stab durch Erwärmung auf t° zur Länge L' gebracht worden wäre und während dem Bestehen der Temperatur t°, so sei der Modul = E', dann hat man nach Formel 3

$$P = \frac{l}{L'-l} = \frac{L'-L}{L} E'$$

also $$\frac{L'-L}{L} E = \frac{L'-L}{L} E'$$

oder $$E = E'$$

10. Es erfolgen hier die Angaben des E.-modul von mehreren Stoffen, aus Mosely-Scheffler nebst den daneben gestellten absoluten Festigkeiten derselben in alten preufs. Pfunden. In der 3ten Columne sind die Quotienten der zweiten in die ersten Zahlen angegeben, welche als Nenner zum Zähler 1 die Quotienten der ersten in die zweiten Zahlen und damit zugleich nach Formel 8 die aliquoten Theile der Längen, um welche die Stoffe als Stäbe bis zum Zerreifsen ausgedehnt werden, bezeichnen.

	Modul E	Absolute Festigkeit P	
Akazie	1200 000	14 000	86
Birke	1600 000	15 000	107
Blei	730 000	1 900	384

	Modul E	Absolute Festigkeit P	
Bronze	4700 000	34 000	138
Buche	1400 000	12 000	117
Eiche	1800 000	11 000	164
Eisendraht . . .	26000 000	90 000	289
Esche	1600 000	18 000	89
Fichte	2100 000	12 000	175
Fischbein . . .	840 000	8 000	105
Gufseisen . . .	17000 000	19 000	895
Kiefer	1700 000	12 000	142
Kupferdraht . .	19000 000	70 000	271
Lerche	1300 000	10 000	130
Mahagoni spanisches . . .	1600 000	14 000	114
Messing, gegossen	9400 000	18 000	522
Messingdraht .	15000 000	70 000	214
Schmiedeeisen	29000 000	66 000	439
Stahl	37000 000	110 000	336
Teakholz . . .	2500 000	16 000	156
Ulme	1400 000	15 000	93
Weifstanne . .	1900 000	12 000	158
Zink, gegossen	14000 000	8 800	1591
Zinn, gegossen	4700 000	4 400	1068

Beispiel. Nach den Versuchen von Duleau kann das Schmiedeeisen im Minimo um $0{,}000441 = \frac{1}{2267}$, im Maximo um $0{,}001167 = \frac{1}{857}$, nach Tredgold um $0{,}000714 = \frac{1}{1400}$ seiner Länge sich ausdehnen, ehe es über die Grenzen seiner E hinauskommt. In dem Art.: Belastung ist angeführt, dafs das Schmiedeeisen für die Dauer nur mit $\frac{1}{6}k$, d. h. auf den □Zoll Querschnitt nur mit $\frac{1}{6} \times 66000$ Pfd. $= 11000$ Pfd. belastet werden solle. Hierbei ist also die Länge l, um welche es sich bei der ursprünglichen Länge L ausdehnt $= \frac{1}{6 \cdot 439} \cdot L = \frac{1}{2634} L$, woraus hervorgeht, dafs für diese vorgeschriebene Belastung das Eisen noch innerhalb seiner E.-grenze verbleibt. Nach der vorstehenden Tabelle zerreifst es wenn es um $\frac{1}{439}$ seiner Länge ausgedehnt wird.

Elastische Flüssigkeiten. Die Gase haben mit den tropfbaren Flüssigkeiten die Veränderbarkeit ihrer Form gemein, unterscheiden sich aber von denselben dadurch, dafs sie sich in einen kleineren Raum zusammenpressen und in einen gröfseren Raum ausdehnen lassen.

Elastische Linie ist die Gestalt, welche eine nicht ausdehnbare vollkommen elastische gewichtlose gerade Linie annimmt, wenn sie an einem Ende unbeweglich befestigt und an dem anderen Ende von einer Kraft zu Biegung derselben angegriffen wird.

1. Es sei die gerade Linie AB deren ursprüngliche Lage, durch das an B. normal auf AB gerichtete Gewicht P habe sie die Gestalt AFC angenommen, so ist bei einer gleichförmigen vollkommenen Elasticität der Linie deren Krümmung am Ende C um so gröfser, je länger AB und je gröfser P ist und bei gleichbleibendem P werden die Krümmungen der Linie von C nach A hin immer geringer.

2. Die Krümmung irgend eines Curvenelements ist gleich der des zu diesem gehörenden Krümmungskreises und da die Krümmungen der Kreise um so gröfser werden je kleiner deren Halbmesser sind, oder mit deren Halbmesser in umgekehrtem Verhältnifs stehen, so verhalten sich die Krümmungen der Elemente in der elastischen Linie umgekehrt wie die zu diesen Elementen gehörenden Krümmungshalbmesser.

Die Wirkung der Kraft P auf die Linie AB, also die Form der Linie AFC hängt nun zunächst noch ab von dem Grade der Elasticität den die Linie besitzt, und diese soll dadurch ausgedrückt werden, dafs bei der normal auf AB in Entfernung $= 1$ von A wirkenden Kraft p der Krümmungshalbmesser in $A = r$ sei.

3. Es ist also durch die Kraft P in C dieselbe Krümmung in A vom Halbmesser $AD = r$ hervorgegangen. Bezeichnet man den zu der gleichfalls durch P in C hervorgegangenen Krümmung in F gehörenden Halbmesser FJ mit R, stellt sich in F diejenige Kraft P' wirkend vor, welche bei Hinfortnahme von P dieselbe Curve von A bis F veranlafst, wobei dann das Curvenstück FC unbelastet ist, bringt in Entfernung $FH = 1$ eine Kraft Q an, welche statt P' dieselbe Krümmung in F von dem Halbmesser R hervorbringt, so müssen nach dem Obigen die Kräfte Q und p sich umgekehrt wie die zu F und A gehörenden Krümmungshalbmesser R und r verhalten oder es ist

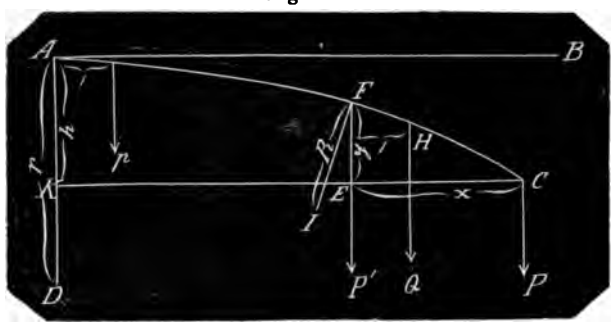
$$Q : p = r : R$$

woraus

$$Q = \frac{pr}{R}$$

Aber die Kraft P in C bringt ebenfalls in F die Krümmung vom Halbmesser R hervor; zieht man also $CE \perp AB$, bezeichnet CE mit x, so hat man für die gleich

Fig. 601.



grofsen Wirkungen der Kräfte Q und P in Beziehung auf den Punkt F.

$$1 \times Q = x \times P$$

woraus $$x = \frac{Q}{P} = \frac{pr}{PR} \qquad (1)$$

4. Das Product pr ist für jede elastische Linie, die immer nur eine materielle Linie sein kann, eine Constante, und von der Natur der Linie, von der Gröfse E der Elasticität abhängig. Man kann das Product pr daher allgemein mit E bezeichnen und dann ist $x = \frac{E}{P \cdot R}$

folglich das Moment $$xP = \frac{E}{R} \qquad (2)$$

5. Nimmt man CE als Abscissenlinie, C als den Anfangspunkt der Coordinaten, bezeichnet EF mit y, so hat man nach pag. 188, Formel I. allgemein

$$R = -\frac{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \qquad (3)$$

wo das subtractive Vorzeichen deshalb gilt, weil die Curve nach der Abscissenlinie gerichtet hohl ist.

Substituirt man diesen Werth von R in Gleichung 2, so erhält man

$$x = -\frac{E}{P} \cdot \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad (4)$$

Aus dieser Differenzialgleichung sind nun mittelst Integrirens die Differenziale von y fortzuschaffen und y allein einzuführen. Setzt man deshalb der Kürze wegen $\frac{\partial y}{\partial x} = z$, so erhält man

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial x}$$

Die Gleichung verwandelt sich in

$$x = -\frac{E}{P} \cdot \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{[1 + z^2]^{\frac{1}{2}}}$$

und hieraus

$$\int x\, \partial x = -\frac{E}{P} \int \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{(1 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \partial x$$

Nun ist $\int x\, \partial x = \frac{1}{2} x^2$

Um das rechts befindliche Integral zu finden ist der Factor ∂z nöthig, demnach mit $\frac{\partial z}{\partial z}$ multiplicirt entsteht

$$\int \frac{\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z}}{(1 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \partial z = \int \frac{1}{(1 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \partial z$$

Um dies Integral rational zu machen, setzt man

$$(1 + z^2)^{\frac{1}{2}} = \mu z$$

so ist $$1 + z^2 = \mu^2 z^2$$

woraus $$z^2 = \frac{1}{\mu^2 - 1}$$

Diese Gleichung auf μ differenzirt entsteht

$$2z \cdot \frac{\partial z}{\partial \mu} = -2\mu\, (\mu^2 - 1)^{-2}$$

woraus $$\frac{\partial z}{\partial \mu} = -\frac{\mu}{z\,(\mu^2 - 1)^2} = -\mu z^3$$

Nun ist also

$$\int \frac{\partial z}{(1+z^2)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{\frac{\partial z}{\partial \mu}}{(1+z^2)^{\frac{1}{2}}} \partial \mu = -\int \frac{\mu z^3}{(\mu^2 z^2)^{\frac{1}{2}}} \partial \mu = -\int \frac{\partial \mu}{\mu^2} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\left(\frac{(1+z^2)^{\frac{1}{2}}}{z}\right)} = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}}$$

und folglich

$$\tfrac{1}{2}x^2 = -\frac{E}{P}\frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}} + C \qquad (5)$$

Die Constante bestimmt sich auf folgende Weise:

Es ist $\frac{\partial y}{\partial x}$ der Winkel, den die Tangente in F mit der Abscisse x bildet. Für den Punkt A ist AB diese Tangente, und da sie mit der Abscisse $\pm$ läuft, so ist der Winkel, den die Tangente in A mit der Abscisse bildet = 0. Setzt man also die Länge $CK = a$, so hat man für $x = a$ auch $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$. Man hat also

$$\tfrac{1}{2}a^2 = 0 + C$$

woraus $C = \frac{1}{2}a^2$

diesen Werth substituirt gibt

$$\tfrac{1}{2}(a^2 - x^2) = \frac{E}{P}\frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}} \qquad (6)$$

hieraus ist nun y zu entwickeln. Man erhält

$$\tfrac{1}{4}(a^2 - x^2)^2\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right] = \frac{E^2}{P^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

woraus

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \tfrac{1}{2}\frac{P(a^2 - x^2)}{\sqrt{E^2 - \frac{1}{4}(a^2 - x^2)P^2}}$$

und

$$y = \tfrac{1}{2}P\int\frac{a^2 - x^2}{\sqrt{E^2 - \frac{1}{4}(a^2 - x^2)P^2}} \qquad (7)$$

6. Nach den bisher bekannten Lehren der Integralrechnung läfst sich dies Integral nur in einer Reihe darstellen, deren Glieder integrirbar sind, ein weitläufiges Verfahren, welches die Entwickelung des Gesetzes der elastischen Linie in nur wenig anwendbaren Formeln liefert und daher nicht interessirt. Erwägt man dagegen, dafs in den Fällen, wo eine Untersuchung der elastischen Linie erwünscht oder erforderlich ist, diese immer nur in sehr geringen Krümmungen vorkommt so kann die Untersuchung hier auf diese Annahme beschränkt werden.

Bei kleinen Krümmungen sind auch die Winkel, welche die Tangenten mit der Abscissenlinie bilden sehr klein und mit ihnen die trigonometrischen Tangenten dieser Winkel. Geht man daher auf Gl. 5 zurück so ist $\frac{\partial y}{\partial x}$ diese sehr kleine trigonometrische Tangente eines so kleinen Winkels und im Nenner $\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$ ist schon $\frac{\partial y}{\partial x}$ gegen 1 sehr unbedeutend, vielmehr unbedeutender $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$ gegen 1, und es ist mithin der Nenner = 1 zu setzen. Demnach hat man

$$\tfrac{1}{2}(a^2 - x^2) = \frac{E}{P}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}$$

Wird diese Gleichung integrirt, so erhält man

$$\frac{E}{P}y = \tfrac{1}{2}\int(a^2 - x^2) = \tfrac{1}{2}(a^2x - \tfrac{1}{3}x^3)$$

woraus

$$y = \tfrac{1}{2}\frac{P}{E}(a^2x - \tfrac{1}{3}x^3) \qquad (8)$$

wo die Constante bei $y = 0$ für $x = 0$, als 0 fortfällt.

7. Setzt man die Ordinate AK für $A = h$, so wird $x = a$ und es ist

$$h = \tfrac{1}{2}\frac{P}{E}(a^3 - \tfrac{1}{3}a^3) = \tfrac{1}{3}\frac{P}{E}a^3$$

und

$$E = \tfrac{1}{3}P\cdot\frac{a^3}{h} \qquad (9)$$

eine Gleichung, aus welcher E durch Versuche zu ermitteln ist.

8. Bezeichnet man die Länge CF des Bogens mit λ, so ist nach pag. 191 rechts, die allgemeine Rectificationsformel

$$\lambda = \int\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\partial x$$

Die Wurzelgröfse $= \left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ nach dem binomischen Satz in eine Reihe entwickelt gibt

$$1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - \tfrac{1}{8}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^4 + \ldots\ldots$$

also

$$\lambda = \int\left[1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - \tfrac{1}{8}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^4 + \ldots.\right]\partial x$$

oder

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = 1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - \tfrac{1}{8}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^4 + \ldots.$$

Da $\frac{\partial y}{\partial x}$ sehr klein ist, so kann man die höheren Potenzen von $\frac{\partial y}{\partial x}$ fortlassen und man hat

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = 1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

und wenn man für $\frac{\partial y}{\partial x}$ aus 7 seinen Werth $\frac{1}{2}\frac{P}{E}(a^2 - x^2)$ setzt

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = 1 + \tfrac{1}{8}\frac{P^2}{E^2}(a^2 - x^2)^2 = 1 + \tfrac{1}{8}\frac{P^2}{E^2}[a^4 - 2a^2x^2 + x^4]$$

Diese Gleichung integrirt, gibt

$$\lambda = x + \tfrac{1}{8}\frac{P^2}{E^2}[a^4x - \tfrac{2}{3}a^2x^3 + \tfrac{1}{5}x^5] \quad (10)$$

wo die Constante fortfällt, weil für $x = 0$ auch $\lambda = 0$ wird.

9. Setzt man die Länge der elastischen Linie $AC = L$, so wird $x = a$ und es ist

$$L = a + \tfrac{1}{8}\frac{P^2}{E^2}[a^5 - \tfrac{2}{3}a^5 + \tfrac{1}{5}a^5]$$

oder $$L = a + \tfrac{1}{15}\frac{P^2}{E^2}a^5 \quad (11)$$

Aus dieser Gleichung läfst sich auch $CK = a$ finden, wenn $AB = L$ und wenn P und E gegeben sind.

Ist h gegeben, so hat man aus 9:

$$\frac{P}{E} = \frac{3h}{a^3}$$

Diesen Werth in Gleichung 11 substituirt gibt

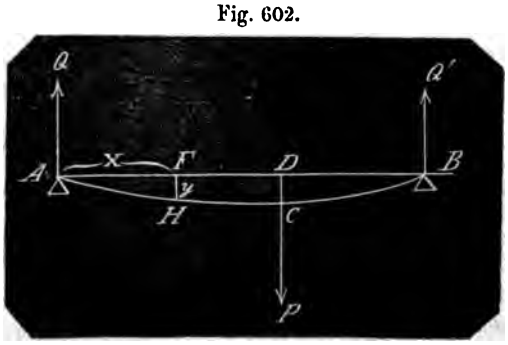
$$L = a + \tfrac{2}{3}\frac{h^2}{a}$$

Der Unterschied zwischen L und a, nämlich zwischen $AB = AFC$ und CK ist also bei kleinen Krümmungen der Linie sehr gering.

II. Eine materielle elastische Linie ACB, deren Gewicht auf die Längen-Einheit $= G$ ist, liegt mit ihren in einer Horizontalen befindlichen Endpunkten frei auf Unterstützungen. Zwischen diesen an einem Punkt C wirkt ein Gewicht P; es soll die Gestalt der elastischen L. bestimmt werden unter der Bedingung, dafs die Krümmung in Folge der Belastungen nur gering ist.

Die Entfernung AB beider Unterstützungen von einander sei $= c$, der Abstand

Fig. 602.



AD des Gewichts P von A sei $= a$, d Pressungen, welche die Unterlagen leiden, seien Q und Q'; für irgend ein Punkt H seien AF und HF die Coor naten x und y. Bei der geringen Krü mung in H sind die Längen $AH = x$ u $AHB = c$ zu setzen; dann sind die auf A und AHB gleichvertheilten Gewichte = a und cG.

2. Setzt man den Krümmungshalbm ser in $H = R$ so ist nach Gleichung das Moment der Elasticität in $H = \frac{E}{R}$ dies ist aber offenbar im Gleichgewic mit dem Gegendruck Q und dem G wicht xG, deren Momente sind Qx u $xG \cdot \frac{1}{2}x$, daher hat man

$$\frac{E}{R} = Qx - \tfrac{1}{2}Gx^2 \quad (4)$$

Nach No. I. Formel 3 hat man

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \quad (5)$$

welche sich nach No. 6, indem $\frac{\partial y}{\partial x}$ geg 1 sehr klein und wegzulassen ist, in d Formel abändert

$$R = \frac{1}{-\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \quad (6)$$

Diesen Werth in Gleichung 1 geset gibt

$$-E\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = Qx - \tfrac{1}{2}Gx^2 \quad (7)$$

woraus

$$-E\frac{\partial y}{\partial x} = \int(Qx - \tfrac{1}{2}Gx^2)\,\partial x$$

$$= \tfrac{1}{2}Qx^2 - \tfrac{1}{6}Gx^3 + C \quad (8)$$

$\frac{\partial y}{\partial x}$ ist die trigonometrisc Tangente des Winkels den d Curventangente in H mit A bildet. Setzt man $x = AD =$ und bezeichnet den Wink zwischen der Tangente in und AB mit α, so hat m aus Gl. 5

$$-E\,tg\,\alpha = \tfrac{1}{2}Qa^2 - \tfrac{1}{6}Ga^3 + C \quad (9)$$

Zieht man diese Gleichu von Gleichung 5 ab, so erhi man

$$-E\left(\frac{\partial y}{\partial x} - tg\,\alpha\right) = \tfrac{1}{2}Q\,(x^2 - a^2) - \tfrac{1}{6}G\,(x^3 - a^3) \qquad (7)$$

woraus integrirt die Gleichung entsteht

$$-E(y - x\,tg\,\alpha) = \tfrac{1}{2}Q\int(x^2 - a^2)\partial x - \tfrac{1}{6}G\int(x^3 - a^3) = \tfrac{1}{2}Q\,(x^3 - 3a^2x) - \tfrac{1}{24}G\,(x^4 - 4x^3x) \qquad (8)$$

wo keine Constante hinzukommt, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ ist.

3. Dies ist die Gleichung für den beliebigen Bogen AH. Man erhält offenbar die Gleichung für den Bogen BCH, wenn man B als Anfangspunkt der Abscissen, $BF = x'$, $BD = c - a$, Q' für Q und $\alpha = 180° - \alpha$ setzt. Also

$$-E\,(y + x'\,tg\,\alpha) = \tfrac{1}{2}Q'\,[x'^3 - 3\,(c-a)^2\,x'] - \tfrac{1}{24}G\,[x'^4 - 4\,(c-a)^3\,x'] \qquad (9)$$

Setzt man die Ordinate $CD = b$, so wird in Gl. (8) $y = b$ für $x = a$ und in Gl. (9) $y = b$ für $x' = c - a$. Man hat also

$$-E\,(b - a\,tg\,\alpha) = -\tfrac{1}{6}a^3\,Q + \tfrac{1}{24}a^4\,G \qquad (10)$$

$$-E\,[b + (c-a)\,tg\,\alpha] = -\tfrac{1}{6}(c-a)^3\,Q' + \tfrac{1}{24}(c-a)^4\,G \qquad (11)$$

Die zweite Gleichung von der ersten abgezogen gibt

$$cE\,tg\,\alpha = \tfrac{1}{6}(c-a)^3\,Q' - \tfrac{1}{6}a^3\,Q - \frac{(c-a)^4 - a^4}{8}\,G \qquad (12)$$

4. Sind also die Gröfsen Q und Q' bekannt, so sind auch α, hiermit b und die Gleichungen für die Bogen AC und BC gegeben.

Nimmt man zu diesem Behuf A und B als Momentenpunkte, so hat man

1. $cQ' = aP + \tfrac{1}{2}c^2G$

2. $cQ = (c-a)\,P + \tfrac{1}{2}c^2G$

woraus $$Q = \frac{c-a}{c}\,P + \tfrac{1}{2}cG \qquad (13)$$

und $$Q' = \frac{a}{c}\,P + \tfrac{1}{2}cG \qquad (14)$$

Diese Werthe in Gleichung 12 gesetzt und reducirt gibt

$$cE\,tg\,\alpha = \tfrac{1}{2}a\,(c-a)\,(c-2a)\,P + \tfrac{1}{24}\,[(c-a)^3\,(c+3a) - a^3\,(4c - 3a)]\,G \qquad (15)$$

5. Nach Gleichung 1 ist

$$\frac{E}{R} = Qx - \tfrac{1}{2}Gx^2$$

das Minimum von R, d. h. die gröfste Krümmung der Linie findet bei demjenigen x statt, für welches $Qx - \tfrac{1}{2}Gx^2$ ein Maximum wird.

Setzt man $Qx - \tfrac{1}{2}Gx^2 = s$

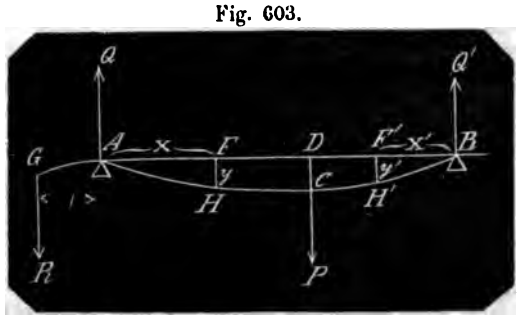
so ist $$\frac{\partial s}{\partial x} = Q - Gx = 0$$

also für $$x = \frac{Q}{G} = \frac{1}{G}\left(\frac{c-a}{c}\,P + \tfrac{1}{2}cG\right) = \frac{c-a}{c}\cdot\frac{P}{G} + \tfrac{1}{2}c$$

III. Eine materielle gewichtslose elastische Linie ACB ist mit einem Ende A unbeweglich befestigt und liegt mit dem anderen Ende B frei auf einer Unterstützung, beide Enden A, B in derselben Horizontalen. In irgend einem Punkt C der Linie zwischen den Endpunkten ist ein Gewicht P aufgehängt; die Gestalt der Linie zu bestimmen, wenn die Krümmung in Folge der Belastung P nur gering ist.

Die Entfernungen AB und AD seien wieder c und a. Wird das Gewicht P hinfortgenommen, so geht die Linie ACB in die gerade Linie AB über. Anstatt der Befestigung in A denke man

Fig. 603.



sich daselbst eine bloſse Unterstützung, die Linie über A hinaus verlängert und in der Entfernung $AG = 1$ ein Gewicht R angebracht, welches mit der Befestigung in A dieselbe Wirkung auf die Linie ausübt; ferner setze man die Widerstände, welche die Unterstützungen A und B den Vertikalpressungen entgegensetzen $= Q, Q'$.

Nimmt man wieder für den beliebigen Punkt H die Ordinaten AF und $FH = x$ und y, setzt den Krümmungshalbmesser der Linie in $H = r$, so ist nach I, Gleichung 2 das Moment mit welchem der Bogen AH in H der Biegung widersteht $= \frac{E}{r}$ und dies ist offenbar im Gleichgewicht mit den Momenten der Kräfte Q und R in Beziehung auf den Punkt F, d. h. es ist

$$\frac{E}{r} = Qx - R(x+1) \qquad (1)$$

Nun ist zugleich

$$1 \times R = aP - cQ' \qquad (2)$$

und $$Q + Q' = P + R \qquad (3)$$

woraus $$Q = P(a+1) - Q'(c+1) \qquad (4)$$

Substituirt man diese Werthe von Q und P in Gl. 1, so erhält man

$$\frac{E}{r} = (x-a)P - (x-c)Q' \qquad (5)$$

Nach No. II, Formel 3 für r den Näherungswerth $-\frac{1}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$ gesetzt, entsteht

$$-E\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = (x-a)P - (x-c)Q'$$

oder $$E\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = (a-x)P - (c-x)Q' \qquad (6)$$

diese Gleichung integrirt gibt

$$E\frac{\partial y}{\partial x} = (ax - \tfrac{1}{2}x^2)P - (cx - \tfrac{1}{2}x^2)Q' \qquad (7)$$

indem die Constante fortfällt, weil für $x = 0$ die Tangente in dem Punkt A in die Abscissenlinie AB fällt, mit AB also den $\angle = 0$ bildet, dessen trigonometrische Tangente $\frac{\partial y}{\partial x}$ also ebenfalls $= 0$ ist.

Gleichung 7 noch einmal integrirt gibt die Gleichung für den Bogen AH

$$Ey = (\tfrac{1}{2}ax^2 - \tfrac{1}{6}x^3)P - (\tfrac{1}{2}cx^2 - \tfrac{1}{6}x^3)Q' \qquad (8)$$

wo ebenfalls die Constante fortfällt weil für $x = 0$ auch $y = 0$ wird.

2. Die Gestalt eines Bogens BH' von dem zweiten Endpunkt B ab genommen, wird eine andere, weil hier keine Befestigung statt findet und mithin kein Gewicht R einzuführen ist. Es seien für den Punkt H' die Ordinaten BF' und $H'F' = x_1$ und y_1; der Krümmungshalbmesser für $H' = \varrho$, so ist $\frac{E}{\varrho}$ das Moment, mit welchem der Bogen BH' in H' der Biegung widersteht und dieser ist im Gleichgewicht mit dem alleinigen Moment von Q' in Beziehung auf F' also mit $Q' \cdot x_1$. Man hat demnach

$$\frac{E}{\varrho} = -E\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} = Q' x_1 \qquad (9)$$

woraus integrirt

$$-E\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \tfrac{1}{2}Q' x_1^2 + C \qquad (10)$$

Zur Bestimmung der Constante hat man nicht wie ad 1 für den Punkt A die Tangente für den Punkt B in AB belegen, man muſs vielmehr wie in der Untersuchung II. auf den Punkt C zurückgehen. Bezeichnet man hier den Winkel zwischen der Tangente in C und AB für den Anfangspunkt B der Abscissen mit α so ist dessen trigonometrische Tangente, wenn für x_1 der Werth $c - a$ gesetzt wird, $= \frac{\partial y_1}{\partial x_1}$. Man hat also

$$-E\,tg\,\alpha = \tfrac{1}{2}Q'(c-a)^2 + C \qquad (11)$$

von dieser die Gleichung 10 abgezogen gibt

$$E\left(tg\,\alpha - \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right) = \tfrac{1}{2}Q'[x_1^2 - (c-a)^2] \qquad (12)$$

Noch einmal integrirt entsteht

$$E(x_1\,tg\,\alpha - y_1) = \tfrac{1}{2}Q'[\tfrac{1}{3}x_1^3 - (c-a)^2 x_1] \qquad (13)$$

wo die Constante fortfällt, weil für $x_1 = 0$ auch $y_1 = 0$ wird.

Um diese Gleichung für den Bogen BH' wie die für den Bogen AH ohne Hülfe von $tg\,\alpha$ zu erhalten hat man für Gl. 7, wenn man $x = a$ setzt,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = tg\,(180^\circ - \alpha) = -tg\,\alpha$$

also $$-E\,tg\,\alpha = \tfrac{1}{2}a^2 P - (ac - \tfrac{1}{2}a^2)Q' \qquad (14)$$

Diese Gleichung mit x_1 multiplicirt, Gleichung 13 addirt und entgegengesetzte Vorzeichen genommen gibt die Gleichung für den Bogen BH'

$$Ey' = -\tfrac{1}{2}a^2 x_1 P + (\tfrac{1}{2}c^2 x_1 - \tfrac{1}{3}x_1^3)Q' \qquad (15)$$

3. Setzt man, wie in II, 3, die Ordinate $CD = b$, so erhält man aus Gleichung 8 die Gleichung für den Bogen AC wenn man darin $x = a$ setzt, und aus Gleichung 14 die Gleichung für den Bogen BC wenn man $x_1 = (c - a)$ setzt. Man erhält die Gleichung für AC:

$$Eb = \tfrac{1}{3}a^3 P - \tfrac{1}{2}a^2(3c - a)Q' \qquad (16)$$

die Gleichung für BC

$$Eb = -\tfrac{1}{2}a^2(c-a)P + \tfrac{1}{6}(c-a)(2c^2+2ac-a^2)Q' \quad (17)$$

Setzt man beide Werthe von Eb einander gleich, so erhält man

$$Q' = \tfrac{1}{2}\frac{a^2}{c^2}(3c-a)P \quad (18)$$

und aus Gleichung 4

$$Q = \frac{1}{2c^3}[c(a+1)(2c^2-3a^2)+(c+1)a^2]P \quad (19)$$

4. Setzt man in Gleichung 5 den Werth von Q' aus Gleichung 18, so hat man

$$\frac{E}{r} = (x-a)P + (c-x)\frac{a^2}{2c^3}(3c-a)P$$

oder

$$\frac{E}{r} = \frac{2c^3-a^2(3c-a)}{2c^3}\cdot Px + \frac{a^2(3c-a)-2ac^2}{2c^3}\cdot P \quad (20)$$

Der grösste Werth, den a annehmen kann ist $= c$, d. h. das Gewicht P wird in B aufgehängt, und es entsteht für $a=c$ auch für $\frac{E}{r}$ der Werth $= 0$.

Schreibt man für a den Werth $(c-z)$ so entsteht aus Gl. 20

$$\frac{E}{r} = z\cdot\frac{c^2-z^2}{2c^3}Px - z\frac{(c-z)^2}{2c^2}P$$

Da z kleiner angenommen ist als c, so ist das erste Glied mit dem Factor Px immer positiv, das zweite Glied mit dem Factor P immer subtractiv. Die Gleichung 20 ist also zu schreiben

$$\frac{E}{r} = \frac{2c^3-c^3(3c-a)}{2c^3}\cdot Px - \frac{2ac^2-a^2(3c-a)}{2c^2}P \quad (21)$$

Für $a=0$ also für den Punkt A wird $\frac{E}{r}$ negativ, es ist also r negativ und folglich ist in A die Krümmung der Linie entgegengesetzt, d. h. nach oben zu erhaben.

Wächst aber x von 0 ab, so wird $\frac{E}{r}$ grösser und es entsteht ein Werth $\frac{E}{r}=0$ wenn beide Glieder rechts einander gleich werden also für

$$x = c\cdot\frac{2ac^2-a^2(3c-a)}{2c^3-a^2(3c-a)} \quad (22)$$

Für dieses x wird $r=\pm\infty$ und der Punkt der Linie für x in Gleichung 22 ist ein Wendungspunkt. Von hier ab wächst $\frac{E}{r}$ und r nimmt ab bis zu $x=a$ wo $\frac{E}{r}$ am grösten und also r am kleinsten wird. Und zwar ist für $x=a$

$$\frac{E}{r} = \frac{a^2}{2c^3}(c-a)(3c-a)P$$

und r in C

$$= \frac{2c^3E}{a^2(c-a)(3c-a)P} \quad (23)$$

Aus Gleichung 21 hat man für $x=0$ also für den Punkt A

$$\frac{E}{r^1} = -\frac{2ac^2-a^2(3c-a)}{2c^3}P \quad (24)$$

und

$$r^1 = -\frac{2c^3E}{a(2c-a)(c-a)}P \quad (25)$$

5. Zur Vergleichung beider Krümmungshalbmesser r^1 in A und r in C hat man aus 23 und 25

$$r^1 : r = a(3c-a) : c(2c-a)$$

r^1 in A wächst von $a=0$ bis $a=\frac{1}{2}c$ wo r^1 ein Maximum ist; a kann aber höchstens $= c$ werden und r^1 wird um so grösser, also die Krümmung in A um so geringer, je weiter P von A entfernt ist. r in C nimmt mit dem Wachsthum von a immerfort ab.

Beide Krümmungen sind einander gleich wenn

$$a(3c-a) = c(2c-a)$$

oder wenn $a^2-4ac+2c^2=0$

also wenn $a = c(2-\sqrt{2})$

6. Setzt man die Werthe von Q' (Gl. 18) in Gl. 14, so erhält man

$$E\,tg\,\alpha = \frac{a^2}{4c^3}(c-a)(4ac-2c^2-a^2)P$$

wo B Anfangspunkt der Abscissen ist, also die Winkelspitze des spitzen $\angle\alpha$ von C nach B hin liegt. Nimmt man α wie ad II. für den Anfangspunkt A der Abscissen, dann ist

$$E\,tg\,\alpha = \frac{a^2}{4c^3}(c-a)(2c^2+a^2-4ac)P$$

der $\angle\alpha$ bleibt so lange spitz als $2c^2+a^2>4a$

Für $2c^2+a^2=4ac$

also für $a = c(2 - \sqrt{2}) = 0{,}586\,c$ wird $\alpha = 180°$, d. h. die Tangente läuft ∓ mit AB.

Es ist dies nach No. 5 derselbe Ort C für das Gewicht P, in welchem die Krümmung der entgegengesetzten in A gleich ist.

IV. Eine elastische Linie ist mit ihren horizontal liegenden Endpunkten A, B unbeweglich befestigt. Wenn in einem Punkt C der Linie das Gewicht P aufgehängt wird, so kommt die Linie aus der geradlinigen Richtung AB in die gekrümmte ACB, die Gleichung für diese Linie aufzustellen.

Wegen der Befestigungsweise senkt die Linie sich so, dafs die gerade Linie AB an beiden Endpunkten A und B Tangente an derselben wird.

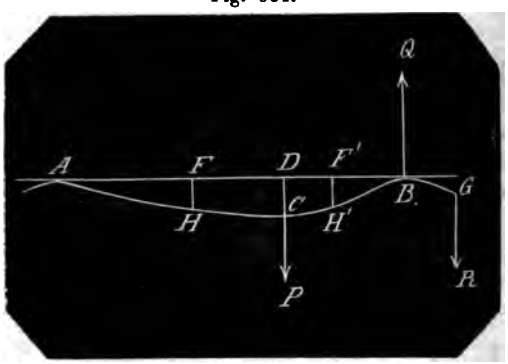
Wie in den vorigen Untersuchungen seien $AB = c$, die Coordinaten AD und $DC = a$ und b, die Coordinaten AF und FH für einen beliebigen Punkt H seien x und y. In B sei wie bei A in No. III. statt der Befestigung eine Unterlage und in der Entfernung $BG = 1$ in G das Gewicht R angebracht, der Druck auf diese Unterstützung $= Q$.

Bei vorausgesetzter nur geringer Krümmung hat man dann wie No. II. und III. Gleichung 1:

$$\frac{E}{r} = Q(c - x) - P(a - x) - R(c + 1 - x) \quad (1)$$

$r = \dfrac{1}{-\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$ also $\dfrac{E}{r} = -E\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ und integrirt

Fig. 604.



$$-E\frac{\partial y}{\partial x} = (cx - \tfrac{1}{2}x^2)\,Q - (ax - \tfrac{1}{2}x^2)\,P - [(c + 1)\,x - \tfrac{1}{2}x^2]\,R, \quad (2)$$

wo die Constante wegfällt, weil für $x = 0$ auch $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ als trigonometrische Tangente des Winkels zwischen ACB und $AB = 0$ ebenfalls $= 0$ wird.

Noch einmal integrirt gibt

$$-Ey = (\tfrac{1}{2}cx^2 - \tfrac{1}{6}x^3)\,Q - (\tfrac{1}{2}ax^2 - \tfrac{1}{6}x^3)\,P - [\tfrac{1}{2}(c + 1)x^2 - \tfrac{1}{6}x^3]\,R \quad (3)$$

wo wiederum die Constante wegfällt, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ wird.

Setzt man wieder den Winkel den die Tangente in C mit AB bildet $= \alpha$, so hat man $x = AD = a$ gesetzt aus Gl. 2 und 3

$$-E\,tg\,\alpha = (ca - \tfrac{1}{2}a^2)\,Q - \tfrac{1}{2}a^2\,P - [(c + 1)\,a - \tfrac{1}{2}a^2]\,R \quad (4)$$

$$-E\,b = (\tfrac{1}{2}ca^2 - \tfrac{1}{6}a^3)\,Q - \tfrac{1}{3}a^3\,P - [\tfrac{1}{2}(c + 1)\,a^2 - \tfrac{1}{6}a^3]\,R \quad (5)$$

Sind für einen Punkt H' zwischen B und C die Ordinaten $BF' = x_1$ und $F'H' = y_1$ so hat man

$$-E\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} = x_1 Q - (x_1 + 1)\,R \quad (6)$$

hieraus, 2mal hinter einander integrirt

$$-E\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \tfrac{1}{2}x_1^2 Q - (\tfrac{1}{2}x_1^2 + x)\,R \quad (7)$$

$$-Ey_1 = \tfrac{1}{6}x_1^3 Q - (\tfrac{1}{6}x_1^3 + \tfrac{1}{2}x_1^2)\,R \quad (8)$$

wo aus denselben Gründen wie für Gl. 2 und 3 in beiden Malen die Constante wegfällt.

Setzt man $x_1 = c - a$ so wird $\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} = tg\,(180° - \alpha) = -tg\,\alpha$ und $y_1 = b$.

Man hat demnach aus den Gleichungen 7 und 8

$$E\,tg\,\alpha = \tfrac{1}{2}(c - a)^2 Q - (c - a)\left(\frac{c - a}{2} + 1\right)R \quad (9)$$

$$-Eb = \tfrac{1}{6}(c - a)^3 Q - \tfrac{1}{6}(c - a)^2(c - a + 3)\,R \quad (10)$$

Addirt man beide Gleichungen 4 und 9 und setzt beide Werthe $-Eb$ in Gleichung 5 und 10 einander gleich, so erhält man reducirt

$$0 = c^2 Q - a^2 P - c(c+2) R \quad (11)$$
$$0 = c^3 (c-3a) Q + 2a^3 P - c(c^2 - 3ac + 3c - 6a) R \quad (12)$$

Multiplicirt man Gl. 11 mit $(c-3a)$, zieht dann die Gleichung von der Gl. 12 ab, so erhält man

$$R = \frac{a^2}{c^2}(c-a) P \quad (13)$$

und hiernach aus Gleichung 11

$$Q = \frac{a^2}{c^3}(c^2 - ac + 3c - 2a) P \quad (14)$$

Durch die Einsetzung der Werthe Q und R in die Gleichungen 1 und 6 lassen sich alle Krümmungshalbmesser durch P und E ausdrücken. Ebenso findet man die Ordinaten y und y_1 durch E und P bestimmt, wenn man die Werthe von Q und R in die Gleichungen 3 und 8 substituirt.

Setzt man die Werthe von Q und R in die Gleichung 4 oder 9 so erhält man

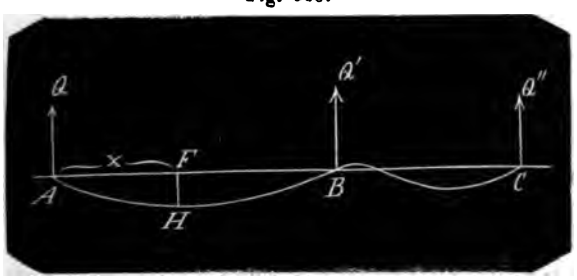
$$E\,tg\,\alpha = \frac{(c-2a)(c-a)^2 a^2}{2c^3}$$

Diese Tangente bleibt positiv so lange $a < \frac{1}{2}c$; für $a = \frac{1}{2}c$ wird sie $= 0$, d. h. die Tangente läuft $\parallel$ mit der Abscissenlinie AB.

V. Eine materielle Linie ist in den 3 horizontal liegenden Punkten A, B, C unterstützt, auf dieselbe ist ein Gewicht gleichmäfsig vertheilt, so dafs auf die Längeneinheit das Gewicht G kommt. Die Pressungen Q, Q', Q'' zu bestimmen, welche die 3 Unterstützungen A, B, C zu erleiden haben wenn die Krümmungen der Linie nur gering sind.

Ist die Länge $AC = c$, $AB = a$ und sind die Coordinaten AF, FH eines beliebigen Punktes $H = x$ und y so hat man wie früher

Fig. 605.



$$\frac{E}{r} = -E\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = Qx - \tfrac{1}{2}Gx^2$$

integrirt:

$$-E\frac{\partial y}{\partial x} = \tfrac{1}{2}Qx^2 - \tfrac{1}{6}Gx^3 + C \quad (1)$$

Ist der Winkel der Tangente in B mit $AB = a$ so ist für $x = a$

$$-E\,tg\,\alpha = \tfrac{1}{2}Qa^2 - \tfrac{1}{6}Ga^3 + C \quad (2)$$

Beide Gleichungen mit einander verbunden

$$-E\left(\frac{\partial y}{\partial x} - tg\,\alpha\right) = \tfrac{1}{2}Q(x^2 - a^2) - \tfrac{1}{6}G(x^3 - a^3) \quad (3)$$

und noch einmal integrirt

$$-E(y - x\,tg\,\alpha) = \tfrac{1}{6}Q(x^3 - 3a^2 x) - \tfrac{1}{24}G(x^4 - 4a^3 x) \quad (4)$$

wo $C = 0$, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ ist.

Für $x = a$ wird ebenfalls $y = 0$ und man erhält daher zur Bestimmung von $tg\,\alpha$

$$E\,tg\,\alpha = -\tfrac{1}{3}a^2 Q + \tfrac{1}{8}a^3 G \quad (5)$$

2. Nimmt man die Gleichungen für den zweiten Bogen BC und C zum Anfangspunkt der Abscissen, so erhält man ganz dieselben wenn man $c - a$ für a, Q'' für Q und $180° - \alpha$ für α, also $-tg\,\alpha$ für $tg\,\alpha$ setzt; also für Gleichung 5 erhält man

$$-E\,tg\,\alpha = -\tfrac{1}{3}(c-a)^2 Q'' + \tfrac{1}{8}(c-a)^3 G \quad (6)$$

Durch Addition beider Gleichungen verschwindet E und $tg\,\alpha$ und man erhält

$$0 = -\tfrac{1}{3}a^2 Q - \tfrac{1}{3}(c-a)^2 Q'' + \tfrac{1}{8}[a^3 + (c-a)^3] G \quad (7)$$

Aufser dieser Gleichung liefert noch die Statik 2 Gleichungen

$$Q + Q' + Q'' = cG \quad (8)$$

und den Punkt B zum Momentenpunkt genommen:

$$aQ - \tfrac{1}{2}a^2 G = (c-a) Q'' - \tfrac{1}{2}(c-a)^2 G \quad (9)$$

Aus Gleichung 9 erhält man

$$Q'' = \frac{aQ + \tfrac{1}{2}(c^2 - 2ac)}{c-a} G \quad (10)$$

Substituirt man diesen Werth in Gl. 7, so erhält man

$$Q = \frac{a^2 + 3ac - c^2}{8a} G \quad (11)$$

Diesen Werth in Gleichung 10 substituirt, gibt

$$Q'' = \frac{a^2 - 5ac + 3c^2}{8(c-a)} G \quad (12)$$

und endlich mit Hülfe von Gleichung 8, 11 und 12.

$$Q' = \frac{c(c^2 + ac - a^2)}{a(c-a)} G \quad (13)$$

3. Setzt man den Werth von Q in Gl. 5. oder den von Q'' in Gl. 6 so erhält man

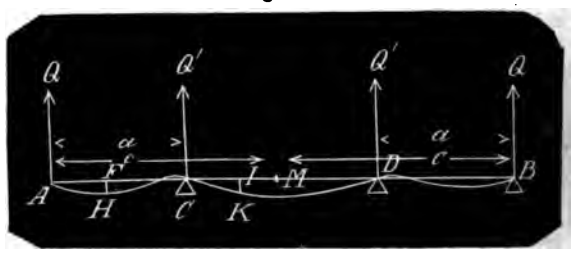
$$E\,tg\,\alpha = \tfrac{1}{24}a(c-a)(c-2a)$$

Dieser Ausdruck wird $=0$ bei $a=\frac{1}{2}c$, wenn also die Unterstützung B zwischen A und C in der Mitte liegt. Für $a>\frac{1}{2}c$ wird $tg\,\alpha$ negativ, sie macht also in B mit AB einen spitzen Winkel und daher tritt die elastische Linie nach C hin über die gerade Linie BC hinaus. Bei $a<\frac{1}{2}c$ ist $tg\,\alpha$ positiv, sie macht also in B mit AB einen stumpfen, mit BC einen spitzen Winkel und tritt daher von B ab nach A hin über die Linie AB hinaus.

VI. Eine materielle Linie AB von der Länge $2c$, deren Gewicht wie ad $V=2cG$ gleich vertheilt ist, liegt auf 4 horizontal befindlichen Unterstützungen, von denen jede der mittleren von der nächsten äufseren Unterstützung um die Länge $AC=DB=a$ entfernt ist, die Pressungen zu bestimmen, welche jede der Unterstützungen zu erleiden hat, wenn die Krümmungen der Linie nur gering sind.

Die Pressungen auf A und B seien $=Q$, die auf C und $D=Q'$; wie früher sei $AF=x$, $FH=y$, so hat man die Gleichung in Beziehung auf den Momentenpunkt H

Fig. 606.



$$-E\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{E}{r}=xQ-\tfrac{1}{2}x^2G \qquad (1)$$

diese Gleichung integrirt

$$-E\frac{\partial y}{\partial x}=\tfrac{1}{2}Qx^2-\tfrac{1}{6}Gx^3+\text{Constante} \qquad (2)$$

Der Winkel den die geometrische Tangente an der elastischen Linie in dem Punkt C bildet, sei α

so ist für $x=a$; $\dfrac{\partial y}{\partial x}=tg\,\alpha$

hieraus entsteht

$$-E\,tg\,\alpha=\tfrac{1}{2}a^2Q-\tfrac{1}{6}a^3G+\text{Constante} \qquad (3)$$

Eliminirt man die Constante, indem man Gl. 2 von 3 abzieht, so erhält man

$$E\left(\frac{\partial y}{\partial x}-tg\,\alpha\right)=\tfrac{1}{2}Q\,(a^2-x^2)-\tfrac{1}{6}G\,(a^3-x^3) \qquad (4)$$

noch einmal integrirt

$$E\,(y-x\,tg\,\alpha)=\tfrac{1}{6}\,(3a^2x-x^3)\,Q-\tfrac{1}{24}\,(4a^3x-x^4)\,G \qquad (5)$$

wo für $x=0$ auch $y=0$ und folglich zugleich die Constante $=0$ wird.

Für $x=a$ wird wiederum $y=0$ daher hat man zur Bestimmung der $tg\,\alpha$ aus Gl. 5

$$-E\,a\,tg\,\alpha=\tfrac{1}{3}a^3Q-\tfrac{1}{8}a^4G \qquad (6)$$

2. Für einen Punkt K, dessen Abscisse, von dem Mittelpunkt M aus genommen, $MJ=x_1$ und dessen Ordinate $JK=y_1$ hat man, K zum Momentenpunkt genommen:

$$-E\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2}=\frac{E}{r_1}=(c-x_1)\,Q+(c-a-x_1)\,Q'-\tfrac{1}{2}(c-x_1)^2G \qquad (7)$$

diese Gleichung integrirt gibt

$$-E\frac{\partial y_1}{\partial x_1}=(cx_1-\tfrac{1}{2}x_1^2)\,Q+[(c-a)x_1-\tfrac{1}{2}x_1^2]\,Q'+\tfrac{1}{6}(c-x_1)^3\,G+C \qquad (8)$$

Für $x'=c-a$, also für den Punkt C wird der Winkel, den die geometrische Tangente mit AB bildet $=180^\circ-\alpha$ folglich dessen trigonometrische Tangente $=-tg\,\alpha=\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}$. Man hat demnach:

$$E\,tg\,\alpha=\tfrac{1}{2}\,(c^2-a^2)\,Q+\tfrac{1}{2}\,(c-a)^2\,Q'+\tfrac{1}{6}a^3G+C \qquad (9)$$

Gleichung 8 von 9 abgezogen eliminirt Constante und es entsteht

$$E\left[\frac{\partial y_1}{\partial x_1}+tg\,\alpha\right]=\tfrac{1}{2}\,[(c-x_1)^2-a^2]\,Q+\tfrac{1}{2}\,(c-a-x_1)^2\,Q'+\tfrac{1}{6}\,[a^3-(c-x_1)^3]\,G \qquad (10)$$

Noch einmal integrirt entsteht

$$E[y_1 + x_1 \operatorname{tg}\alpha] = -\tfrac{1}{6}[(c-x_1)^3 + 3a^2x_1]Q - \tfrac{1}{6}(c-a-x_1)^3 Q + \tfrac{1}{24}[4a^3x_1 + (c-x_1)^4]G + C \quad (11)$$

Zur Bestimmung der Constante hat man für $x_1 = (c-a)$ also für den Punkt C, $y_1 = 0$ daher

$$E(c-a)\operatorname{tg}\alpha = -\tfrac{1}{6}(3a^2c - 2a^3)Q + \tfrac{1}{24}(4a^3c - 3a^4)G + C \quad (12)$$

Diese Gleichung durch Subtraction mit Gl. 11 verbunden gibt eine Gleichung für y_1 bei gegebenem x_1 wenn Q und Q' bekannt sind, welches dann die Gleichung für den Bogen CD ist, wie Gleichung 5 für den Bogen AC gilt.

3. Um Q und Q' zu finden ist Gl. 10 anzuwenden. Da nämlich M die Mitte zwischen C und D ist, und da in C und D die Pressungen gleich grofs sind, so ist der unter M befindliche Curvenpunkt ganz gewifs zwischen C und D der tiefste und dessen Tangente läuft ∓ mit AB. Setzt man also $x_1 = 0$, so wird $\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = 0$. Man hat demnach aus Gl. 10:

$$E\operatorname{tg}\alpha = \tfrac{1}{2}(c^2 - a^2)Q + \tfrac{1}{2}(c-a)^2 Q' - \tfrac{1}{6}(c^3 - a^3)G \quad (13)$$

Diese Gleichung mit a multiplicirt und zu Gleichung 6 addirt, gibt reducirt

$$0 = 4(3c^2 - a^2)Q + 12(c-a)^2 Q' - (4c^3 - a^3)G \quad (14)$$

Nun liefert noch die Statik die Gleichung

$$2Q + 2Q' = 2cG$$

woraus

$$Q' = cG - Q \quad (15)$$

Diesen Werth in Gl. 14 gesetzt ergibt

$$Q = \frac{24ac^2 - 12a^2c - 8c^3 - a^3}{8a(3c - 2a)}G$$

Diesen Werth in Gleichung 15 gesetzt ergibt

$$Q' = \frac{8c^3 + a^3 - 4a^2c}{8a(3c - 2a)}G$$

4. Setzt man den Werth von Q in Gl. 6, so erhält man

$$-E\operatorname{tg}\alpha = \frac{a(24ac^2 - 21a^2c - 8c^3 + 5a^3)}{24(3c - 2a)}G$$

Für $a = c$ wird $E\operatorname{tg}\alpha$, also $\operatorname{tg}\alpha = 0$.

Um zu erfahren, für welche Werthe von a, $\operatorname{tg}\alpha$ positiv und negativ wird, setze man $a = c - z$ so erhält man

$$E\operatorname{tg}\alpha = \frac{z(c-z)}{24(c+2z)}(5z^2 + 6cz - 3c^2)$$

Für $z = \frac{-3 + \sqrt{24}}{5}c = 0{,}3798 \cdot c$ wird die Klammergröfse und mit derselben $\operatorname{tg}\alpha = 0$; also wenn $a = 0{,}6202\,c$ (nahe $\frac{2}{3}c$) also wenn AC nahe $\frac{2}{3}AM$ oder wenn $AC : CM$ nahe $= 3:2$ so fallen die Tangenten in C und D mit AB zusammen.

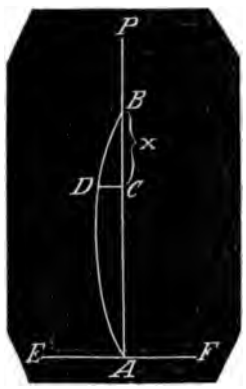
Für $a < 0{,}6202\,c$ wird $\operatorname{tg}\alpha$ positiv, der Bogen bei C hat die Lage des Bogens AB und die Linie tritt zwischen C und A über die Linie AB hinweg. Für $a > 0{,}6202$ wird $\operatorname{tg}\alpha$ negativ, der Bogen bei C hat die Lage des Bogens von H nach C hin und die Linie tritt von C nach M hin über AB hinweg. Dasselbe findet bei D statt.

Für $z = \frac{1}{5}c = 0{,}4c$ wird $E\operatorname{tg}\alpha = +\frac{1}{900}c^3$

Für $z = 0{,}35\,c$ wird $E\operatorname{tg}\alpha = -0{,}00908\ldots c^3$

VII. Eine materielle elastische Linie AB steht senkrecht auf einer festen Ebene EF. Eine auf B in der Richtung der Linie angebrachte Kraft P unterhält eine geringe Krümmung derselben, so dafs die Linie die Form BDA annimmt, die Bedingungen des Gleichgewichts zu finden.

Fig. 607.



Es sei die Länge $AB = c$, AB die Abscissenlinie, B der Anfangspunkt; für einen beliebigen Punkt D sei $BC = x$, $CD = y$. Dann ist für den Punkt D das Moment der Kraft $= Py$, das Moment der

Elasticität $= \frac{E}{r} = -E\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ und für's Gleichgewicht $yP = -E\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

Um die Gleichung integriren zu können ist für die linke Seite der Factor $\frac{\partial y}{\partial x}$ erforderlich. Man schreibt demnach

$$Py\frac{\partial y}{\partial x} = -E\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -E\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\partial\frac{\partial y}{\partial x}$$

und integrirt

$$\tfrac{1}{2}y^2P = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\cdot E + \text{Constante}$$

Zur Bestimmung der Constante sei die Ordinate $y = b$ für $x = \frac{1}{2}c$, dann ist zugleich hier die gröfste Krümmung, die Tangente des Mittelpunkts läuft $\parallel$ mit AB, für diesen Fall ist also die trigonometrische Tangente $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ folglich hat man

$$\tfrac{1}{2}b^2P = \text{Constante}$$

und $$\tfrac{1}{2}y^2P = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)E^2 + \tfrac{1}{2}b^2P$$

oder $$-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 E = (y^2 - b^2)P$$

mit $-E$ dividirt und die $\surd$ ausgezogen

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \sqrt{\frac{P}{E}(b^2 - y^2)}$$

Die Auflösung durch Integrirung gibt eine transcendente unauflösliche Gleichung für y, daher schreibt man

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{\frac{P}{E}(b^2 - y^2)}}$$

woraus

$$x = \int\frac{1}{\sqrt{\frac{P}{E}(b^2-y^2)}}\partial y = \sqrt{\frac{E}{P}}\int\frac{\partial y}{\sqrt{b^2-y^2}}$$

und integrirt

$$x = \sqrt{\frac{E}{P}}\ arc\ sin\ \frac{y}{b}$$

wo die Constante fortfällt, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ also auch $arc\ sin\ 0 = 0$ ist.

Und gegenseitig

$$\frac{y}{b} = sin\left(x\cdot\sqrt{\frac{P}{E}}\right)$$

oder $$y = b\ sin\left(x\cdot\sqrt{\frac{P}{E}}\right)$$

Für $x = l$ wird y wieder $= 0$

folglich ist $sin\ l\sqrt{\frac{P}{E}} = 0$

und da $l\sqrt{\frac{P}{E}}$ nicht gleich 0 s so ist es $= n$

Aus $$l\sqrt{\frac{P}{E}} = n$$

folglich $$P = \frac{n^2E}{l^2}$$

Diese Kraft ist also das Maafs wirkenden Festigkeit einer m elastischen Linie, d. h. das der Kraft, welche die Linie verm Elasticität der Krümmung entg Jeder gröfseren Kraft widersteht vermöge ihrer respectiven Festi

Elemente sind die einfach eines Ganzen. In der Natur si kanntlich diejenigen Stoffe, mit noch nicht gelungen ist, sie i einzelne untereinander und von zen ganz verschiedene Stoffe zu zerlegen, als: der Sauerstoff, stoff, das Eisen.

In der Mathematik sind Eler nächst die einfachsten Grundlel Disciplin, als die Elemente der tik, der Geometrie, der Differe nung u. s. w. Man versteht unter Elemente die einzelnen die man zu einem Lehrgebäude ander verbindet; als in der A die auf einander folgend eingefü griffe von Zahl, deren Vermehr dition), deren Verminderung (Sul deren wiederholte gleich vielfa mehrung und Verminderung (M tion und Division) das Potenzir ciren, die Proportionen, Reihen u. s. w. In der Geometrie: di von Linie, von gerader und L., von Flächen, von ebenen u men Flächen; die verschieden der geraden Linien und Ebenen schief, parallel u. s. w.

Elemente der Bahn eines Cometen, Doppelsterns sind Bestimmungsstücke durch we deren Lauf und die Dimensio Bahnen zu berechnen im Stan wie man zu genauer Kenntnifs und der Dimensionen einer el radlinigen Figur einer ganz be Anzahl von Bestimmungsstücke ohne dafs diese die Elemente genannt werden.

Planeten und Kometen beweg einer Ebene und zwar in eine in welcher die Sonne einer d Brennpunkte ist. Die Beobachtu Bahn geschieht von der Erde

innerhalb der Ekliptik, derjenigen Ebene, in welcher die Erde um die in einem Brennpunkt befindliche Sonne sich bewegt, so dafs die Sonne ein gemeinschaftlicher Brennpunkt beider Bahnen oder vielmehr aller Planeten- und Kometenbahnen ist.

Das 1te Element der Bahn eines anderen Planeten ist also die in dem vorhandenen Ebenenwinkel gegebene Lage dessen Bahn gegen unsre Ekliptik (die Neigung der Bahn). Das 2te Element bildet die beiden Orte des aufsteigenden und absteigenden Knotens, der Punkte in welchen jene Bahn unsere Ekliptik durchschneidet und deren geradlinige Verbindung die gemeinschaftliche Durchschnittslinie (die Knotenlinie) beider Bahnen bildet.

Die Form und Gröfse der Planetenbahn sind gegeben, wenn man die grofse und die kleine Axe deren Ellipse kennt; aber auch deren Lage mufs noch bekannt sein. Man findet diese aus der Beobachtung des Perihels, dem Ort des Planeten in seiner (gröfsten) Sonnennähe, indem die gerade Verbindungslinie zwischen Perihel und Sonne und deren Verlängerung die grofse Axe der Ellipse angiebt. Die (gröfste) Sonnenferne, das Aphel ist bei den der Sonne entfernteren Planeten und den Kometen nicht zu beobachten. Daher mufs die Länge der grofsen Axe, die der kleinen Axe oder die Gröfse der Excentricität (Entfernung zwischen Sonne und Mittelpunkt der Ellipse) durch Beobachtungen des Gestirns an verschiedenen Orten und der Zeitpunkte für die Einnahme dieser Orte in Beziehung auf den Ort des Perihels und die Zeit des Eintritts in dasselbe berechnet werden.

Elevationswinkel, s. u. Depressionswinkel.

Elimination ist für die Auflösung der Gleichungen das Verfahren, 2 oder mehrere Gleichungen mit eben so vielen unbekannten Gröfsen dergestalt zu verbinden, dafs eine der unbekannten ausgeschieden wird.

Aus n Gleichungen mit n Unbekannten erhält man zunächst $n-1$ Gleichungen mit $(n-1)$ Unbekannten. Behandelt man diese wie die ersten n Gleichungen, so erhält man $(n-2)$ Gleichungen mit $(n-2)$ Unbekannten u. s. f. bis man nur eine Gleichung mit nur einer Unbekannten erhält, die man entwickelt.

Man erhält eine zweite Unbekannte wenn man den erhaltenen Werth der letzten Unbekannten in eine der vorher erhaltenen 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten setzt und entwickelt; u. s. f., eine 3te und nach und nach alle n Unbekannten entwickelt.

2. Es sei gegeben:

$$\begin{aligned} 1.\ & ax + by = A \\ 2.\ & \alpha x + \beta y = B \end{aligned}$$

Um y zu eliminiren multiplicire Gl. 1 mit β, Gl. 2 mit b, und ziehe die eine von der anderen ab. Man erhält

$$\begin{aligned} a\beta x + b\beta y &= \beta A \\ b\alpha x + b\beta y &= bB \\ \hline (b\alpha - a\beta)x &= bB - \beta A \end{aligned}$$

woraus $$x = \frac{bB - \beta A}{b\alpha - a\beta}$$

Setzt man diesen Werth von x in Gl. 1 (oder 2) so erhält man

$$a \cdot \frac{bB - \beta A}{b\alpha - a\beta} + by = A$$

hiernach

$$b(b\alpha - a\beta)y = (b\alpha - a\beta)A - abB + a\beta A$$

woraus $$y = \frac{\alpha A - aB}{b\alpha - a\beta}.$$

Man kann aber auch dasselbe Eliminationsverfahren wie für x, auch für y anwenden, nämlich Gl. 1 mit α und Gl. 2 mit a multipliciren und abziehen.

3. Ist gegeben $\begin{aligned} 1.\ & ax + by = A \\ & \alpha x - \beta y = B \end{aligned}$

so multiplicirt man wie vorher und addirt die Gleichungen um y zu eliminiren.

Man erhält $$x = \frac{\beta A + bB}{a\beta + b\beta}$$

$$y = \frac{\alpha A - aB}{b\alpha + a\beta}$$

4. Sind 3 Gleichungen gegeben

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= A \\ a'x + b'y + c'z &= B \\ a''x + b''y + c''z &= C \end{aligned}$$

so multiplicirt man, um z zu eliminiren, die erste Gleichung mit $c'c''$, die zweite mit cc'', die dritte mit cc'. Man erhält

$$\begin{aligned} ac'c''x + bc'c''y + cc'c''z &= c'c''A \\ a'cc''x + b'cc''y + c'cc''z &= cc''B \\ a''cc'x + b''cc'y + c''cc'z &= cc'C \end{aligned}$$

Nun die erste Gleichung von der zweiten und der dritten abgezogen (oder die zweite von der ersten und der dritten oder die dritte von der ersten und der zweiten) gibt

$$(a'cc'' - ac'c'')\,x + (b'cc'' - bc'c'')\,y = cc''B - c'c''A$$
$$(a''cc' - ac'c'')\,x + (b''cc' - bc'c'')\,y = cc'C - c'c''A$$

Mit diesen beiden Gleichungen wird nun verfahren wie No. 2: Um y zu eliminiren multiplicirt man die erste Gleichung mit $(b''cc' - bc'c'')$, die zweite Gleichung mit $(b'cc'' - bc'c'')$; Um x zu eli miniren multiplicirt man die erste Glei chung mit $(a''cc' - ac'c'')$, die zweite mi $(a'cc'' - ac'c'')$, subtrahirt und erhält:

$$x = \frac{(b''cc' - bc'c'')(cc''B - c'c''A) - (b'cc'' - bc'c'')(cc'C - c'c''A)}{(a'cc'' - ac'c'')(b''cc' - bc'c'') - (a''cc' - ac'c'')(b'cc'' - bc'c'')}$$
$$y = \frac{(c''cc' - ac'c'')(cc''B - c'c''A) - (a'cc'' - ac'c'')(cc'C - c'c''A)}{(b'cc'' - bc'c'')(a''cc' - ac'c'') - (b''cc' - bc'c'')(a'cc'' - ac'c'')}$$

Ganz auf dieselbe Weise verfährt man bei 4 gegebenen Gleichungen.

5. Die Eliminationen und Entwickelungen werden weitläufiger, wenn die Unbekannten in Potenzen, und besonders wenn sie in ungleichen Potenzen vorkommen.

Beispiel:

$$ax^2 + by + cy^2 = 0 \quad (1)$$
$$\alpha x + \beta y + \gamma y^2 = 0 \quad (2)$$

Man multiplicirt die erste Gleichung mit γ, die zweite mit c und erhält

$$a\gamma x^2 + b\gamma y + c\gamma y^2 = 0$$
$$c\alpha x + c\beta y + c\gamma y^2 = 0$$

also $a\gamma x^2 - c\alpha x + (b\gamma - c\beta)y = 0$

woraus $y = \frac{c\alpha x - a\gamma x^2}{b\gamma - c\gamma} = \frac{a\gamma x^2 - c\alpha x}{c\beta - b\gamma}$ (3

Multiplicirt man nun die erste Gl. mi α, die zweite mit ax so erhält man

$$a\alpha x^2 + b\alpha y + c\alpha y^2 = 0$$
$$a\alpha x^2 + a\beta xy + a\gamma xy^2 = 0$$

also $(a\beta x - b\alpha)y + (a\gamma x - c\alpha)y^2 = 0$

oder $a\beta x - b\alpha + (a\gamma x - c\alpha)y = 0$

woraus $y = \frac{a\beta x - b\alpha}{c\alpha - a\gamma x}$ (

Gl. 3 und 4 einander gleich gesetz die Nenner fortgeschafft und geordn gibt

$$x^3 - 2\frac{ac}{a\gamma}x^2 + \frac{c^2\alpha + ac\beta^2 - ab\beta\gamma}{a^2\gamma^2}x + \frac{b(c\beta - b\gamma)}{a\gamma^2} = 0$$

Ellipse ist eine Linie der zweiten Ordnung oder eine Curve der ersten Klasse, indem sie einer Gleichung vom zweiten Grade zugehört; ferner ist sie eine Kegelschnittslinie. Aus beiden Gesichtspunkten, dem analytischen und dem synthetischen oder dem arithmetischen und dem geometrischen ist sie bereits in diesem Wörterbuch behandelt.

In dem Art. „Curven" III. Abtheilung, pag. 172, ist die der ganzen Klas von Curven zu Grunde liegende allg meine Gleichung (1) aufgestellt:

$$ay^2 + bxy + cx^2 + \delta y + ex + f = 0 \quad (1$$

Nachdem zunächst die Bedeutung u der Einfluſs der einzelnen Coefficient gezeigt worden, ist unter der Bedingu beliebig groſser Abscissen (x) der Gl chung die Form gegeben (Gl. 9):

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2a}\left[-\left(b + \frac{d}{x}\right) \pm \sqrt{(b^2 - 4ac) + \frac{2(bd - 2ae)}{x} + \frac{d^2 - 4af}{x^2}}\right] \quad (1$$

und die beliebige Gröſse der Abscisse x bis zur Unendlichkeit ausgedehnt, wo dann die Glieder, welche x im Nenner haben, als 0 fortfallen und die Gleichung die allgemeine Form annimmt (Gl. 10):

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right) \quad (3)$$

Hierauf sind für sämmtliche Curven derselben Klasse 3 mögliche Fälle gezeigt:

1. $b^2 > 4ac$
2. $b^2 < 4ac$
3. $b^2 = 4ac$

woraus nun 3 mögliche Formen von Cu ven nachgewiesen worden, welche f gende 3 Gleichungen (19, 20, 21, pag. 17 aussprechen:

1. $y^2 = Ax + Bx^2$
2. $y^2 = Ax - Bx^2$
3. $y^2 = Ax$

Für die erste und die dritte Gleichung sind bei unendlichen Abscissen auch unendliche Ordinaten vorhanden; für die zweite Gleichung sind für unendliche Abscissen Ordinaten unmöglich. Die erste Gleichung gehört der Hyperbel, die dritte der Parabel und die zweite der Ellipse. Für $B = 1$ geht die Ellipse in den Kreis über (s. pag. 175 Gl. 22).

Die allgemeine Gleichung der Ellipse, wenn deren Axe die Abscissenlinie und der Scheitel der Anfangspunkt der Abscissen ist, hat man also

$$y^2 = Ax - Bx^2 \qquad (4)$$

2. In No. 15, pag. 176 ist, um auf den Character der Kegelschnitte specieller zu kommen, Bezug genommen auf den Art. „Brennpunkte der Kegelschnitte" Bd. I, pag. 420 mit Fig. 257. Hier werden die Constructionen der Kegelschnitte aus dem Kegel bildlich dargestellt und die Hauptformeln für dieselben abgeleitet, wobei die Axen die Abscissenlinien mit dem Scheitel F als Anfangspunkt gelten. Die Abtheilung B. handelt speciell von der Ellipse.

Mit Bezug auf die Bezeichnung Fig. 257 ist die rechtwinklige Coordinatengleichung entwickelt (pag. 422, Gl. (1)).

$$y^2 = k \cdot \frac{\sin\beta'}{\cos(\frac{1}{2}\alpha)}\, x - \frac{\sin(\beta'-\alpha)\sin\beta'}{\cos^2(\frac{1}{2}\alpha)}\, x^2 \qquad (5)$$

Hier ist k der Durchmesser EF des Kegels in dem Scheitel F der Ellipse, α der $\angle EAF$ des Axenquerschnitts an der Kegelspitze und β' der $\angle DFJ'$ den die Ellipsenaxe FJ' mit der zu dem Scheitel F gehörenden Kegelseite AD bildet; oder den Coefficient des ersten Gliedes durch p ausgedrückt (Gl. (2)).

$$y^2 = px - \frac{\sin(\beta'-\alpha)}{k\cos(\frac{1}{2}\alpha)}\, px^2 \qquad (6)$$

An diese Gleichung knüpft sich der Grund für den Namen (Ellipse) der Curve. Ferner ist die Länge $(2a)$ der grofsen Axe erwiesen:

$$2a = \frac{\cos(\frac{1}{2}\alpha)}{\sin(\beta'-\alpha)}\, k = \frac{k^2}{p} \cdot \frac{\sin\beta'}{\sin(\beta'-\alpha)} = \frac{\cos^2(\frac{1}{2}\alpha)}{\sin\beta'\sin(\beta'-\alpha)}\, p \qquad (7)$$

Endlich ist durch die Formeln nachgewiesen, dafs die Ellipse aus 2 congruenten Hälften besteht, wie Bd. II, pag. 175, No. 13 aus der Formel 1:

$$y^2 = Ax - Bx^2$$

und dafs $\frac{A}{B}$ und $\frac{A}{\sqrt{B}}$ die beiden Axen der E. sind.

Für die halbe grofse Axe zur Abscisse, also für $x = \frac{\cos(\frac{1}{2}\alpha)}{2\sin(\beta'-\alpha)}\, k$ erhält man in y die halbe kleine Axe c.

Mithin hat man aus Gl. 2 die kleine Axe

$$2c = k\sqrt{\frac{\sin\beta'}{\sin(\beta'-\alpha)}} = \frac{p\cos(\frac{1}{2}\alpha)}{\sqrt{\sin\beta'\cdot\sin(\beta'-\alpha)}} \qquad (8)$$

Aus Gl. 4 und 5 geht hervor, dafs die beiden Axen sich verhalten

$$2a : 2c = \cos(\tfrac{1}{2}\alpha) : \sqrt{\sin\beta' \cdot \sin(\beta'-\alpha)} \qquad (9)$$

Wenn das 4te Glied $>$ ist als das 3te, so ist $2c$ die grofse, $2a$ die kleine Axe. So wie Bd. II, pag. 175, No. 13 nachgewiesen ist, dafs für $B < 1$ die grofse Axe $= \frac{A}{B}$, die kleine $= \frac{A}{\sqrt{B}}$ und für $B > 1$ die grofse Axe $\frac{A}{\sqrt{B}}$ die kleine $\frac{A}{B}$ wird.

Es stimmt diese Angabe mit der Proportion 9 überein; denn es ist

$$B = \frac{\sin(\beta'-\alpha)}{\cos(\frac{1}{2}\alpha)} \cdot \frac{p}{k} = \frac{\sin\beta' \cdot \sin(\beta'-\alpha)}{\cos^2(\frac{1}{2}\alpha)}$$

Mithin hat man aus $B \lessgtr 1$

$$\cos^2(\tfrac{1}{2}\alpha) \gtrless \sin\beta' \cdot \sin(\beta'-\alpha)$$

3. Die Gleichungen 4 bis 6 für die Ellipse haben die Beschränkung, dafs die Abscissenlinie die Axe mit dem Scheitel als Anfangspunkt ist und dafs die Ordinaten rechtwinklig sind. Eine allgemeine Gleichung für die Ellipse ist aber eine solche, die eine gegen die Axe ganz beliebig liegende Abscissenlinie, einen beliebigen Anfangspunkt hat und dessen Ordinaten einen beliebigen Winkel mit der Abscissenlinie bilden. Nur liegt das ganze Coordinatensystem mit der Ellipse in einerlei Ebene. Für diesen ganz allgemeinen Fall nimmt die Coordinatengleichung die Formel 1 angegebene Form an.

Es ist jedoch erforderlich, dafs diese allgemeine Gleichung mit ihren Coefficienten a bis f die Gesetze einschliefse, welche für die Ellipse die speciellen Gleichungen 5 und 6 aussprechen, für die übrigens die einfachere Gleichung 4 gelten kann.

Das Verfahren für die Aufstellung solcher allgemeinen Gleichung mit Berücksichtigung der der Curve zugehörenden speciellen Gröfsenelemente gibt Bd. II, pag. 176, No. 16 an, mit Berufung auf

den Art. „Coordinatengleichung“ mit Fig. 515.

Man hat sich nun für den vorliegenden Fall die Linie XX' als die Axe der Ellipse zu denken, A als den Scheitel, D als einen beliebigen Ellipsenpunkt, statt der schiefen Ordinate $BD = y$ ein von D auf XX' gefälltes Loth y, für welches dann die Gleichungen 4 bis 6 gelten wenn die E. aus dem Kegel Bd. I, pag. 421, Fig. 257 construirt ist.

Nun wird die Coordinatengleichung entwickelt, für welche die beliebige Linie CF Abscissenlinie, der beliebige Punkt E in derselben der Anfangspunkt ist, die Abscisse u für den Ellipsenpunkt D ist so gewählt, dafs alle Ordinaten, wie die Ordinate FD für den Punkt D, mit der Abscissenlinie den $\angle \delta$ bilden und die Ordinaten wie FD werden mit z bezeichnet. β ist ein Winkel, um die Abscissenlinie der Lage nach, b eine Länge, um den Anfangspunkt E der Abscissen und a eine Länge, um den Scheitel A der Ellipse zu bestimmen.

In den ermittelten allgemeinen Gleichungen von pag. 176, No. 16 ab ist dort angegebenen Gründen der Buchs a mit p, der Buchstabe b mit g tauscht worden. Ferner sind in di Gleichungen die Formel 4 stehenden rameter A und B eingeführt, unter chen man die in Gleichung 5 und 6 für gesetzten speciellen Gröfsen sich denken hat.

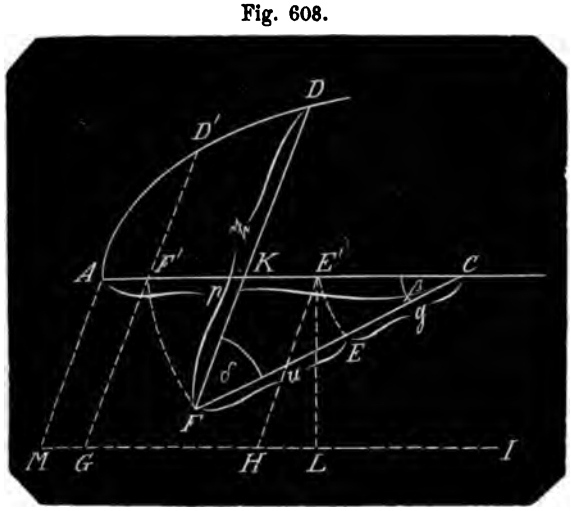
4. Der Art. Curven hat von No bis No. 22 (pag. 178 bis 180) die chungen für alle 4 Kegelschnitte wickelt, welche zuerst nachzulesen möchten. Es sollen nun die der El angehörenden Gleichungen hier geor und auf nebenstehende Figur bez zusammengestellt und noch einige an Fälle hinzugefügt werden.

A, B bedeuten die Parameter der gemeinen Gleichung (4)

$$y^2 = Ax - Bx^2$$

AC ist die Axe, A der Scheitel, EF die Abscisse, $FD = z$ die Ordinate. allgemeine Gleichung für den Ellip punkt D (pag. 177, III. Formel 31) i

Fig. 608.



I. $[\sin^2(\beta+\delta) + B\cos^2(\beta+\delta)]\,z^2 - 2\,[\sin(\beta+\delta)\sin\beta - B\cos(\beta+\delta)\cos\beta$
$+(\sin^2\beta + B\cos^2\beta)u^2 - [2g\sin(\beta+\delta)\sin\beta + A\cos(\beta+\delta) - 2B\cos(\beta+\delta)(p-g\cos$
$+ [2g\sin^2\beta + A\cos\beta - 2B\cos\beta(p - g\cos\beta)]\,u + g^2\sin^2\beta - A(p - g\,c$
$+ B(p - g\cos\beta)^2 = 0$

Dreht man die Abscissenlinie CF um C in der Axe AC, so kommt F i E in E', der Anfangspunkt E' der Abscissen ist um die Länge $p - g$ vom Sch A entfernt. Ist dann $\angle D'F'C = \delta$, $E'F' = u$, $F'D' = z$, so hat man für den E senpunkt D' die Gleichung (pag. 177, III, Formel 35).

II. $(\sin^2\delta + B\cos^2\delta)\,z^2 + 2B\cos\delta \cdot zu + Bu^2 - [A - 2B(p-g)]\cos\delta \cdot z$
$+ [A - 2B(p-g)]\,u - A(p-g) + B(p-g)^2 = 0.$

Setzt man in diese Gleichung $p - g = 0$; $u = -u$, so erhält man die Gleichung für die in der Axe liegende Abscissenlinie, für den Scheitel A als Anfangspunkt der Abscissen und den Coordinatenwinkel δ

III. $(\sin^2\delta + B\cos^2\delta)z^2 - 2B\cos\delta \cdot zu + Bu^2 - A\cos\delta \cdot z - Au = 0$

Nimmt man in der beliebigen Entfernung $E'L = k$ eine der Axe parallele GJ, verlängert $D'F'$ bis G, setzt $GD' = z'$, so ist für Gl. II.

$D'F' = z = z' - F'G = z' - k\,\mathrm{cosec}\,\delta$

Setzt man daher in Gl. II. $z - k\,\mathrm{cosec}\,\delta$ für z, so erhält man die Gleichung, wenn die Abscissenlinie in dem Abstand k mit der Axe $\neq$ läuft, der Art, dafs die Axe zwischen Curve und Abscissenlinie liegt. Bezeichnet man die Länge $AE' = p - g$ mit k, zieht von E' eine gerade Linie $E'H$ unter dem Coordinatenwinkel $E'HJ = \delta$, so ist H der Anfangspunkt der Abscissen, für den Punkt D' die Länge $HG = u$. Die Gleichung für den Ellipsenpunkt D' ist:

IV. $(\sin^2\delta + B\cos^2\delta)z^2 + 2B\cos\delta \cdot zu + Bu^2 - [2k\sin\delta + (A + 2kB\cot\delta - 2Bs)\cos\delta]z$
$+ [A - 2B(s + k\cot\delta)]u + (1 + B\cot^2\delta)k^2 + (A - 2Bs)\cot\delta \cdot k - As + Bs^2 = 0$

Setzt man in diese Gleichung $z = 0$, $u = -u$, so erhält man die Gleichung der Ellipse für dieselbe Abscissenlinie GJ, denselben Coordinatenwinkel δ, und mit dem unter dem Scheitel A belegenen Anfangspunkt M.

V. $(\sin^2\delta + B\cos^2\delta)z^2 - 2B\cos\delta \cdot zu + Bu^2 - [2k\sin\delta + (A + 2kB\cot\delta)\cos\delta]z$
$- (A - 2Bk\cot\delta)u + (1 + B\cot^2\delta)k^2 + A\cot\delta \cdot k = 0$

Setzt man in diese Gleichung $k = 0$, so erhält man Gleichung III.

Setzt man in Gleichung IV. für k den Werth $(-k)$ so erhält man die Gleichung unter denselben Bedingungen mit IV., nur dafs die Abscissenlinie in dem Abstand k von der Axe entgegengesetzt, nämlich nach der Curvenhälfte zu liegt.

VI. $(\sin^2\delta + B\cos^2\delta)z^2 + 2B\cos\delta \cdot zu + Bu^2 + [2k\sin\delta - (A - 2kB\cot\delta - 2Bs)\cos\delta]z$
$+ [A - 2B(k - k\cot\delta)]u + (1 + B\cot^2\delta)k^2 - (A - 2Bs)\cot\delta\, k - As + Bs^2 = 0$

Setzt man in diese Gleichung $k\sin\delta$ für k, so erhält man die Gleichung Bd. II., pag. 177, Formel 39.

Setzt man in den vorstehenden Gleichungen I. bis VI. den Coordinatenwinkel, in I. $\angle(\beta + \delta)$, in II. bis VI. $\angle\delta = 90°$ so erhält man Gleichungen unter denselben Voraussetzungen nur dafs die Ordinaten mit der Axe normal sind.

Aus Gl. I. entsteht:

VII. $z^2 - 2\sin\beta \cdot zu + (\sin^2\beta + B\cos^2\beta)u^2 - 2g\sin\beta \cdot z$
$+ [2g\sin^2\beta + A\cos\beta - 2B\cos\beta(p - g\cos\beta)]u + g^2\sin^2\beta - A(p - g\cos\beta)$
$+ B(p - g\cos\beta)^2 = 0$

Aus Gl. II. entsteht:

VIII. $z^2 + Bu^2 + [A - 2B(p - g)]u - A(p - g) + B(p - g)^2 = 0$

Aus Gl. III. entsteht:

IX. $z^2 + Bu^2 - Au = 0$

Aus Gl. IV. entsteht:

X. $z^2 + Bu^2 - 2kz + (A - 2Bs)u + k^2 - As + Bs^2 = 0$

Aus Gl. V. entsteht:

XI. $z^2 + Bu^2 - 2kz - Au + k^2 = 0$

Aus Gl. VI. entsteht:

XII. $z^2 + Bu^2 + 2kz + (A - 2Bs)u + k^2 - As + Bs^2 = 0$

5. Bd. II, pag. 178, No. 23 von I bis VI. sind für alle Kegelschnitte die Werthe der in der allgemeinen Gleichung (1) vorkommenden Coefficienten erwiesen und angegeben. Es sollen diese Werthe für die Ellipse allein hier zusammengestellt werden und zwar in Beziehung auf No. 4 mit Fig. 608 für die Gleichung

$az^2 + bzu + cu^2 + dz + eu + f = 0$

I. Der Coefficient a ist $= 1$, wenn $\angle DKC = (\delta + \beta)$, d. h. der Winkel, den die Ordinate mit der Axe bildet, ein Rechter ist. Dividirt man daher eine mit az^2 gegebene allgemeine Gleichung

für die Ellipse mit a, so verwandelt man dieselbe in eine Gleichung, für welche die Ordinaten mit der Ellipsenaxe normal sind.

Da diese einfache Operation überall auszuführen ist, und die übrigen Coefficienten vereinfacht, so sollen die Gleichungen von I. bis VI. für die Untersuchung der Coefficienten aufser Betracht bleiben. Die letzten 6 Gleichungen gehören also der allgemeinen Gleichung an

$$s^2 + bsu + cu^2 + ds + eu + f = 0$$

II. Der Coefficient b von su ist = dem doppelten negativen Sinus des Winkels (β) zwischen der Abscissenlinie und der Axe (Gl. VII.). Wo die Abscissenlinie in der Axe oder mit derselben ∓ liegt, ist $\beta = 0$ und das Glied mit su fällt fort. (Gl. VIII. bis XII.).

III. Der Coefficient c von u^2 ist ebenfalls nur von demselben Winkel β abhängig und $= \sin^2\beta + B\cos^2\beta$.

Wo die Abscissenlinie in der Axe oder derselben ∓ liegt, wird $c = B$. Dieser Coefficient kann nie $= 0$ werden und das Glied mit u^2 kann nie ausfallen.

IV. Der Coefficient d von s ist = der doppelten Entfernung des Anfangspunkts der Abscissen von der Axe, negativ wenn die Axe zwischen der Ellipsenhälfte und der Abscissenlinie liegt (Gl. VII., X., XI.); positiv wenn die Abscissenlinie zwischen der Axe und der Ellipse liegt (Gl. XII.). Ist die Axe zugleich Abscissenlinie, so fällt das Glied mit s fort.

V. Der Coefficient e von u hängt von 3 Elementen ab; 1. von dem $\angle\beta$ zwischen der Abscissenlinie und der Axe; 2. von der Entfernung des Anfangspunkts E' oder der Projection des Scheitelpunkts E auf die Axe von dem Scheitelpunkt A der Ellipse und 3. von den Parametern A und B.

Ist die Abscissenlinie die Axe, der Scheitel der Anfangspunkt der Abscissen (Gl. IX.) oder läuft die Abscissenlinie mit der Axe ∓ und ist die Projection des Anfangspunkts auf die Axe der Scheitel (Gl. XI.), so ist $e = -A$.

Ist die Abscissenlinie die Axe und die Entfernung des Anfangspunkts vom Scheitel $= p - g = s$ (Gl. VIII.); oder läuft die Abscissenlinie mit der Axe ∓ und ist die Projection des Anfangspunkts auf die Axe vom Scheitel um die Länge s entfernt, so ist $e = +A - 2Bs$ (Gl. X., XII.).

In Gl. VII. ist $p - g\cos\beta = s$; für A und B stehen deren Projectionen $A\cos\beta$ und $B\cos\beta$; hierzu kommt das Glied $2g\sin^2\beta$ und es ist

$$e = 2g\sin^2\beta + A\cos\beta - 2B\cos\beta(p$$

VI. Der Coefficient f, das Glied wird = 0, wenn der Anfa der Curve zugleich Anfangspu Abscissen ist. (Gl. IX.)

Liegt die Abscissenlinie ∓ und ist die Projection des Anfar auf die Axe der Scheitel (Gl. X e = dem Quadrat des Abstandes Parallelen

$$e = h^2$$

Liegt die Abscissenlinie in der Anfangspunkt der Abscisse Entfernung $p - g = s$ vom Scheitel so ist

$$e = -As + Bs^2$$

Läuft die Abscissenlinie in fernung h ∓ der Axe und ist jection des Anfangspunkts auf um s von dem Scheitel entfernt XII.) so ist

$$e = h^2 - As + Bs^2$$

Setzt man $h^2 - As + Bs^2 = 0$, man dasjenige s bei gegebener dasjenige h bei gegebenem s fü der Anfangspunkt in einem Ellip liegt.

Setzt man in der allgemeins chung VII. die Entfernung g s Anfangspunkts von der Axe $= h_1$; die Entfernung der Projection fangspunkts vom Scheitel $= s$ s ganz allgemein

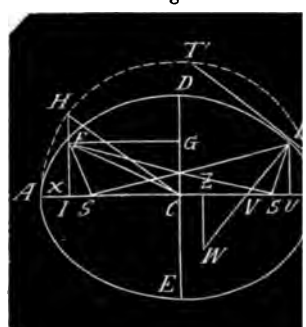
$$f = h_1^2 - As + Bs^2$$

In Band II., pag. 180, No. 25 534 wird die geometrische Cor der Parameter A und B gezeigt

6. Setzt man nach No. 2.

$\frac{A}{B}$ = der grofsen Axe AB:

Fig. 609.



$\frac{A}{\sqrt{B}}$ = der kleinen Axe $DE = 2c$

so erhält man

$$A = \frac{2c^2}{a}$$

$$B = \frac{c^2}{a^2}$$

Diese Werthe in Gleichung 4 gesetzt und geordnet gibt

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(2ax - x^2) \qquad (10)$$

Ist nun für den Ellipsenpunkt L (Fig. 609), $BU = x$, $UL = y$, LT die Tangente, LV die Normale, so ist auch UT die Subtangente, VU die Subnormale.

Bd. II., pag. 185 mit Fig. 536, welche in Fig. 609 mit begriffen ist, sind nun aus Gl. 10 folgende Formeln entwickelt

1. $tg\,\alpha = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{a-x}{y}$ (11)

2. *Subtg* $UT = \frac{2ax - x^2}{a-x} = \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{y^2}{a-x}$ (12)

3. *Tang* $LT = \frac{y}{a-x} \cdot \sqrt{\left(\frac{a^2}{c^2}y\right)^2 + (a-x)^2}$ (13)

4. *Subnorm* $VU = \frac{c^2}{a^2}(a-x)$ (14)

5. *Norm* $LV = \sqrt{y^2 + \left[\frac{c^2}{a^2}(a-x)\right]^2}$ (15)

Bd. II., pag. 186 gibt in Gleichung 9 die Formel für den Halbmesser $r = LW$ des Krümmungskreises für den Punkt L; in Gl. 10 die Formel für die Abscisse $a = ZU$ des Mittelpunkts W und in Gl. 11 die für die Ordinate $b = ZW$ desselben. Setzt man in diese Formeln die speciellen Werthe ein, nämlich aus

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

I. $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{a-x}{y}$

II. $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{c^4}{a^2 y^3}$

so erhält man

6. $LW = r = -\frac{[a^4y^2 + c^4(a-x)^2]^{\frac{3}{2}}}{a^4c^4}$ (16)

7. $ZU = a = x + \frac{(a^2-c^2)y^2 + c^4}{a^2c^2}(a-x)$ (17)

8. $ZW = \beta = -\frac{a^2-c^2}{c^4}y^3$ (18)

9. Nimmt man die Abscissen vom Mittelpunkt C der Ellipse als Anfangspunkt, bezeichnet für den Punkt L die Abscisse CU mit u, so ist $x = a - u$. Diesen Werth in Gleichung 10 gesetzt gibt

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(a^2 - u^2) \qquad (19)$$

Die in No. 6 entwickelten Grösen durch u statt durch x ausgedrückt erhält man

1. $tg\,\alpha = \frac{a^2}{a^2} \cdot \frac{u}{y}$ (20)

2. *Subtg* $UT = \frac{a^2 - u^2}{u}$ (21)

3. *Tang* $LT = \frac{y}{cu}\sqrt{a^4 - (a^2 - c^2)u^2}$ (22)
$$= \frac{\sqrt{(a^2 - u^2)(a^4 - a^2u^2 + c^2u^2)}}{au}$$

4. *Subnorm* $VU = \frac{c^2}{a^2}u$ (23)

5. *Norm* $LV = \frac{c}{a^2}\sqrt{a^4 - (a^2-c^2)u^2}$ (24)

6. $LW = r = -\frac{(a^4y^2 + c^4u^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4c^4}$ (25)

7. $ZU = a' = a - (a^2 - c^2) \cdot \frac{u^3}{a^4}$ (26)

8. $ZW = b' = \frac{a^2 - c^2}{a^3c}(a^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}$ (27)

8. Nimmt man die Abscissen auf der kleinen Axe DE, die rechtwinkligen Ordinaten $\pm$ der grosen Axe AB, wie $DG = x'$, $GF = y'$, so erhält man zwischen beiden die Gleichung, wenn man in Gl. 10:

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

für y den Werth $(JF = DC - DG) = c - x'$ und für x den Werth $(AJ = AC - FG) = a - y'$ setzt.

$$(y')^2 = \frac{a^2}{c^2}[2cx' - (x')^2] \qquad (28)$$

Desgleichen wenn man die Abscissen u', vom Mittelpunkt C aus, auf der kleinen Axe nimmt, wie $CG = u'$, die Gleichung zwischen u' und y', wenn in Gl. 19:

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(a^2 - u^2)$$

für y der Werth u' und für u der Werth y' oder in Gl. 28 für x' der Werth $c - u'$ gesetzt wird.

$$(y')^2 = \frac{a^2}{c^2}[c^2 - (u')^2] \qquad (29)$$

9. Gibt man der Gl. 6, No. 2

$$y^2 = px - \frac{\sin(\beta' - \alpha)}{k\cos(\frac{1}{2}\alpha)}px^2$$

die Form

$$y^2 = p\left(x - \frac{\sin(\beta' - \alpha)}{k\cos(\frac{1}{2}\alpha)}x^2\right)$$

Desgleichen Gl. 10 die Form

$$y^2 = \frac{2c^2}{a}\left(x - \frac{x^2}{2a}\right)$$

so hat man, zugleich nach Gl. 5

$$p = \frac{2c^2}{a} = k \cdot \frac{\sin\beta'}{\cos(\frac{1}{2}\alpha)} \quad (30)$$

und $$y^2 = p\left(x - \frac{x^2}{2a}\right) \quad (31)$$

Ebenso erhält man aus Gl. 28

$$(y')^2 = \frac{2a^2}{c}\left(x' - \frac{(x')^2}{2c}\right)$$

und wenn man $\frac{2a^2}{c}$ mit p' bezeichnet

$$(y')^2 = p'\left(x' - \frac{(x')^2}{2c}\right) \quad (32)$$

Es ist also

$$p : p' = \frac{2c^2}{a} : \frac{2a^2}{c} = c^3 : a^3 \quad (33)$$

Ferner aus Gl. 30:

$$p : 2c = 2c : 2a \quad (34)$$

wie $$p' : 2a = 2a : 2c$$

Man nennt p und p' die Axen; p den Parameter der Axe $2a$, p' rameter der Axe $2c$, und m aus Formel 34 und 35, dafs mittlere geometrische Proporti schen der zweiten Axe und d meter ist (s. Bd. II., pag. 44, Axe).

10. Nimmt man von dem M C auf der grofsen Axe 2 Läng

$$CS = CS' = \sqrt{BC^2 - DC^2} =$$

so haben die beiden Punkte die Eigenschaft, dafs 2 von i nach einem beliebigen Punkt L Linien SL, $S'L$ zusammengenon stant und gleich der grofsen Also

$$SL + S'L = AB = 2a$$

denn man hat

$$(SL)^2 = (SU)^2 + (LU)^2 = (e+u)^2 + y^2 = (e+u)^2 + \frac{c^2}{a^2}(a^2 - u^2)$$
$$= e^2 + 2eu + u^2 + c^2 - \frac{c^2}{a^2}u^2$$

Für $e^2 = a^2 - c^2$ gesetzt gibt

$$(SL)^2 = a^2 + 2eu + \frac{a^2 - c^2}{a^2}u^2$$
$$= a^2 + 2eu + \frac{e^2}{a^2}u^2$$

woraus

$$SL = a + \frac{e}{a}u \quad (36)$$

ferner ist

$$(S'L)^2 = (S'U)^2 + (LU)^2 = (e-u)^2 + y^2$$
$$= a^2 - 2eu + \frac{e^2}{a^2}u^2$$

woraus

$$S'L = a - \frac{e}{a}u$$

also $$SL + S'L = 2a$$

11. Die beiden Linien SL un den mit der Tangente TT' die $\angle SLT'$ und $S'LT$, also auch mi male VL die gleichen $\angle SLV$ u

Denn es ist *Subnorm* $VU = \frac{c^2}{a^2}$

daher

$$SV = SC + CU - UV = e + u$$
$$= e + \frac{a^2 - c^2}{a^2}u = e + \frac{e^2}{a^2}u$$

ferner $$S'V = SS' - SV = 2e - \left(e + \frac{e^2}{a^2}u\right) = e - \frac{e^2}{a^2}u$$

daher $$SV : S'V = e + \frac{e^2}{a^2}u : e - \frac{e^2}{a^2}u = a + \frac{e}{a}u : a - \frac{e}{a}u$$

da nun $SL = a + \frac{e}{a}u$ und $S'L = a - \frac{e}{a}u$

so ist $$SV : S'V = SL : S'L$$

woraus nach Bd. II., pag. 326, No. 17

$$\angle SLV = \angle S'LV$$

also auch $$\angle SLT' = \angle S'LT$$

Wegen dieser letzten Eigenschaft werden Licht- und Wärmestrahlen, von S auf die Peripherie der Ellipse geworfen, nach S' und die von S' ausgeher S reflectirt. Es heifsen daher d S und S' die **Brennpunkte** d 2 gerade Linien von irgend ein wie L der E. nach den Punkten heifsen **zusammengehörige strahlen**. Die Entfernung CS vom Mittelpunkt bis zum Br $= \sqrt{a^2 - c^2}$ heifst die **Excen der E.**

Bd. I., pag. 418, Art. „Brennpunkt der Ellipse“ mit Fig. 256 ist die geometrische Construction der E. aus den Brennpunkten mit Hülfe eines biegsamen Fadens gezeigt; die Brennstrahlen werden hier zu Radii vectoren. Ferner sind in dem Art. mehrere Formeln und Gesetze die E. betreffend aus der Eigenschaft der Brennpunkte hergeleitet.

Setzt man in Gl. 19 für u^2 den Werth $e^2 = a^2 - c^2$, so erhält man die Gleichung für die Ordinate des Brennpunkts nämlich

$$y^2 = \frac{c^4}{a^2}$$

oder
$$y = \frac{c^2}{a} \qquad (39)$$

Es ist mithin die Ordinate des Brennpunkts = dem halben Parameter p (Gl. 30) der grofsen Axe.

12. Setzt man den Brennstrahl (Radius vector) $SL = R$ den $\angle LSB = \eta$ so ist

$$SU = R\cos\eta = CU + CS = u + e$$

woraus
$$u = R\cos\eta - e \qquad (40)$$

Diese Bezeichnung zwischen dem Radiusvector eines elliptischen Bahnpunkts, seinem Winkel mit der grofsen Axe, der Ordinate und der Excentricität findet in der Astronomie Anwendung.

13. Zeichnet man über der grofsen Axe AB einen Halbkreis, verlängert JF bis H so hat man

$$AJ : JH = JH : JB$$

d. i.
$$x : JH = JH : 2a - x$$

oder
$$JH^2 = 2ax - x^2$$

nach Formel 10 ist

$$\frac{a^2}{c^2}\, y^2 = 2ax - x^2$$

hieraus
$$JH^2 = \frac{a^2}{c^2}\, y^2$$

mithin
$$a : c = JH : JF = AC : DC$$

Aus dieser Proportion ergiebt sich eine Constructionsweise für die Ellipse: Ist nämlich die grofse Axe AB und die halbe kleine Axe CD gegeben, so beschreibt man über AB den Halbkreis AKB, zeichnet über AB eine beliebige Anzahl lothrechter Ordinaten wie JH und verlängert BA beliebig. Um nun den in der Linie JH liegenden Ellipsenpunkt zu erhalten zieht man KH bis in die verlängerte BA nach L und von L die gerade Linie nach D, so schneidet diese den Ellipsenpunkt F ab, denn es ist

$$CK\,(=a) : CD\,(=c) = JH : JF$$

14. Sind die Brennpunkte S, S' und die grofse Axe AB gegeben, so zeigt Bd. I., pag. 418, das Mittel, die Ellipse mittelst eines biegsamen Fadens in stetiger Linie zu verzeichnen. Ist dagegen die grofse Axe AB und die halbe kleine Axe CD gegeben und gezeichnet, so beschreibt man aus D mit der halben grofsen Axe AC einen Bogen, der die grofse Axe AB in den Brennpunkten SS' durchschneidet (s. Formel 30) und man kann nun die Construction nach Bd. I., pag. 418 vornehmen.

15. Trägt man von einem beliebigen Ellipsenpunkt F nach der kleinen Axe die Länge $FE = AC = a$, so ist $FK = CD = c$.

Denn zieht man $FG \parallel AC$ so ist

$$FK : FJ = FE : EG$$

oder
$$FK : y = a : \sqrt{a^2 - u^2}$$

oder
$$FK^2 : y^2 = a^2 : a^2 - u^2$$

oder
$$y^2 = \frac{FK^2}{a^2}\,(a^2 - u^2)$$

also nach Gl. 19.

$$FK = c = CD$$

Ist also die grofse Axe $2AC$ und die kleine Axe $2DC$ gegeben, man trägt auf die Kante eines Papierstreifens die Längen FK, FE d. h. AC und CD von einem Punkt F aus ab, rückt diese Länge so dafs der Punkt E immer in der Linie DC und K immer in der Linie AC bleibt,

Fig. 610.

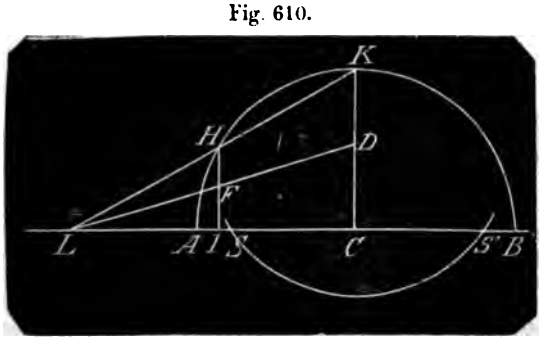
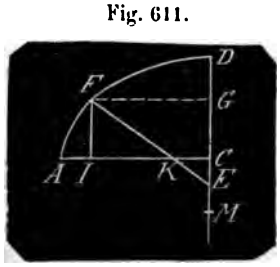


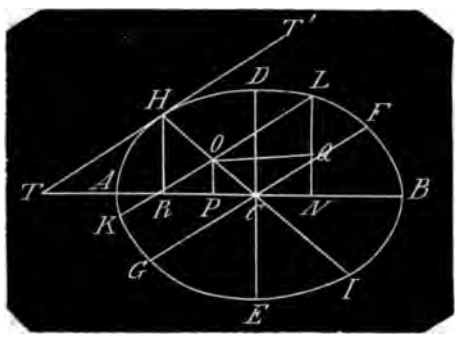
Fig. 611.



so gibt der Punkt F von A bis D beliebig viele Ellipsenpunkte an.

16. Wie die beiden Axen AB, DE sich gegenseitig halbiren, so geschieht dies auch von jeden 2 anderen durch den Mittelpunkt C gezogenen Sehnen, wenn dieselben eine bestimmte Lage zu einander haben. Wie z. B. HJ und FG, indem HJ alle mit FG parallelen Sehnen und FG alle mit HJ parallelen

Fig. 612.



Sehnen halbirt. Wenn man alle diese mit einander und mit FG parallelen Sehnen sich denkt und bis an den Endpunkt H verfolgt, so müssen sie natürlicher Weise bei H in die Tangente übergehen, deshalb ist klar, dafs diese Sehnen der Tangente TT' des Endpunkts H ∦ sein müssen; und es ist dies auch zu beweisen.

Nämlich aus Gl. No. 19:

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(a^2 - u^2)$$

folgt durch Umformung

$$a^2c^2 = c^2u^2 + a^2y^2$$

Ist nun L der betreffende Ellipsenpunkt, so ist $CN = u$, $LN = y$ und

$$a^2c^2 = c^2 \cdot CN^2 + a^2 \cdot LN^2$$

Fällt man nun die Lothe OP auf AB und OQ auf LN,

so ist $CN = PN - CP$

und $LN = OP + LQ$

Nimmt man nun in der Abscissenlinie CH die Abscisse $CO = x$, die Ordinate $OL = y$, den $\angle ACH = \varphi$, $\angle BCF = \psi$,

so ist

$$PN - CP = y\cos\psi - x\cos\varphi$$
$$OP + LQ = x\sin\varphi + y\sin\psi$$

folglich hat man

$$\begin{aligned} a^2c^2 &= c^2(y\cos\psi - x\cos\varphi)^2 + a^2(x\sin\varphi + y\sin\psi)^2 \\ &= c^2[y^2\cos^2\psi - 2xy\cos\psi\cdot\cos\varphi + x^2\cos^2\varphi] \\ &\quad + a^2[x^2\sin^2\varphi + 2xy\sin\varphi\cdot\sin\psi + y^2\sin^2\psi] \end{aligned} \qquad (41)$$

Nun soll die Sehne KL durch CH halbirt werden, also soll $OK = OL$ sein, d. h. es sollen für x zwei gleiche und entgegengesetzte y entstehen. Dies ist aber nur möglich wenn die Glieder mit dem Factor y in Summa $= 0$ werden. Die Bedingung gleicher entgegengesetzter Ordinaten ist also:

$$-2c^2xy\cos\varphi\cdot\cos\psi + 2a^2xy\sin\varphi\cdot\sin\psi = 0$$

woraus $$\frac{c^2}{a^2} = tg\,\varphi\cdot tg\,\psi \qquad (42)$$

Für den Ellipsenpunkt H ist $CR = u$, $HR = y$

Nun ist $$tg\,\varphi = tg\,ACH = \frac{HR}{CR} = \frac{y}{u}$$

daher $$tg\,\psi = \frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{u}{y}$$

Nun ist aber nach Formel 20

$$tg\,HTC = \frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{u}{y}$$

folglich ist $\angle HTC = \angle BCF$

und $FG \nparallel TT'$

Die beiden obigen Glieder $= 0$ gesetzt wird die erste Gleichung

$$a^2c^2 = c^2(y^2\cos^2\psi + x^2\cos^2\varphi) + a^2(x^2\sin^2\varphi + y^2\sin\psi) \qquad (43)$$

woraus $$y = \pm\sqrt{\frac{a^2c^2 - x^2(c^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi)}{c^2\cos^2\psi + a^2\sin^2\psi}} \qquad (44)$$

Die beiden durch den Mittelpunkt gezogenen Sehnen FG und HJ sind also Durchmesser und heifsen zusammengehörige, conjugirte Durchmesser.

17. Aus Formel 41 hat man

$$y^2 = \frac{c^2 - x^2\left(\frac{c^2}{a^2}\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)}{\frac{c^2}{a^2}\cos^2\psi + \sin^2\psi}$$

oder mit Hülfe von Formel 42:

$$y^2 = \frac{c^2 - x^2\left(\frac{\sin\varphi \cdot \sin\psi}{\cos\varphi \cdot \cos\psi} \cdot \cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)}{\frac{\sin\varphi \cdot \sin\psi}{\cos\varphi \cdot \cos\psi} \cdot \cos^2\psi + \sin^2\psi}$$

oder

$$y^2 = \frac{\cos\varphi}{\cos\psi} \cdot \frac{c^2\cos\psi - x^2\sin\varphi\sin(\varphi+\psi)}{\sin\psi \cdot \sin(\varphi+\psi)} \quad (45)$$

Für $x = 0$ erhält man für y den halben Durchmesser $CF = c'$; nämlich

$$(c')^2 = c^2 \cdot \frac{\cos\varphi}{\sin\psi \cdot \sin(\varphi+\psi)} \quad (46)$$

Für $y = 0$ erhält man für x den halben Durchmesser $CH = a'$ nämlich

$$(a')^2 = c^2 \cdot \frac{\cos\psi}{\sin\varphi \cdot \sin(\varphi+\psi)} \quad (47)$$

Es ist mithin aus Gl. 46 und 47:

$$(a')^2 : (c')^2 = \sin\psi \cdot \cos\psi : \sin\varphi \cdot \cos\varphi$$
$$= \sin(2\psi) : \sin(2\varphi) \quad (48)$$

Setzt man in Gl. 45 für $c^2\cos\varphi$ aus 46 den Werth

$$(c')^2 \cdot \sin\psi \cdot \sin(\varphi+\psi)$$

so erhält man mit Hülfe von Gl. 48:

$$y^2 = [(a')^2 - x^2] \cdot \frac{\sin\varphi \cdot \cos\varphi}{\sin\psi \cdot \cos\psi}$$

folglich nach Formel 48

$$y^2 = \frac{(c')^2}{(a')^2}[(a')^2 - x^2] \quad (49)$$

und hieraus

$$x^2 = \frac{(a')^2}{(c')^2}[(c')^2 - y^2] \quad (50)$$

18. Setzt man in Formel 46 und 47 aus Formel 42 für c^2 den Werth $a^2 tg\varphi \cdot tg\psi$ so erhält man

$$(c')^2 = a^2 \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos\psi \cdot \sin(\varphi+\psi)} \quad (51)$$

$$(a')^2 = a^2 \cdot \frac{\sin\psi}{\cos\varphi \cdot \sin(\varphi+\psi)} \quad (52)$$

19. Aus Formel 46 und 47 hat man

$$(a')^2 \times (c')^2 = c^4 \cdot \frac{\cos\varphi \cdot \cos\psi}{\sin\varphi \cdot \sin\psi \cdot \sin^2(\varphi+\psi)}$$

hieraus

$$a' \times c' \cdot \sin(\varphi+\psi) = c^2\sqrt{\cot\varphi \cdot \cot\psi}$$

und mit Hülfe von Formel 39

$$a' \times c' \times \sin(\varphi+\psi) = a \cdot c \quad (53)$$

$(\varphi+\psi)$ ist der Coordinatenwinkel LOC.

Es ist also das Product zweier conjugirten Durchmesser mit dem Sinus des Coordinatenwinkels constant und gleich dem Product beider Axen.

20. Aus No. 18 hat man

$$(a')^2 + (c')^2 = \frac{a^2}{\sin(\varphi+\psi)}\left[\frac{\sin\varphi}{\cos\psi} + \frac{\sin\psi}{\cos\varphi}\right]$$

Die Klammergröfse ist

$$= \frac{\sin\varphi \cdot \cos\varphi + \sin\psi \cdot \cos\psi}{\cos\varphi \cdot \cos\psi}$$

Schreibt man den Zähler:

$$\sin\varphi \cdot \cos\varphi\,(\sin^2\psi + \cos^2\psi) + \sin\psi \cdot \cos\psi\,(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)$$
$$= \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \sin^2\psi + \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \cos^2\psi + \sin\psi \cdot \cos\psi \cdot \sin^2\varphi + \sin\psi \cdot \cos\psi \cdot \cos^2\varphi$$

Fafst das erste mit dem vierten, das zweite mit dem dritten Gliede zusammen, so erhält man

$$\cos\varphi \cdot \sin\psi[\sin\varphi \cdot \sin\psi + \cos\varphi \cdot \cos\psi] + \sin\varphi \cdot \cos\psi[\cos\varphi \cdot \cos\psi + \sin\varphi \cdot \sin\psi]$$
$$= (\cos\varphi \cdot \sin\psi + \sin\varphi \cdot \cos\psi)(\cos\varphi \cdot \cos\psi + \sin\varphi \cdot \sin\psi) = \sin(\varphi+\psi)\cos(\varphi-\psi)$$

folglich ist $(a')^2 + (c')^2 = a^2 \cdot \frac{\cos(\varphi-\psi)}{\cos\varphi \cdot \cos\psi} = a^2(1 + tg\varphi \cdot tg\psi)$

Also mit Hülfe von Formel 42:

$$(a')^2 + (c')^2 = a^2 + c^2 \quad (54)$$

d. h. die Summe der Quadrate je 2 conjugirter Durchmesser ist constant und gleich der Summe der Quadrate der Axen.

21. Aus 46 und 53 hat man

$$\frac{(c')^2}{(a')^2} = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\psi}$$

daher $c' : a' = c \cdot \cos\varphi : a \sin\psi$

oder $$\frac{c'}{a'} = \frac{c}{a} \cdot \frac{\cos\varphi}{\sin\psi} \quad (55)$$

22. **Rectification der Ellipse.** Die allgemeine Rectificationsformel Bd. II., pag. 191 ist

$$\lambda = \int\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \cdot \partial x + C$$

Nun ist $y^2 = \frac{c^2}{a^2}(2ax - x^2)$

daher $$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{a-x}{y}$$

daher $$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \sqrt{1 + \left(\frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{a-x}{y}\right)^2}$$

Setzt man (Fig. 609) $AJ = x$, $JF = y$, so ist Bogen $AF = \lambda$

und $$AF = \lambda = \int\sqrt{1 + \frac{c^4}{a^4} \cdot \left(\frac{a-x}{y}\right)^2}\,\partial x$$
$$= \int\sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{(a-x)^2}{2ax - x^2}}\,\partial x$$

Um das Differenzial integrirbar zu machen kann man den $\angle HCA$ für die Ordinate JH des Halbkreises $= \beta$ setzen, dann ist $x = a - a\cos\beta$

$$\frac{\partial x}{\partial \beta} = a\sin\beta$$

$$\lambda = \int \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{\cos^2\beta}{1-\cos^2\beta}}\, a\cdot\sin\beta\cdot\partial\beta$$

$$= a\int\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \sin^2\beta - \frac{c^2}{a^2}\sin^2\beta}\,\partial\beta$$

$$= \int\sqrt{c^2 + (a^2-c^2)\sin^2\beta}\,\partial\beta$$

$$\lambda = c\int\sqrt{1+\left(\frac{e}{c}\sin\beta\right)^2}\,\partial\beta \qquad (56)$$

Dieses Integral ist nur näherungsweise aufzulösen, und dies geschieht am geeignetsten, wenn man

$$\sqrt{1+\left(\frac{e}{c}\sin\beta\right)^2} = \left[1+\left(\frac{e}{c}\sin\beta\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

durch den Binomischen Satz in eine Reihe entwickelt. Man hat, wenn man $\frac{e}{c} = n$ setzt

$$\left[1+\left(\frac{e}{c}\sin\beta\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}n^2\sin^2\beta - \frac{1}{8}n^4\sin^4\beta + \frac{1}{16}n^6\sin^6\beta - \frac{5}{128}n^8\sin^8\beta + \frac{7}{256}n^{10}\sin^{10}\beta - \frac{21}{1024}n^{12}\sin^{12}\beta + \ldots\ldots$$

Von jedem dieser Glieder das Integral genommen erhält man

$\int 1 = \beta$

$$\int\frac{1}{2}n^2\sin^2\beta = \frac{1}{2}n^2\left[\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\sin\beta\cdot\cos\beta\right]$$

$$\int -\frac{1}{8}n^4\sin^4\beta = -\frac{1}{8}n^4\left[\frac{3}{8}\beta - \frac{3}{8}\sin\beta\cdot\cos\beta - \frac{1}{4}\sin^3\beta\cdot\cos\beta\right]$$

$$\int\frac{1}{16}n^6\sin^6\beta = \frac{1}{16}n^6\left[\frac{5}{16}\beta - \frac{5}{16}\sin\beta\cdot\cos\beta - \frac{5}{24}\sin^3\beta\cdot\cos\beta - \frac{1}{6}\sin^5\beta\cdot\cos\beta\right]$$

$$\int -\frac{5}{128}n^8\sin^8\beta = -\frac{5}{128}n^8\left[\frac{35}{128}\beta - \frac{35}{128}\sin\beta\cdot\cos\beta - \frac{35}{192}\sin^3\beta\cdot\cos\beta - \frac{7}{48}\sin^5\beta\cdot\cos\beta - \frac{1}{8}\sin^7\beta\cdot\cos\beta\right]$$

$$\int\frac{7}{256}n^{10}\sin^{10}\beta = \frac{7}{256}n^{10}\left[\frac{63}{256}\beta - \frac{63}{256}\sin\beta\cdot\cos\beta - \frac{63}{389}\sin^3\beta\cdot\cos\beta - \frac{21}{160}\sin^5\beta\cdot\cos\beta - \frac{9}{80}\sin^7\beta\cdot\cos\beta - \frac{1}{10}\sin^9\beta\cdot\cos\beta\right]$$

$$\int -\frac{21}{1024}n^{12}\sin^{12}\beta = -\frac{21}{1024}n^{12}\left[\frac{231}{1024}\beta - \frac{231}{1024}\sin\beta\cdot\cos\beta - \frac{231}{1536}\sin^3\beta\cdot\cos\beta - \frac{77}{640}\sin^5\beta\cdot\cos\beta - \frac{33}{320}\sin^7\beta\cdot\cos\beta - \frac{11}{120}\sin^9\beta\cdot\cos\beta - \frac{1}{12}\sin^{11}\beta\cdot\cos\beta\right]$$

Es ist mithin $\frac{\lambda}{c}$ = einer unendlichen Summe unendlicher Reihen von denen die erste den Factor β, die zweite den Factor $\sin\beta\cdot\cos\beta$ u. s. w. hat. Die erste

$$\beta\left(\frac{n^2}{2^2} - \frac{3n^4}{8^2} + \frac{5n^6}{16^2} - \frac{175n^8}{128^2} + \frac{441n^{10}}{256^2} - \ldots\ldots\right)$$

die abwechselnden Vorzeichen machen die Reihe nicht geeignet, zur Berechnung einer Bogenlänge und da diese auch bei den Reihen für die Factoren $\sin\beta\cdot\cos\beta$, $\sin^3\beta\cdot\cos\beta$ u. s. w. vorkommt, so ist eine andere Reihe erwünscht. Man erhält diese, wenn man die obige Wurzelgröfse $\sqrt{c^2 + (a^2-c^2)\sin^2\beta}$ umformt in $\sqrt{a^2 - (a^2-c^2)\cos^2\beta}$

woraus $\lambda = a\int\sqrt{1-\left(\frac{e}{a}\cos\beta\right)^2}\,\partial\beta$

Es entsteht nun die Reihe

$$\frac{\lambda}{a}=\int\Big[1-\tfrac{1}{2}n^2\cos^2\beta-\frac{1}{2\cdot 2^2}n^4\cos^4\beta-\frac{3}{2\cdot 3\cdot 2^3}n^6\cos^6\beta-\frac{3\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 2^4}n^8\cos^8\beta$$
$$-\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 2^5}n^{10}\cos^{10}\beta-\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 2^6}n^{12}\cos^{12}\beta-\ldots..\Big]$$

Nun ist

$$\int 1=\beta$$
$$-\int\tfrac{1}{2}n^2\cos^2\beta=-\tfrac{1}{2}n^2\left(\tfrac{1}{2}\beta+\tfrac{1}{2}\sin\beta\cdot\cos\beta\right)$$
$$-\int\frac{1}{2\cdot 2^2}n^4\cos^4\beta=-\frac{n^4}{2\cdot 2^2}\left(\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{2}\beta+\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{2}\sin\beta\cdot\cos\beta+\tfrac{1}{4}\sin\beta\cdot\cos^3\beta\right)$$
$$-\int\frac{3}{2\cdot 3\cdot 2^3}n^6\cos^6\beta=-\frac{3n^6}{2\cdot 3\cdot 2^3}\left(\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{2}\beta+\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{2}\sin\beta\cdot\cos\beta+\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{1}{4}\sin\beta\cdot\cos^3\beta\right.$$
$$\left.+\tfrac{1}{6}\sin\beta\cdot\cos^5\beta\right)$$
$$-\int\frac{3\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 2^4}n^8\cos^8\beta=-\frac{3\cdot 5\cdot n^8}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 2^4}\left(\tfrac{7}{8}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{2}\beta+\tfrac{7}{8}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{2}\sin\beta\cdot\cos\beta\right.$$
$$+\tfrac{7}{8}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{1}{4}\sin\beta\cdot\cos^3\beta+\tfrac{7}{8}\cdot\tfrac{1}{6}\sin\beta\cdot\cos^5\beta+\tfrac{1}{8}\sin\beta\cdot\cos^7\beta\Big)$$
$$-\int\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 2^5}n^{10}\cos^{10}\beta=-\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot n^{10}}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 2^5}\left(\tfrac{9}{10}\cdot\tfrac{7}{8}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{2}\beta\right.$$
$$+\tfrac{9}{10}\cdot\tfrac{7}{8}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{2}\sin\beta\cdot\cos\beta+\tfrac{9}{10}\cdot\tfrac{7}{8}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{1}{4}\sin\beta\cdot\cos^3\beta$$
$$\left.+\tfrac{9}{10}\cdot\tfrac{7}{8}\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\sin\beta\cdot\cos^5\beta+\tfrac{9}{10}\cdot\tfrac{1}{8}\cdot\sin\beta\cdot\cos^7\beta+\tfrac{1}{10}\sin\beta\cdot\cos^9\beta\right)$$
$$-\int\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 2^6}n^{12}\cos^{12}\beta=-\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot n^{12}}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 2^6}\left[\tfrac{11}{12}\cdot\tfrac{9}{10}\cdot\tfrac{7}{8}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{2}\beta\right.$$
$$+\tfrac{11}{12}\cdot\tfrac{9}{10}\cdot\tfrac{7}{8}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{2}\sin\beta\cdot\cos\beta+\tfrac{11}{12}\cdot\tfrac{9}{10}\cdot\tfrac{7}{8}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{1}{4}\sin\beta\cdot\cos^3\beta$$
$$+\tfrac{11}{12}\cdot\tfrac{9}{10}\cdot\tfrac{7}{8}\cdot\tfrac{1}{6}\sin\beta\cdot\cos^5\beta+\tfrac{11}{12}\cdot\tfrac{9}{10}\cdot\tfrac{1}{8}\sin\beta\cdot\cos^7\beta$$
$$\left.+\tfrac{11}{12}\cdot\tfrac{1}{10}\sin\beta\cdot\cos^9\beta+\tfrac{1}{12}\sin\beta\cdot\cos^{11}\beta\right]$$

Hieraus entsteht

$$\frac{\lambda}{a}=\left(1-\frac{n^2}{2^2}-\frac{3n^4}{8^2}-\frac{5n^6}{16^2}-\frac{175n^8}{128^2}-\frac{441n^{10}}{256^2}-\frac{4851n^{12}}{1024^2}\right)\beta$$
$$-\left(\frac{n^2}{4}+\frac{3n^4}{8^2}+\frac{5n^6}{16^2}+\frac{175n^8}{128^2}+\frac{441n^{10}}{255^2}+\frac{4851\cdot n^{12}}{1024^2}\right)\sin\beta\cdot\cos\beta$$
$$-\left(\frac{n^4}{2\cdot 4^2}+\frac{5n^6}{6\cdot 8^2}+\frac{175n^8}{6\cdot 64^2}+\frac{147n^{10}}{2\cdot 128^2}+\frac{1617n^{12}}{2\cdot 1024^2}\right)\sin\beta\cdot\cos^3\beta$$
$$-\left(\frac{n^6}{96}+\frac{35n^8}{6\cdot 32^2}+\frac{147n^{10}}{10\cdot 64^2}+\frac{1617\cdot n^{12}}{10\cdot 256^2}\right)\sin\beta\cdot\cos^5\beta$$
$$-\left(\frac{5n^8}{32^2}+\frac{63n^{10}}{5\cdot 64^2}+\frac{693n^{12}}{5\cdot 256^2}\right)\sin\beta\cdot\cos^7\beta$$
$$-\left(\frac{7n^{10}}{10\cdot 16^2}+\frac{77n^{12}}{10\cdot 64^2}\right)\sin\beta\cdot\cos^9\beta-\frac{7n^{12}}{64^2}\sin\beta\cdot\cos^{11}\beta-\ldots. \quad (57)$$

Die Constante fällt fort, weil für $\beta=0$ auch $\lambda=0$ wird.

Für $x=a$ wird $\beta=90°=\frac{\pi}{2}$ $\sin\beta=1$, $\cos\beta=0$; λ ist der elliptische Quadrant, für welchen nur die erste Reihe mit dem Factor β zu berechnen ist, während die übrigen Reihen $=0$ werden.

Für $a=5$, $c=3$ ist $e=4$, $n=\frac{4}{5}$.

Man hat den Quadrant

$$\lambda=5(1-0{,}16-0{,}0192-0{,}00512-0{,}001792-0{,}0007225344$$
$$-0{,}000028901376-\ldots..)\frac{\pi}{2}=6{,}386\ldots$$

23. Quadratur der Ellipse. Die allgemeine Quadraturformel für rechtwinklige Coordinaten steht Bd. II., pag. 192 mit Fig. 540

$$F=\int y\,\delta x+C$$

Es ist Formel 10: $y^2=\frac{c^2}{a^2}(2ax-x^2)$

hieraus $F = \text{Ebene } AJF$ (Fig. 609)

$$= \int y\,\delta x = \int \frac{c}{a}\sqrt{2ax - x^2}\,\delta x$$

Nun ist nach der allgemeinen Integralformel:

$$\int \sqrt{ax - bx^2} = -\frac{a - 2bx}{4b}\sqrt{ax - bx^2} + \frac{a^2}{8b\sqrt{b}}\,Arc\,sin\,\frac{-a + 2bx}{a}$$

$$\int y\,\delta x = \frac{c}{a}\int \sqrt{2ax - x^2} = \frac{c}{a}\left[-\frac{a-x}{2}\sqrt{2ax - x^2} + \frac{a^2}{2}\,Arc\,sin\left(-\frac{a-x}{a}\right) + C\right]$$

Für $x = 0$ wird $F = 0$ daher

$$C = +\tfrac{1}{4}\pi a^2$$

daher vollständig

$$F = \frac{c}{a}\left[-\frac{a-x}{2}\sqrt{2ax - x^2} + \frac{a^2}{2}\,Arc\,sin\left(-\frac{a-x}{a}\right) + \tfrac{1}{4}\pi\,a^2\right] \quad (5$$

Für $x = a$ wird F zum elliptischen Quadrant und dieser

$$= \pi\,\frac{c}{a}\cdot\frac{a^2}{4}\,\pi = \tfrac{1}{4}\pi ac \quad (5$$

24. Es ist (Fig. 609) $JF = y = \frac{c}{a}\sqrt{2ax - x^2}$

$$CJ = a - x$$

daher ist das erste Glied des Integrals

$$-\frac{a-x}{2}\cdot\frac{c}{a}\sqrt{2ax - x^2} = -\tfrac{1}{2}CJ \times JF = -\triangle CFJ$$

Wird dies $\triangle$ zu dem Integral hinzugesetzt, so erhält man

$$\text{Ebene } ACF = \tfrac{1}{2}ac\left(\frac{\pi}{2} - arc\,sin\,\frac{a-x}{a}\right) = \tfrac{1}{2}ac \cdot arc \cdot cos\,\frac{a-x}{a} = \tfrac{1}{2}ac \cdot arc \cdot sin\,\frac{x}{a} \quad (6$$

Und da

$$cos\,\frac{a-x}{a} = sin\,\frac{\sqrt{2ax - x^2}}{a} = sin\,\frac{y}{c}$$

so ist auch

$$\text{Ebene } ACF = \tfrac{1}{2}ac \cdot arc\,sin\,\frac{y}{c} \quad (61)$$

25. Nimmt man die Radien von den Brennpunkten aus, so hat man

$$\text{Ebene } AS'F = ACF + CFS'$$
$$ASF = ACF - CFS$$

Es ist die Excentricität $CS = CS' = e$, $FJ = y$

daher $\triangle CFS = \triangle CFS' = \tfrac{1}{2}e \cdot y$

also

$$\text{Ebene } AS'F = \tfrac{1}{2}ac \cdot arc \cdot sin\,\frac{y}{c} + \tfrac{1}{2}ey \quad (62)$$

$$\text{Ebene } ASF = \tfrac{1}{2}ac \cdot arc \cdot sin\,\frac{y}{c} - \tfrac{1}{2}ey \quad (63)$$

26. Es ist für die Astronomie von Wichtigkeit, die Ebenen $AS'F$ und ASF durch a, c, e und die Winkel ASF und $AS'F\,(\eta)$ auszudrücken. Hierzu hat man Gleichung 40, wenn man (Fig. 609) $S'F = R$, $SF = r$ setzt.

1. $u = r\,cos\,\eta' + e$
2. $u = R\,cos\,\eta - e$

Nach Gleichung 36 und 37 hat man

3. $r = a - \frac{e}{a}\,u$
4. $R = a + \frac{e}{a}\,u$

Setzt man die Werthe von u aus und 2 in 3 und 4, so erhält man beide Fälle

5. $a^2 - e^2 = c^2 = r\,(a - e\,cos\,\eta')$
6. $a^2 - e^2 = c^2 = R\,(a - e\,cos\,\eta)$

Nun ist $y = R\,sin\,\eta = r\,sin\,\eta'$

folglich in Gl. 62 und 63

$$\frac{y}{c} = \frac{cR\,sin\,\eta}{R\,(a - e\,cos\,\eta)} = \frac{c\,sin\,\eta}{a - e\,cos\,\eta}$$
$$= \frac{c\,r\,sin\,\eta'}{r\,(a - e\,cos\,\eta')} = \frac{c\,sin\,\eta'}{a - e\,cos\,\eta'}$$

Eben so ist

$$ey = eR\,sin\,\eta = er\,sin\,\eta'$$
$$= \frac{c^2 e\,sin\,\eta}{a - e\,cos\,\eta} = \frac{c^2 e\,sin\,\eta'}{a - e\,cos\,\eta'}$$

Mithin ist nach Gl. 62 und 63

$$\text{Ebene } AS'F = \tfrac{1}{2}ac\,arc\,sin\,\frac{c\,sin\,\eta}{a - e\,cos\,\eta} + \tfrac{1}{2}\,\frac{c^2 e\,sin\,\eta}{a - e\,cos\,\eta} \quad (6$$

$$\text{Ebene } ASF = \tfrac{1}{2}ac \arcsin\frac{c\sin\eta'}{a-e\cos\eta'} + \tfrac{1}{2}\frac{c^2 e\sin\eta'}{a-e\cos\eta'} \tag{65}$$

Der $\angle\eta$ heifst in der Astronomie: die wahre Anomalie (s. d. A.)

24. Bestimmung der Umdrehungsflächen. Bd. II., pag. 194 steht die allgemeine Formel für rechtwinklige Coordinaten

$$F = 2\pi\int y\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} + C$$

Legt man Formel 19 zu Grunde

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(a^2-u^2)$$

so hat man

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{c^2 u}{a^2 y}$$

$$F = 2\pi\int\sqrt{y^2+\left(y\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2} = 2\pi\int\sqrt{y^2+\frac{c^4u^2}{a^4}}\,\partial u$$

$$= 2\pi\int\sqrt{\frac{c^2}{a^4}\left[a^4-(a^2-c^2)u^2\right]} = \frac{2\pi c}{a^2}\int\sqrt{a^4-e^2u^2}\,\partial u$$

daher aus der allgemeinen Integralformel:

$$\int\sqrt{a-bx^2} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{a-bx^2} + \frac{a}{2\sqrt{b}}\,Arc\sin\left[x\sqrt{\frac{b}{a}}\right]$$

$$F = \frac{2\pi c}{a^2}\left[\tfrac{1}{2}u\sqrt{a^4-e^2u^2} + \frac{a^4}{2e}\,Arc\sin\frac{eu}{a^2}\right] + C$$

Dies ist der Ausdruck für die Zone, welche entsteht wenn der Bogen DF (Fig. 609) um die grofse Axe AB sich herum dreht. Da für $u=0$ auch $F=0$ und der Ausdruck für $F=0$ wird, so fällt die Constante fort und es ist

$$\text{Zone durch } DF = \pi\frac{c}{a^2}\left[u\sqrt{a^4-e^2u^2} + \frac{a^4}{e}\,Arc\sin\frac{eu}{a^2}\right] \tag{66}$$

Für $u=a$ entsteht die halbe ellipsoidische Oberfläche, indem der Quadrant AD um die grofse Axe sich dreht:

Oberfläche durch AD

$$= \pi\left(c^2+\frac{a^2c}{e}\arcsin\frac{e}{a}\right) \tag{67}$$

25. Um die Zone F zu finden, welche durch Umdrehung des Bogens AF um die kleine Axe DE entsteht, hat man aus Gl. 29

$$y_1^2 = \frac{a^2}{c^2}(c^2-u_1^2)$$

wo u_1 die Länge CG bedeutet; hieraus

$$F' = 2\pi\int\sqrt{\frac{a^2}{c^2}(c^2-u_1^2)+\frac{a^4}{c^4}u_1^2} = 2\pi\frac{a}{c^2}\int\sqrt{c^4-(c^2-a^2)u_1^2}$$

und da $c<a$ ist

$$F' = 2\pi\frac{a}{c^2}\int\sqrt{c^4+(a^2-c^2)u_1^2}$$

Nach der allgemeinen Integralformel

$$\int\sqrt{a+bx^2} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{a+bx^2} + \frac{a}{2\sqrt{b}}\,logn\left[x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2}\right]$$

hat man

$$F' = 2\pi\frac{a}{c^2}\left[\tfrac{1}{2}u_1\sqrt{c^4+e^2u_1^2} + \frac{c^4}{2e}\,ln\left(eu_1+\sqrt{c^4+e^2u_1^2}\right) + C\right]$$

Für $u=0$ wird $F'=0$. Man hat also

$$0 = 2\pi\frac{a}{c^2}\left[0+\frac{c^4}{2e}\,ln\,(0+c^2)+C\right]$$

Es ist mithin $C = -\frac{c^4}{2e}\,ln\,c^2$

daher vollständig

$$F' = \pi\frac{a}{c^2}\left[u_1\sqrt{c^4+e^2u_1^2} + \frac{c^4}{e}\,ln\frac{eu_1+\sqrt{c^4+e^2u_1^2}}{c^2}\right] \tag{68}$$

Für $u_1 = c$ erhält man die halbe elliptische Oberfläche, wenn der Quadr
AFD um die kleine Axe *DE* sich dreht

$$F' = \pi a \left[\sqrt{c^2 + e^2} + \frac{c^2}{e} ln \frac{e + \sqrt{c^2 + e^2}}{c} \right] = \pi a \left[a + \frac{c^2}{e} ln \frac{a+e}{c} \right] \quad (6$$

26. Cubatur der Ellipse. Der ellipsoidische Körper, der durch die Umdrehung der Ebene *AFJ* um die grofse Axe entsteht, ist aus der allgemeinen Cubaturformel Bd. II., pag. 195.

$$K = \pi \int y^2 \partial x$$

also $K = \pi \int \frac{c^2}{a^2} (2ax - x^2) + C$

oder $K = \pi \frac{c^2}{a^2} \cdot (ax^2 - \frac{1}{3}x^3)$ (70)

wo die Constante fortfällt, weil mit $x = 0$ auch $k = 0$ wird. Für $x = a$ entsteht das halbe Ellipsoid, wenn die Ebene *ADC* um *AB* sich dreht

$$K = \frac{2}{3}\pi ac^2 \quad (71)$$

Für den Körper *K'* durch die Umdrehung der Ebene *DFG* und *DE* erhält man

$$K' = \pi \frac{a^2}{c^2} (ax_1^2 - \frac{1}{3}x_1^3) \quad (72)$$

und das halbe Ellipsoid der Ebene *ACD* um *CE*

$$K' = \frac{2}{3}\pi a^2 c \quad (73)$$

Ellipsoid entsteht als Umdrehungskörper wenn ein halber Ellipsenbogen entweder um die grofse oder um die kleine Axe sich herumdreht. Aus dem vorigen Art. Formel 71 und 73 geht hervor, dafs das um die grofse Axe *a* gedrehte E. = ist $\frac{2}{3}\pi ac^2$

das um die kleine Axe gedrehte E. is
$= \frac{2}{3}\pi a^2 c$

Ellipticität ist der Unterschied z
schen dem Durchmesser des Erdaequat
und der Erdaxe dividirt durch den Aeq
tordurchmesser; also die Erdabplattu
$\left(\frac{D-d}{D}\right.$ in dem Art. Abplattung$\left.\right)$.

Elongation, Elongationswinkel s. v.
Ausweichung eines Planeten. M
versteht nicht nur hierunter den Win
zwischen der Sonne und dem wahr
Ort des Planeten mit der Erde als Sch
telpunkt, sondern auch ganz besond
den Winkel, den die Sonne und der s
die Ekliptik (durch den Breitenbogen)
ducirte Ort des Planeten mit der E
bildet, so dafs der E.-winkel in der Ebe
der Ekliptik liegt.

Endekagonalzahlen, eilfeckige Zahl
sind diejenigen Polygonalzahlen deren
Grunde liegendes Polygon das Eilfeck i
Die Natur dieser Zahlen s. aus den Ar
Dekagonalzahl, Dodekagonalzal

Die arithmetische Reihe, aus welch
die Zahlen entspringen haben zur 2t
Differenzenreihe die gleichen Zahlen 9

9; 9; 9;

hieraus die erste Differenzenreihe

$$1;\ 1+9;\ 1+2\cdot 9;\ 1+3\cdot 9;\ 1+4\cdot 9;\ \ldots\ldots\ 1+(n-1)\cdot 9$$

hieraus die Endekagonalzahlen

$$1;\ 2+9;\ 3+3\cdot 9;\ 4+6\cdot 9;\ 5+10\cdot 9\ \ldots\ldots\ldots$$

oder 1; 11; 30; 58; 95; ..... $\frac{n}{2}(9n-7)$

Endecken, s. u. Ecken.

Endflächen sind bei einem prismatischen Krystall diejenigen Flächen, in deren Mittelpunkte die Endpunkte der Normalaxe fallen (s. Axensystem und Axen). Hat z. B. der Krystall die Form der sechsseitigen Säule, so wird diejenige Axe, welche die Mittelpunkte der mit einander parallelen Grundebenen verbindet, zur Normalaxe genommen und diese Grundebenen heifsen die E. des Krystalls.

Die E. bilden mit den Seitenflächen rechte oder schiefe Winkel; sie heifsen demnach gerade oder schiefe E., oder man sagt, sie seien auf die Seitenkanten oder Seitenflächen gerade oder schief a gesetzt.

Endgeschwindigkeit. Aus den 4 A
„Bewegung" geht hervor, dafs un
Geschwindigkeit der Weg verstanden wi
den ein Punkt oder Körper in irge
einer Zeiteinheit, wofür in der Regel
Secunde gilt, durchläuft. Sowie nun d
Wortlaut nach Anfangsgeschwindigk
diejenige Geschwindigkeit ist, mit w
cher Bewegung beginnt, so ist End
schwindigkeit diejenige mit der die
wegung beendet wird.

Bei gleichförmiger Bewegung ist
E. gleich der Anfangsgeschwindigkeit u

jeder innerhalb der Bewegung statt
len Geschwindigkeit.

e verzögerte Bewegung kann so
fortgesetzt werden bis die E. = 0

beschleunigter Bewegung ist da-
die E. eine ideelle Gröfse. Hat
h der Körper t Secunden lang sich
t, so ist die zu Ende der $t$ten Se-
erlangte oder die nach t Secunden
ndende E. derjenige Weg, den der
r in der folgenden $(t+1)$ten Se-
zurücklegen würde wenn er bei
n dieser $(t+1)$ten Secunde mit der
ten Geschwindigkeit noch eine Se-
lang gleichförmig sich fort-
gte. Der Art „Beschleunigung"
gibt bei der Anfangsgeschwindig-
: 0 diesen Weg als E. nach Ver-
on t Secunden an $= 2Gt$; der wirk-
Weg in der $(t+1)$ten Secunde ist
$+G$: man erhält also die E. einer
förmigen Bewegung, wenn man von
Wege der folgenden Secunde die
ennigung abzieht.

gt die beschleunigte Bewegung mit
Anfangs-) Geschwindigkeit $= c$ an,
nach Bd. I., pag. 355, Formel 8
$= C = c + 2Gt$; und dieser Weg
in der folgenden $(t+1)$ten Se-
durchlaufen werden, wenn mit dem
der $t$ten Secunde die Beschleuni-
G zu wirken aufhörte.

die Beschleunigung negativ, ist sie
gerung, beginnt die Bewegung mit
eschwindigkeit C und wird nach
f von t Secunden, wo die Ruhe noch
eingetreten ist, nach der E. gefragt,
diese ebenfalls der Weg, der in
lgenden Secunde gleichförmig zu-
legt werden würde, wenn also die
gerung während dieser Secunde zu
aufhörte.

Weg in den ersten F Secunden ist
$$= CT - GT^2$$
eg in den ersten $(T+1)$ Secunden ist
$$= C(T+1) - G(T+1)^2$$
h der Weg in der $(T+1)$ten Secunde
$$= C - 2GT - G$$
d nun von diesem wirklichen Wege
rzögerung $(-G)$ fortgenommen, so
der gleichförmig durchlaufene (grö-
Weg, d. h. die E. nach T Secun-
$C - 2GT$.

der ungleich veränderlichen Be-
g (s. diesen Art.: Bd. I., pag. 356)
derselbe Begriff von E. statt.

kanten in einem Krystall sind die
n, welche den Endecken zulaufen;
die übrigen Kanten heifsen Seiten-
kanten.

Endlich ist dem Wortlaut alles was ein Ende hat. In der Mathematik hingegen kann der Begriff endlich nicht wortgetreu genommen werden, weil sonst jede geschlossene Curve nicht endlich also unendlich sein würde. Unter endlich versteht man daher jede Gröfse, welche sich in einer bestimmten Anzahl von ihr gleichartigen Einheiten angeben läfst. Kreislinien, Ellipsen, Kugeloberflächen u. s. w. sind endliche Gröfsen. Die Parabel ist nicht endlich, weil deren mögliche Länge in einer Anzahl von Längeneinheiten nicht auszusprechen ist.

Jede Zahl rational und irrational ist endlich, weil ihr eine Einheit zu Grunde liegt, die eine bestimmte Anzahl mal sie begreift. Eine unendliche steigende arithmetische oder geometrische Reihe ist sowohl in Anzahl der Glieder als in dem Werth unendlich; ist die Reihe abnehmend, so ist sie nur in der Anzahl ihrer Glieder unendlich in ihrem Werthe dagegen eine endliche Gröfse.

Enneadisches Zahlensystem, neuntheiliges System, in welchem die Neun (9) als Ziffer fehlt und als kleinste zweiziffrige Zahl mit 10 bezeichnet wird (vergl. dodekadisches Zahlensystem).

Enneagon, s. v. w. neunseitige Figur, Neuneck.

Enneagonalzahlen, neuneckige Zahlen (s. Endekagonalzahlen) haben das Neuneck zum Constructionspolygon; arithmetisch entsteht die Reihe folgender Art:

7; 7; 7; 7

$1; 1+7; 1+2\cdot7; 1+3\cdot7; \ldots\ldots 1+(n-1)7$

hieraus die Enneagonalzahlen

$1; 2+7; 3+3\cdot7; 4+6\cdot7 \ldots\ldots \frac{1}{2}n(7n-5)$

oder

1; 9; 24; 46; .....

Enteckung (Kryst) ist die Fortnahme einer Ecke mittelst einer durch die diese Ecke bildenden Kanten hindurch gelegten Fläche. Man denkt sich dieselbe an einem Krystall vorgenommen, wenn man die combinirte Form desselben aus einer einfacheren Form ableiten will. Ein Beispiel hiervon gibt Bd. II., pag. 36 und 37, Fig. 301 und 302, wo das Octaeder als durch fortgesetzte Enteckung des Hexaeders entstanden gedacht wird. Vergl. „Astumpfungsflächen."

Entfernung, s. v. w. Abstand.

Entgegengesetzte Gröfsen. In allen

Disciplinen der Mathematik kommen Gröſsen vor, die ungeachtet ihrer Gleichartigkeit, ja selbst ihrer vollkommenen Gleichheit dennoch in Absicht einer von der Gröſse selbst unabhängigen also äuſseren Eigenschaft wesentlich verschieden sind. Diese Eigenschaft ist das Entgegengesetztsein; die Gröſsen, denen diese entgegengesetzte Beziehung anhaftet heiſsen entgegengesetzte Gröſsen.

Der Grund für solche Beziehung, wo sich dieselbe auch finden mag, läſst sich zusammenfassen in einer der Zeit und dem Raum gemeinsamen wesentlichen Eigenschaft, in der Stetigkeit, welche in der Ausdehnung als Form zur Anschauung kommt. Der Raum hat dreifache, die Zeit nur einfache Ausdehnung (Abmessung, Dimension). Abstrahirt man von 2 Dimensionen des Raums, so daſs nur eine Dimension übrig bleibt, so hat man die Linie, welche eine Raumlinie so wie die Zeit eine Zeitlinie ist.

Nur in der Linie findet Entgegengesetztes statt, indem man die Stetigkeit durch den Gedanken, „Punkt“ genannt, unterbricht und von diesem Punkt aus die beiden alleinigen Richtungen an derselben einzeln verfolgt; also vor und nach dem Zeitpunkt und rechts und links von dem Raumpunkt.

Die eine Richtung, gleichviel welche, heiſst positiv oder affirmativ, die andere negativ. Beide Richtungen heiſsen entgegengesetzt, und Gröſsen, denen verschiedene Richtungen zukommen heiſsen entgegengesetzte Gröſsen.

Hat man Entgegengesetztes in dem körperlichen Raum zu bezeichnen, so hat man für die 3 Hauptlängenrichtungen desselben: rechts und links, hinten und vorn, oben und unten. Z. B. Bei allen Windmühlen ist gebräuchlich die Ruthen immer auf einerlei Weise sich drehen zu lassen. Um diese Weise anzugeben kann man sagen: die Ruthen drehen sich rechts, sie drehen sich links, man mag die Drehung vor oder hinter der Mühle betrachten. Man muſs daher auf die 3 Dimensionen des Raumes Rücksicht nehmen und z. B. sagen: Alle Windruthen drehen sich der Art, daſs wenn man vor der Mühle steht und sie ansieht, der untere Flügel sich rechts dreht. Auf diese Weise kann man dieselbe Drehungsweise der Windflügel auf viererlei Art bezeichnen, indem man sagt, man stehe vor oder hinter der Mühle und von der Drehung des unteren oder des oberen Flügels spricht.

Alle entgegengesetzten Gröſsen, so verschiedenartig sie auch sein mögen, können auf das Princip der eben betrachteten unterbrochenen Stetigkeit zurückgeführt werden.

Vermögen und Schulden z. B. in der Arithmetik sind entgegengesetzte Gröſsen; denn Vermögen ist der Zustand des Empfangenhabens, Schulden der Zustand des Gebensollens, beide also entgegengesetzt im Raum und in der Zeit. Nämlich Empfangen und Geben vom Punkte des zu denkenden Zählt isches aus im Raum nach entgegengesetzten Richtungen — und Haben und Sollen, des Ehemals und Künftig von dem Punkt der Gegenwart aus in der Zeit entgegengesetzt.

So hat man entgegengesetzte Linien, Winkel, Ebenen, Kräfte, Wasserbewegungen als Zufluſs und Abfluſs u. s. w.

Wenn man von dem Punkt, der die Ausdehnung unterbricht, einer Richtung derselben folgt und sodann um gleichviel nach entgegengesetzter Richtung, so befindet man sich wieder in demselben Punkt, von dem man ausgegangen ist. Entgegengesetzte Gröſsen haben also das Merkmal, daſs sie absolut gleich groſs genommen sich einander aufheben, zu Null werden.

Entgegengesetzte Operationen in der Arithmetik und der Analysis haben mit den entgegengesetzten Gröſsen denselben Grund, z. B. Vorwärts zählen und rückwärts zählen, indem man die in einer Linie geschrieben zu denkenden Zahlen nach entgegengesetzten Richtungen ablies't. Eben so das Zusammenzählen entgegengesetzt dem Abziehen, das Theilen dem Vervielfältigen, das Radiciren dem Potenziren, das Integriren dem Differenziren, das Auflösen einer Gleichung dem Ansetzen derselben u. s. w.

Entkantung (Kryst) ist die Fortnahme einer Kante an einem Krystall mittelst einer Fläche, die durch die beiden jene Kante bildenden Flächen gelegt wird; sie wird eben so wie die Enteckung vorgenommen gedacht. Wenn man z. B. die Kanten des Octaeders, Fig. 138, pag. 257 durch schmale Flächen fortnimmt, womit zugleich die Ecken vierflächige Zuspitzungen erhalten. so hat man die Combination des Octaeders und des Dodekaeders mit vorherrschenden Octaederflächen, eine Form in welcher der Magneteisenstein vorkommt.

Entwickelung einer Function in eine Reihe. Diese geschieht:

1. Durch Partialdivision (s. Buch-

chnung pag. 439 mit 2 Bei-

im Potenziren mit Hülfe des hen Lehrsatzes (s. d. Art. pag.

urch Radiciren aus unvoll-n Potenzen (s. „Ausziehung einer pag. 251, No. 4 bis pag. 253

urch die Mac-Laurin'sche Taylor'sche Reihe s. Diffe-chnung pag. 288 bis pag. 294).

en (ἐπακτος hinzugesetzt) sind , welche von dem Tage des letz-monds im Jahre bis zum 1ten folgenden Jahres noch fehlen, Alter des Mondes in ganzen Ta-jedem Neujahrstage. Fällt der d auf den 1ten Januar, so ist ir dieses Jahr = 0; das höchste s Mondes ist 30 Tage, weil 2 auf folgende Neumonde abwechselnd 0 ganze Tage auseinander liegen.

Mondjahr aus 12 Monaten beste-t also $6 \times (29 + 30) = 354$ ganze $\frac{1}{4}$ Tag); das julianische Sonnen-$\frac{1}{4}$ Tage, also ist das Mondjahr kürzer als das Sonnenjahr und wird mit jedem folgenden Jahre dalter 11 Tage länger. Fällt der d auf den 1ten Januar, so fällt e Neumond desselben Jahres auf n December und die E. des fol-Jahres ist = 11, die nächstfol-22, wieder die folgende 33, für nan 33 − (der Monatslänge = 30) die E. setzt, weil nicht der zu ern der zu 3 Tagen vor dem hlufs gehörende Neumond wirk-letzte im Jahre ist.

Epakten liefern einen Cyclus von n (den alten Metonschen Mond-nach welchem die Neumonde ler Reihe nach auf dieselben Tage lie folgenden 19 Jahre also wie-elben Epakten haben, wenn man am Schlufs des Cyclus für die des folgenden Cyclus einen Tag Die Jahreszahlen dieses Cyclus bis 19 heifsen die goldenen l.

ahre 1843 war die E. = 0, der d fiel auf den 1ten Januar, man nach den Cykel, in welchem wir en in folgender Tabelle

ahl.	Goldene Zahl.	Epakte.
3	1	0
4	2	XI
5	3	XII

Jahreszahl.	Goldene Zahl.	Epakte.
1846	4	III
1847	5	XIV
1848	6	XXV
1849	7	VI
1850	8	XVII
1851	9	XXVIII
1852	10	IX
1853	11	XX
1854	12	I
1855	13	XII
1856	14	XXIII
1857	15	IV
1858	16	XV
1859	17	XXVI
1860	18	VII
1861	19	XVIII
1862	1	0

Es wird hiernach in diesem Jahre (1860) der letzte Neumond auf den 13ten December fallen.

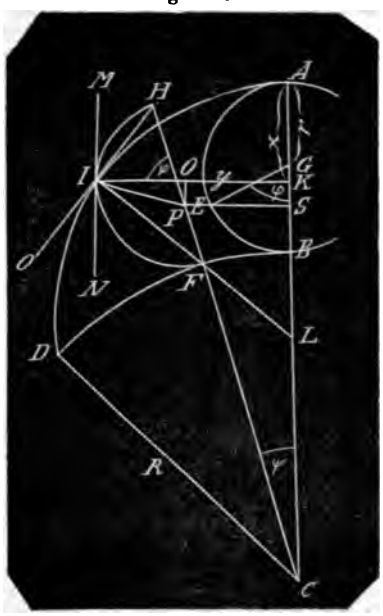
Dieser Mondcykel von 19 Jahren diente früher dazu, die Osterfeste künftiger Jahre durch einfache Rechnung schnell bestimmen zu können. Da die Epakten nur in ganzen Tagen angegeben sind, so stimmen die aus den Epakten berechneten Mondphasen mit den astronomischen oder den wirklichen nicht genau überein.

Ephemeriden, s. astronomische Jahrbücher, Bd. I., pag. 149.

Epicykel (ἐπι neben) Nebenkreis, nach der Vorstellung der alten Astronomen, welche die Erde als ruhend annahmen, ein Kreis, an dessen Peripherie ein Gestirn sich bewegt, dessen Mittelpunkt aber wieder einen andern Kreis im Weltraume durchläuft.

Epicycloide unterscheidet sich von der Cycloide dadurch, dafs der erzeugende Kreis auf einer Kreisperipherie aufserhalb derselben sich abwälzt, während dies zur Bildung der Cycloide auf einer geraden Linie geschieht. Ist Fig. 613 *BD* ein Kreisbogen vom Halbmesser *BC*, auf welchem der Kreis *AEB* sich abwälzt, so ist der Kreis zu *AD* der Grundkreis, der Kreis zu *AEB* der erzeugende Kreis, der beschreibende Punkt *A* verzeichnet während der Abwälzung des Halbkreises *AEB* die halbe Epicycloide *AJD*; die andere dieser congruenten Hälfte ist rechts von *AB* zu denken. Wie bei der Cycloide entsteht auch hier, wenn der beschreibende Punkt aufserhalb des erzeugenden Kreises liegt, die verkürzte Cycloide und wenn er innerhalb desselben liegt, die gestreckte Epicycloide.

Fig. 613.



Der in dem verlängerten Halbmesser CB befindliche Punkt A, der beschreibende Punkt, verzeichnet den B wenn der Kreisbogen BE von sich abgewälzt hat. E befindet F und Bogen BF = Bogen BE man durch F den Radius CH = schreibt aus P in CH den Halbkr so ist, da A in J und E in F findet, Bogen EA = Bogen FJ ur BE = Bogen JH.

2. Bezeichnet man den Halbm des Grundkreises mit R, den de gungskreises AG mit r, setzt Punkt J die auf CA genomm scisse $AK = x$, die auf CA recht Ordinate $KJ = y$, fällt die Nor auf JK und die Normale PS so ist

$$AK = x = AC - PQ - CS$$
$$JK = y = JQ + PS$$

bezeichnet man $\angle ACH$ mit ψ, mit φ so ist $\angle HPJ = \varphi$, $\angle$ und es ist also

1. $x = R + r - r\cos(\varphi + \psi) - (R + r)$
2. $y = r\sin(\varphi + \psi) + (R + r)\sin$

ferner aus Bogen BE = Bogen E

3. $r\varphi = R\psi$

Der Werth $\psi = \frac{r}{R}\varphi$ aus Gl. ersten beiden Gleichungen substi

$$x = R + r - r\cos\left(\frac{R+r}{R}\varphi\right) - (R+r)\cos\left(\frac{r}{R}\varphi\right)$$
$$y = r\sin\left(\frac{R+r}{R}\varphi\right) + (R+r)\sin\left(\frac{r}{R}\varphi\right)$$

3. Um nun von diesen Gleichungen auf die Untersuchung der Curve dung zu machen hat man

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{r}{R}(R+r)\left[\sin\left(\frac{R+r}{R}\varphi\right) + \sin\left(\frac{r}{R}\varphi\right)\right]$$
$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{r}{R}(R+r)\left[\cos\left(\frac{R+r}{R}\varphi\right) + \cos\frac{r}{R}\varphi\right]$$

hieraus

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\cos\left(\frac{R+r}{R}\varphi\right) + \cos\left(\frac{r}{R}\varphi\right)}{\sin\left(\frac{R+r}{R}\varphi\right) + \sin\left(\frac{r}{R}\varphi\right)} = \cot\tfrac{1}{2}\left[\frac{R+r}{R}\varphi + \frac{r}{R}\varphi\right] = \cot\left(\frac{R+2r}{2R}\varphi\right)$$

hieraus nach Differenzialformel 158, pag. 284

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^3}$$

Oder da bereits $\frac{\partial y}{\partial x}$ berechnet ist, einfacher:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Nun ist aus 8:

$$\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = -\frac{R+2r}{2R}\,\mathrm{cosec}^2\left(\frac{R+}{2}\right.$$

und aus 6:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{\frac{r}{R}(R+r)\left[\sin\left(\frac{R+r}{r}\varphi\right)+\sin\left(\frac{r}{R}\varphi\right)\right]}$$

Mithin

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{(R+2r)\,\mathrm{cosec}^2\left(\frac{R+2r}{2R}\varphi\right)}{2r(R+r)\left[\sin\left(\frac{R+r}{R}\varphi\right)+\sin\frac{r}{R}\varphi\right]}$$

$$= -\frac{(R+2r)\,\mathrm{cosec}^2\left(\frac{R+2r}{2R}\varphi\right)}{4r(R+r)\cdot\sin\left[\left(\frac{R+r}{R}+\frac{r}{R}\right)\frac{\varphi}{2}\right]\cdot\cos\left[\left(\frac{R+r}{R}-\frac{r}{R}\right)\frac{\varphi}{2}\right]}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{R+2r}{4r(R+r)\cos\left(\frac{1}{2}\varphi\right)\sin^3\left[\frac{R+2r}{2R}\varphi\right]} \qquad (9)$$

4. Denkt man sich die Tangente OJ in J bis zur verlängerten Abscissenlinie CA verlängert und bezeichnet den Scheitelpunkt dort mit T so ist (s. Curvenlehre pag. 185, Gl. 2)

$$tg\angle OTC = tg\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = cot\left(\frac{R+2r}{2R}\varphi\right)$$

oder $Cotg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = cot\frac{R+2r}{2R}\varphi$

folglich $\alpha = 90° - \frac{R+2r}{2R}\varphi$

Nun ist

$$\angle FHJ = 90° - \angle HFJ = 90° - \tfrac{1}{2}\angle HPJ$$
$$= 90° - \tfrac{1}{2}\varphi$$

also

$$\angle FHJ - \angle HCA = 90° - \tfrac{1}{2}\varphi - \psi$$
$$= 90° - \tfrac{1}{2}\varphi - \frac{r}{R}\varphi = 90° - \frac{R+2r}{2R}\varphi = \alpha$$

Wenn man aber die Sehne JH bis in CA verlängert, so entsteht in der Verlängerung derjenige Winkel, der mit ψ den $\angle CHJ = \angle FHJ$ zum äufseren gegenüberliegenden Winkel eines Dreiecks hat, ist also $= \angle FHJ - \psi = \alpha$ folglich ist die Sehne HJ, verlängert HO, die Tangente an der Epicycloide in J.

5. Ist MN die Tangente des Kreises HJF in J, so ist

$$\angle NJF + \angle FJP = \angle HJP + \angle FJP = R$$

folglich

$$\angle NJP = \angle HJP = \angle JHP = 90° - \frac{\varphi}{2}$$

also der $\angle NJF$, den die Kreistangente MN mit der Normale JF der Epicycloide bildet ist = dem Complement des halben Wälzungswinkels φ.

6. Die Subtangente KF ist nach Bd. II., pag. 185, Formel 1

$$\frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} = y\cdot tg\left(\frac{R+2r}{R}\varphi\right) \qquad (10)$$

Die Subnormale KL nach pag. 185, Formel 4

$$y\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = y\,cot\left(\frac{R+2r}{2R}\varphi\right) \qquad (11)$$

Die Tangente JT nach pag. 185, Formel 3

$$\frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = y\cdot tg\left(\frac{R+2r}{2R}\varphi\right)\sqrt{1+cot^2\left(\frac{R+2r}{R}\varphi\right)} = \frac{y}{\cos\left(\frac{R+2r}{2R}\varphi\right)} \qquad (12)$$

Die Normale JL, welche mit der Sehne JF zusammenfällt, nach pag. 185, Formel 5

$$y\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \frac{y}{\sin\left(\frac{R+2r}{2R}\varphi\right)} \qquad (13)$$

Der Krümmungshalbmesser für den Punkt J in der Richtung der Normale nach pag. 188, Formel 9

$$r = \pm\frac{\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)} = \left[1+cot^2\left(\frac{R+2r}{2R}\varphi\right)\right]^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{4r(R+r)\cos\left(\frac{1}{2}\varphi\right)\sin^3\left(\frac{R+2r}{R}\varphi\right)}{R+2r} = \frac{4r(R+r)\cos\frac{\varphi}{2}}{R+2r} \qquad (14)$$

Die Abscisse des Mittelpunkts nach pag. 188, Formel 10.

$$a = x - \frac{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$= x + \left[1 + \cot^2\left(\frac{R+2r}{2R}\varphi\right)\right] \cdot \frac{4r(R+r) \cdot \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \sin^2\left(\frac{R+2r}{2R}\varphi\right)}{R+2R} \cdot \cot\left(\frac{R+2r}{2R}\varphi\right)$$

$$= x + \frac{4r(R+r)}{R+2r} \cdot \cos(\tfrac{1}{2}\varphi) \cdot \cos\left(\frac{R+2r}{2R}\varphi\right) \tag{15}$$

Die Ordinate des Mittelpunkts nach pag. 188, Formel 11:

$$b = y + \frac{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)} = y + \operatorname{cosec}^2\left(\frac{R+2r}{2R}\varphi\right) \cdot \frac{4r(R+r)\cos\frac{\varphi}{2}\sin^2\left(\frac{R+2r}{2R}\varphi\right)}{-(R+2r)}$$

$$= y - \frac{4r(R+r)}{R+2r}\cos\frac{\varphi}{2} \cdot \sin\left(\frac{R+2r}{2R}\varphi\right) \tag{16}$$

7. Rectification der Epicycloide. Nach der allgemeinen Rectificationsformel, Bd. II., pag. 191.

$$\lambda = \int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, \partial x$$

erhält man den Bogen $AJ = \int \operatorname{cosec}\left(\frac{R+2r}{2R}\varphi\right) \partial x$

also nach Gl. 6

$$AJ = \lambda = \int \operatorname{cosec}\left(\frac{R+2r}{2R}\varphi\right) \cdot \frac{r}{R}(R+r)\left[\sin\frac{R+r}{R}\varphi + \sin\frac{r}{R}\varphi\right]$$

$$= \frac{2r}{R}(R+r)\int \operatorname{cosec}\left(\frac{R+2r}{2R}\varphi\right) \cdot \sin\left(\frac{R+2r}{2R}\varphi\right) \cdot \cos(\tfrac{1}{2}\varphi)\,\partial\varphi$$

$$= \frac{2r}{R}(R+r)\int \cos\frac{\varphi}{2} \cdot 2\partial\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$= \frac{4r}{R}(R+r)\sin(\tfrac{1}{2}\varphi) \tag{17}$$

Für $\varphi = \pi$ wird der Halbkreis abgewältzt, und man erhält:

Die halbe Epicycloide $AJD = \frac{4r}{R}(R+r)$ (18)

daher Bogen $DJ = \frac{4r}{R}(R+r)[1 - \sin(\frac{1}{2}\varphi)] = 8\frac{r}{R}(R+r)\sin^2\frac{\pi-\varphi}{4}$ (19)

8. Denkt man sich anstatt dafs der Halbkreis *BEA* auf *BD* von *B* bis *D* sich abwälzt, den Kreis um den festen Mittelpunkt *G* drehbar und den Bogen *BD* durch Drehung um den Mittelpunkt *C* von *B* bis *D* gegen *B* fortgeschoben, so dafs vermöge eines starken Drucks der Peripherie *DB* gegen den Punkt *B* des Rades die beiden einander gleichen Bogen *BEA* und *BFD* zugleich beschrieben werden, so geschieht dieselbe Beschreibung dieser gleichen Bogen, wenn an dem Kreis *AEB* in *B* ein Stift sich befindet, und an *D* die Epicycloide *DJA* befestigt ist, welche von *B* aus diesen Stift bei der Bewegung von *B* nach *D* von *B* über *E* bis *A* mit fortnimmt. Wenn demnach der Kreis um *G* der Theilrifs zwischen den Zähnen eines Getriebes und der Kreis des Bogens *BD* der Theilrifs eines Stirnrades ist, so legen beide Theilkreise in jedem noch so kleinen Zeittheilchen gleich grofse Bogen zurück: d. h. Kraft und Widerstand haben jederzeit einerlei Geschwindigkeit, wenn die Zähne des Rades auf der angreifenden Oberfläche vom Theilrifs ab die Form eines cycloidischen Bogens *DJ* haben.

Epoche eines Weltkörpers ist der mittlere Ort desselben in seiner Bahn für irgend einen bestimmten Zeitaugenblick.

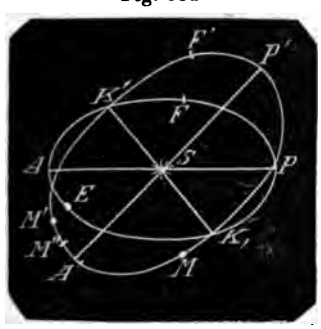
In dem Art. Anomalie ist (Fig. 66) B der wirkliche Ort des Planeten. In der Nähe des Perihels P ist seine Geschwindigkeit am gröfsten, mit der Annäherung an das Aphel A wird sie immer geringer; da nun von dem Planet der Weg PBA so wie die zweite halbe Ellipse ADP in immer constanter Zeit zurückgelegt wird, so würde der Planet, wenn er denselben Weg mit gleichförmiger Geschwindigkeit zurücklegte in B noch nicht gelangt sein, sondern erst etwa in B' sich befinden. Dieser eingebildete Ort B' heifst der mittlere Ort des Planeten, und dieser wird zur Epoche des Planeten, wenn derselbe von ihm an einem ganz bestimmten Zeitpunkt z. B. zu der Zeit des mittleren Mittags, den der Berliner Meridian am 1ten Januar 1801, als dem Anfang des 19ten Jahrhunderts hatte, eingenommen worden ist.

Die Aufstellung solcher Epoche für unsre Erde, unsren Mond, für jeden Planeten und Kometen hat den Nutzen, dafs von derselben aus zu jedem späteren Zeitpunkt deren jedesmaliger mittlerer Ort mit Hülfe der von ihnen bekannten mittleren Bewegungen genau berechnet werden kann, wie dies aus dem Art. Anomalie zu ersehen ist.

Hält man den eben gedachten mittleren Mittag als den Normalzeitpunkt fest, so ist die Epoche der Erde der Ort in der Ekliptik, in welchem die Erde sich zu jener Mittagszeit befunden hat.

Es ist nun noch erforderlich, dafs der mittlere Ort eine allgemein verständliche Bezeichnung erhalte. In dem Art.: „astronomische Länge“ ist bereits angeführt, dafs der Ort der Erde in der Ekliptik als Länge in Graden östlich vom Frühlingspunkt angegeben wird. Auch bei den Orten der anderen Planeten wird der Frühlingspunkt unsrer Ekliptik zu Grunde gelegt.

Fig. 614.



Es sei $P'K'A'K,P'$ die elliptische Bahn irgend eines Planeten um die Sonne S; $PK'AK,P$ die bis in diese Bahn erweiterte Ebene der Ekliptik, F in derselben der Frühlingspunkt, P das Perihel, A das Aphel, E die Epoche der Erde, so ist der östliche Abstand der Erde E von F der Bogen $EAK'F$, also zugleich die Länge von E. Ist M der mittlere Ort und die Epoche des Planeten, K' der aufsteigende, $K,$ der niedersteigende Knoten, P' das Perihel, A' das Aphel, so geschieht die Bewegung des Planeten nach der Richtung $P'K'A'M$; hat nun der aufsteigende Knoten K' die Länge $K'F$, so nimmt man dieselbe Länge für $K'F$ und zählt die Länge von M von dem Nullpunkt F' und der mittlere Ort von M ist der Bogen $MA'K'F'$.

Um nun den mittleren Ort des Planeten für einen bestimmten späteren Zeitpunkt zu finden, kennt man die Umlaufszeit des Planeten, also auch die mittlere Bewegung desselben nach Graden in einem Jahre, in einem Tage und jedem beliebigen noch so kleinen Zeitraum, also auch in der Zeit T nach der Epoche, in welcher der mittlere Ort angegeben werden soll; und dieser Bogen, der den ganzen Umkreis mehrere Male in sich begreifen kann ($n\times360+a=a$ Grade)', der Länge $F'AM$ hinzugesetzt gibt (wenn a = Bogen $MK,P'K'M'$ = ist) den verlangten mittleren Ort M', nämlich dessen Länge $T'M'$.

Der Unterschied dieser Länge und der bekannten Länge $F'M'K,P'$ des Perihels P' gibt den Abstand $M'K,P'$ des mittleren Orts M' vom Perihel P' und aus diesem kann (s. Anomalie) der wirkliche Ort des Planeten, der in der Nähe des Aphels etwas vorwärts, etwa in M'' liegen wird, gefunden werden.

Unter Epoche eines Weltkörpers versteht man übrigens bald den mittleren Ort desselben, theils den Zeitaugenblick für diesen Ort, theils die Länge des Orts.

Epoche in der Chronologie ist der Anfangspunkt einer Zeitperiode, sowohl einer geschichtlichen, z. B. von der Völkerwanderung bis zu Carl dem Grofsen, als auch einer astronomischen, z. B. der 19 jährigen Metonschen Mondsperiode; daher man von Begebenheiten sagt, dafs sie Epoche machen werden.

Erde, unser Erdkörper, ist von der Sonne aus der dritte Planet (der Erste

ist der Merkur, der Zweite die Venus). In dem Art. Attraction pag. 167 mit Fig. 104 ist eine hypothetische Ansicht über die Entstehung der Planeten aus der Sonne aufgestellt und man kann sich solcher Art auch unsre Erde entstanden denken, wodurch sowohl ihre Bewegung um die Sonne in einer elliptischen Linie, ihre Axendrehung und ihre sphäroidische Form erklärlich wird.

Fig. 615.

Es sei *S* der Sonnenkörper, *FSHW* die Ekliptik, in welcher die Erde sich um die Sonne bewegt, *F* der Frühlingspunkt, *S* der Sommerpunkt, *H* der Herbstpunkt, *W* der Winterpunkt, so wird diese Bahn nach der Richtung *FSHW* von der Erde *E* durchlaufen; in jedem Augenblick des Fortschritts in der Ekliptik aber bewegt sie sich zugleich um ihre Axe nach derselben Richtung, wie die Pfeile es anzeigen. Stellt man sich in Gedanken auf einem Punkt der Ekliptik, um dieselbe nach Art der Erde zu durchlaufen, so mufs man die Sonne ansehen, mit dem rechten Fufs weiter schreiten und zugleich mit der linken Seite des Körpers nach hinten und um den Körper herum schwenken, überhaupt während der ganzen Umkreisung der Sonne eine Bewegung machen wie in einem runden Saal ein Tänzer eine Linkstour walzt, und zwar dergestalt fortschreitend, dafs die nach der Saalwandung gerichtete Hälfte des Körpers vorwärts sich bewegt, die nach dem Inneren des Saales befindliche Hälfte aber die rückgängige Bewegung macht.

Die Richtung *FSHW* in der Ekliptik ist die Richtung von Abend über Mittag nach Morgen und in dieser Richtung scheinen auch die Sonne und alle übrigen Gestirne sich fortzubewegen. Steht nämlich die Erde in *F*, so scheint die Sonne in *H* zu stehen, und bewegt sich nun weiter die Erde nach *S*, so scheint die Sonne nach *W*, also denselben Weg mit der Erde zu verfolgen.

Die Dimensionen der Bahn s. Ekliptik am Schlufs; über die verschiedenen Geschwindigkeiten der Erde in der Ekliptik s. Bahn der Weltkörper pag. 301 u. f. Folgende mittlere Zahlenangaben werden hier der Uebersicht wegen zusammen gestellt.

Umfang des Aequators 5400 g. Ml.
Durchmesser des Aequators 1718,87 g Ml.
1 Grad des Aequators 15 g. Ml. zu 0,9850876 preufs. Ml. = 14,7763 preufs. Ml.
1 Minute des Aequators $\frac{1}{4}$ geogr. Ml. = 492,54 preufs. Ruthen.
1 Secunde des Aequators $\frac{1}{216}$ g. Ml. = 8,21 preufs. Ruthen.
Durchmesser der Axe 1713,13 g. Ml.
Unterschied zwischen Aequator und Erdaxe 5,74 g. Ml.
Abplattung $= \frac{1}{299,15}$
1 Meridian beträgt 5390,668 g. Ml.
1 Meridianquadrant 1347,667 g. Ml.
1 Meridiangrad durchschnittlich 14,974 g. Ml.
Oberfläche der Erde 9261108 g. □Ml.
Kubikinhalt der Erde 2650 Millionen g. Kubikml.
Die Erde durchläuft in 365¼ Tagen = 8766 Stunden die Ekliptik von 129917000 geogr. Ml.
hiernach
Geschwindigkeit
in 1 Stunde durchschnittlich 14820 g. Ml.
in 1 Minute „ 247 g. Ml.
in 1 Secunde „ 4,13 g. Ml.
Umdrehungsgeschwindigkeit im Aequator
in 24 Stunden = 5400 g. Ml.
in 1 Stunde = 225 g. Ml.
in 1 Minute = 3,75 g. Ml.
in 1 Secunde = 0,0625 g. Ml.
= 123,136 prfs. Ruthen.
Dichtigkeit der Erde c. 4½ mal der des Wassers.

Erdferne, s. Apogeum.

Erdnähe, Perigeum, s. u. Apogeum.

Erfahrung ist die Folge entweder einer Beobachtung oder eines Versuchs (s. Beobachtung).

Ergänzung s. Complement, dekadische Ergänzung.

Ergänzungsecke, Supplementsecke s. u. Ecke No. 6.

Ergänzungsglied einer Reihe s. u. Differenzialrechnung I., No. 1 und 8.

Erkenntnifssätze sind: die Erklärung (Definition), der Grundsatz (Axiom), der Lehrsatz (Theorema) und der Folgesatz oder Zusatz (Corollarium).

Erklärung in der Mathematik ist gleichbedeutend mit Definition. S. d. Art.

Erleuchtungskreis eines Planeten ist die Grenze zwischen der durch die Sonne erleuchteten und der dunklen Oberfläche desselben. Wenngleich die Sonne viel gröfser ist als jeder der Planeten, also mehr als die Hälfte deren Oberfläche durch sie erleuchtet wird, so kann man doch wegen der grofsen Entfernung der Sonne von ihnen die Strahlen als ∥ betrachten und annehmen, dafs von jedem Planeten also auch von der Erde nicht mehr als die Hälfte seiner Oberfläche wirklich erleuchtet wird, so dafs der Erleuchtungskreis jedes Planeten ein gröfster Kreis desselben ist.

Evolute. Eine kurze Erklärung gibt der kurze Art. Abwickelung mit Fig. 23. Es ist demnach eine E. eigentlich die Grenzlinie *ABC* einer beliebig krummlinigen Chablone, um welche eine biegsame mathematische Linie liegt, die unter steter Anspannung zu einer geraden Linie *CE* abgewickelt wird. Hierdurch entsteht eine andere Curve *ADE*, welche der Endpunkt *A* der E. beschreibt und uneigentlich die abwickelnde Linie, die Evolvente genannt wird.

In dem Art. Curvenlehre pag. 188, III. wird E. erklärt als die Curve der Mittelpunkte einer gegebenen Curve (der Evolvente) und den Zusammenhang beider in dieser Beziehung zeigt besonders Fig. 543, pag. 196, die Cycloide *ALCHB* mit deren Evolute *ATWB*. Hier ist *TL* der Krümmungshalbmesser der Cycloide in dem Punkt *L*, der Endpunkt *T* liegt in der Curve *ATW* und *LT* ist an derselben in *T* Tangente. Zieht man zwischen *A* und *T* an *AT* beliebig viele Tangenten bis zu dem Bogen *AL*, so werden alle diese Linien Krümmungshalbmesser für den cycloidischen Bogen *AL*, weil *AT* die Curve der Mittelpunkte für diesen Bogen, so wie *ATW* die Curve der Mittelpunkte für die halbe Cycloide *ALC* ist. Es ist nämlich der Krümmungshalbmesser für den Punkt *A* der Cycloide = 0, wie pag. 198, No. 6 am Schlufs nachweist, so dafs die Evolute mit dem Punkt *A* der Cycloide beginnt.

Demnach ist hier jeder Krümmungshalbmesser wie *LT*, normal im Berührungspunkt auf der Evolvente, die Tangente an der Evolute und gleich dem Bogen *AT* derselben. Folglich ist der Bogen *AL* zu betrachten als dadurch entstanden, dafs die Evolute von *A* bis *T* in der geraden Linie *TL* abgewickelt ist.

2. Es ist hier die Evolvente in der Cycloide gegeben. Eben so kann sie eine Parabel, eine Ellipse und jede beliebige andere bekannte Curve sein. Wie die Gleichungen der E. bei gegebener Evolvente gefunden werden, zeigt der oben citirte Art.: Curvenlehre, pag. 188, No. III., indem die Abscisse a und die Ordinate b für einen Krümmungsmittelpunkt durch x und y ausgedrückt werden, wonach man sodann durch Substitution der Werthe von x und y die Gleichung zwischen a und b erhält.

Das dortige Beispiel für die Parabel gibt

$$b^2 = \frac{16}{27p}(a - \tfrac{1}{2}p)^3$$

Da b^2 immer positiv ist, so kann $a - \frac{1}{2}p$ nicht subtractiv werden, und die Werthe von a fangen mit $\frac{1}{2}p$ an. Für $a = \frac{1}{2}p$ ist $b = 0$, der Krümmungshalbmesser liegt also in der Axe und gilt für den Scheitelpunkt. Die Curve der Mittelpunkte fängt also nicht wie bei der Cycloide in einem Curvenpunkt an, sondern in Entfernung $= \frac{1}{2}p$ vom Scheitel in der Axe und man mufs daher diese Curve als Evolute für wirkliche Abwickelung um die Länge $\frac{1}{2}p$ in der Axe geradlinig sich verlängert denken, und zwar mufs diese Verlängerung an dem Berührungspunkt Tangente an der Curve werden.

Der Art. Ellipse gibt pag. 43 in Formel 17 und 18 die Werthe von α und β (für a und b gesetzt) in x und y ausgedrückt. Ohne die Gleichung zwischen α und β daraus zu entwickeln hat man für $x = 0$ also auch $y = 0$ den Krümmungshalbmesser für den Scheitel und $\beta = 0$, der Krümmungshalbmesser liegt in der grofsen Axe; für α erhält man $\frac{c^2}{a}$ und dies ist zugleich der Werth für r.

Ferner hat man für $x = a$, also für $y = c$ und für den Scheitel der kleinen Axe $\alpha = a$ = der halben grofsen Axe, $\beta = \frac{e^2}{c}$ folglich $r = \frac{e^2 + c^2}{c} = \frac{a^2}{c}$ in der kleinen Axe, oder wenn $2c^2 < a^2$, in deren Verlängerung.

Die Curve der Mittelpunkte besteht also aus 4 Zweigen, welche um den Mittelpunkt der Ellipse ein symmetrisch krummliniges Viereck bilden; die Entfernungen der Ecken in der grofsen Axe vom Mittelpunkt sind $\frac{e^2}{a}$, die der kleinen Axe $\frac{c^2}{c}$. Soll diese Curve für wirkliche Abwickelung als Evolute gelten, so mufs sie in der grofsen Axe für jeden der 4 Zweige um die Länge $\frac{c^2}{a}$ geradlinig verlängert werden.

3. Ob nun in allen Fällen einer ad 2 gedachten nothwendigen Abänderung der Curve der Mittelpunkte um sie zur Evolute für unmittelbare Abwälzung zu gestalten, auch wirklich eine solche Evolute entsteht, verlangt eine allgemeine Untersuchung und diese erstreckt sich daher nur auf 2 Punkte. 1, Ob alle Krümmungshalbmesser auch Tangenten an der Evolute sind und 2, ob ein Bogenstück der Evolute mit der Differenz beider zu den Endpunkten des Bogenstücks gehörenden Krümmungshalbmesser gleich lang ist.

4. Erster Satz: Sämmtliche Krümmungshalbmesser einer Curve sind an der Evolute Tangenten.

Denn die beiden Formeln für die Abscisse a und die Ordinate b eines Krümmungsmittelpunkts durch x und y ausgedrückt sind (Bd. II., pag. 188, II., III.)

$$\text{II.} \quad a = x - \frac{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\text{III.} \quad b = y + \frac{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)}$$

Setzt man für den zweiten Summand rechts, No. III. den Werth $b - y$ in II., so hat man

$$a = x - (b - y)\frac{\partial y}{\partial x}$$

oder $$(y - b)\frac{\partial y}{\partial x} + x - a = 0 \qquad (1)$$

und aus III.

$$(y - b)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 0 \qquad (2)$$

In diesen Gleichungen ist für jeden Punkt der Evolute a die Abscisse, b die rechtwinklige Ordinate, beide von dem jedesmaligen x und y abhängig. Nimmt man x als urvariabel, differenzirt also Gleichung 1. nach x so erhält man

$$(y-b)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial x}\right) + 1 - \frac{\partial a}{\partial x}$$

oder

$$(y - b)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial x} = 0$$

Nach Gleichung 2 sind die ersten 3 Glieder dieser letzten Gleichung = 0, folglich ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial x} = 0 \qquad (3)$$

Nun ist (Differenzialformel 140)

$$\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial x}$$

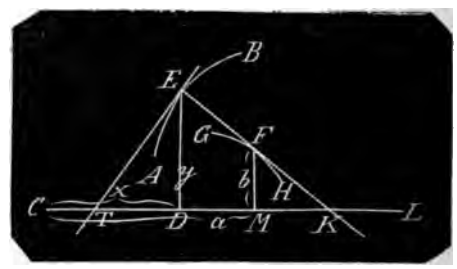
folglich diesen Werth in Gleichung 3 substituirt und mit $\frac{\partial a}{\partial x}$ dividirt

$$\frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial b}{\partial a} + 1 = 0$$

hieraus $$\frac{\partial b}{\partial a} = \frac{-1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} \qquad (4)$$

Es sei nun CL die Abscissenlinie für die gegebene Curve AEB, für den Curvenpunkt E sei $CD = x$, $DE = y$, so ist $\frac{\partial y}{\partial x} = tg\ ETL = tg\ \alpha$, wenn ET die Tangente in E an AEB ist. Ist GFH die Evolute zu AEB, EF der Krümmungshalbmesser zu E, so ist $CM = a$, $FM = b$. Nun liegt aber dieser Halbmesser EF in der Normale zu E, mithin ist $\angle\ TEF = 90°$; verlängert man also EF bis CL nach K,

Fig. 616.



so ist $\angle\ EKT = 90° - \alpha$

oder $$tg\ \alpha = -cot\ (180° - EKT) = -cot\ (\angle\ EKL) = \frac{-1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}$$

und $$tg\ EKT = cot\ \alpha = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}$$

also $$tg\,(180^\circ - \angle EKT) = tg\,\angle EKL = -\cot\alpha = -\frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}$$

Da nun $\frac{\partial b}{\partial a} = tg\,\angle EKL$ ist, so bald FK die Tangente in F an der Curve GFH ist, so ist mit

$$\frac{\partial b}{\partial a} = -\frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}$$

bewiesen, dafs EK in F an der Evolute Tangente ist.

5. Zweiter Satz. Die Länge eines Bogens einer Evolute ist = dem Unterschied beider zu den Endpunkten desselben gehörenden Krümmungshalbmesser der Evolvente.

Sind wieder a und b die Coordinaten für einen Punkt F der Evolute, FE der zugehörige Krümmungshalamesser ρ für den Punkt E der Evolvente, so hat man zu Gleichung 1 und 2 aus Bd. II., pag. 188, Formel 9 noch die dritte

$$r^2 = \pm\frac{\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^3}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2} = \pm(y-b)^3\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = (y-b)^2\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right] \qquad (5)$$

Differenzirt man diese Gleichung mit x, so erhält man

$$2r\frac{\partial r}{\partial x} = (y-b)^2\cdot 2\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]\cdot 2(y-b)\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial x}\right)$$

oder reducirt

$$r\frac{\partial r}{\partial x} = [y-b]\left[(y-b)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial y}{\partial x} - (y-b)\left[\frac{\partial b}{\partial x} + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{\partial b}{\partial x}\right]$$

Die zweite Klammergröfse des ersten Summand wird nach Gleichung 2 = 0, mithin reducirt sich die Gleichung auf

$$r\frac{\partial r}{\partial x} = -(y-b)\frac{\partial b}{\partial x} - (y-b)\frac{\partial b}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

Nach Gleichung 1 ist $(y-b)\frac{\partial y}{\partial x} = a - x$, daher

$$r\frac{\partial r}{\partial x} = -(y-b)\frac{\partial b}{\partial x} - (a-x)\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial b}{\partial x}$$

und folglich mit Hülfe von Gl. 3

$$r\frac{\partial r}{\partial x} = -(y-b)\frac{\partial b}{\partial x} - (x-a)\frac{\partial a}{\partial x} \qquad (6)$$

Setzt man in Gl. 6 den Werth von $(x-a)$ aus Gl. 1, so hat man

$$r\frac{\partial r}{\partial x} = -(y-b)\frac{\partial b}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial a}{\partial x}$$

woraus $$y - b = \frac{r\cdot\frac{\partial r}{\partial x}}{\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial x}}$$

Aus Gl. 5 ist

$$y - b = -\frac{r}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}}$$

daher aus den beiden letzten Gleichungen

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial a}{\partial x}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}} \qquad (7)$$

Nun ist

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial x}$$
$$\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial x}$$

Aus Gleichung 3 endlich

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial a}{\partial x}}{\frac{\partial b}{\partial x}} = -\frac{\partial a}{\partial b}$$

Diese 3 Werthe in Gleichung 7 gesetzt entsteht

$$\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\frac{\partial b}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial x}\cdot\frac{\partial a}{\partial b}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial a}{\partial b}\right)^2}}$$

und mit $\frac{\partial a}{\partial x}$ dividirt, sodann Zähler und Nenner mit $\frac{\partial b}{\partial a}$ multiplicirt

$$\frac{\partial r}{\partial a} = \frac{1+\left(\frac{\partial b}{\partial a}\right)^2}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial b}{\partial a}\right)^2}} = \sqrt{1+\left(\frac{\partial b}{\partial a}\right)^2}$$

woraus $r = \int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial b}{\partial a}\right)^2}\, \partial a + C$

Diese Formel ist die Rectificationsformel (Bd. II., pag. 191):

$$\lambda = \int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, \partial x + C$$

wenn b statt y die Ordinate und a statt x die Abscisse ist, und dieser Bogen einer Evolute ist also = dem Krümmungshalbmesser r für die Evolvente + einer Constante.

Bezeichnet man daher den Anfangspunkt der Evolute GFH (Fig. 616) für den Anfangspunkt C der Abscissen mit J, so ist der Bogen $JGF = \lambda$ = dem Krümmungshalbmesser FE + einer Constante C, welche der Gleichung $y = qx$ für die Evolvente, also auch der Gleichung $b = fa$ für die Evolute entspricht und somit für alle Krümmungshalbmesser und Bogen derselben Evolute dieselbe bleibt. Folglich ist der Bogen $JGFH = \lambda'$ = dem Krümmungshalbmesser r', der von dem Punkt H aus zur Evolvente AEB gehört + derselben Constante C.

Aus $\lambda = r + C$

und $\lambda' = r' + C$

folgt aber $FH = \lambda' - \lambda = r' - r$

womit der Satz erwiesen ist.

Evolution, s. v. w. Abwickelung: analytische Evolution s. v. w. Entwickelung einer Function in eine Reihe.

Evolvente. Die Erklärung dieser Curve ist in dem Art.: Abwickelung und in dem Art.: Evolute No. 1 und 2 gegeben worden. Es wird diejenige Curve verstanden, welche durch unmittelbare Abwickelung einer biegsamen mathematischen Linie von einer gegebenen Curve, der Evolute hervorgeht.

Ist (Fig. 616) GFH die gegebene Evolute; ist nämlich CL die Abscissenlinie, C der Anfangspunkt der Abscissen, F ein Punkt der Evolute, a dessen Abscisse, b dessen Ordinate und die Gleichung gegeben $b = qa$

Ist ferner von der Curve die in H oder rechts von H befestigte biegsame Linie bis F abgewickelt, so findet man durch Rectification (Bd. II., pag. 191) die Länge des Bogens über G bis F =

$$\lambda = \int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial b}{\partial a}\right)^2}\, \partial a + C$$

Dieser Bogen λ ist nun gleich der in F an der Curve GFH gezeichneten Tangente FE und es ist bereits der Bogen AE der Evolvente abgewickelt.

Fällt man die Normale ED auf CL, setzt $CD = x$, $ED = y$, so hat man aus der gegebenen Gleichung $b = qa$ für E die rechtwinklige Coordinatengleichung zu entwickeln.

Verlängert man die Tangente EF bis K in die Abscissenlinie CL so ist (Bd. II., pag. 185, Formel 2)

$$tg \angle EKC = -\frac{\partial b}{\partial a}$$

woraus $\angle EKC = \alpha$ gefunden wird. Man hat also

$$CD = CM - DM$$

oder $x = a - EF \cos \alpha = a - \lambda \cos \alpha$ (1)

Ferner

$ED = y = b + EF \sin \alpha = b + \lambda \sin \alpha$ (2)

womit die Gleichung zwischen y und x gegeben ist.

Die Entwickelung aller für die Evolvente wissenswürdigen Formeln aus der gefundenen Coordinatengleichung $y = Fx$ s. Curvenlehre.

Evolvirende Linie, s. v. w. Evolvente.

Excentricität ist bei der Ellipse der Abstand des Mittelpunkts von jedem der beiden Brennpunkte.

Excentrisch ist jeder Punkt innerhalb eines Kreises, der nicht in dessen Mittelpunkt liegt.

Excentrische Anomalie, s. u. Anomalie.

Excentrischer Kreis einer Ellipse ist der aus dem Mittelpunkt derselben mit deren halben grofsen Axe beschriebene Kreis, der also die Ellipse in den Endpunkten der grofsen Axe tangirt.

In dem Art.: Ellipse hat man Formel 58 in Beziehung auf Fig. 609 die Ebene $AJF =$

$$F = \frac{c}{a}\left[-\frac{a-x}{2}\sqrt{2ax - x^2} + \frac{a^2}{2} Arc \cdot sin\left(-\frac{a-x}{a}\right) + \tfrac{1}{4}\pi a^2\right]$$

Setzt man $c = a$ so erhält man die Ebene AJH. Folglich ist

Ebene AJH : Ebene $AJF = AC : CD = a : c$

Desgleichen nach Formel 59.

Der Halbkreis AEB : der halben Ellipse $ADB = a : c$.

Demnach schneidet jede auf der gro-
en Axe genommene rechtwinklige Or-
inate von dem excentrischen Kreis und
er Ellipse 2 Segmente ab, die wie die
roſse Axe zur kleinen Axe sich ver-
alten.

Exhaustion (Ausschöpfung) ist das Ver-
ahren, eine unbekannte beständige Gröſse
adurch aufzufinden, daſs man sie in eine
Anzahl Theile zerlegt und jeden derssel-
en mit 2 bekannten Gröſsen vergleicht,
von denen die eine immer gröſser, die
andere immer kleiner bleibt als der ihnen
ugehörige Theil der Unbekannten, so
daſs mit der Vermehrung der Theile die
bekannten einschlieſsenden Theile den
Unbekannten immer näher und näher
kommen und von jenen als ihre Gren-
en begriffen und zusammengesetzt (aus-
geschöpft) werden.

Ein Beispiel von diesem Verfahren
gibt Bd. I., pag. 352 mit Fig. 224:

Wege sind Producte aus Zeit und Ge-
schwindigkeit; werden beide letzten als
Linien dargestellt, so erscheint der Weg
als Fläche. Ist nun die Zeit T in An-
zahl Secunden durch die Linie AB in
Anzahl Längen-Einheiten und die End-
geschwindigkeit C in Anzahl Fuſsen durch
die normal auf AB genommene Linie
BC in Längen-Einheiten ausgedrückt, so
ist offenbar das Rechteck $AA'BC$ die bild-
liche Darstellung des Products $C \times T$.

Nun wird zuerst bewiesen, daſs für
jeden von A ab in AB genommenen Zeit-
theil $\frac{T}{n}$ durch die mit BC Parallele bis
zur Diagonale AC gezogene gerade Linie
die zugehörige Endgeschwindigkeit im
Verhältniſs zu der Länge BC ausdrückt.

Um nun den den Gröſsen T und C zu-
gehörigen Weg S zu finden ist folgendes
(Exhaustions-) Verfahren eingeschlagen
worden:

Die Länge AB ist in gleiche Theile
Aa, ab, bd ... yB getheilt. Für jeden
dieser Theile sind die zugehörigen End-
geschwindigkeiten aa', bb', dd' ... yw wie
BC verzeichnet. Es ist also für den Zeit-
theil Aa die Anfangsgeschwindigkeit der
Punkt $A = 0$, die Endgeschwindigkeit
$= aa'$; aa' die Anfangs-, bb' die Endge-
schwindigkeit für den Zeittheil ab u. s. w.
Nun wird angenommen, daſs für jeden
Zeittheil der Weg mit gleichförmiger Ge-
schwindigkeit durchlaufen wird, einmal
mit der Anfangsgeschwindigkeit und ein
weites Mal mit der Endgeschwindigkeit;
er erste Weg ist jedesmal zu klein, der
weite jedesmal zu groſs. Als den ersten
Weg erhält man für den Zeittheil Aa
den Punkt A (als Fläche = 0), als den
zweiten Weg das Rechteck $Aa \times aa' =$
dem Rechteck $a\alpha$; der Weg 0 ist zu klein,
das Rechteck $a\alpha$ als Weg zu groſs. So
ist für den Zeittheil ab das Rechteck ba'
als Weg zu klein, das Rechteck $b\beta$ als
Weg zu groſs u. s. w. bis zu dem Zeit-
theil yB, für welchen das Rechteck Bw
als Weg zu klein, das Rechteck yC zu
groſs ist.

Nun ist die Summe der kleineren Recht-
ecke kleiner als das $\triangle ABC$, die Summe
der gröſseren Rechtecke gröſser als das
$\triangle ABC$. Man kann aber mit beliebiger
Vermehrung der Zeittheile in AB beide
Summen dem $\triangle ABC$ beliebig nahe bring-
gen, so daſs der Unterschied beider Recht-
eckssummen kleiner wird als jede noch
so kleine endliche Gröſse, ohne daſs beide
Summen die Gröſse des $\triangle ABC$ je er-
reichen. Demnach ist $\triangle ABC$ die Grenze
zwischen beiden Rechteckssummen.

Beide Summen der Rechtecke geben
nun bildlich den Weg an, welcher in
der Zeit T mit der Endgeschwindigkeit
C durchlaufen wird; einmal diesen Weg
zu klein und zum zweiten Mal zu groſs,
folglich gibt das $\triangle ABC$ das Bild für den
wirklich zurückgelegten Weg in Ver-
hältniſs zu dem Rectangel $AA'BC$, wel-
ches den Weg $C \times T$ bildlich darstellt.
Wie also $\triangle ABC$ zu dem Rectangel $AA'BC$
sich verhält, so muſs auch der wirkliche
Weg zu dem Wege $C \times T$ sich verhalten
und es ist daher der wirklich zurückge-
legte Weg $= \frac{1}{2}CT$.

Ein zweites Beispiel derselben Art gibt
Bd. II., pag. 211, No. 7 für die Ermitte-
lung der Gröſse des geraden Cylinder-
mantels.

Ein analytisches Beispiel gibt Bd. I.,
pag. 280, Art.: „Bahn einer Masse“
u. s. w., in welcher die Endgeschwindig-
keit v für einen gegebenen Weg s bei
ungleichförmig beschleunigter Bewegung
ermittelt wird. Man findet mit Bezug
auf Fig. 177 die Differenz der Quadrate
zweier Geschwindigkeiten $v^2 - v_n^2$ zwi-
schen 2 Gröſsen eingeschlossen; nämlich

$$v^2 - v_n^2 < \frac{4s}{n}(\gamma + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots \gamma_{n-1})$$

$$> \frac{4s}{n}(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \cdots \gamma_n)$$

da nun der Unterschied beider einschlie-
ſsenden Gröſsen

$$\frac{4s}{n}(\gamma - \gamma_n)$$

mit Vermehrung von n beliebig klein

werden kann, so würde eine andere bekannte Gröfse, welche ebenfalls zwischen denselben Grenzen begriffen ist, der Gröfse $v^2 - u^2_n$ gleich und somit die Unbekannte $v^2 - v_n^2$, oder vielmehr da $v_n = 0$ ist, die verlangte Geschwindigkeit v gefunden sein.

Man findet aber die Gröfse $4g'\left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n}\right)$ zwischen denselben Grenzen begriffen folglich ist

$$v^2 = 4g'\left(\frac{1}{a^0} - \frac{1}{a_{n'}}\right) = 4g'\frac{s}{a(a-s)}$$

Ein ganz ähnliches Beispiel ist in demselben Art.: No. 5 durchgeführt.

Expansibel, s. u. Aggregatzustand und Aerodynamik.

Expansion, s. Ausdehnung, Expansion.

Expansivkraft, s. u. Aerodynamische Gesetze.

Experiment, s. v. w. Versuch, s. u. Beobachtung.

Exponent ist immer eine abstracte Zahl und entweder ein Factor oder die Anzahl gleicher Factoren. E. einer geometrischen Reihe ist die constante Zahl, welche entsteht wenn man ein $n$tes Glied durch ein $(n-1)$tes dividirt. Z. B. in der Reihe

$$a \cdot ae \cdot ae^2 \cdot ae^3 \ldots . ae^n$$

ist e der Exponent. Aus diesem Grunde nennt man auch den Quotient aus dem 1ten Gliede in das 2te Glied eines geometrischen Verhältnisses den Exponent des Verhältnisses: In dem Verhältnifs $a:b$ ist $\frac{b}{a}$ der Exponent.

Bei Potenzen und Wurzeln zeigt der E. die Anzahl der gleichen Factoren aus welchen die Potenz besteht.

In $a^n = A$ ist n die Zahl, welche anzeigt, wie oft a mit sich selbst multiplicirt werden mufs um die Zahl A zu geben; n ist der Potenzexponent.

In $\sqrt[n]{a} = b$ zeigt n die Anzahl der gleichen Factoren b aus deren Product die Zahl a besteht; n ist der Wurzelexponent.

In der Reihe

$$\ldots a^{-2} \cdot a^{-1} \cdot a^0 \cdot a^1 \cdot a^2 \cdot a^3 \ldots .$$

können die Exponenten als Stellenzahlen

$$\ldots -2 \cdot -1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots$$

betrachtet werden, und es werden daher auch die Stellenzahlen geometrische Exponenten genannt. Aus ben Grunde werden auch die I men als Exponenten angesehen, gen auch wirklich an, zu welche die Basis erhoben werden mufs Numerus zu geben.

Exponentialcurve ist eine solch in deren Gleichung die Absciss Potenzexponent vorkommt, z. B.

$$y = a^{n \cdot x}$$

Exponentialformel ist eine in welcher veränderliche Gröfsen tenzexponenten vorkommen.

$$y = a^x; \; z = y^x$$

Exponentialfunction ist eine F in welcher veränderliche Gröfsen tenzexponenten vorkommen.

Exponentialgleichung ist ei chung, in welcher unbekannte als Potenzexponenten vorkomme

Exponentialgröfse ist eine Gr der eine unbekannte oder eine v liche Gröfse als Potenz vorkom Wurzel kann veränderlich und u derlich sein, als:

$$a^x; \; y^{2x}$$

Exponentialrechnung ist das E lungsverfahren für gegebene Expo gleichungen. Es geschieht dies durch Verwandlung der Exponen chung in eine logarithmische wie

$$y = a^x$$

in $$log\, y = x \cdot log\, a$$

wo nun für jeden Werth von x de von y gefunden werden kann; od Entwickelung in eine Reihe mi des Mac-Laurin'schen oder Tayl Satzes.

Die Function $y = a^x$ läfst si der Mac-Laurin'schen Reihe (Bd. 289) in eine Reihe entwickeln, (ganzen positiven Potenzen von schreitet. Es ist nämlich nach I zialformel 82 und 151:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = a^x \cdot log_n\, a$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = a^x (ln\, a)^2$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = a^x (ln\, a)^3$$

. . . . . .

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = a^x (ln\, a)^n$$

Für $x = 0$ wird $a^x = 1$.

Mithin nach der Mac-Laurin'schen Reihe

$$y = a^x = 1 + x \ln a + \frac{x^2}{1 \cdot 2} (\ln a)^2 + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot (\ln a)^3 + \ldots\ldots + \frac{x^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} \cdot (\ln a)^{n-1}$$

$$= 1 + \frac{x \ln a}{1} + \frac{(x \ln a)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(x \ln a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots\ldots \frac{(x \ln a)^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)}$$

Nun ist nach Bd. II., pag. 293 das Ergänzungsglied

$$= \frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots n} (\ln a)^n \cdot a^{\lambda x}$$

und das folgende Ergänzungsglied für das $(n+1)$te Glied der Reihe

$$= \frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots (n+1)} (\ln a)^{n+1} a^{\lambda x}$$

Also = dem ersten Ergänzungsgliede multiplicirt mit $\frac{x}{n+1} \ln a$.

Es kann aber n so grofs genommen werden, dafs $n+1 >$ wird als $x \ln a$, folglich werden die nachfolgenden Glieder mit der Vergröfserung von n immer kleiner und die Reihe convergirt.

Für $a = e = 2{,}7182818\ldots$ ist $\log_n a = 1$ und

$$y = e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots \frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots n}$$

Extension, s. Ausdehnung (Bd. I., pag. 186).

F.

Facit ist das Resultat der Ausrechnung eines in Zifferzahlen gegebenen Exempels.

Factor ist der gemeinschaftliche Name von Multiplicandus und Multiplicator und überhaupt jede der zwei oder mehreren Zahlen, die mit einander multiplicirt werden sollen.

Factum eine seltenere Bezeichnung für Product, dem Resultat aus einer Multiplication.

Facultät ist ein Product, dessen Factoren in arithmetischer Reihe fortschreiten. $a\times(a+b)\times(a+2b)\times(a+3b)\times\ldots\ldots\times[a+(n-1)b]$ ist eine F. von n Factoren; a ist die Basis, b der Unterschied oder die Differenz, die Anzahl der Factoren n der Exponent. Die Schreibweise der F. ist verschieden; Klügel schlägt vor zu schreiben

$$a^{n,b}$$

Die einfachste F., welche häufig vorkommt und unter andern in den Binomialcoefficienten deren Nenner ausmacht ist die Facultät

$$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\ldots\ldots n$$

Man bezeichnet sie mit (n) oder $n!$

Demnach ist

(2) oder $2!=1\cdot2$

(3) oder $3!=1\cdot2\cdot3$

(4) oder $4!=1\cdot2\cdot3\cdot4$

u. s. w.

Fadendreieck, ein Instrument zu Feststellung einer bestimmten Richtung, s. u. Culmination, Bd. II., pag. 160.

Fadenkreuz. Bei jedem Fernrohr ist es für die genaue Messung von Winkeln von Wichtigkeit (s. den Art. „Astronomisches Fernrohr“ mit Fig. 91), dafs der beobachtete Gegenstand N genau mit der Axe Cc des Fernrohrs zusammenfalle, und der Gegenstand N, welcher in der Ebene $C'C''$ des beiden Gläsern AB und DE gemeinschaftlichen Brennpunkts c' als Luftbild erscheint, soll genau in den Punkt c' fallen. Damit dies nun wirklich geschehe, wird in das Rohr innerhalb der Ebene $C'C''$ ein Metallring eingelegt, über welchen zwei oder mehrere Fäden dergestallt ausgespannt werden, dafs sie sich in dem Mittelpunkt überkreuzen, dafs dieser Kreuzpunkt also in den Axenpunkt c' fällt, und das Fernrohr wird auf den Gegenstand so gerichtet, dafs er vor dem Ocular AC mit dem Kreuzpunkt c' in einerlei Punkt gesehen wird.

Da das in die Ebene $C'C''$ fallende Luftbild durch das Glas AB vergröfsert erscheint, so werden auch die Fäden in gröfserer Stärke als sie wirklich beträgt gesehen; daher müssen die Fäden möglichst fein sein und es werden feine Metallfäden, am besten Spinneweben dazu genommen.

Fall, ist Bewegung eines Körpers gegen einen anderen Körper in Folge der Anziehung (der Attraction, Gravitation, Schwere), welche der zweite Körper auf den ersten äufsert. Ist kein Hindernifs der Bewegung vorhanden, so geschieht der Fall in gerader Linie (s. Anziehung und Attraction).

Im 2ten Art. No. 4 ist die Centrifugalkraft als das weise angeordnete Hindernifs nachgewiesen, dafs die Weltkörper

i geraden Linien nicht auf einander illen, und dafs beide Kräfte, die Schwere nd die Centrifugalkraft vereinigt, als lleinige Ursachen für die Erhaltung der Weltsysteme mittelst gegenseitiger umreisender Bewegung wirksam sind.

Fall, freier Fall. Im gemeinen Leben rersteht man unter Fall die Erscheinung, dafs ein Körper in der Luft freigelassen in gerader senkrechter Linie zur Erde sich bewegt; nämlich nach dem Mittelpunkt der Erde hin, weil dieser als Mittelpunkt der anziehenden Erdmasse zugleich der Mittelpunkt deren Schwerkraft ist. Ein solcher ohne Hindernifs in gerader Linie statt habender Fall heifst freier Fall.

Der Art. „Attraction" No. 9 weist nach, dafs leichte und schwere Körper gleich schnell auf die Erde fallen; dafs dies in Wirklichkeit nicht geschieht, liegt in dem Widerstand der atmosphärischen Luft, welche schwere Körper wenig, leichte Körper mehr hindert, und da die Luft jedem Körper ohne Ausnahme beim Fall einen Widerstand verursacht, so gibt es auf unserer Erdoberfläche streng genommen keinen freien Fall.

2. Eine Theorie des freien Falls, ganz allgemein und mit veränderlicher Beschleunigung betrachtet gibt der Art.: „Bahn einer Masse" etc., Bd. I., pag. 90 mit Beispielen No. 4 über den Fall des Mondes auf die Erde wenn die Centrifugalkraft zu wirken aufhörte, und No. 5 den Fall desselben durch die Erde wenn ein Durchmesser derselben mit geeigneter cylindrischer Durchlafsöffnung umgeben wäre; ferner No. 10 und 11 dessen wiederholter (pendulirender) Fall durch die Erde. Endlich gibt der Art. Bewegung, gleichförmig beschleunigte, pag. 352, die Theorie des freien Falls in der Nähe unserer Erdoberfläche, also bei constanter Beschleunigung (ohne Rücksicht auf den Widerstand der atmosphärischen Luft).

3. Aus den pag. 353, No. 4 angegebenen Formeln gehen folgende Gesetze für den freien Fall hervor:

$$C : c = T : t$$

a. Bei 2 frei fallenden Körpern verhalten sich die von der Ruhe ab erlangten Endgeschwindigkeiten (C, c) wie die von Anfang ab verflossenen Zeiten (T, t). und gegenseitig: die bei 2 frei fallenden Körpern von der Ruhe ab verflossenen Zeiten verhalten sich wie die von ihnen erlangten Endgeschwindigkeiten.

$$S : s = C^2 : c^2 = T^2 : t^2$$

D. h. wenn 2 Körper von der Ruhe ab fallen, so verhalten sich die von ihnen durchlaufenen Fallhöhen wie die Quadrate der erlangten Endgeschwindigkeiten oder wie die Quadrate der während des Fallens verflossenen Zeiten.

4. Der Art.: „Bewegung in einem widerstehenden Mittel", pag. 361, gibt pag. 363 in Formel 7:

$$v^2 = \frac{G}{A}\left(1 - \frac{1}{e^{4As}}\right)$$

in Formel 8

$$t = \frac{1}{4\sqrt{GA}} \log n \frac{1 + v\sqrt{\frac{A}{G}}}{1 - v\sqrt{\frac{A}{G}}}$$

und in Formel 6

$$s = \frac{1}{4A} \log n \frac{G}{G - Av^2}$$

alle 3 Formeln für den Fall auf die Erde mit Berücksichtigung des Widerstandes der atmosphärischen Luft, wenn die Bewegung (der Fall) mit der Geschwindigkeit = 0 anfängt. Es bedeuten

v die Endgeschwindigkeit.
s der Weg oder die Fallhöhe.
t die Zeit des Falles in Secunden
und aufserdem
G die Beschleunigung beim freien Fall = 15⅛ preufs. Fufs.
A ein Versuchs-Coefficient für den Luftwiderstand,
e die Basis der natürlichen Logarithmen.

Fall, beschränkter Fall. Jeder Fall, d. h. jede Bewegung, welche die Anziehung eines Körpers auf einen anderen Körper zu jenem hin veranlafst, wird beschränkt, wenn die Bewegung auch noch anderen Einflüssen unterworfen ist, wie im 1ten Art. Fall von der Centrifugalkraft gesagt worden.

Die Kraft der Schwere wirkt auf jedes einzelne Massenelement gleich stark und der Art, dafs es in der ersten Secunde in unserer Gegend 15⅛ preufs. Fufs. (Beschleunigung g) fällt. Bezeichnet man das Massenelement mit m so ist sein Effect in der ersten Secunde beim freien Fall = Masse mal Weg $= g \cdot m$. Hat eine andere Masse (M) n Massenelemente, ist also $M = n \cdot m$; und bezeichnet man die Beschleunigung von M mit G so ist

$$BG = n \cdot m \cdot g$$

also $$G = \frac{n \cdot m}{M} \cdot g = \frac{M}{M} g = g$$

Beim beschränkten Fall wird nun dieser für alle Massen constant bleibenden Schwerkraft entgegenwirkt; entweder di-

rect in gerader Linie senkrecht aufwärts oder nach Seitenrichtungen, von denen ein Theil der Kraft in die Richtung senkrecht aufwärts reducirt wird.

Der beschränkte Fall ist also so anzusehen, dafs mit einer Masse M, welche fallen will, eine andere kleinere Masse M' das Bestreben hat zu steigen. Daher ist die nach der Richtung senkrecht abwärts wirkende Masse $M - M'$ und deren Effect in der ersten Secunde

$$Mg - M'g = (M - M')\,g$$

Nun wirkt aber die Schwerkraft senkrecht abwärts auf beide Massen M und M', also auf $M + M'$ nach der Richtung senkrecht abwärts. Bezeichnet man daher die summarische Beschleunigung beider Massen senkrecht abwärts mit G, so ist deren Effect

$$= (M + M')\,G$$

Man hat also

$$(M - M')\,g = (M + M')\,G$$

woraus die Beschleunigung für den beschränkten Fall

$$G = \frac{M - M'}{M + M'}\,g$$

Massengröfsen sind uns unbekannt, dagegen verhalten sich dieselben wie deren Gewichte. Sind dieso Q und Q', so hat man

$$G = \frac{Q - Q'}{Q + Q'}\,g$$

Es sollen hier folgende Fälle betrachtet werden.

A. Der Fall im Wasser.

Wenn ein Körper a Pfund wiegt und ein ihm gleiches Volum Wasser wiegt a' Pfund, so verdrängt der Körper in Wasser gesenkt a' Pfund Wasser, welches den von dem Körper eingenommenen Raum von unten nach oben wieder auszufüllen strebt. Mit a Pfund Gewicht will der Körper fallen, mit a' Pfund strebt das Wasser ihn zu heben; ist $a' > a$ so wird der Körper mit der Kraft $a' - a$ in die Höhe getrieben, ist $a > a'$ so sinkt er, d. h. er fällt mit der Ueberwucht $(a - a')$ (s. beschleunigende Kraft); seine Masse ist a, folglich die beschleunigende Kraft $= \frac{a - a'}{a} = \left(1 - \frac{a'}{a}\right)$ und die Beschleunigung $= \left(1 - \frac{a'}{a}\right) g$. Bezeichnet man das specifische Gewicht des Körpers mit α so ist $\frac{a}{a'} = \alpha$, folglich die Beschleunigung $= \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) g = \frac{\alpha - 1}{\alpha}\,g$.

Der Körper fällt also in t Secunden um die Tiefe $s = \frac{\alpha - 1}{\alpha}\,gt^2$

erlangt die Geschwindigkeit $c = 2\frac{\alpha - 1}{\alpha}\,gt$

Wird er im Wasser mit der Geschwindigkeit v hinabgestofsen, so erlangt er in t Secunden

die Tiefe $S = vt + \frac{\alpha - 1}{\alpha}\,gt^2$

und die Endgeschwindigkeit

$$C = v + 2\frac{\alpha - 1}{\alpha}\,gt$$

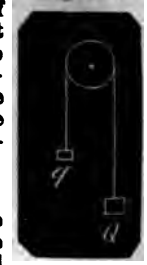
Anmerk. Dafs hier die Masse a des Körpers und nicht die des Körpers + der des Wassers $a + a'$ in den Nenner gesetzt wird liegt darin, dafs der eingesenkte Körper im Wasser das Gewicht a' verliert; er wiegt nur noch $(a - a')$ Pfund, hierzu das Gewicht des verdrängten Wassers $= a'$ gibt $a - a' + a' = a$ Pfund.

B. Fall um eine feste Rolle.

1. Ohne Rücksicht auf Reibung.

Ueber einer festen Rolle hangen an einem Faden 2 Gewichte Q, q. So tief das gröfsere Gewicht Q sinkt so hoch steigt das kleinere Gewicht q. Die Ueberwucht ist $Q - q$, die Masse auf welche die Schwere wirkt ist $Q + q$ und die Beschleunigung $G = \frac{Q - q}{Q + q}\,g$

Fig. 617.



Hieraus findet man wie ad A. in t Secunden die Höhe des Falls von Q und der Steigung von q

$$s = \frac{Q - q}{Q + q} \cdot gt^2$$

die Endgeschwindigkeit beider Gewichte

$$C = 2\frac{Q - q}{Q + q}\,gt$$

2. Mit Berücksichtigung der Reibung zwischen dem Zapfen der Rolle und dem Lager, wenn das Gewicht der Rolle mit w, der Halbmesser der Rolle mit R, der Halbmesser des Zapfens mit r und der Reibungscoefficient mit μ bezeichnet wird, hat man das Reibungshindernifs in das rechts für Q befindliche Fadenende reducirt

$$(Q + q + w)\frac{r}{R}\,\mu$$

mithin die Ueberwucht

$$= Q - q - (Q + q + w)\frac{r}{R}\,\mu$$

ad die Beschleunigung

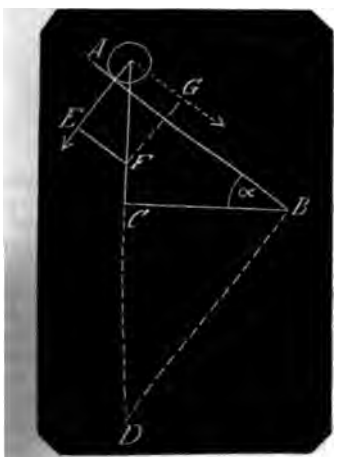
$$= \frac{Q - q - (Q + q + w)\frac{r}{R}\mu}{Q + q} g$$

C. Der Fall auf der schiefen Ebene.

I. Ohne Rücksicht auf Reibung.

Auf der schiefen Ebene AB liegt ein Körper A vom Gewicht Q; die Schwere treibt, ihn nach der lothrechten Richtung AD herab zu bewegen, die Wandung AB der schiefen Ebene hindert dies,

Fig. 618.



e Bewegung kann nur nach der Richung AB geschehen und das Gewicht Q t dabei einen Druck nach AE lothrecht f AB aus.

Stellt AF als Länge das Gewicht Q r, so entsteht aus dieser als Mittelkraft s Parallelogramm $AEFG$ der Kräfte.

Es ist $AE = AF \cos EAF = AF \cos \alpha$ o der Normaldruck nach $AE = Q \cos \alpha$, elche von der festen Wandung AB fgehoben wird.

Es bleibt daher nur für den Fall die eite Seitenkraft

$$AG = Q \sin \alpha$$

bewegende Kraft.

Die Masse auf welche die Schwere wirkt Q, folglich die beschleunigende Kraft

$$= \frac{Q \sin \alpha}{Q} = \sin \alpha$$

abhängig von dem Gewicht des Körs, und die Beschleunigung G ist = in α.

Daher wie in A und B.

Die Endgeschwindigkeit $C = 2gt \sin \alpha$
der Weg $S = gt^2 \sin \alpha$
oder wenn man die Länge AB der schiefen Ebene mit l, deren Höhe AC mit h bezeichnet,

$$C = 2g \cdot \frac{h}{l} t$$

$$S = g \cdot \frac{h}{l} t^2$$

Für den Fall auf der schiefen Ebene ergeben sich einige interessante Gesetze:

1. Beim freien Fall ist $C = 2gT$
auf der schiefen Ebene $c = 2g \frac{h}{l} t$

Bei $T = t$ ist also
$C : c = l : h = AB : AC = AD : AB$

D. h. Wenn von zweien Körpern der eine senkrecht nach AD, der andere längs AB fällt, so geben beide Linien AB und AC oder AD und AB das Verhältnifs der in gleichen Zeiten erlangten Endgeschwindigkeiten.

2. Ist $C = c$ so hat man
$T : t = h : l = AC : AB$
d. h. wenn 2 Körper, von denen der eine senkrecht nach AD herab, der andere längs AB fällt, gleiche Geschwindigkeiten erlangt haben, so geben die beiden Linien AC und AB das Verhältnifs der von ihnen durchlaufenen Fallzeiten.

3. Beim freien Fall ist $S = gT^2$
auf der schiefen Ebene $s = g \cdot \frac{h}{l} t^2$

Bei gleichen Fallzeiten T und t ist
$S : s = l : h = AD : AB$
d. h. wenn 2 Körper nach AD und AB fallen, so geben die Linien AD und AB das Verhältnifs der von ihnen gleichzeitig durchlaufenen Wege.

4. Da $\angle ABD$ ein Rechter ist, so liegen die 3 Punkte A, B, D in der Peripherie eines Halbkreises, AD ist der Durchmesser, AB eine Sehne. Es folgt also aus No. 3, dafs alle von dem obersten Punkt eines senkrechten Durchmessers gezogene Sehnen des Kreises von einem Körper gleichzeitig durchlaufen werden.

5. Beim freien Fall ist $S = \frac{C^2}{4g}$
auf der schiefen Ebene ist $s = \frac{c^2}{4g \frac{h}{l}}$

Bei gleichen Endgeschwindigkeiten ist daher

$$S : s = h : l = AC : AB$$

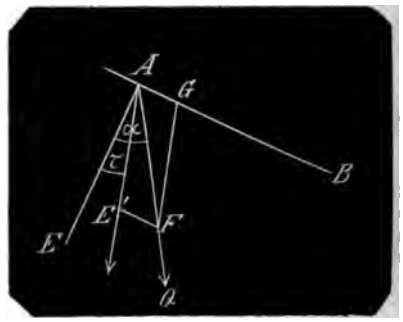
d. h. 2 Körper, die nach der Höhe und der Länge der schiefen Ebene fallen, erhalten an der Basis BC gleiche Endgeschwindigkeiten.

II. Mit Rücksicht auf Reibung.

Wegen der Reibung zwischen dem Körper vom Gewicht Q und der Wandung AB widersteht diese jetzt nicht in der lothrechten Linie AE, sondern nach einer Richtung AE', welche mit AE den Reibungswinkel τ bildet

Demnach entsteht ein Parallelogramm $AE'FG$, und es ist:

Fig. 619.



$$AF : AE' : AG = \sin AE'F : \sin AFE' : \sin E'AF$$
$$= \sin(90^\circ + \tau) : \sin(90^\circ - \alpha) : \sin(\alpha - \tau)$$

hieraus

$$AG = \frac{\sin(\alpha - \tau)}{\sin(90^\circ + \tau)} AF = \frac{\sin(\alpha - \tau)}{\cos\tau} AF$$

Es ist also die bewegende Kraft

$$= \frac{\sin(\alpha - \tau)}{\cos\tau} \cdot Q$$

die Schwere wirkt auf die Masse Q mithin die beschleunigende Kraft

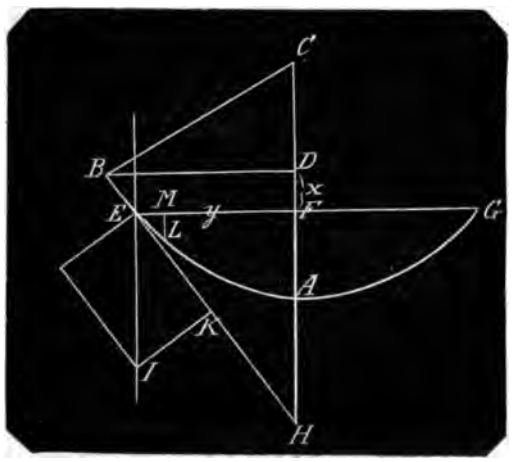
$$= \frac{\sin(\alpha - \tau)}{\cos\tau} \cdot \frac{Q}{Q} = \frac{\sin(\alpha - \tau)}{\cot\tau}$$

und die Beschleunigung $= \frac{\sin(\alpha - \tau)}{\cos\tau} g$

D. Fall durch einen Kreisbogen.

Ein durch die Schwere angegriffener Körper bewegt sich durch den senkrecht aufgestellten beliebigen Kreisbogen BA; es ist die Zeit zu ermitteln, in welcher er von B und von der Ruhe aus bis zu dem tiefsten Punkt A gekommen ist.

Fig. 620.



Es sei C der Mittelpunkt des Bogens, BD horizontal; nimmt man ein beliebiges Stück BE des Bogens, zieht $EF \perp BD$, setzt $EF = y$, $DF = x$, so kann man den Bogen BE als eine Menge sehr kleiner aneinander liegender Polygonseiten oder schiefe Ebenen betrachten. Da nun nach No. C, I., 5, ein Körper einerlei Geschwindigkeit erhält, er mag die Höhe der schiefen Ebene frei herab fallen oder längs der schiefen Ebene sich bewegen, so erhält der Körper auch dieselbe Geschwindigkeit (vergl. auch No. 4) wenn er durch mehrere an einander liegende schiefe Ebenen sich bewegt. Die Geschwindigkeit des Körpers in E ist also $= v = 2\sqrt{gx}$

Dasselbe Resultat erhält man durch die allgemeinen phoronomischen Gleichungen, Bd. I., pag. 357, No. 4.

Denn bezeichnet t die Zeit für den Weg durch den Bogen $BE = s$, so ist nach Formel 2 die Beschleunigung in E und zwar nach der Tangente EH gerichtet

$$G = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

Diese ist aber offenbar die Beschleunigung der Schwere, wenn dieselbe nach der Richtung EH reducirt wird. D. h.

an EJ die Beschleunigung g der Schwere stellt und G die nach der Tangente reducirte Beschleunigung bezeichnet,

$$G : g = EK : EJ$$
$$G = \frac{EK}{EJ} \cdot g$$

Durch die Seiten des sehr kleinen MLN ausgedrückt

$$G = \frac{ML}{EL} g = g \frac{\partial x}{\partial s}$$

hat demnach $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = g \frac{\partial x}{\partial s}$

Multiplicirt man beiderseits mit $4 \frac{\partial s}{\partial t}$, so erhält man

$$2 \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial s}{\partial t} = 4g \frac{\partial x}{\partial t}$$

und nach t integrirt

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 = 4gx + C$$

Nun ist nach Bd. I., pag. 357, Formel 1:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = v$$

folglich hat man

$$v^2 = 4gx$$

oder $$v = 2\sqrt{gx} \qquad (1)$$

indem die Constante fortfällt, weil für $x = 0$ auch $v = 0$ ist.

Nun ist nach Formel 4, pag. 358

$$t = \int \frac{1}{v} \partial s = \int \frac{1}{2\sqrt{gx}} \partial s = \int \frac{1}{2\sqrt{gx}} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} \cdot \partial x \qquad (2)$$

Ferner ist $EL^2 = EM^2 + ML^2$

oder $(\partial s)^2 = (\partial y)^2 + (\partial x)^2$

woraus $$\frac{\partial s}{\partial x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

Und wenn man den Halbmesser AC mit r, die Höhe AD des Bogens AB mit h bezeichnet

$$y^2 = (h - x)(2r - h + x) \qquad (3)$$

oder $FA = h - x = u$ gesetzt:

$$y^2 = u(2r - u) \qquad (4)$$

also $$\frac{\partial u}{\partial x} = -1$$

und $$2y \frac{\partial y}{\partial u} = 2(r - u)$$

also

$$y \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = y \frac{\partial y}{\partial x} = (r - u) \frac{\partial u}{\partial x} = u - r \qquad (5)$$

und $$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{u - r}{y} = \frac{u - r}{\sqrt{u(2r - u)}} \qquad (6)$$

hiernach

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \sqrt{1 + \frac{(u - r)^2}{u(2r - u)}} = \frac{r}{\sqrt{u(2r - u)}} \qquad (7)$$

Folglich verwandelt sich Gl. 2

$$t = \int \frac{1}{2\sqrt{g(h - u)}} \cdot \frac{r}{\sqrt{u(2r - u)}} \partial x = \frac{r}{2\sqrt{g}} \int \frac{-\partial u}{\sqrt{(h - u)(2ru - u^2)}} \qquad (8)$$

Dieses Integral läfst sich nur näherungsweise angeben, indem man es in eine Reihe entwickelt. Zu diesem Behuf forme man um

$$\frac{-1}{\sqrt{(h - u)(2ru - u^2)}} \text{ in } \frac{-1}{\sqrt{h - u} \cdot \sqrt{2ru\left(1 - \frac{u}{2r}\right)}} = \frac{-1}{\sqrt{2r}} \cdot \frac{1}{\sqrt{hu - u^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u}{2r}}} \qquad (9)$$

Entwickelt man die letzte Wurzelgröfse mit Hülfe des binomischen Satzes, hat man

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u}{2r}}} = \left(1 - \frac{u}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - (-\tfrac{1}{2}) \frac{u}{2r} + \frac{-\frac{1}{2} \times -\frac{3}{2}}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{u}{2r}\right)^2 - \frac{-\frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2} \cdot -\frac{5}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{u}{2r}\right)^3$$

$$+ \ldots\ldots \pm \frac{-\frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2} \cdot -\frac{5}{2} \ldots -\frac{2n - 1}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n} \left(\frac{u}{2r}\right)^n \mp \ldots\ldots$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2} \frac{u}{2r} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{u}{2r}\right)^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{u}{2r}\right) + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots (2n)} \left(\frac{u}{2r}\right)^n + \ldots$$

Multiplicirt man daher das 2te Glied $\frac{1}{\sqrt{hu - u^2}}$ Gleichung 9 mit jedem einzelnen Gliede dieser Reihe so erhält man die zu integrirende Function:

$$\frac{-1}{\sqrt{2r}}\left[1\cdot\frac{1}{\sqrt{hu-u^2}}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{u}{2r}\frac{1}{\sqrt{hu-u^2}}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\left(\frac{u}{2r}\right)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{hu-u^2}}+\ldots\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot3\cdot5\ldots.2n-1}{2\cdot4\cdot6\ldots.2n}\left(\frac{u}{2r}\right)^n\cdot\frac{1}{\sqrt{hu-u^2}}+\ldots\right] \qquad (10)$$

Das allgemeine Glied der entwickelten und zu integrirenden Reihe ist demnach

$$-\frac{1\cdot3\cdot5\ldots.2n-1}{2\cdot4\cdot6\ldots.2n}\cdot\frac{1}{(2r)^{n+\frac{1}{2}}}\times\int\frac{u^n}{\sqrt{hu-u^2}}$$

Schreibt man nun für $\int\frac{-u^n}{\sqrt{hu-u^2}}$

$$\int\frac{\frac{1}{2}hu^{n-1}-u^n-\frac{1}{2}hu^{n-1}}{\sqrt{hu-u^2}}=\int\frac{(\frac{1}{2}h-u)u^{n-1}}{\sqrt{hu-u^2}}-\tfrac{1}{2}h\int\frac{u^{n-1}}{\sqrt{hu-u^2}} \qquad (11)$$

so hat man zur Anwendung die allgemeine Reductionsformel:

$$\int qx\cdot fx\cdot\partial x=qx\int fx\,\partial x-\int[\varphi' x\int fx\,\partial x]\partial x$$

Um mit Hülfe dieser Formel das erste Integral rechts des Gleichheitszeichens zu finden, setzt man

$$qx=u^{n-1}$$

hieraus ist $\varphi' x=(n-1)u^{n-2}$

ferner $fx=\frac{\frac{1}{2}h-u}{\sqrt{hu-u^2}}$

so ist

$$\int fx\cdot\partial x=\int\frac{\frac{1}{2}h-u}{\sqrt{hu-u^2}}\partial u=\sqrt{hu-u^2}$$

Mithin

$$\int\frac{(\frac{1}{2}h-u)u^{n-1}}{\sqrt{hu-u^2}}=u^{n-1}\sqrt{hu-u^2}-\int(n-1)u^{n-2}\sqrt{hu-u^2}\,\partial u$$
$$=u^{n-1}\sqrt{hu-u^2}-(n-1)\int\frac{u^{n-2}(hu-u^2)}{\sqrt{hu-u^2}}\partial u$$
$$=u^{n-1}\sqrt{hu-u^2}-(n-1)h\int\frac{u^{n-1}}{\sqrt{hu-u^2}}\partial u+(n-1)\int\frac{u^n}{\sqrt{hu-u^2}}\partial u$$

Diesen Werth in Gleichung 11 gesetzt gibt

$$\int\frac{-u^n}{\sqrt{hu-u^2}}=u^{n-1}\sqrt{hu-u^2}-(n-1)h\int\frac{u^{n-1}}{\sqrt{hu-u^2}}\partial u+(n-1)\int\frac{u^n}{\sqrt{hu-u^2}}\partial u$$
$$-\tfrac{1}{2}h\int\frac{u^{n-1}}{\sqrt{hu-u^2}}$$

und reducirt:

$$n\int\frac{-u^n}{\sqrt{hu-u^2}}=u^{n-1}\sqrt{hu-u^2}+(n-\tfrac{1}{2})h\int\frac{-u^{n-1}}{\sqrt{hu-u^2}}$$

Dividirt man mit n, so erhält man das Integral des allgemeinen Gliedes der Reihe

$$\int\frac{-u^n}{\sqrt{hu-u^2}}=\frac{1}{n}u^{n-1}\sqrt{hu-u^2}+\frac{2n-1}{2n}h\int\frac{-u^{n-1}}{\sqrt{hu-u^2}}\partial u \qquad (12)$$

In der Reihe 10 ist das erste Glied $\int\frac{-1}{\sqrt{hu-u^2}}$, das zweite $\int\frac{-u}{\sqrt{hu-u^2}}$ u. s. w. und bei demselben Nenner sind die Zähler der Integrale der Reihe nach u^0, u^1, u^2 .... u^n. Man hat daher in dem Integral 12 des allgemeinen Gliedes für n nach und nach die Werthe 0, 1, 2, 3 u. s. w. zu setzen und jedes der einzelnen Glieder zu integriren.

Ferner ist zu bemerken, dafs in Bezug auf Fig. 620 beim Anfang des Schwunges x in dem Punkt $D=0$ ist und bis zur Mitte des Schwunges auf die Höhe $DA=h$ wächst. Da nun $u=h-x$, so bleibt auch u in den Grenzen zwischen 0 und h, es mufs daher jedes der obigen Integrale zwischen den Grenzen 0 und h genommen werden, und dies geschieht wenn man bei jedem einzelnen Integral das für 0 genommene von dem für h genommenen abzieht.

Das erste Glied des Integrals:

$$\frac{1}{n} u^{n-1} \sqrt{hu - u^2}$$

wird für $u = h$ und für $u = 0$ zu Null es kommt dies Glied also in der Reihe nicht vor und man hat nur

$$\int \frac{-u^n}{\sqrt{hu-u^2}} = \frac{2n-1}{2n} h \int \frac{-u^{n-1}}{\sqrt{hu-u^2}} \delta u \quad (13)$$

Bezeichnet man daher das Integral

$$\int \frac{-u^0}{\sqrt{hu-u^2}} = \int \frac{-1}{\sqrt{hu-u^2}} \text{ mit } J_0$$

$$\int \frac{-u^1}{\sqrt{hu-u^2}} \text{ mit } J_1$$

u. s. w.

$$\int \frac{-u^n}{\sqrt{hu-u^2}} \text{ mit } J_n$$

so hat man

$$J_1 = \tfrac{1}{2} h J_0$$
$$J_2 = \tfrac{3}{4} h J_1 = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} h^2 J_0$$
$$J_3 = \tfrac{5}{6} h J_2 = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6} h^3 J_0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$J_n = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} h^n J_0$$

Diese Werthe in die Reihe 10 gesetzt, und den gemeinschaftlichen Factor J_0 vorangestellt, gibt das Integral der Reihe

$$= \frac{J_0}{\sqrt{2r}} \left[1 + (\tfrac{1}{2})^2 \frac{h}{2r} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{2r}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{2r}\right)^3 + \cdots\cdots \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{2r}\right)^n + \cdots \right]$$

Es ist jetzt noch das Integral $J_0 = \int \frac{-1}{\sqrt{hu-u^2}}$ zu bestimmen, und es ist dies

$$= - Arc \cdot sin \frac{-h + 2u}{h} + \text{Const.}$$

Für $u = h$ wird $J^h_0 = - Arc\,(sin = 1) = -\frac{1}{2}\pi + C$

für $u = 0$ wird $J^0_0 = - Arc\,(sin = -1) = +\frac{1}{2}\pi + C$

Das obere J von dem unteren abgezogen gibt das zwischen beiden Grenzen genommene Integral $J_0 = \pi$

Man hat demnach die integrirte Reihe vollständig

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2r}} \left[1 + (\tfrac{1}{2})^2 \frac{h}{2r} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{2r}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{2r}\right)^3 + \cdots\cdots \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{2r}\right)^n + \cdots \right] \quad (14)$$

und wenn man nach Gleichung 8 dieses Integral mit $\frac{r}{2\sqrt{g}}$ multiplicirt, so erhält man die Zeit, in welcher der Körper von B nach A fällt:

$$t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r}{2g}} \left[1 + (\tfrac{1}{2})^2 \frac{h}{2r} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \left(\frac{h}{2r}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \left(\frac{h}{2r}\right)^3 + \cdots\cdots \right] \quad (15)$$

Ist die Höhe $AD = h$ des Schwingungsbogens gegen den Halbmessers $CB = r$ sehr klein, so kann man näherungsweise setzen:

$$t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r}{2g}} \quad (16)$$

Der Körper bei dem Fall von B nach A erreicht in diesem Punkt eine Geschwindigkeit mit welcher er vermöge des Beharrungsstandes die Bewegung weiter fortsetzt; beim Aufsteigen nach G hin wird diese Geschwindigkeit immer geringer und in dem Punkt $G = 0$, wo dann der Körper wieder über A nach B zurückschwingt. Beide gleiche Bogen BA und GA beim Fallen und Aufsteigen werden in der gleichen Zeit t zurückgelegt, Bogen BAG ist der Schwingungsbogen, die Bewegung von B nach G und die von G nach B heifst eine Schwingung und die Zeit dazu, die Schwingungszeit ist

$$T = 2t \text{ näherungsweise} = \pi \sqrt{\frac{r}{2g}} \quad (17)$$

Eine gewichtlos zu denkende Stange CB von der Länge r mit einem schweren Punkt B versehen, heifst ein einfaches Pendel und wenn dieses eine Schwingung BAG in einer Secunde vollbringt, ein Secundenpendel.

Aus der Formel 16 erhält man das Secundenpendel T_1 wenn man $2t = 1$ setzt:

$$r = \frac{2g}{\pi^2} \qquad (18)$$

Für $g = 15\frac{1}{2}$ Fufs also $r = 0{,}1013212 \times 31{,}25 = 3{,}1662875$ pr. Fufs = 37,9995 ... preufs. Zoll.

Fallmaschine, s. Atwood's Fallmaschine.

Falsche Wurzel einer Gleichung ist die ehemals vorgekommene Bezeichnung für negative Wurzel.

Falschrechnung oder **Falsirechnung** ist eine indirecte Rechnungsweise, um die unbekannte Zahl aus einer Rechnungsaufgabe zu finden, indem man eine willkührliche (eine falsche) Zahl für die unbekannte annimmt und diese probirt um auf die richtige Unbekannte zu kommen. Z. B. die Zahl (x) zu finden, welche mit 4 dividirt, hierzu 5 addirt und diese Summe mit 3 multiplicirt die Zahl 30 gibt. Anstatt zu rechnen

$$x = \left(\frac{30}{3} - 5\right) 4 = 20$$

nimmt man für x, da sie zunächst durch 4 dividirt werden soll, die Zahl 4 selbst und erhält nach den verlangten Rechnungsoperationen die Zahl 18 statt 30. Hiernach versucht man höhere Zahlen bis man auf das richtige $x = 20$ kommt.

Familie von Curven, s. Curven, IV., pag. 184.

Feldmefskunst, s. Baculometrie.

Fermat's Sätze. Fermat, ein französischer Mathematiker des 17ten Jahrhunderts hat mehrere arithmetische Gesetze aufgefunden, deren Richtigkeit noch nicht hat angegriffen werden können, ohne dafs jedoch der Beweis ihrer Giltigkeit gegeben worden ist, und die unter dem Namen: Fermat's Sätze oder Fermat's Lehrsätze bekannt sind.

I. Die Sätze über die Polygonalzahlen lassen sich in folgenden allgemeinen Satz zusammenfassen:

Jede ganze Zahl ist entweder eine $n$eckige Zahl oder sie ist aus 2, 3 ... oder n $n$eckigen Zahlen zusammengesetzt.

Hieraus entspringt der Satz:

A. Jede ganze Zahl ist entweder eine dreieckige Zahl oder sie ist aus 2 oder 3 dreieckigen Zahlen zusammengesetzt:

Beispiele:

Dreieckige Zahlen sind: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, überhaupt Zahlen von der Form $\frac{1}{2}n(n+1)$.

Die Zahl 30 ist $= 3 + 6 + 21 = 15 + 15 = 1 + 1 + 28$

die Zahl 31 ist $= 3 + 28$
32 „ $= 1 + 10 + 21$
33 „ $= 3 + 15 + 15 = 6 + 6 + 21$
34 „ $= 6 + 28$
35 „ $= 1 + 6 + 28 = 10 + 10 + 15$
36 „ $= 36$

B. Jede ganze Zahl ist entweder eine viereckige Zahl oder sie ist aus 2, 3 oder 4 viereckigen Zahlen zusammengesetzt.

Beispiele:

Viereckige Zahlen sind 1, 4, 9, 16 .... überhaupt Zahlen von der Form n^2.

$30 = 1 + 4 + 9 + 16 = 1 + 4 + 25$
$31 = 1 + 1 + 4 + 25 = 4 + 9 + 9 + 9$
$32 = 16 + 16$
$33 = 4 + 4 + 25$
$34 = 9 + 25$
$35 = 1 + 9 + 25$
$36 = 36$

C. Jede ganze Zahl ist entweder eine fünfeckige Zahl oder sie ist aus 2, 3, 4 oder 5 fünfeckigen Zahlen zusammengesetzt.

Beispiele:

Fünfeckige Zahlen sind 1, 5, 12, 22, 35 .... überhaupt Zahlen von der Form $\frac{1}{2}n(3n-1)$.

$30 = 1 + 5 + 12 + 12 = 1 + 1 + 1 + 5 + 22$
$31 = 1 + 1 + 5 + 12 + 12$
$32 = 5 + 5 + 22$
$33 = 1 + 5 + 5 + 22$
$34 = 12 + 22$
$35 = 35$
$36 = 1 + 35$

Und nach demselben Gesetz für sechseckige, siebeneckige u. s. w. Zahlen.

II. In jeder Reihe von Potenzen

$$a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ \ldots.\ a^m$$

gibt es ein Glied a^m von der Beschaffenheit, dafs $a^m - 1$ durch eine gegebene Primzahl p theilbar ist, wenn zugleich $p - 1$ durch m ohne Rest getheilt wird.

Z. B. in $4^6 - 1 = 728$ geht die Primzahl 13 auf, weil 6 ein Theiler von $13 - 1 = 12$ ist: Es ist $728 = 13 \times 56$.

Die Primzahlen 31, 37 u. s. w. gehen nicht in 728 auf, wenngleich 6 ein Theiler von $31 - 1 = 30$ und von $37 - 1 = 36$ ist. Nur noch die Primzahl 7 genügt und 728 ist $= 7 \times 104$.

III. Ist $a^m - 1$ durch p theilbar, so ist auch jede Potenz $a^{mn} - 1$ durch p theilbar.

Z. B. $2^4 - 1 = 15$ ist durch 5 theilbar und 4 ist ein Theiler von $5 - 1 = 4$. Daher ist auch $2^{4 \cdot 3} - 1 = 4095$ durch 5 theilbar.

IV. Der Satz II. ist von Euler und Gauss

ınden Satz umgeändert worden, · dennoch zu Fermat's Sätzen ge- wird:

$a^{p-1} - 1$ durch p theilbar, wenn Primzahl und a nicht durch p ist.

$2^{10} - 1 = 1023$ ist durch 11 theil- ist $1023 = 11 \times 93$.

de Primzahl von der Form $4n+1$ Summe zweier Quadrate. Z. B.

$7 = 4 \times 4 + 1$; $17 = 1 + 4^2$
$9 = 4 \times 7 + 1$; $29 = 2^2 + 5^2$
$9 = 4 \times 22 + 1$; $89 = 5^2 + 8^2$

las, ein Glas durch welches mit- echung der Lichtstrahlen ferne ände als Bilder dem Auge näher und dadurch deutlicher gesehen Die Form und Wirkung der siehe in dem Art.: Brille, B, ir die Ferne, pag. 433.

ohr ist ein optisches Instrument gleichen Behuf mit Fernglas (s. nisches Fernrohr mit Fig. 91). Die ɜm fernen Gegenstande NN' aus- n Lichtstrahlen werden von einem DE, dem vordersten im Rohre, jectivglase aufgefangen, durch- , zugleich in ihrer Richtung ab- und wieder von einem zweiten der auch von mehreren Gläsern ıander aufgefangen, durchgelassen a Auge dergestallt zugeführt, dafs enstand vergrößert erscheint.

ɜr hierbei stattfindenden Brechung, ɔn der Lichtstrahlen wird das r auch Refractor genannt; denn t auch Fernröhre, welche mittelst ıng, also durch Zurückwerfung flection der Lichtstrahlen Gegen- rergrößern und welche daher Re- ɜn, Teleskope, Spiegelte- e heißen. Erstere Fernröhre sind ische, letztere katoptrische re; von den Ersteren ist hier die

ıtliche Fernröhre kommen darin dafs sie ein biconvexes Objectiv haben, und deren Systeme un- len sich nur in der Form des AB und dafs statt eines auch Oculargläser zwischen AB und gelegt werden. Sämmtliche Glä- ɜn mit einander in einer und der- Axe und sind zur Abhaltung des hts mit einem undurchsichtigen mschlossen.

ies Fernrohr ohne Ausnahme ein ɜes Objectiv DE hat, so gilt auch Fernröhre die Betrachtung der Erscheinungen, welche mit Hülfe des Glases DE hervorgehen, wie sie in dem Art.: Astronomisches Fernrohr bis pag. 145 vorgetragen sind; und zwar bis zur Gestaltung des Luftbildes in der Ebene $C'C''$; wobei noch zu bemerken ist dafs dieses Bild nur dann als wirkliches Bild dem Auge erscheint, wenn man die Ebene $C'C''$ mit weifsem Papier oder mit einer sonst hellfarbigen Ebene belegt, dafs es aber auch ohne selbstständig sichtbar zu sein, in seinen einzelnen Strahlenpunkten als Bild von dem Ocular AB aufgefangen und zu einem dem Auge nun sichtbaren Bilde gesammelt wird.

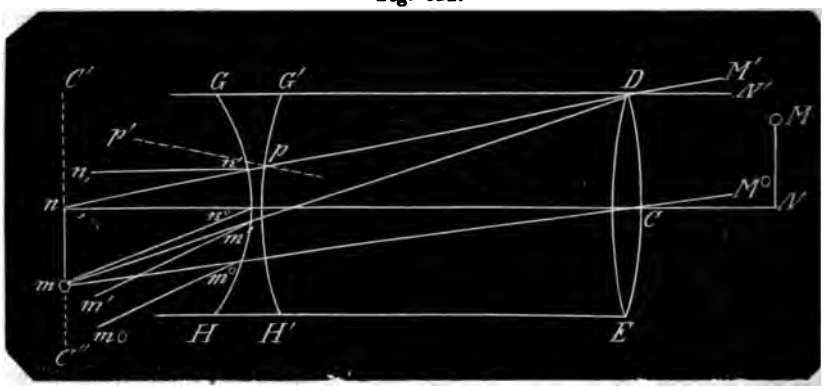
Von diesem Luftbilde ab nach dem Ocular hin fängt das Fernrohr an ein Keppler'sches Fernrohr zu sein, indem Keppler es so wie es Fig. 91 zeigt, construirt hat, und der zu dieser Figur gehörige Artikel gibt Beschreibung und Theorie desselben.

2. Das Galileische oder das holländische Fernrohr, welches früher als das ad 1 gedachte astronomische Fernrohr erfunden worden ist, hat dasselbe Objectiv DE (Fig. 91), dessen Brennpunkt sei n (Fig. 621), so würde in derselben Ebene $C'C''$ dasselbe Luftbild wie in Fig. 91 entstehen, wenn nicht ein Glas GH zwischen gelegt wäre. Es würde also der aus dem sehr fernen Punkt N herrührende Strahl NC ungebrochen geradlinig nach n hin fortgehen und alle von N ∓ mit NC auf die Fläche CD fallenden Strahlen werden wie der Strahl $N'D$ in den Strahl Dn nach n hin gebrochen werden und sich sämmtlich in n vereinigen.

Ferner würde der aus dem sehr fernen Punkt M ausgehende Strahl M^0C geradlinig nach m fortgehen und alle von M ∓ mit M^0C auf die Fläche CD fallenden Strahlen würden wie der Strahl $M'D$ in den Strahl Dm nach m hin gebrochen werden und sich sämmtlich in m vereinigen. Es würde also wie bei dem astronomischen Fernrohr von dem fernen Gegenstande NM das verkehrte Luftbild nm in $C'C''$ entstehen. Diese Strahlen aber, welche das Luftbild hervorbringen sollen, werden von einem zwischen gelegten biconcaven Glase unterbrochen, dessen hohle nach dem Brennpunkt n hin gerichtete Fläche GH diesen Punkt n zugleich zum Zerstreuungspunkt hat (s. Brille, B, pag. 433 mit Fig. 265). Die hohle Fläche $G'H'$ fängt die durch DE gebrochenen Lichtstrahlen auf und leitet sie durch.

Der Strahl Dn z. B. wird in p aufge-

Fig. 621.



fangen; er geht aber nicht wie hier gezeichnet ist, geradlinig durch, sondern wie der Art.: „Ablenkung des Lichtstrahls“ mit Fig. 8 angibt, nach dem Einfallsloth hin geneigt. Ist *pp'* dieses Einfallsloth für den Punkt *p*, so fällt der gebrochene fortgesetzte Strahl über *pn* hinaus, der Austrittspunkt des Strahls liegt oberhalb *n'*, so dafs das wirklich entstehende Luftbild *nm* um ein Geringes von *n* über *m* verlängert wird. Von diesem beiläufigen und geringfügigen Umstande ist bei der Zeichnung abgesehen worden.

Fig. 265 zeigt aber, dafs wenn mit der Axe parallele Strahlen *aA*, *bB* ... auf ein Hohlglas fallen, dieselben durch das Glas hindurch nach *Aa'*, *Bb'* .... hin und zwar so gebrochen werden, als wenn sie aus einem vor dem Glase befindlichen Punkt *N*, dem Zerstreuungspunkt ungebrochen ausgegangen wären. Nun findet in Fig. 621 der umgekehrte Fall statt: sämmtliche ∓ mit der Axe auf *DE* fallende und daselbst gebrochene Strahlen vereinigen sich ungebrochen in *n*; nun ist dies dieselbe Erscheinung, als wenn Lichtstrahlen von *nm* aus ∓ der Axe auf die Glasfläche *GH* fielen, folglich werden die von *N* herkommenden Strahlen, indem sie aus *GH* heraustreten, ∓ mit der Axe gebrochen; der Strahl *Dn'* also in die mit n^0n parallele Richtung $n'n_1$.

Desgleichen vereinigen sich alle unter dem $\angle M^0CN$ auf *DE* fallenden und daselbst gebrochenen Strahlen ungebrochen in *m*, dieselben scheinen aber von der hohlen Oberfläche *GH* herzukommen; folglich werden diese Strahlen, indem sie aus *GH* heraustreten, in Richtungen gebrochen, die mit n^0m ∓ sind, wie z. B. der Strahl *Dm* in die Richtung $m'm_1$; der Strahl *Cm* in die Richtung m^0m_0.

Dieser letzte Satz stimmt auch vollkommen überein mit dem letzten Satz des Art. „Brille“ zu Fig. 266: Es wird hier von dem Gegenstand ab, welcher in nur geringer Entfernung von dem Glase *AB* sich befindet, das dem Glase näher gerückte Bild *a'b'* construirt. In Fig. 621 ist *nm* das Bild, und der Gegenstand *NM*, welcher in Wirklichkeit jenseits des Glases *GH* liegt, übt durch die Brechung der Lichtstrahlen eine Wirkung auf das Auge, als wenn es diesseits des Glases *GH*, weit über *nm* hinaus sich befände.

In Fig. 266 sind die beiden Strahlen *Aa'* und *Ca'*, welche das Bild *a'* hervorbringen, nach dessen Gegenstand *a* gerichtet; je weiter *a* von *AB* entfernt ist, desto kleiner wird $\angle Aaa'$, für eine unendliche Entfernung wird dieser Winkel = 0 und die Strahlen *Aa*, *Ca* werden ∓ mit einander. Dies ist aber Fig. 621 der Fall, weil *NM* als Gestirn in einer so grofsen Entfernung sich befindet, dafs n^0m und m^0m_0, welche rückwärts verlängert in *M* zusammen treffen sollen, als ∓ erscheinen.

Wenn das Auge dicht vor die Fläche *GH* gebracht wird, so empfängt es alle Strahlen, die von dem Gegenstand *NM* auf *DE* fallen, und derselbe erscheint in einem Bilde *nm*, und da dieses Bild auf der Netzhaut verkehrt sich abspiegelt, so wird es durch die Vernunft wieder zurück also verkehrt aus dem Auge hinausgeworfen und man sieht es wie den Gegenstand in Wirklichkeit ist, während bei dem Keppler'schen Fernrohr der Gegenstand verkehrt erscheint.

In Betreff der Vergrösserung hat man den natürlichen Sehewinkel für den Gegenstand *NM* den $\angle M^0CN = \angle nCm$, den

h Brechung der Lichtstrahlen entstee Sehwinkel ist der $\angle nn^0m$.

in ist

$nm = Cn \cdot tg\, nCm = nn^0\, tg\, nn^0m$

in

$\angle nCm : tg\, nn^0m = nn^0 : Cn$

ie Tangenten beider Winkel, und diesen die Höhen des Gegenstandes, sie natürlich und vergrößert gesewerden, verhalten sich also wie Brennweiten n^0n und Cn beider er und die Vergrößerung beträgt das

fache.

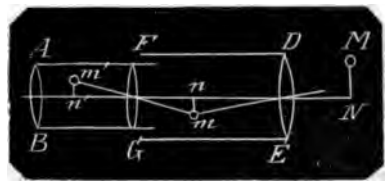
Diese beiden einfachsten Fernröhre, zweite älteste, welches Galilei nach m in Holland erfundenen Rohr conirte und das erste, welches Kepler nden hat, geben die Hauptprincipien selben an. Sie haben zugleich die ste Helligkeit, weil nur 2 Gläser dazu ören, deren Anzahl die Lichtstärke mindert. Zu astronomischen Beobtungen wird nur noch das Kepler'sche nrohr angewendet.

. Die Fernröhre für Beobachtung entner irdischer Gegenstände, die Erdnröhre müssen die Gegenstände in r natürlichen Lage darstellen. Das eaterperspectiv hat ein Ocular in m verschiebbaren Einsatz. Es ist also ein biconcaves Glas und nach ileischem Princip.

ie längeren verschiebbaren Röhre haentweder 2 oder 3 biconvexe Ocuin Einsätzen, die das innere verte Luftbild wieder aufrichten.

Wird nämlich durch das Objectiv DE erhalb des Rohrs das verkehrte Luftnm erzeugt, so wird zuerst ein bi-

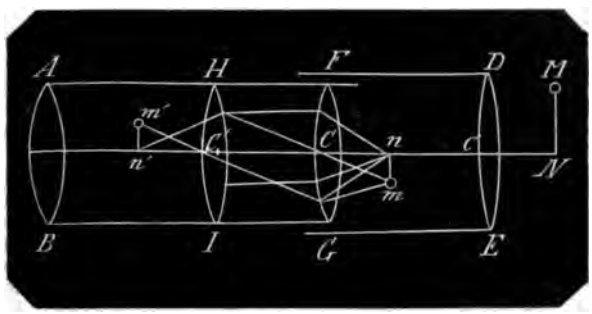
Fig. 622.



convexes Glas FG in einer größeren Entfernung von nm eingesetzt als dessen Brennweite beträgt. Alsdann brechen sich die Strahlen von nm durch FG und erzeugen ein aufrechtes Bild $n'm'$, indem dieses Glas in Beziehung auf nm dieselbe Wirkung hat als das Glas DE in Beziehung NM (s. auch Brille, No. 5 mit Fig. 264, pag. 433). Von $n'm'$ nun gehen die Strahlen nach dem zweiten Ocular AB, und da $n'm'$ in dessen Brennweite steht, so hat AB in Beziehung auf $n'm'$ dieselbe Wirkung wie das Ocular AB (Fig. 91) des Keplerschen Fernrohrs.

Wird Fig. 623 das biconvexe Glas FG so eingelegt, daſs NC dessen Brennweite ist, so ist $FDEG$ ein Keplersches Fernrohr: die Strahlen hinter FG, die von n kommen, laufen ∓ der Axe, die von m kommen, ∓ mit mC. Werden diese nun von dem zweiten biconvexen Glase HJ aufgefangen, so entsteht aus dem verkehrten Luftbilde nm ein aufrechtes Bild $n'm'$ in der Brennweite $C'n'$, wie durch DE ein verkehrtes Bild nm von dem aufrechten Gegenstand NM in der Brennweite von DE entstanden ist; und wird ein drittes Ocular AB so eingestellt, daſs n' gleichfalls dessen Brennweite ist, so hat AB, Fig. 623 mit AB Fig. 91 denselben Einfluſs: das Bild $n'm'$, also der Gegenstand NM wird aufrecht gesehen.

Fig. 623.



Fernsichtig, s. Auge, No. 6, pag. 184.

Feste Punkte in der Feldmefskunst sind Punkte, welche die Natur oder die Kunst entweder durch Form oder Lage in die Augen springend hervorgebracht oder ausgezeichnet hat, so dafs dieselben als Fundamentalpunkte einer Vermessung, als Ecken grofser Dreiecke zu einem Netz gewählt werden, als Bergkuppen, hohe und starke Baume, Thürme, ferner Ausgänge oder Endpunkte von einem durch Sumpfboden geführten Damm, an welche als feste Punkte Vermessungen geknüpft werden.

Am Hebel wird auch der Drehpunkt oder der Aufhängepunkt fester Punkt genannt.

Festigkeit ist der Widerstand gegen Trennung und besteht bei einem Körper in der Gröfse der Kraft, welche die Cohäsion der Massentheile desselben, wenn sie angegriffen wird, zu entwickeln vermag, bevor die Trennung erfolgt.

Die Trennung geschieht auf fünferlei Weise:

1. Durch Zerreifsen, wenn in dem Körper die Massentheile mit einer auf ihn wirkenden Zugkraft in einerlei Richtung getrennt werden.

2. Durch Zerbrechen, wenn in dem Körper die Massentheile durch Hebelwirkung, also auf die Richtung der Kraft rechtwinklig gerichtet getrennt werden.

3. Durch Zerquetschen, wenn in dem Körper die Massentheile dadurch, dafs sie zusammengedrückt werden, rechtwinklig mit der Richtung der Druckkraft von einander sich trennen.

4. Durch Zerknicken, wenn der Körper durch eine auf ihn wirkende Druckkraft in Folge seiner grofseren Höhe nach der Richtung dieser Kraft einbiegt und wie ad 2 zerbricht.

5. Durch Verdrehen, wenn in dem Körper die Massentheile durch zwei in verschiedenen Ebenen befindliche entgegengesetzt wirkende Tangentialkräfte von aufsen nach innen um eine sich selbst bildende mittlere Längenaxe von einander verschoben und endlich an einem zwischen beiden Kräften liegenden Ort dadurch von einander getrennt werden.

So viele Arten von Trennungen es gibt, so viele Arten von Festigkeiten unterscheidet man auch: die Festigkeit gegen das Zerreifsen heifst die absolute Festigkeit; die gegen das Zerbrechen heifst die respective oder relative F.; die F. gegen das Zerquetschen und Zerknicken ist die rückwirkende F., die dann auf beide Wirkungen untersucht wird; die F. gegen das Verdrehen endlich heifst die Torsionsfestigkeit.

Die Cohäsionskraft oder die Festigkeit ist je nach Beschaffenheit des Stoffs, aus dem der Körper besteht verschieden und man hat aus Versuchen die Festigkeiten verschiedener Stoffe ermittelt und tabellarisch geordnet; es sind dies die Tabellen über die Festigkeit der Materialien.

3. In allen diesen Tabellen ist die Festigkeit als das Maximum des natürlichen Zusammenhanges der Molecüle eines Stoffes (Eisen, Messing, Holz u. s. w.) angegeben; also als Gröfse der Kraft oder des Gewichts unter welchem gerade die Trennung der einzelnen Theile des Körpers von gewisser Gröfse und Form erfolgt.

Für die theoretische Betrachtung und Untersuchung der Festigkeiten mufs vorausgesetzt werden:

1. Dafs einfache Molecüle derselben Art einerlei Festigkeit haben.

2. Dafs jeder Körper, welcher seiner Form nach auf F. untersucht wird, von durchaus gleichartigem und durchweg gleicher Art zusammen gefügtem Stoff besteht.

Beiden Annahmen widerspricht die Erfahrung, dafs die Festigkeit eines Stoffes den Versuchen gemäfs verschieden gefunden worden ist. Es hat diese Erscheinung darin seinen Grund, dafs einerlei Stoff in verschiedenen Körpern unter verschiedenen Bedingungen zusammengesetzt ist. So z. B. hat man verschiedene Sorten Schmiedeeisen von verschiedenen Festigkeiten. Dasselbe findet bekanntlich bei einerlei Holz statt, selbst wenn man von Rissen, Aesten und anderen Ungleichartigkeiten absieht.

A. Absolute Festigkeit.

Die absolute Festigkeit kommt zur Erscheinung, wenn ein Körper in seinem oberen Querschnitt frei aufgehängt und in seinem unteren Querschnitt durch eine Zugkraft so stark belastet wird, dafs er zerreifst.

Je gröfser der Querschnitt des Körpers ist, desto mehr Molecüle sind der Länge nach mit einander vereinigt und die absoluten Festigkeiten zweier prismatischen Körper desselben Stoffs verhalten sich also wie deren Querschnitte, wobei die Form des Querschnitts in beiden verschieden, bei dem einen z. B. rund bei dem anderen eckig sein kann.

prismatische Körper zerreifst in obersten Querschnitte, weil für das Gewicht des ganzen Körpers ıstung hinzutritt, und der oberste ınitt also immer die gröfste Beerhält.

in Körper auf seine Länge von ıdenen Querschnitten, so zerreifst einem kleinsten Querschnitt und ei derjenigen Belastung, welche oluten Festigkeit des Körpers in Querschnitt zukommt.

ein Körper successive oder auf mit dem seiner absoluten Festigich grofsen Gewicht belastet, so t er nicht augenblicklich, sondern ängert sich zuerst. Das Gesetz, lchem diese Verlängerung vor sich ndet sich in dem Art. Elasticit. 1 bis 9. No. 10 gibt die tabel- Zusammenstellung der absoluten eiten und der Elasticitätsmodel ıdener Stoffe. Nun ist No. 7, For-

$$l = \frac{P}{kE} L$$

ist die Länge, um welche ein prisıer Körper von der Länge L, dem hnitt k und dem Elasticitätsmodurch die Belastung P als Zugısgedehnt wird. Setzt man den hnitt $k = 1$, so hat man:

$$l = \frac{P}{E} L.$$

at man nun für P die absolute :eit, so hat man in l die Länge, lche ein Körper sich verlängert r zerreifst. In der genannten Tat

Akazie $E = 1200\,000$
$P = 14\,000$

in ist vor dem Zerreifsen bei 14000 Belastung die Verlängerung

$$l = \frac{14000}{1200\,000} L = \frac{1}{85{,}7} L$$

in der 4ten Columne die ganze 6 steht.

Angaben der absoluten Festigkeiten ın sich in jedem Lande auf die iblichen Maafs- und Gewichtsein- : in Frankreich für 1 □Centimeter hnitt die Belastung in Kilogramm in Preufsen für 1 □Zoll Quer-, die Belastung bis jetzt noch in ıreufs. Pfunden.

ı der Tabelle pag. 24 zerreifst also ab von Akazienholz von 1 □Zoll hnitt bei einer Belastung von 14000

Hat der Stab 1 □Linie Querschnitt, so zerreifst er bei einer Belastung von $\frac{14000}{144}$ Pfund = 97⅞ Pfund.

Ein Stab von 3 Linien Breite, 2 Linien Höhe zerreifst bei einer Belastung von $2 \times 3 \times 97\frac{7}{8}$ Pfund = 583½ Pfund.

In dem Art.: Brechungscoefficient, pag. 403 und 404 finden sich die absoluten Festigkeiten der gebräuchlichsten Stoffe in alten preufs. Pfunden alphabetisch angegeben. Hier folgt dieselbe Tabelle in Zollpfunden.

Die Kraft gegen die absolute Festigkeit, d. h. für's Zerreifsen des Körpers durch Zugkraft nach dessen Länge, wenn der Querschnitt 1 preufs. □Zoll beträgt in Zollpfunden.

Ahorn	15900
Akazie	13100
Apfelbaum	9350 bis 14030
Basalt	1030
Birke	14030
Birnbaum	9350 bis 10300
Blei, gegossen	842 bis 1780
Blei, gewalzt	1870
Bleidraht (Eytelwein)	3650
Bronze, gegossen	2980
Buchsbaum (Eytelwein)	14780
engl. (Barlow)	18710
Ebenholz	12630
Eichenholz	
Sommereichen, Kern, (Eytelwein)	24320
zwischen Kern und Splint (ders)	20520
Splint (ders.)	13810
Steineichen (ders.)	20670
englisch (Barlow)	9350 bis 10290
Eisen, deutsches, gegossen (Eytelw.)	65850
englisch, gegossenes (Rennie)	89520
englisch (Mosely, Scheffler)	17770
schlesisches, geschmiedet (Eytelw.)	72960
gewöhnliches, geschmiedet	71650
englisch, geschmiedet (Tredgold)	66415
englisch, geschmiedet (Mosely, Scheffler)	61740
Eisendraht (Eytelwein)	56500
englischer (Mosely, Scheffler)	84190
französischer	87930
englischer in Seilen	41160
Elfenbein	15900
Erle (Eytelwein)	25415
englische (Barlow)	14030
Esche (Eytelwein)	20110
englische (Barlow)	16370
Fichte, Rothtanne (Eytelwein)	10290
englische	11225
Fischbein	7480
Flieder	11225
Glas	2620 bis 2806
Gold, gegossen	19640
Golddraht	62670
Granadillenholz	15900

Guajakholz	11225 bis 13470
Hagedorn	10290
Hainbuche	18710
Hanfseile, neue	7480 bis 9260
alte	5610
neue englische	5240
Hasel	16840
Hollunder	9820
Horn von Ochsen	8420
Kalkstein von Portland	842
zum lithographiren	421
oolithischer	187
Kampferbaum	15300
Kastanienbaum	11225
Ketten, eiserne mit ovalen Gliedern	32740
mit geraden verbolzten Gliedern	43960
Kiefernholz, stärkstes	20020
schwächstes	11690
englisches	11225
Kirschbaum, wild	13100
Klavierdraht	117300 bis 127600
Knochen von Ochsen	4677
Kupfer, gegossen, englisch	18710
desgl. japanisches	19550
desgl. spanisches	20390
desgl. ungarisches	30490
desgl. schwedisches	36390
geschmiedet, englisches	32740
desgl. schwedisches	36390
desgl französisches	31800
Kupferdraht	37420 bis 65480
Lerche	9354
Linde	13000
englische	16840
Mahagoni (Barlow)	8280
spanisches	13100
Marmor, weifser (Tredgold)	1743
Mauerziegel (ders.)	265
Messing	16840
Messingdraht	45370 bis 65480
Mispelbaum	11225
Mörtel	47
hydraulischer	94
Nufsbaum	13380
Olivenbaum	11785
Pappel	5612
Pflaumenbaum	11225
Platane	11225
Rohr, spanisches	1612
Rothbuche (Eytelwein)	20920
(Barlow)	10730
Sackerdanholz	21310
Sandelbaum	9475
Sandstein, stärkster	700
Schiefer, italienischer	11040
von Westmoreland	7580
schottischer	9237
Silber, feines, gegossenes	39290
Silberdraht	43965
Spiefsglanz, gegossenes	1864
Stahl zu Scheermessern	148000
zu gewöhnlichen Messern	133200
Stahl, mittelmäfsig biegsamer	
bester biegsamer	
bester gehärtet	
englischer	102900 bi
Teak, indische Eiche	
Ulme	
Wallnufsbaum	
Weide	
Weifsbuche	
Weifsdorn	
Weifstanne	11500
Wismuth, gegossen	
Zeder	
Zink, gewalzt	
gegossen	
Zinn, englisch, gegossen	
Zuckerkistenholz	

B. Respective oder
Festigkeit.

1. Die respective Festigkeit
Erscheinung wenn in einem
baren Körper mit einer Endebe
Körper befestigt ist, um eine
vorragt und an dem Ende di
mit *E* parallele Kraft *P* belas
so dafs dann eine Trennung d
quer durch die Länge des Kö
vorgeht.

In Figur 624 ist zu diesem K
einfachste Form, ein rechtwink
rallelepipedum gewählt, dessei
befestigter Querschnitt, welcher
lothrechten Ebene *E* zusammen
ABCD, dessen Höhe *AC*, dess
AB und in dem lothrechten
schnitt *FGHJ* im Abstand *AF*
dessen lothrechten Mittellinien
wicht *P* aufgehängt.

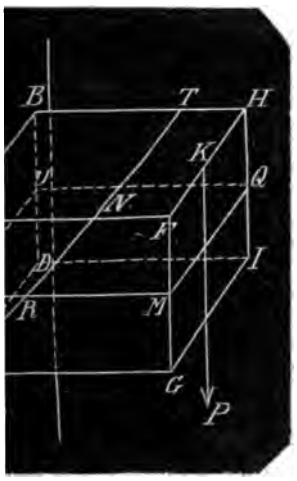
Man ersieht, dafs eine Trenn
Theile des belasteten Körpers qu
die Richtung der Kraft *P* erfolg

Ueber den Vorgang dieser T
Bruch genannt, hat man jetzt
gemein eine Ansicht, nämlich di
in dem Art. Bruch (Dynamik)
vorgetragen ist und welche
noully herrührt. Dagegen sol
der Vollständigkeit wegen die fri
über stattgehabten Ansichten
daraus hervorgegangenen Resul
geführt werden.

2. Die älteste Hypothese vo
ist offenbar unter der Annahm
stellt, dafs der zu zerbrechend
nicht die geringste Elasticität
sondern durchaus hart ist, denn
die Theile des Körpers werden
Zerbrechen nicht ausgedehnt, de
wird also nicht gebogen; der Qu
in welchem Bruch erfolgt, setzt
seiner Theile dem Bruch eine

derstand entgegen und dieser
ler absoluten Festigkeit. Da-
leren Wirkung gegen die beim
der Länge nach dadurch ver-
lafs sie für das Zerbrechen mit
n um Axen drehbar dem Zer-
Theile des Körpers widersteht.

Fig. 624.



er Hypothese entspringt fol-
rie für die respective Festig-

n dem Parallelepipedum, Fig.
eite $CD = b$, die Höhe $AC = h$,
$AF = l$; dann wird bei der Ein-
on P die Linie CD zur Dreh-
ch zu der Axe, um welche der
Augenblick des Bruchs sich
rde. Bezeichnet man den Co-
r absoluten Festigkeit, d. h.
durch welche der Körper von
neinheit als Querschnitt zer-
k, so ist die absolute F. des
kbh.

die absolute F. auf den Quer-
ichmäfsig vertheilt, also kann
dem Schwerpunkt S allein
etzt werden; dieser liegt auf
Höhe $SL = \frac{1}{2}h$, es wirkt also
stand kbh an dem Hebelsarm
essen statisches Moment ist =
Kraft P wirkt am Hebelsarm
ist für's Gleichgewicht:

$$P \cdot l = \tfrac{1}{2} k b h^2$$

$$P = \tfrac{1}{2} \frac{b h^2}{l} k$$

weite Hypothese von Leibnitz
te nimmt gleichfalls an, dafs
bei der Anfserung der respectiven Festigkeit sich eine Drehaxe CD bildet, ferner dafs die Theile eines festen Körpers als ausdehnbar betrachtet werden müssen und dafs die in dem Befestigungsquerschnitt $ABCD$ befindlichen Körpertheile in dem Verhältnifs ihrer Entfernung von der Drehaxe sich ausdehnen.

Nun wird vorausgesetzt, dafs der Körper zerbricht, wenn die der Drehaxe entferntesten Theile des Befestigungsquerschnitts diejenige Ausdehnung erhalten, mit welcher sie beim Angriff ihrer absoluten Festigkeit zerreifsen würden.

Aus dieser Hypothese entspringt folgende Theorie für die respective Festigkeit:

Gesetzt es sei $AN = BT$, Fig. 624, die Ausdehnung der von der Drehaxe CD um $AC = h$ entfernten auf der Linie AB befindlichen Körpertheile, bei welcher diese nach den Richtungen $AN \ldots . BT$ zerreifsen müssen, so ist deren Widerstand $= b \cdot k$ und deren Moment $= bk \cdot h$. Die in der Entfernung $CO = x$ von der Drehaxe befindlichen Körpertheile haben die Ausdehnung $OR = \frac{x}{h} AN$, folglich ist deren Widerstand gegen das Zerreifsen nach der Richtung $OR = \frac{x}{h} bk$ und deren Moment

$$= \frac{x}{h} b \cdot k \cdot x = \frac{bk}{h} x^2 \qquad (1)$$

Folglich haben sämmtliche auf die Höhe CO in dem befestigten Querschnitt befindlichen Körpertheile $CDOU$ das Moment:

$$\frac{bk}{h} \int x^2 \qquad (2)$$

wo die Constante fortfällt weil für $x = 0$ das Moment ebenfalls $= 0$ wird. Also das Moment auf $CO =$

$$\tfrac{1}{3} \frac{bk}{h} x^3$$

Für $x = h$ erhält man das Moment der absoluten Festigkeit für die Körpertheile des ganzen Querschnitts $ABCD =$

$$\tfrac{1}{3} b h^2 k \qquad (3)$$

Nun ist das Moment der Kraft $P = lP$ folglich für's Gleichgewicht

$$lP = \tfrac{1}{3} b h^2 k$$

woraus

$$P = \tfrac{1}{3} \frac{b h^2}{l} k \qquad (4)$$

4. Die dritte Hypothese von Bernoully sagt, dafs bei der Einwirkung einer Kraft P auf Zerbrechen der Körper gebogen wird und dafs sämmtliche Molecüle des Körpers zum Theil ausgedehnt, zum Theil

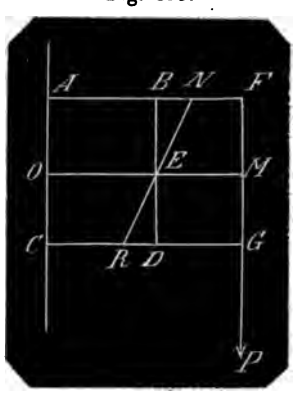
zusammen gedrückt werden. Diese Theile werden bei einem prismatischen Körper durch eine Ebene geschieden, welche in der Mitte des Körpers mit den Längenkanten parallel läuft.

Ist *MOUQ* diese Ebene, so werden die Theile des über derselben befindlichen Körpers *OAHQ* ausgedehnt, die des unter derselben Ebene befindlichen Körpers *OCJQ* zusammengedrückt, die in der Ebene *MOUQ* befindlichen Theile bleiben unverändert und die mit *OU* und *MQ* parallelen Linien in derselben bilden für die dazu gehörenden normalen Querschnitte die Drehaxen.

Aus dieser Hypothese entspringt nun folgende Theorie für die respective Festigkeit:

Es sei in dem Körper *AFGC*, Fig. 625, *OM* die unverändert bleibende (die neutrale) Ebene $\perp CG$, *BD* ein beliebiger normaler Querschnitt, so wird dieser durch die Belastung mit *P* die Lage *NR* annehmen.

Fig. 625.



Für den Bruch ist *BN* die dem Zerreifsen unmittelbar vorangehende Längenausdehnung, und da man hi Drehaxe annehmen mufs, so l das Moment der absoluten F nach No. 3 in Beziehung auf *E*

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3} b\,(BE)^2\,k$$

Oder wenn man $BE = m \cdot E$ setzt,

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3} m^2\,bh^2\,k$$

Die Zusammendrückung der T *CG* auf die Länge *DR* sei von dafs wenn dieselbe auf sämmtlich einer Flächeneinheit stattfände, d Kraft k' erforderlich wäre. Man dann das Moment $\mathfrak{M}'$ für die mendrückung der Theile des Que von der Höhe *DE* in Beziehun eben so wie $\mathfrak{M}$

$$\mathfrak{M}' = \tfrac{1}{3} b\,(DE)^2\,k' = \tfrac{1}{3}(1-m)^2\,bh$$

Also für's Gleichgewicht mit *l*

$$lP = \tfrac{1}{3} bh^2\,[m^2 k + (1-m)^2\,k'$$

Von diesen beiden Momenten durch die Dreiecksflächen *BEN* u bildlich dargestellten Widerständ

$$\tfrac{1}{2} BN \cdot BE \text{ und } \tfrac{1}{2} DR \cdot DE$$

also die wirklichen Widerstände

$$\tfrac{1}{2} mh \cdot b \cdot k \text{ und } \tfrac{1}{2}(1-m)\,h \cdot b \cdot$$

und deren Hebelsarme in Bezieh *E* die Entfernungen der Dreieck punkte von der Axe *OM*, nämlic $\tfrac{1}{3} BE$ und $\tfrac{1}{3} DE$ oder $\tfrac{1}{3} mh$ und $\tfrac{1}{3}(1-$

Beide wirken einander $\perp$ und gengesetzt gerichtet und können in der Axe *OM* wirksam anger werden. Da nun aus beiden er gesetzten Wirkungen keine Wirk die Axe erfolgt, so sind beide stände einander gleich, also

$$\tfrac{1}{2} mhbk = \tfrac{1}{2}(1-m)\,hbk'$$

woraus $$k' = \frac{m}{1-m}\,k$$

Diesen Werth in die obige Mo gleichung gesetzt, gibt

$$lP = \tfrac{1}{3} bh^2 \left[m^2 k + (1-m)^2 \frac{m}{1-m} k \right] = \tfrac{1}{3} m\,bh^2\,k$$

woraus $$P = \tfrac{1}{3} \frac{bh^2}{l} \cdot mk \qquad (8)$$

nach Bernoulli $P = \tfrac{1}{3} \frac{bh^2}{l} \cdot mk$

5. Den 3 Hypothesen nach hat man also die respective Festigkeit des Balkens Fig. 624, wenn er an einem Ende befestigt und an dem anderen belastet wird:

nach Galilei $P = \tfrac{1}{2} \frac{bh^2}{l} k$

nach Leibnitz und Mariotte $P = \tfrac{1}{3} \frac{bh^2}{l} k$.

In allen dreien sind $\frac{bh^2}{l}$ und c efficient k der absoluten Festigkei einstimmende Factoren; aber der s Theil, welcher von dem Product $\frac{bh}{l}$ nommen werden mufs, um die res Festigkeit zu finden, ist verschied

man $b = h = l = 1$ Zoll, so erhält
alog der absoluten Festigkeit den
ent der respectiven Festigkeit
eder $\frac{1}{4}k$
$\frac{1}{3}k$
$\frac{1}{2}nk$
einen noch unbekannten ächten
bedeutet.
r Verschiedenheit wegen drückt
en Coefficient n der respectiven
eit nicht als aliquoten Theil des
ent k aus, sondern man er-
ihn direct aus Versuchen.
ment der respectiven Festig-
es vierkantig rechtwinkligen
ist dann $lP = nbh^2$, wo n
fficient der respectiven Festig-
t. In dem Art. Brechungs-
nt unter No. 2, pag. 404 sind
fficienten der respectiven F.
rere Stoffe angegeben.
sind aber für die Formel
-Scheffler, Formel 648, pag.
$= \frac{1}{4}\varepsilon \frac{bc^2}{a}$ angenommen, so dafs

ist. Deshalb mufs von den

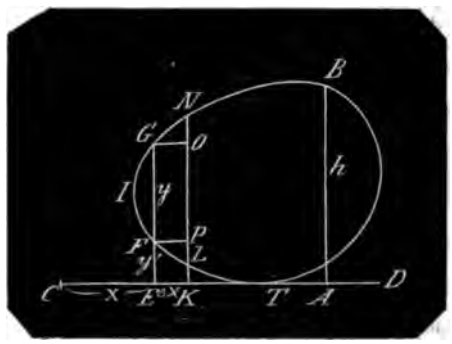
n Zahlen der 6te Theil genom-
rden um n in alten preufsischen
zu erhalten, und diese auf Zoll-
educirt ergeben folgende Tabelle.
Kraft gegen die respective Festig-
h. gegen das Zerbrechen des Kör-
assen Querschnitt 1″ breit, 1″ hoch
rch Einwirkung normal auf die
in 1″ Entfernung von der Dreh-

	Zollpfund:
. . . . .	1528
. . . . .	1715
. . . . .	1481
. . . . .	1715
Gufseisen	6236
iedeeisen	10290
. . . . .	1560
. . . . .	1715
. . . . .	1560
grün	811
en	1107
ni, spanisch	1216
egel	47
italienische	936
lkalk	156
che	1715
ne	1560
in	109
aum	1927
. . . . .	1185
fsbaum	1388
. . . . .	1045
nne	1637
von Canada	1185

rmittelung der respectiven Festigkeit eines prismatischen Körpers von beliebig begrenztem Querschnitt.

Es sei Fig. 626 der Querschnitt des Körpers an der Befestigungsebene, dieselbe vertical und normal auf der centrischen Linie des Körpers, die also horizontal ist. Sämmtliche diesem Querschnitt parallele Querschnitte sind einander congruent und in der Entfernung

Fig. 626.



l von diesem Querschnitt ist ein Gewicht P aufgehängt, welches mit der respectiven Festigkeit des Körpers im Gleichgewicht ist.

Zieht man durch den untersten Punkt T der Begrenzung die waagerechte Berührungslinie CD, so wird diese Linie zur Drehaxe des Querschnitts. Die Begrenzung sei durch eine rechtwinklige Coordinatengleichung gegeben, es sei CD die Abscissenlinie, C der Anfangspunkt der Abscissen, so ist jede Ordinate y wie die in E eine zweiförmige Function von x, weil sie die Begrenzung in 2 Punkten F und G schneidet.

Ist nun B der höchste Punkt in dem Querschnitt, so findet bei B die gröfste Spannung statt, welche die Theile erleiden können ohne zu zerreifsen. Ist also der Coefficient der absoluten Festigkeit $= k$, so ist die Spannung der Theile im Punkt B gleich der Spannung der Theile eines Körpers vom Querschnitt $= 1$, der die summarische Spannung k hat. Wird die Ordinate AB des Punkts $B = h$, die Ordinate $EG = y$, die $EF = y'$ gesetzt, so verhält sich, wenn man vorläufig von einer Zusammendrückung von Theilen absieht, die Spannung in B zu der in G und in F wie $h : y : y'$ (s. Leibnitz Hypothese No. 2).

Werden die Spannungen in G und in F auf sämmtliche Theile einer Flächen-Einheit bezogen, so ist diese für die

Flächeneinheit bei $G=\frac{y}{h}k$ und die für die Flächeneinheit bei $F=\frac{y'}{h}k$.

Das Moment mit dem das Stück JGF dem Zerbrechen widersteht, sei $\mathfrak{M}$. Läfst man $CE=x$ um die sehr kleine Länge $EK=\triangle x$ wachsen, so ist das Moment der Spannung des Flächenstücks $FLNG$ $=\triangle\mathfrak{M}$.

Zeichnet man die mit der Abscisse Parallelen GO, FP so ist das Moment der Spannung des Flächenstücks $FGOP$ $=(y-y')\triangle x$ offenbar kleiner als (das der Fläche $GFLN$) $\triangle\mathfrak{M}$, und denkt man sich von L und N auf EG Parallelen gezogen, so ist das Moment des nun entstehenden Flächenstücks $LN\times\triangle x=[y+\triangle y-(y'+\triangle y')]\triangle x$ gröfser als $\triangle\mathfrak{M}$.

Nun ist das Moment des Rechtecks $FGOP$ = dem Moment des Rechtecks $EGOK$ − dem Moment des Rechtecks $EFPK$. Da nun EK für beide Rechtecke die Drehaxe ist, so hat man die Momente der Spannung in beiden Rechtecken wenn die Spannung einmal in G, das andere Mal in F für die Flächeneinheit $=k$ ist, nach No. 3 Formel 3

$$\tfrac{1}{3}EK\cdot EG^3\cdot k \text{ und } \tfrac{1}{3}EK\cdot EF^3k$$

nach No. 4, Formel 7

$$\tfrac{1}{3}EK\cdot EG^2\cdot mk \text{ und } \tfrac{1}{3}EK\cdot EF^2\cdot mk$$

Also ist das Moment des Rechtecks von der Grundlinie EK und der Höhe FG nach No. 4:

$$\tfrac{1}{3}mk\cdot\triangle x\,y^2-\tfrac{1}{3}mk\cdot\triangle x\,(y')^2$$

Die Spannung in G ist aber nicht k sondern $\frac{y}{h}k$ und in $F=\frac{y'}{h}k$ folglich hat man das Moment für das Rechteck $FGOP$

$$\mathfrak{M}'=\tfrac{1}{3}mk\cdot\frac{y}{h}\triangle x\cdot y^2-\tfrac{1}{3}mk\frac{y'}{h}\cdot\triangle x\cdot(y')^2=\tfrac{1}{3}\frac{m}{h}k\triangle x\,[y^3-(y')^3] \qquad (1)$$

Setzt man in diesen Ausdruck $y+\triangle y$ für y und $y'+\triangle y'$ für y' so erhält man das Moment der respectiven Festigkeit des Rechtecks von der Grundlinie $EK=\triangle x$ und der Höhe LN

$$\mathfrak{M}''=\tfrac{1}{3}\frac{m}{h}k\triangle x\,[(y+\triangle y)^3-(y'+\triangle y)^3] \qquad (2)$$

Das Moment $\mathfrak{M}'$ ist kleiner, das Moment $\mathfrak{M}''$ ist gröfser als $\triangle\mathfrak{M}$. Man hat also die Vergleichung

$$\tfrac{1}{3}\frac{m}{h}k\triangle x\,[y^3-(y')^3]<\triangle\mathfrak{M}<\tfrac{1}{3}\frac{m}{h}k\triangle x\,[(y+\triangle y)^3-(y'+\triangle y')^3] \qquad (3)$$

Dividirt man mit $\triangle x$, so wird das mittlere Glied $\frac{\triangle\mathfrak{M}}{\triangle x}$ der Zuwachsquotient des Moments $\mathfrak{M}$ und das erste Glied ist der Grenzwerth des dritten Gliedes, demnach hat man auf die Differenziale übergehend

$$\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial x}=\tfrac{1}{3}\frac{m}{h}k\cdot[y^3-(y')^3] \qquad (4)$$

woraus

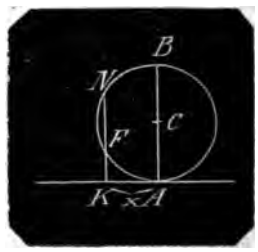
$$\mathfrak{M}=\tfrac{1}{3}\frac{m}{h}k\int[y^3-(y')^3]\,\partial x+C.$$

Für $\frac{1}{3}mk$ den Coefficient n der respectiven Festigkeit gesetzt gibt

$$\mathfrak{M}=\frac{n}{h}\int[y^3-(y')^3]\,\partial x+C. \qquad (5)$$

Beispiel. Es sei der Balken ein Cylinder von dem Halbmesser $=r$; nach Fig. 627 sind die Abscissen vom lothrechten Durchmesser AB ab genommen, $AK=x$ gesetzt und $h=AB=2r$. Man

Fig. 627.



hat also das Moment des Flächenstücks $ABNF$.

$$\mathfrak{M}'=\frac{n}{2r}\int[y^3-(y')^3]\,\partial x+C.$$

Es ist $KN=y=r+\sqrt{r^2-x^2}$ (1)

$KF=y'=r-\sqrt{r^2-x^2}$ (2)

mithin

$$\mathfrak{M}'=\frac{n}{2r}\int[(r+\sqrt{r^2-x^2})^3-(r-\sqrt{r^2-x^2})^3]\,\partial x+C. \qquad (3)$$

$$=4r\int\sqrt{r^2-x^2}-\frac{1}{r}\int x^2\sqrt{r^2-x^2} \qquad (4)$$

Nun ist $4r\int\sqrt{r^2-x^2} = 4r\left[\frac{1}{2}x\sqrt{r^2-x^2} + \frac{r^2}{2}\,Arc\sin\frac{x}{r}\right]$

$$= 2rx\sqrt{r^2-x^2} + 2r^2\,Arc\sin\frac{x}{r} \qquad (5)$$

Für das zweite Integral No. 4 hat man die Reductionsformel

$$\int x^m(a+cx^2)^n\,\partial x = \frac{1}{c(2n+m+1)}\left[(a+cx^2)^{n+1}\cdot x^{m-1} - (m-1)a\int(a+cx^2)^n\,x^{m-2}\right]$$

Hier ist $a = r^2$, $c = -1$, $n = \frac{1}{2}$, $m = 2$

Also

$$\int\sqrt{r^2-x^2}\cdot x^2\,\partial x = -\frac{1}{4}\left[(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}x - r^2\int(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= -\frac{1}{4}x(r^2-x^2)\sqrt{r^2-x^2} + \frac{1}{4}r^2\left(\frac{1}{2}x\sqrt{r^2-x^2} + \frac{r^2}{2}\,Arc\sin\frac{x}{r}\right)$$

und

$$\frac{1}{r}\int\sqrt{r^2-x^2}\,x^2\,\partial x = -\frac{1}{4}rx\sqrt{r^2-x^2} + \frac{1}{4}\frac{x^3}{r}\sqrt{r^2-x^2} + \frac{1}{8}r^3\,Arc\sin\frac{x}{r} \qquad (6)$$

Mithin den Ausdruck 6 von dem No. 5 abgezogen gibt

$$\mathfrak{M}' = n\left(\frac{17r^2x - 2x^3}{8r}\sqrt{r^2-x^2} + \frac{15}{8}r^3\,Arc\sin\frac{x}{r}\right)$$

wo die Constante fortfällt, weil für $x = 0$ auch $\mathfrak{M} = 0$ wird.

Für $x = r$ entsteht das Moment des Halbkreises.

Das erste Glied fällt fort, $\frac{x}{r} = 1$ folglich $Arc\,(sin = 1) = \frac{\pi}{2}$ und

$$\mathfrak{M} = \frac{15}{16}\pi r^3 n$$

Für den ganzen Cylinderquerschnitt erhält man

$$\mathfrak{M} = \frac{15}{8}\pi r^3 n \qquad (7)$$

7. Ein vierkantiger Balken von den Abmessungen l, b, h ist an einem Ende in horizontaler Lage befestigt, so findet man das auf das andere Ende anzubringende Gewicht Q durch welches er zerbricht, wenn sein eigenes Gewicht mit berücksichtigt wird wie folgt:

Ist g das Gewicht der Körpereinheit, so ist das Gewicht des Balkens $= lbhg$; dieses ist in seinem Schwerpunkt, also auf der Hälfte seiner Länge wirksam, mithin sein Moment in Beziehung auf den Befestigungsquerschnitt $= \frac{1}{2}bhl^2g$, das Moment des Gewichts Q ist $= l\cdot Q$, daher hat man die Momentengleichung

$$lQ + \tfrac{1}{2}bhl^2g = nbh^2$$

woraus $Q = \frac{nbh^2}{l} - \frac{1}{2}bhlg$

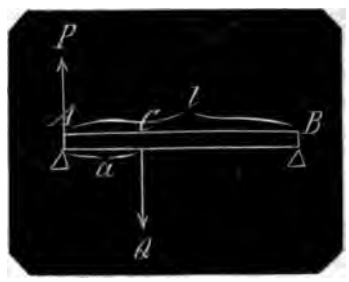
Für $Q = 0$ hat man in l die Länge, bei welcher der Balken vermöge seines eigenen Gewichts in dem Befestigungsquerschnitt zerbricht

$$L = \sqrt{2n\frac{h}{g}}$$

8. Ein vierkantiger Balken von den Abmessungen l, b, h ist in horizontaler Lage an seinen Enden unterstützt und zwischen beiden Unterstützungspunkten in Entfernung a von dem einen Ende mit einem Gewicht Q belastet, so findet man das Maximum von Q, bei welchem also der Balken zerbricht, wenn auf das Gewicht des Balken keine Rücksicht genommen wird, durch folgendes Verfahren.

Das Gewicht Q hat zur Gegenwirkung den Druck des Balkens auf beiden Unterstützungen in A und B. Der Druck auf A sei P, so kann man die Stütze A hinweg und dafür lothrecht aufwärts eine

Fig. 628.



Kraft P angebracht denken, so dafs das Gleichgewicht hergestellt bleibt. Durch diese Abänderung ist nun der Balken l zum Hebel mit dem festen Drehpunkt B

geworden und man hat in Beziehung auf den Punkt B die Momentengleichung

$$P \cdot l = Q(l - a)$$

woraus der Druck auf $A =$

$$P = Q \cdot \frac{l - a}{l}$$

Diese Kraft P hat nun das Bestreben, den Balken in C zu zerbrechen, deren Hebelsarm ist a, folglich ist $aP =$ dem Moment der respectiven Festigkeit, oder

$$aP = aQ \cdot \frac{l - a}{l} = bh^2 n$$

woraus die Last in C, welche den Balken in C zerbricht

$$Q = \frac{b \cdot l \cdot h^2}{a(l - a)} n$$

denselben Werth für Q erhält man für Annahme eines Drucks P' auf den Punkt B.

Das Gewicht Q wird am geringsten, wenn der Nenner $a(l - a)$ am gröfsten wird und da für jeden Werth die Summe der Factoren $= l$ ist, so ist der Nenner ein Maximum für $a = \frac{1}{2}l$. Mithin wird der Balken durch das kleinste Gewicht zerbrochen, wenn es in seiner Mitte aufgehängt wird und ist

$$= 4n \cdot \frac{bh^2}{l}$$

Ein Balken auf beiden Enden unterstützt und in der Mitte belastet trägt also die 4fache Last von der wenn er an einem Ende befestigt und an dem andern belastet wird.

9. Ein vierkantiger Balken von den Abmessungen b, h, l ist in horizontaler Lage an beiden Enden unterstützt und eine Belastung auf denselben gleichmäfsig vertheilt. Man bestimmt die Gröfse derselben für das Gleichgewicht mit der respectiven Festigkeit folgender Art.

Es sei Fig. 629 die Belastung $= Q$, so erleidet jede Unterstützung in A und B den Druck $\frac{1}{2}Q$, und auf jeden Fufs Länge des Balkens wirkt die Last $\frac{Q}{l}$. Bringt man daher statt der Unterstützung in A die lothrecht aufwärts wirkende Kraft $\frac{1}{2}Q$ an, so verbleibt das Gleichgewicht. Diese Kraft hat nun das Bestreben den Balken zu zerbrechen und es ist zu untersuchen, in welchem Querschnitt des Balkens der Bruch erfolgt, in welchem Querschnitt nämlich die gröfste Spannung zum Zerbrechen statt findet.

Demnach sei C dieser Querschnitt in dem Abstand a von A, so ist auf diese Länge a die Belastung $\frac{a}{l} Q$ gleich vertheilt und man kann daher dieselbe in der Mitte von AC allein wirkend annehmen. Man hat also in dem Querschnitt C das Moment der Spannung

$$a \cdot \tfrac{1}{2}Q - \tfrac{1}{2}a \cdot \frac{a}{l} Q = \tfrac{1}{2}a \frac{l - a}{l} Q$$

Die Gröfse der Spannung ist also in den verschiedenen Querschnitten verschieden und sie wird in demjenigen Querschnitt am gröfsten, für welchen $a(l - a)$ ein Maximum ist, also für $a = \frac{1}{2}l$. Mithin erfolgt der Bruch in der Mitte des Balkens. In diesem Querschnitt ist nun das Moment der Spannung

$$\tfrac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l - \frac{1}{2}l}{l} Q = \tfrac{1}{8}lQ$$

mit diesem im Gleichgewicht soll die respective Festigkeit sein, d. h.

$$\tfrac{1}{8}lQ = nbh^2$$

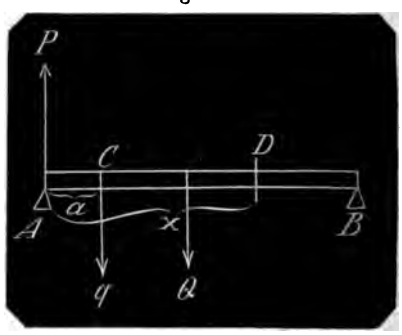
woraus

$$Q = 8n \frac{bh^2}{l}$$

Eine auf einen in beiden Endpunkten unterstützten Balken gleich vertheilte Last Q kann also das doppelte von der betragen, mit welcher man allein die Mitte des Balkens belastet und das 8fache von der, mit welcher der mit einem Ende befestigte Balken an dem anderen Ende belastet werden kann.

10. Ein vierkantiger Balken von den Abmessungen b, h, l ist in horizontaler Lage an beiden Enden A, B unterstützt, eine Belastung Q auf denselben gleichmäfsig vertheilt und aufserdem in einem Querschnitt C zwischen den Unterstützungspunkten im Abstand a von A noch mit

Fig. 629.



einem Gewicht q belastet. Das Gleichgewicht für die respective Festigkeit und der Ort des Bruchs wird folgender Art bestimmt.

Denkt man sich die Unterstützung in

A fortgenommen und eine senkrecht aufwärts wirkende Kraft P dafür gesetzt, so erhält man diese durch die Momentengleichung in Beziehung auf den Endpunkt B

$$Pl = q \cdot (l-a) + Q \cdot \tfrac{1}{2} l$$

$$P = \frac{l-a}{l} q + \tfrac{1}{2} Q \qquad (1)$$

Auch hier sind die Spannungen für den Bruch in den Querschnitten verschieden. Nimmt man den Querschnitt D in der beliebigen Entfernung x von A zur Untersuchung, so hat man für die Spannung in D

Erstens die Kraft P, welche den Theil AD des Balkens um D aufwärts zu drehen strebt, deren Moment also $P \cdot x$

Zweitens die Kraft q für die Drehung senkrecht abwärts mit dem Hebelsarm $CD = x - a$

Drittens die Belastung des auf AD fallenden Theils von $Q = \frac{x}{l} Q$, die in der Mitte von AD, also in Entfernung $\frac{1}{2}x$ von D allein thätig gedacht, den Balken um D gleichfalls niederwärts drehen will.

Das Moment der Spannung im Querschnitt D ist demnach

$$s = xP - (x-a)q - \tfrac{1}{2} x \cdot \frac{x}{l} Q$$

$$= x \left[\frac{2l(P-q)}{Q} - x \right] \frac{Q}{2l} + aq \qquad (2)$$

Dies Moment ist mit x veränderlich und wird ein Maximum wenn das Product der zwei ersten Factoren des ersten Summand ein Maximum ist.

Da hier wieder die Summe der Factoren constant bleibt, so entsteht das Maximum für

$$x = \frac{P-q}{Q} \cdot l \qquad (3)$$

und wenn man für P seinen Werth setzt.

$$x = \tfrac{1}{2} l - a \frac{q}{Q} \qquad (4)$$

Das Moment s (2) ist unter der Bedingung ausgedrückt, dafs der Querschnitt D zwischen C und B liegt, es ist also erforderlich die Bedingung

$$x = \tfrac{1}{2} l - a \frac{q}{Q} \geqq a \qquad (5)$$

Für das Gleichheitszeichen, also für $x = a$ erfolgt der Bruch in C und es ist

$$a = \tfrac{1}{2} l \cdot \frac{Q}{Q+q} \qquad (6)$$

$$q = \frac{l-2a}{2a} Q \qquad (7)$$

In beiden Fällen, für $x \geqq a$ erhält man das Moment der gröfsten Spannung, wenn man in dem Ausdruck 2, für x den Maximalwerth No. 3, $= \frac{P-q}{Q} l$ setzt, also

$$s = l^2 \left(\frac{P-q}{Q} \right)^2 \frac{Q}{2l} + aq = \tfrac{1}{4} l \frac{(P-q)^2}{Q} + aq \qquad (8)$$

Und aus 1 den Werth von P gesetzt

$$s = \tfrac{1}{4} \frac{l}{Q} \left[\frac{l-a}{l} q + \tfrac{1}{2} Q - q \right]^2 + aq = \frac{(lQ + 2aq)^2}{8lQ} \qquad (9)$$

Dieses Moment mufs also für's Gleichgewicht dem Moment der respectiven Festigkeit gleich sein, also

$$\frac{(lQ + 2aq)^2}{8lQ} = nbh^2 \qquad (10)$$

woraus

$$aq = \sqrt{2nbh^2 lQ} - \tfrac{1}{2} lQ = \left(\sqrt{\frac{2nbh^2 l}{Q}} - \tfrac{1}{2} l \right) Q \qquad (11)$$

Soll nun der Bruch zwischen C und B oder in C erfolgen, so ist die Bedingung No. 5 zu erfüllen

woraus $aq \leqq (\frac{1}{2} l - a) Q$

und für aq den Werth aus 11 gesetzt:

$$\left(\sqrt{\frac{2nbh^2 l}{Q}} - \tfrac{1}{2} l \right) Q \leqq (\tfrac{1}{2} l - a) Q$$

woraus

$$\sqrt{\frac{2nbh^2 l}{Q}} \leqq l - a$$

und

$$Q \geqq \frac{2bh^2 l}{(l-a)^2} \cdot n \qquad (12)$$

Ist die auf den Balken von der Länge l gleich vertheilte Last Q gröfser als der rechts stehende nur von den Dimensionen des Balkens und der Gröfse der Festigkeit seines Stoffs abhängige Ausdruck, so kommt auf einen Querschnitt zwischen C und B die gröfste Spannung und man findet bei bekanntem Q aus Gl. 11 die Belastung q in C mit welcher der Balken zerbricht; den Ort des Bruchs in dem Abstande von A gibt dann Gleichung 4.

Ist Q = dem rechts befindlichen Ausdruck in 12, so ist die gröfste Spannung in C; man findet q für den Bruch entweder aus 11 oder aus 4, wenn man $x = a$ setzt.

Aus 4 ersieht man ferner, dafs die gröfste Spannung nicht jenseits der halben Balkenlänge fallen kann; soll die gröfste Spannung in der Mitte des Balkens sein, so mufs $q = 0$ werden und der Balken darf keine andere Belastung erhalten als das gleich vertheilte Q.

Ist Q kleiner als der rechts befindliche Ausdruck in 12, und findet eine Belastung q in C statt, so ist auch in C die gröfste Spannung und zwischen A und C kann sie niemals fallen.

Man hat dann statt des Ausdrucks 4 das Maximum von $x = a$, die Spannung in C erhält man, wenn man C zum Drehpunkt nimmt, wo dann P mit dem Hebelsarm a aufwärts, die Belastung $\frac{a}{l} Q$ über a mit dem Hebelsarm $\frac{1}{2}a$ abwärts wirkt =

$$Pa - \frac{a^2}{2l} Q = n b h^2$$

für P den Werth aus 1 gesetzt:

$$\left(\frac{l-a}{l} q + \frac{l-a}{2l} Q\right) a = n b h^2$$

woraus $$q = \frac{b h^2 l n}{a(l-a)} - \frac{1}{2} Q \qquad (13)$$

Beispiel. Ein kiefernes Balken, der 10 Fufs frei liegt, hat die Breite $b = 10$ Zoll, die Höhe $h = 10$ Zoll, in einem Abstande $2' 6'' = 30$ Zoll von dem einen Ende soll er mit dem Gewicht q und aufserdem noch mit einem gleichförmig vertheilten Gewicht Q belastet werden.

Der Balken selbst hat, wenn man den Cubikfufs Kiefernholz 48 Pfund setzt, ein Gewicht von $10 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot 48$ Pfund = 330 Pfund.

Nach No. 9 kann derselbe bevor er zerbricht eine gleichvertheilte Last erhalten

$$= 8n \frac{bh^2}{l} = Q$$

Es ist $n = \frac{10000}{6} = 1666$ Pfund, wofür 1650 Pfund genommen werden soll, also die gleichvertheilte Last

$$Q = 8 \cdot 1650 \cdot \frac{10 \cdot 10^2}{120} - 330 = 109670 \text{ Pfd.}$$

bei welcher er zerbrechen würde.

Würde der Balken in Entfernung 40 Zoll von einem Ende A allein belastet, so würde er nach No. 8 zerbrechen durch die Last

$$q = \frac{b \cdot l \cdot h^2}{a(l-a)} n = \frac{10 \cdot 120 \cdot 10^2}{30 \cdot 90} \cdot 1650 = 73333 \text{ Pfund}$$

Nun ist Formel 12

$$\frac{2 b h^2 l}{(l-a)^2} n = \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^2 \cdot 120}{90^2} \cdot 1650 = 48888 \text{ Pfund}$$

Hiervon das Gewicht des Balkens 330 Pfund bleibt 48558 Pfund Belastung;

Es kann aber sein $Q \gtreqless 48888$ Pfund.

1. Nimmt man $Q = 80000$ Pfund, so hat man nach Gleichung 11

$$30 \cdot q = \left(\sqrt{\frac{2 \cdot 1650 \cdot 10 \cdot 10^2 \cdot 120}{80000}} - 60\right) 80000 \text{ Pfund} = 10{,}35625 \times 80000 = 828500$$

woraus $q = 27617$ Pfund.

Nach No. 4 erhält man nun den Ort den Bruchs

$$= 60 - 30 \cdot \frac{27617}{80000} = 49\frac{1}{3} \text{ Zoll von dem}$$

Ende A oder $19\frac{1}{3}$ Zoll von C, dem Ort des Gewichts q.

Eine Prüfung gewährt Formel 10, welche mit dem Resultat übereinstimmt.

2. Nimmt man $Q = 48558$ Pfund, so hat man für Gleichung 4 weil $x = a = 30$ ist, und das Gewicht des Balkens mit 330 Pfund hinzukommt:

$$30 = 60 - 30 \cdot \frac{q}{48888}$$

woraus $q = Q = 48888$

3. Nimmt man Q kleiner, z. B. 25000 Pfund, so hat man nach Formel 13

$$q = \frac{10 \cdot 10^2 \cdot 120 \cdot 1650}{30 \cdot 90} - \frac{1}{2} \cdot 25000$$

$$= 60833 \text{ Pfund.}$$

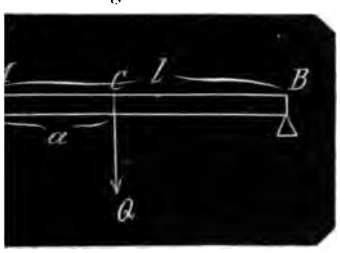
In allen 3 Fällen sind die ermittelten Werthe für q diejenigen, bei welchen der Balken so eben zerbricht.

11. Ein vierkantiger Balken von den Abmessungen b, h, l ist in horizontaler Lage mit dem einen Ende frei aufliegend, mit dem anderen Ende unbeweglich befestigt (z. B. eingemauert) und zwischen beiden Enden in der Entfernung a von dem befestigten Ende mit einem Gewicht Q belastet, so findet man die Gröfse dieses Gewichts für das Gleichgewicht

r respectiven Festigkeit folgen-
:

Gewicht Q zerbricht den Balken
Querschnitt C, und da der Bal-
A nicht nachgeben kann, auch in
festigungsquerschnitt A. Mithin

Fig. 630.



Gewicht Q aus 2 Theilen beste-
ı denken, in den einen Q', wel-
n Balken in C, und in den an-
Theil Q'', welcher ihn in A zer-

n Q' für den Bruch des Balkens
irkt, so entsteht in A senkrecht
s ein Widerstand P, und B zum
tenpunkt genommen ist

$$Pl = Q'(l-a) \qquad (1)$$

$$P = \frac{l-a}{l} Q' \qquad (2)$$

ı C Drehpunkt ist, das Moment
em Moment der respectiven Festig-
$C = nbh^2$.

lich $Pa = \frac{l-a}{l} a\, Q' = nbh^2$ (3)

$$Q' = \frac{nbh^2 l}{a(l-a)} \qquad (4)$$

gleiche No. 8 mit Fig. 628.)

den Bruch in A wirkt die Kraft
dem Hebelsarm a, mithin ist nach
las Moment

$$aQ'' = nbh^2 \qquad (5)$$

$$Q'' = \frac{nbh^2}{a} \qquad (6)$$

$$Q' + Q'' = Q = \frac{nhh^2 l}{a(l-a)} + \frac{nbh^2}{a}$$

$$Q = \frac{nbh^2(2l-a)}{a(l-a)}$$

Gröfse des Gewichts Q für den
in A und C ist also von dem Ab-
s abhängig; es entsteht für $a = l$
$= 0$, also für die Punkte B und
att C, für Q der Werth ∞, folg-
ufs zwischen A und B ein Ort C
ür welchen Q ein Minimum wird,

und dieser ergibt sich aus dem Minimum
von $\frac{2l-a}{a(l-a)}$

Man erhält aus Bd. II., pag. 300, No. 4
am Schlufs dieses Minimum für die Glei-
chung $a^2 - 4al + 2l^2 = 0$

woraus $a = (2 - \sqrt{2})\, l$

und das Minimum von Q

$$= (3 + 2\sqrt{2}) \frac{nbh^2}{l} = 5{,}8284 \ldots \frac{nbh^2}{l}$$

Wird Q in die Mitte des Balkens gehängt,
so ist $a = \frac{1}{2}l$ und

$$Q = \frac{nbh^2(2l - \frac{1}{2}l)}{\frac{1}{2}l(l - \frac{1}{2}l)} = 6\frac{nbh^2}{l}$$

12. Die gröfste Last Q zu bestimmen,
die der Balken ad 11 tragen kann, wenn
Q auf den Balken gleichmäfsig vertheilt
wird.

Da eine gleichförmige Belastung auf
Bruch eines horizontalen Balkens gerade
so wirkt wie eine auf den brechenden
Querschnitt direct wirkende Last (s. No. 9)
so mufs auch hier wie in No. 11 für den
Fall des Bruchs der Balken in dem Be-
festigungsquerschnitt A und in einer
Stelle zwischen A und B zerbrechen.
Der gegen die Festigkeit schwächste Quer-
schnitt C hat nach No. 11 von A eine
Entfernung $a = (2 - \sqrt{2})\, l$ und es wird
folglich auch bei **gleichmäfsiger** Be-
lastung der Bruch in diesem Querschnitt
erfolgen.

**Es sei nun auch hier von der auf den
Balken gleichmäfsig vertheilten Last Q
der Theil, welcher den Balken in C zer-
bricht $= Q'$ und der welcher ihn in A
zerbricht $= Q''$.**

**Die gleichförmig vertheilte Last Q ver-
anlafst in A und B die gleichen Druck-
wirkungen $\frac{1}{2}Q$,** die ebenso in $\frac{1}{2}Q' + \frac{1}{2}Q''$
zu theilen sind. Für den Bruch in C
erhält man nun die Spannung daselbst,
wenn C als Drehpunkt genommen wird
entweder aus den Wirkungen links von
C oder rechts von C. Links von C wirkt
$\frac{1}{2}Q'$ mit dem Hebelsarm AC und die auf
AC vertheilte Last $\frac{AC}{AB} Q'$ mit dem He-
belsarm $\frac{1}{2}AC$, also das Moment

$$\frac{1}{2}Q' \cdot a - \frac{a}{l} Q' \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a \frac{l-a}{l} Q'$$

Rechts von C wirkt $\frac{1}{2}Q'$ mit dem He-
belsarm BC und die auf BC gleich ver-
theilte Last $\frac{BC}{AB} Q'$ mit dem Hebelsarm
$\frac{1}{2}BC$, also das Moment

$$\frac{Q'}{2}(l-a) - \frac{l-a}{l} Q' \cdot \frac{l-a}{2} = \frac{1}{2}a \frac{l-a}{l} Q'$$

das Moment der Spannung ist für den Eintritt des Bruchs = dem der respectiven Festigkeit, also

$$\tfrac{1}{2}a\,\frac{l-a}{l}\,Q' = nbh^2$$

woraus $$Q' = \frac{2nbh^2 l}{a(l-a)}$$

Es ist diese Last das doppelte Q' (No. 11, Gl. 4), welches direct auf C wirkend Bruch erzeugt.

Für den Bruch in A hat man das Gewicht Q'' in der Mitte von AB, also in Entfernung $\frac{1}{2}l$ von A wirksam zu denken.

Es ist also das Moment

$$Q'' \cdot \tfrac{1}{2}l = nbh^2$$

woraus $$Q'' = \frac{2nbh^2}{l}$$

Es ist also dieses Q'' zu dem No. 11, Gl. 6 bei directer Belastung in $C = a : \frac{1}{2}l$.

Man hat nun

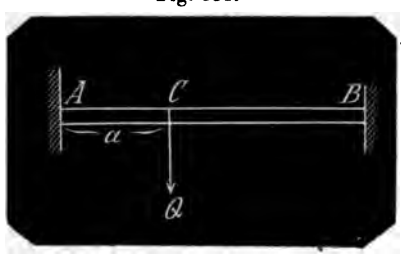
$$Q' + Q'' = Q = \frac{2nbh^2 l}{a(l-a)} + \frac{2nbh^2}{l} = 2nbh^2\,\frac{l^2 + al - a^2}{al(l-a)}$$

Für a den Werth $(2 - \sqrt{2})\,l$ gesetzt und reducirt:

$$Q = 3\,(2 + \sqrt{2})\,\frac{nbh^2}{l}$$

13. Ein vierkantiger Balken von den Abmessungen b, h, l ist mit seinen beiden Enden A, B unbeweglich befestigt (eingemauert) und zwischen denselben in Entfernung a von A mit einem Gewicht Q belastet, die Gröfse von Q für das Gleichgewicht mit der respectiven Festigkeit zu finden unter der Bedingung, dafs ein Bruch in den 3 Stellen A, B, C erfolgt.

Fig. 631.



Es ist hier die Last Q in 3 Theilen bestehend zu denken: Q' welcher den Bruch in A, Q'' welcher den Bruch in B und Q''' welcher den Bruch in C hervorbringt, wobei man sich vorzustellen hat, dafs jedes einzelne Gewicht unabhängig von den beiden anderen Gewichten wirkt.

Das Gewicht Q' wirkt also auf Bruch in A mit dem Hebelsarm a und es ist

$$Q' = \frac{nbh^2}{a}$$

Desgleichen Q'' auf Bruch in B mit dem Hebelsarm $l - a$, woher

$$Q'' = \frac{nbh^2}{l-a}$$

Das Gewicht Q''' wirkt auf Bruch in C, so als wenn, da zugleich Bruch in A und B erfolgt, der Balken in A und B frei aufläge. Also ist nach No. 8

$$Q''' = \frac{nbh^2 l}{a(l-a)}$$

hieraus

$$Q' + Q'' + Q''' = Q = \frac{nbh^2}{a} + \frac{nbh^2}{l-a} + \frac{nbh^2 l}{a(l-a)} = \frac{2nbh^2 l}{a(l-a)}$$

Der Balken kann also eine doppelt so grofse Last tragen als wenn er an beiden Enden blofs unterstützt wäre.

Ist $a = \frac{1}{2}l$ so ist Q die kleinste Last, die der Balken je zu tragen vermag

$$= \frac{8nbh^2}{l}$$

Ist folglich die Last Q auf die ganze Länge gleichmäfsig vertheilt, dann ist

$$Q = \frac{16nbh^2}{l}$$

C. Rückwirkende Festigkeit.

Die rückwirkende Festigkeit kommt zur Erscheinung, wenn ein Körper auf eine feste Ebene gestellt und auf seinem oberen Querschnitt so lange belastet wird, bis die einzelnen Theile des Körpers von allen Seiten sich verbreitern, während um so viel die Höhe sich vermindert; oder auch, wenn die Höhe gegen die kleinste Querschnittsdimension etwa das Funfzehnfache beträgt, dafs der Körper einbiegt und endlich zerbricht. Die erste Erscheinung heifst das Zerquetschen, die zweite das Zerknicken. Es ist also dieser Angriff der Festigkeit eines Körpers dem der absoluten Festigkeit durch Zerreifsen gerade entgegengesetzt

rforderliche Kraft für das Zer- und das Zerdrücken eines Kör- st eben so wie für das Zer- t dessen Querschnitt.

liren mehrere wissenschaftliche ungen über die rückwirkende in Beziehung auf ihr Verhal- erschiedenen Dimensionen des- ffs, allein alle stimmen mehr ger mit den Erfahrungen nicht nd man muſs auf dieselben vor- h verzichten.

en wenigen Versuchen, welche ren werden die von Hodgkinson en für die zuverlässigsten ge-

übersetzt von Scheffler, II., at aus Hodgkinsons Versuchen Resultate aufgeführt:

Säulen, deren Länge = 15 mal hmesser, die an beiden Enden t sind, zerknicken durch eine W in preuſs. Pfunden, wenn ge in preuſs. Fuſsen, d und d' d innere Durchmesser in preuſs. deuten:

volle cylindrische Säule aus isen $W = 34358$ Zollpfund 32139) $\times \frac{d^{3.76}}{L^{1,7}}$

hohle desgl.

$W = 29077$ Zollpfd. $= 28040$ $\times \frac{d^{3,76} - d_{,}^{3.76}}{L^{1,7}}$

volle cylindrische Säule aus miedeeisen

$W = 97830$ Zollpfd. $= 91512$ $\times \frac{d^{3,76}}{L^2}$

die beiden Endflächen eben sind, die Länge L das 30fache des sers d betragen kann:

volle cylindrische Säule von

$W = 101254$ Zollpfd. $= 94715$ $\times \frac{d^{3,55}}{L^{1,7}}$

hohle cylindrische Säule von

$W = 101618$ Zollpfd. $= 95053$ $\times \frac{d^{3,55} - d_{,}^{3,55}}{L^{1,7}}$

volle cylindrische Säule von eisen $W = 303847$ Zollpfd. $= 28422$ $\times \frac{d^{3,55}}{L^2}$

volle quadratische Säule von Eichenholz trocken (Seite $= d$)

$W = 25205$ Zollpfd. $= 23577$ $\times \frac{d^4}{L^2}$

volle quadratische Säule von lz (trocken)

$W = 17977$ Zollpfd. $= 16816$ $\times \frac{d^4}{L^2}$

Säulen an einem Ende eben, an dem anderen abgerundet, zeigten eine Stärke gleich dem arithmetischen Mittel zwischen Säulen mit 2 ebenen und Säulen mit 2 abgerundeten Endflächen.

In dem Art.: Brechungscoefficient No. 3, pag. 404 sind die Coefficienten für bloſses Zerquetschen zusammengestellt. Bei Prismen von einer Höhe die unter 30 und 15 mal der kleinsten Querschnittsdimension liegt, geschieht der Bruch theils durch Zerknicken, theils durch Zerquetschen; nun soll das Gewicht P für den wirklich erfolgenden Bruch zwischen dem durch Versuche ermittelten W und dem durch Zerquetschen W' liegen und zwar soll sein (Mosely pag. 296, Formel 693)

$$P = \frac{W \times W'}{W + \frac{1}{4} W'}$$

Diese Formel, welche auch in andere technische Bücher übergegangen gibt aber Resultate, die aufser der Wahrscheinlichkeit liegen, z. B.

Ein Pfeiler von Kiefernholz 10□″ stark 10′ hoch hat nach Formel 5 die Kraft für's Zerknicken:

$$W = 17977 \times \frac{10000}{100} = 1797700 \text{ Pfund.}$$

Der Coefficient für's Zerdrücken ist 6300 daher die Kraft zum Zerdrücken $W' = 630000$ Pfd.

Nun ist

$$P = \frac{W \cdot W'}{W + \frac{1}{4} W'} = \frac{1797700 \cdot 630000}{1797700 + 472000} = 499000 \text{ Pfd.}$$

also noch geringer als der einfache Coefficient der Zerdrückung die Kraft P ergibt.

Nachstehend sind die Coefficienten für rückwirkende Festigkeit (Bd. I., pag. 405) auf Zollpfund reducirt.

Die Kraft gegen die rückwirkende Festigkeit, und zwar für Zerquetschen allein, von einem Körper, dessen Querschnitt 1 □Zoll preuſs. beträgt, in Zollpfunden.

Apfelbaum	6267
Basalt	27130
Birke, grün	4400
„ trocken	6174
Birnbaum	6548
Buchsbaum, trocken	9822
Eiche, grün	4303
„ trocken	9167
Eisen, Gufseisen	130960
„ Schmiedeeisen	84190
Erle	6640
Esche	8700
Flieder	8138

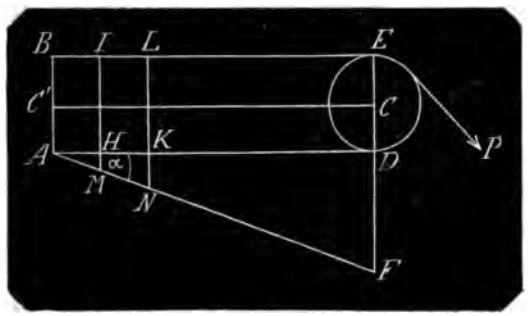
Granit	4677 bis 9354
Hainbuche	7016
Kalkstein	280 bis 8420
Kiefer	5893
Lerche, grün	3090
„ trocken	5332
Mahagoni	7860
Marmor	3740 bis 10290
Mauerziegel	4677 bis 1871
Mörtel	4677
„ hydraulischer	6548
Pappel, grün	3090
„ trocken	4958
Pflaumbaum, grün	3555
„ trocken	8980
Portlandkalk	5612
Rothbuche, grün	7483
„ trocken	8980
Rothtanne	5145
Sandstein, stärkster	9354
Ulme	9728
Wallnufsbaum	6360
Zeder	4864

D. Torsionsfestigkeit.

1. Ist ein cylindrischer Körper mit einem Endquerschnitt AB unverrückbar befestigt und wirkt an dem anderen Ende ED in Entfernung $C'C = l$ an der Peripherie eine Tangentialkraft P, so werden die Massentheile von AB bis DE von der festbleibenden Cylinderaxe ab um dieselbe als Drehaxe in Form von Schraubenwindungen verdreht, und zwar ist die Gröfse der Verdrehung in den einzelnen von AB ab nach DE hin genommenen Schichten proportional ihren Abständen von AB, und von der Axe ab nach der Oberfläche hin in jedem einzelnen Querschnitt proportional ihren Halbmessern.

Wenn man daher die Schraubenlinie der Cylinder-Oberfläche in einer Ebene

Fig. 632.

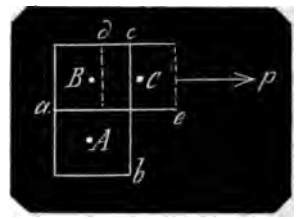


abwickelt, so erhält man für dieselbe eine gerade Linie AF. Ist die in der Kreislinie der Schicht DE gemessene Verschiebung jedes äufseren Massenelements $= DF$, so ist die Länge deren Verschiebung in der Schicht $HJ = HM$ und die der Schicht $KL = KN$.

2. Der Vorgang bei dieser Torsionswirkung wird nun folgender Art erklärt (Mosely-Scheffler II., pag. 297):

Zwei Massentheilchen ab, ac, die neben einander gezeichnet sind, sollen über einander liegend gedacht werden. Das untere

Fig. 633.



Theilchen ab wird festgehalten, auf das andere wirkt eine Kraft p, durch welche das Theilchen ac nach de gerückt wird. Sind A und B die Mittelpunkte der Theilchen, ist B um die Länge $BC = \beta$ nach C gezogen worden und bezeichnet man eine Kraft, durch welche die Verrückung $BC = BA = \alpha$ wird, mit t so ist

$$p : t = \beta : \alpha$$

also

$$p = \frac{\beta}{\alpha} t \qquad (1)$$

Bestehen die Flächen ab und ac jede aus einer Schicht von n Massentheilchen, so sei $nt = T$, $np = P$, und so ist dann

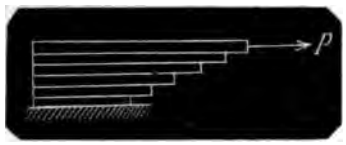
$$P = \frac{\beta}{\alpha} T \qquad (2)$$

Liegen nun m solcher Schichten übereinander, und man bringt an die oberste eine Kraft P an, so soll diese Kraft P eine Spannung P auf die zunächst untere, diese wieder eine Spannung P auf die ihr folgende und so fort eine Spannung P bis auf die unterste Schicht erzeugen, so dafs in allen Schichten einerlei Spannung $= P$ statt findet. Wäre demnach die Gesammthöhe der Schichten $= h$ so würde $P = \frac{\beta}{h} T$ sein, und setzt man $\beta = h$ so ist

$$P = T \qquad (3)$$

Hiernach ist die Länge eines Körpers für die Torsionswirkung auf denselben ganz gleichgültig. Ob also Fig. 632 in

Fig. 634.



oder in H dieselbe Kraft P angebracht ird, die Wirkung bleibt dieselbe; für $= \alpha$ und für $\beta = k$ bleibt also $P = T$, nd wenn jede Schicht ein □Zoll Gröfse at und sämmtliche Schichten zusam- ien ein Prisma von der beliebigen Höhe und 1 □Zoll Querschnitt ausmachen, o wird die für die Verdrehung dieses 'risma um die beliebige Länge k erfor- erliche Kraft T, der Torsionsmodul enannt, der eine für jedes Material con- tante Gröfse ist.

Mit diesem Vortrag kann man sich nicht einverstanden erklären. Denn ge- setzt es wären nur die beiden in der um die Peripherie gewundenen Linie AF be- findlichen Molecüle N und F zu verdre- hen gewesen, so ist klar, dafs eine viel geringere Kraft dazu gehört, das Mole- cül N auf die Länge KN als das ihm gleiche Molecül F auf die gröfsere Länge DF fortzubewegen; um so mehr Kraft also für die Bewegung sämmtlicher auf die Linie AF vertheilten Molecüle um die Längen HM, KN .... DF.

In dieser Theorie wird auch der Win- kel, der in einem Querschnitt von den Endpunkten des Verdrehungsbogens mit den Radien gebildet wird, der Torsions- winkel genannt: also für den Querschnitt LK der Winkel, den die Endpunkte K, N des Verdrehungsbogens KN mit den Ra- dien des Cylinders bilden.

Ist $\angle DAF = \alpha$, $AH = 1$, $AD = l$, so ist der Torsionswinkel in $HJ = \frac{1}{r}\alpha$, in $DE = \frac{l}{r}\alpha$.

Ist K□″ der Querschnitt des Cylin- ders, so ist nach der obigen Bezeichnung

$$P = TK\frac{\beta}{\alpha} \qquad (4)$$

Ist $ABDE$ (Fig. 632) ein sehr dünner Cylindermantel, dessen innerer Halbmes- ser $= \varrho$, die Dicke des Mantels $= \Delta\varrho$, also der Querschnitt $K = 2\pi\varrho\,\Delta\varrho$; ist ϑ der Bogen des Torsionswinkels in DE für den Halbmesser $= 1$, also der Bogen selbst $= \varrho\vartheta$, die Länge $CC' = l$, so ist die Kraft für die Verdrehung nach Formel 4:

$$P = T \cdot 2\pi\varrho\,\Delta\varrho\,\frac{\varrho\vartheta}{l} = 2\pi T\frac{\vartheta}{l}\varrho^2\Delta\varrho \qquad (5)$$

und das Moment dieser Kraft in Bezie- hung auf die Axe des Cylinders

$$P\varrho = 2\pi T\cdot\frac{\vartheta}{l}\varrho^3\Delta\varrho \qquad (6)$$

Ist der Cylinder voll und man denkt sich denselben aus lauter concentrischen Scheiben von der unendlich kleinen Dicke $\Delta\varrho$ bestehend, so erhält man das Mo- ment des Cylinderquerschnitts für die Torsion

$$Pr = 2\pi T\frac{\vartheta}{l}\int\varrho^3 d\varrho$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi T\frac{d}{l}r^4 \qquad (7)$$

3. Denselben Vorgang der Torsions- wirkung erkläre ich folgendermaafsen:

Der Winkel (Fig. 632) $DAF = \alpha$ um welche die Verschiebung sämmtlicher auf dem Cylindermantel befindlichen Massen- elemente geschehen ist, sei der Tor- sionswinkel, und unter dem Maximum dieses Winkels, welches von der jedes- maligen Festigkeit des Materials abhängt, geschieht der Bruch, d h. die Ablösung der äufseren Molecüle von den zunächst unteren, oder wenn man statt des vollen Cylinders einen äufserst dünnen Cylin- dermantel sich vorstellt, eine Trennung des ganzen Körpers innerhalb eines Quer- schnitts.

Denkt man sich den sehr dünnen Cy- lindermantel $ABDE$ von der Länge l in n gleich hohe Schichten getheilt, ist HJ die erste Schicht im Abstand $\frac{1}{n}l$ von AB, KL die zweite in Entfernung $\frac{2}{n}l$ von AB u. s. w., ist in dem Umkreise HJ die Kraft p erforderlich um dessen Mas- sentheile um die Länge $HM = \frac{1}{n}DF$ ge- gen die des Querschnitts AB zu ver- schieben, so machen die von HJ bis DE mit HJ zusammenhangenden Theile diese Verschiebung ebenfalls mit, ohne jedoch unter sich verschoben zu werden. Sollen nun die Massentheile in der Schicht KL ebenfalls um die Länge HM gegen die in HJ befindlichen Massentheile, also um die Länge $2HM = KN$ gegen die Massen- theile in AB verschoben werden, so ist noch eine Tangentialkraft p in KL er- forderlich, oder eine Kraft $= 2p$ in KL allein thätig. So fortgeschlossen ergibt für die Verschiebung der Massentheile in DE um die Länge $DF = n\cdot HM$ eine Kraft $P = np$ tangential in DE, mit wel- cher allein thätigen Kraft die Ver- drehungen sämmtlicher Massentheile des Mantels von AB bis DE geschehen

Um also in dem Material des Querschnitts AB die Spannung hervorzubringen, welche mit der Verdrehung der darüber befindlichen Massentheile um einen Torsionswinkel α verbunden ist, bleibt es gleich ob man im Abstand $\frac{1}{n} l$ die Kraft $\frac{1}{n} P$ oder in dem Abstande l die Kraft P wirken läfst.

Ist p die Kraft in HJ für's Maximum von α und also zugleich die Spannung p' in AB für den Bruch, und wirken auf die weitere Länge des Cylinders keine anderen Kräfte, so wird wie schon oben gesagt, der Cylinder auf diese weitere Länge DH mit um den $\angle \alpha$ gedreht ohne irgend eine Spannung zu erleiden. Soll nun in KL eine Drehung um den $\angle \alpha$ geschehen, so mufs nothwendig in KL ebenfalls eine Tangentialkraft p angebracht werden, von welcher wiederum der Cylinder von K bis D nicht afficirt wird. Dagegen übt diese Kraft p auf den Querschnitt HJ eine Spannung p' auf Bruch, und dasselbe geschieht wenn in HJ die Kraft p fortgenommen und in KL eine Kraft $2p$ angebracht wird.

Ist somit auf der $m$ten Schicht das alleinige Gewicht mp thätig und man bringt auf die $(m+1)$te Schicht noch das Gewicht p, so nehmen die ersten $(m+1)$ Schichten Theil an der Torsion und jede einzelne Schicht bis zur $m$ten erhält die Spannung p' für den Bruch; dasselbe geschieht wenn man die Kraft mp von der $m$ten auf die $m+1$te Schicht bringt, so dafs dort $(m+1)p$ allein wirken.

Es hat also seine vollkommene Richtichkeit, dafs die Welle bei jeder beliebigen Länge, sobald das eine Ende derselben befestigt und das andere Ende von einer Tangentialkraft P angegriffen wird in allen Querschnitten einerlei Spannung zum Bruch erhält; dagegen ist jede einzelne Spannung der freie Ueberschufs der Kraft aus der Spannung des Querschnitts gegen die Spannung des unmittelbar vorhergehenden Querschnitts. Die zu Hervorbringung aller der Spannungen erforderliche Kraft selbst aber wächst mit der Länge der Welle.

Wird die Kraft P in DE allmählich bis zum Maximum vermehrt, so pflanzt sich deren Wirkung bis zum Befestigungsquerschnitt AB fort, und da nun hier das Material elastisch nicht nachgeben kann, so erfolgt auch der Bruch in AB. Durch augenblickliche starke Vergröfserung von P dagegen wird der $\angle \alpha$ in der Nähe von DE schneller vergröfsert als die Fortpflanzung der Kraft P bis zu AB geschieht, und der Bruch erfolgt zwischen AB und DE und diesem Querschnitt um so näher, je schneller die Vergröfserung der Kraft erfolgt.

Die Festigkeit gegen die Torsion ist von der Elasticität des Materials abhängig, erfordert eine ähnliche wissenschaftliche Behandlung; man hat daher auch für dieselbe einen Modul, den Torsionsmodul eingeführt, und dieser ist dann diejenige Kraft, welche erforderlich wäre die in der Oberfläche von 1 □″ Querschnitt befindliche Massentheile einer Schicht von der Höhe 1 Zoll um diese Höhe 1″ zu verschieben, oder um die auf einen Quadratzoll einer Cylinderoberfläche von einem Zoll Halbmesser vertheilten Massenelemente einen Zoll weit im Umfang um die Axe herumzudrehen wenn die Elasticität dies zuliefse.

4. Nach diesem Vortrage (3) hat man nun nachstehende Folgerungen.

Wenn in dem Cylindermantel $ABDE$ von einer unendlich geringen Dicke und $AC' = 1$ Zoll Halbmesser die Länge $AH = AC' = 1$ Zoll und der $\angle \alpha = 45^0$, also $HM = AH = 1$ Zoll ist, so hat man in der in HJ angebrachten Tangentialkraft p, um einen in dem Querschnitt JH des Mantels befindlichen Flächenraum von 1 □Zoll auf die Bogenlänge HM von 1 Zoll zu verdrehenden Torsionsmodul T.

Die Torsionsfestigkeit wirkt nun senkrecht um eine Drehaxe wie die respective Festigkeit, und daher kann man schliefsen, dafs der Torsionsmodul zu dem Elasticitätsmodul sich verhalte wie der Coefficient der respectiven Festigkeit zu dem der absoluten Festigkeit in Beziehung auf einerlei Material.

Dieser Torsionsmodul wird aber eben so wenig in irgend einem Material erreicht als der Elasticitätsmodul, der Bruch erfolgt schon bei einem kleineren Winkel α.

Für diesen $\angle$ ist dann nach Obigem die Kraft in H

$$p = \frac{\alpha}{45^0} T = \frac{2\alpha}{\pi} T \qquad (8)$$

In D ist dann die Kraft

$$P = \frac{2\alpha}{\pi} lT \qquad (9)$$

Ist der Halbmesser AC' des Cylindermantels $= r$, so geschieht beim Torsionswinkel α die $r$fache Verdrehungslänge, folglich ist die Kraft in H

$$p = \frac{2\alpha}{\pi} rT \qquad (10)$$

und die Kraft in D

$$P = \frac{2\alpha}{\pi} r l T \qquad (11)$$

Für die Verdrehung einer Fläche von 1□Zoll gehört in allen vorigen Fällen die 1fache Kraft.

Hat, wie ad 2 betrachtet worden, der hohle Cylinder den inneren Halbmesser ϱ, die Mantetdicke $\Delta\varrho$, so ist in Formel 5: $K = 2\pi\varrho\,\Delta\varrho$ und in H die Kraft

$$p = \frac{2\alpha}{\pi}\varrho \cdot 2\pi\varrho\,\Delta\varrho\, T = 4\alpha\,\varrho^2\,\Delta\varrho\, T \qquad (12)$$

und deren Moment statt Formel 6

$$p\varrho = 4\alpha\,\varrho^3\,\Delta\varrho\, T \qquad (13)$$

Für die Kraft in D mufs in den Formeln 12 und 13 das $l$fache genommen werden.

Ist der Cylinder vom Halbmesser r voll, so hat man das Moment der Kraft in D statt Formel 7

$$Pr = 4\alpha l T \int r^3\,\partial r = \alpha r^4 l T \qquad (14)$$

und wenn P an einem Stirnrade oder einer Scheibe vom Halbmesser R in Entfernung l vom Befestigungsquerschnitt angebracht ist

$$PR = \alpha r^4 l T \qquad (15)$$

5. So wie man aus versuchsweiser Verlängerung von Stäben verschiedener Dimensionen durch angehängte Gewichte den Elasticitätsmodul findet (s. Elasticität No. 8) so findet man aus Versuchen mit Wellen den Torsionsmodul:

Aus Gleichung 15 hat man nämlich

$$T = \frac{P \cdot R}{\alpha l r^4} \qquad (16)$$

Hat man nun durch einen sorgfältigen Versuch für eine Kraft P an dem Hebelarm R Zoll die Verdrehung eines markirten Punkts D in der Peripherie der Wellenstirnfläche DE vom Halbmesser $CD = r$ Zoll = einem Bogen $DF = b$ Zoll gefunden, so ist der Bogen daselbst für den Halbmesser = 1 Zoll = $\frac{DF}{DC} = \frac{b}{r}$.

Dieser Bogen gehört nun zugleich zu einem Kreis von dem Halbmesser $CC' = l$ Zoll, und wenn man $C'A = AH = 1$ Zoll setzt, von dem Mittelpunkt A. Es ist mithin der Bogen $HM =$

$$\alpha = \frac{b}{rl}$$

und

$$T = \frac{PR}{\frac{b}{rl} l \cdot r^4} = \frac{PR}{br^3} \qquad (17)$$

Uebrigens wird der ad 4 gedachte Zusammenhang zwischen dem Torsionsmodul und dem Elasticitätsmodul allgemein mit Cauchy festgestellt, dafs für jedes Material $T = \frac{1}{3}E$, d. h. der Torsionsmodul ist = $\frac{1}{3}$ des Elasticitätsmoduls.

6. Der Coefficient für den Bruch durch Torsion ist, wie ad 4 schon bemerkt, kleiner als der Torsionsmodul und hat wie dieser denselben ad 4 gedachten Zusammenhang mit dem Coefficienten der respectiven Festigkeit. Aus diesem Grunde ist dem Torsionsbrechungscoefficient τ der Coefficient n der respectiven Festigkeit zu Grunde gelegt und man nimmt nach Cauchy $\tau = \frac{1}{3}n$.

Es ist hier τ die Kraft, welche im Stande ist eine Schicht von 1 □Zoll Fläche über die zunächst untere Schicht so weit zu verschieben, dafs Bruch erfolgt.

Gesetzt der Querschnitt AB, Fig. 632, erhalte die Spannung für den Bruch, so beginnt dieser an der Oberfläche um die Axe und pflanzt sich nach und nach bis zur Axe fort. Es ist demnach in dem Umfange für ein □Zoll Oberfläche die Spannung = τ, in der Entfernung ϱ von der Axe augenblicklich = $\frac{\varrho}{r}\tau$ und wenn der Umfang vom Halbmesser ϱ die sehr kleine Höhe $\Delta\varrho$ hat, also die Fläche $2\pi\varrho\,\Delta\varrho$ enthält, so ist die Spannung in diesem Umfang

$$2\pi\varrho\,\Delta\varrho \cdot \frac{\varrho}{r}\tau = 2\pi\frac{\varrho^2}{r}\Delta\varrho\tau$$

und deren Moment in Beziehung auf die Axe

$$\mathfrak{M} = 2\pi\frac{\varrho^3}{r}\Delta\varrho\tau$$

das Moment der Kreisebene vom Halbmesser ϱ daher

$$\mathfrak{M} = 2\pi \cdot \frac{\tau}{r}\int\varrho^3\,\partial\varrho = \tfrac{1}{4}\pi\frac{\varrho^4}{r}\tau$$

und das Moment der Spannung für den Bruch beim Halbmesser r:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{4}\pi\tau r^3$$

Bezeichnet p die Kraft in HJ in Entfernung $BJ = 1$ Zoll an dem Halbmesser R so ist das Moment der Kraft gleich dem des Torsionswiderstandes

$$pR = \tfrac{1}{4}\pi\tau r^3$$

und wenn die Kraft $P = lp$ in D angebracht ist

$$\frac{P}{l}R = \tfrac{1}{4}\pi\tau r^3$$

Figur ist eine begrenzte Fläche, die Grenzen sind Linien und heifsen Seiten der Figur. Ist die Fläche eine Ebene, so heifst die Figur eine ebene Figur, ist sie eine unebene Fläche, eine unebene

oder krummflächige Figur. Von den letzteren Figuren werden nur diejenigen betrachtet, welche auf der Kugeloberfläche von Kreislinien als Seiten eingeschlossen werden. Zwei zusammentreffende Seiten bilden einen Umfangswinkel; jede Figur hat also so viele Umfangswinkel als Seiten, die Scheitelpunkte der Umfangswinkel heifsen Ecken.

Die ebenen Figuren sind geradlinige, wenn sie von lauter geraden Linien, krummlinige wenn sie von lauter krummen Linien, gemischtlinige, wenn sie theils von geraden, theils von krummen Linien begrenzt werden.

Krummlinige Figuren sind der Kreis, die Ellipse und die von Kreis- und elliptischen Bogen eingeschlossenen Figuren; man kann zu ihnen auch die durch vollständige einmalige Abwickelung einer Epicycloide und einer Hypocycloide auf ihren Grundkreisen begrenzten Ebenen rechnen.

Gemischtlinige Figuren sind alle Segmente und Sectoren von Kreisen, Ellipsen und anderen Curven.

Die geradlinigen Figuren werden nach der Anzahl der sie begrenzenden Seiten bezeichnet mit dreiseitige, vierseitige u. s. w. Figuren, die mehr als 4 Seiten habenden Figuren werden mit dem gemeinschaftlichen Namen: vielseitige Figuren belegt. Da jede Figur so viele Umfangswinkel als einschliefsende Seiten hat, so nennt man sie nach der Anzahl der mit den Seiten gleich vielen Ecken kürzer: Dreiecke, Vierecke, Fünfecke ... Vielecke.

Figuren sind gleichseitig, wenn sie lauter gleiche Seiten haben, wie der Rhombus, das Quadrat; gleichwinklig, wenn sie lauter gleiche Umfangswinkel haben, wie das Quadrat, das Rechteck. Gleichseitige und gleichwinklige Figuren heifsen regelmäfsige Figuren.

Figuren, auch von verschieden vielen Seiten, die einen gleichen Flächeninhalt einnehmen sind einander gleich. Eine Figur construiren, die einer gegebenen anderen von mehreren Seiten oder von überhaupt anderer Form gleich ist, heifst die gegebene Figur verwandeln. In dem Art.: Constructionen aus der Elementargeometrie finden sich mehrere Beispiele davon

Figuren sind einander ähnlich, wenn sie durch gleichliegende Diagonalen in gleichliegende ähnliche Dreiecke zerlegt werden können.

Figuren sind einander congruent, wenn die eine F. in eine solche Lage gebracht werden kann, dafs sie mit ihrer Begrenzung die der ersten Figur in allen Punkten deckt.

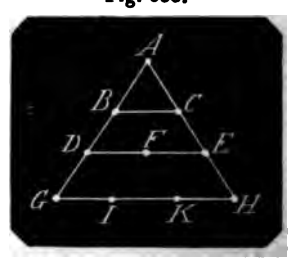
Figurirte Zahlen sind Zahlenreihen, deren Gesetz für die Fortschreitung immer eine gerade regelmäfsige Figur (ein Polygon), oder ein regelmäfsiger Körper (ein Polyeder) zu Grunde liegt und die nach der Anzahl der Ecken dieser Flächen und Körper ihren Namen erhalten.

Den dreieckigen Zahlen liegt das Dreieck, den viereckigen Zahlen das Viereck, überhaupt den *n*eckigen Zahlen das *N*eck zu Grunde und diese Zahlen heifsen deshalb auch vieleckige Zahlen, Polygonalzahlen. Diejenigen figurirten Zahlen, denen ein regelmäfsiges Polyeder zu Grunde gelegt wird, werden gewöhnlich Polyedralzahlen genannt.

I. Die Polygonal- oder vieleckigen Zahlen

1. Es sei ABC ein regelmäfsiges Dreieck, deren Seiten $AB = AC = BC = 1$ sind; die Anzahl der Eckpunkte A, B, $C = 3$ bildet die Grundzahl der dreieckigen Zahlen. Um die folgende dreieckige Zahl

Fig. 635.



zu erhalten verlängert man die Seiten AB, AC um die Längen $BD = CE = 1$, zieht DE, so ist $AD = AE = DE = 2$. Nun sollen die für die zweite Zahl neu hinzukommenden Punkte den gleichen Abstand = 1 von einander erhalten, folglich ist in $DE = 2$ noch ein mittlerer Punkt F zu setzen, hierzu die Punkte D, E, gibt die folgende dreieckige Zahl = 3 + 3 = 6.

Verlängert man wieder die Seiten AD und AE um die Längen $DG = EH = 1$, zieht GH, so ist $GH = 3$; es sind demnach in GH die beiden Punkte J, K in gleichen Abständen = 1 einzusetzen, zu den vorigen 6 Punkten kommen die 4 Punkte G, J, K, H hinzu und die folgende dreieckige Zahl ist $6 + 4 = 10$. So wird die nächstfolgende $10 + 5 = 15$, die nächstkommende $15 + 6 = 21$ u. s. w.

ir die Bildung der vollständigen Zahihe stellt man sich vor, dafs die beiSeiten AB und AC nach A hin immehr abnehmen, so dafs beide Punte endlich in dem einen Punkt A verinden, und somit ist die erste dreie Zahl und überhaupt jede erste ige Zahl = 1.

e Reihe der dreieckigen Zahlen ist nach

$$1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 21 \ldots\ldots$$

n sieht, wie auch aus der Bildungse der auf einander folgenden Zahlen orgeht, dafs diese Reihe eine arithmetische Reihe der zweiten Ordnung ist (s. Arithmetische Reihe, pag. 122, mit der Bezeichnung). Deren Differenzenreihen sind

$$\begin{array}{c} 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots\ldots \\ 1 \quad 1 \quad 1 \end{array}$$

Es ist also hier $B = 1$, $A = 2$, $d = 1$ daher nach der Formel

$$B + \frac{n-1}{1} \cdot A + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} d \qquad (1)$$

das $n$te Glied der Reihe $= \frac{n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2}$

Nach der Formel (pag. 128, rechts)

$$S = \frac{n}{1} a + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} a_1 + \frac{n \cdot (n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a_2 \qquad (2)$$

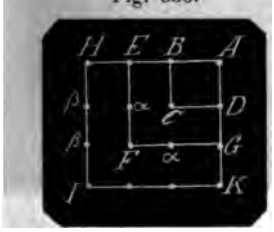
$= B = 1$; $a_1 = A = 2$; $a_2 = d = 1$

ie Summe der ersten n Glieder der eckigen Zahlen

$$S = \frac{n \cdot (n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Es sei $ABCD$ ein regelmäfsiges Vier- (Quadrat) von den Seiten $AB = AD = CD = 1$; die Ecken desselben lie- 4 Punkte als Grundzahl 4 der vier- en Zahlen; das durch Verlängerung Seiten AB und AD um $BE = DG = 1$ ehende zweite Quadrat $AEFG$ lie- zur 2ten Zahl noch die 5 Punkte in

Fig. 636.



FG und die 2te viereckige Zahl ist $= 9$. Die dritte Zahl erhält in HJ, noch 7 Punkte und es ist die 3te eckige Zahl $= 9 + 7 = 16$ u. s. w. erste Zahl ist wie bei den dreiecki- Zahlen $= 1$ also wird die $n$te Zahl . Die Summe der ersten n Zahlen nach Formel 2, wo $= 1$; $a_1 = A = 3$; $a_2 = d = 2$ ist

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Es sei $ABCDE$ ein regelmäfsiges eck, die 5 Eckpunkte liefern die ahl 5 für die fünfeckigen Zahlen;

Fig. 637.

zur folgenden Zahl liefern die Seiten FG, GH, HJ noch 7 Punkte, zur nächsten die Seiten KL, LM, MN wieder 10 Punkte; die folgenden vierten nicht gezeichneten 3 Seiten liefern 4 Eckpunkte $+ 3 \times 3$ Seitenpunkte $= 13$ Punkte, die fünften 3 Seiten liefern 4 Eckpunkte $+ 3 \times 4$ Seitenpunkte $= 16$ Punkte u. s. w. Die $n$ten 3 Seiten liefern 4 Eckpunkte $+ 3 \times (n-1)$ Seitenpunkte $= 3n + 1$ Punkte; die Reihe der fünfeckigen Zahlen ist also

$$1 \cdot 5 \cdot 12 \cdot 22 \cdot 35 \cdot 51 \ldots$$

Das $n$te Glied ist nach Formel 1, wo $B = 1$, $A = 4$, $d = 3$ ist $= \frac{n \cdot (3n-1)}{1 \cdot 2}$

Die Summe der ersten n Glieder

$$S = \tfrac{1}{2} n^2 (n+1)$$

4. Auf dieselbe Weise findet man die 6, 7, 8, 9 .... $n$eckigen Zahlen. Bd. I., pag. 252 sind die 10eckigen oder Decagonalzahlen aus Fig. 556 abgeleitet.

Die allen Polygonalzahlen gemeinschaftliche Reihe ist

$$1 \cdot 2 + d \cdot 3 + 3d \cdot 4 + 6d \cdot 5 + 10d \ldots\ldots$$

Das allgemeine $n$te Glied ist

$$n + \tfrac{1}{2} n (n-1) d = n \left[1 + \frac{n-1}{2} d \right]$$

Die Summe der ersten n Glieder ist

$$\tfrac{1}{2}n(n+1)+\tfrac{1}{3}n(n+1)(n-1)d=\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\left[1+\frac{n-1}{3}d\right]$$

Für $d=1$ entstehen die dreieckigen Zahlen
für $d=2$ „ „ viereckigen „
. . . . . .
für $d=n-2$ „ „ $n$eckigen „

Die vieleckigen Zahlenreihen zusammengestellt, ergeben demnach:

dreieckig	$1\cdot 3\cdot 6\cdot 10\ldots\ldots$	$\tfrac{1}{2}n(n+1)$;	$S=\frac{n\cdot(n+1)\,(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$
viereckig	$1\cdot 4\cdot 9\cdot 16\ldots\ldots$	n^2;	$S=\frac{n\cdot(n+1)\,(2n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}$
fünfeckig	$1\cdot 5\cdot 12\cdot 22\ldots\ldots$	$\tfrac{1}{2}n(3n-1)$;	$S=\tfrac{1}{2}n^2(n+1)$
sechseckig	$1\cdot 6\cdot 15\cdot 28\ldots\ldots$	$n(2n-1)$;	$S=\frac{n\cdot(n+1)(4n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}$
siebeneckig	$1\cdot 7\cdot 18\cdot 34\ldots\ldots$	$\tfrac{1}{2}n(5n-3)$;	$S=\frac{n\cdot(n+1)(5n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$
achteckig	$1\cdot 8\cdot 21\cdot 40\ldots\ldots$	$n(3n-2)$;	$S=\tfrac{1}{2}n(n+1)(2n-1)$
neuneckig	$1\cdot 9\cdot 24\cdot 46\ldots\ldots$	$\tfrac{1}{2}n(7n-5)$;	$S=\frac{n\cdot(n+1)(7n-4)}{1\cdot 2\cdot 3}$
zehneckig	$1\cdot 10\cdot 27\cdot 52\ldots\ldots$	$n(4n-3)$;	$S=\frac{n\cdot(n+1)(8n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}$

Band II., pag. 321 befindet sich noch ein kurzer Artikel über die zwölfeckige oder Dodekagonalzahl.

II. Die Polyedralzahlen.

Es sind diejenigen figurirten Zahlen, denen die regelmäfsigen Polyeder zu Grunde liegen und zwar in derselben Weise durch die Summirung der Eckpunkte, welche mit der ein- und mehrmaligen Verlängerung der Polyederseiten von Neuem hervortreten.

Es gibt nur 5 regelmäfsige Polyeder und demnach auch nur 5 verschiedene Polyedralzahlen.

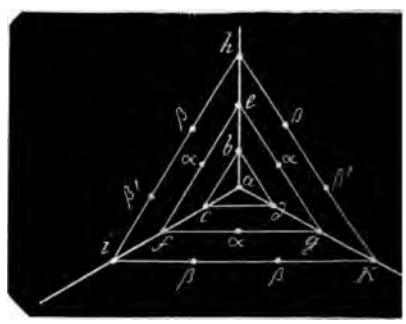
1. Die Tetraedralzahlen.
2. Die Octaedralzahlen.
3. Die Icosaedralzahlen.
4. Die Hexaedralzahlen.
5. Die Dodekaedralzahlen.

Die erste jeder Polyedralzahlen ist wie die erste jeder Polygonalzahl und aus dem dort angeführten Grunde = 1; die zweite ist die Anzahl der dem betreffenden Polyeder zugehörigen Ecken.

1. Die Tetraedralzahlen. Das Tetraeder wird begrenzt durch 4 Dreiecksflächen mit 6 Kanten und 4 Ecken, von denen jede 3 Dreiecksflächen begreift.

Es sei *abcd* ein Tetraeder, dessen Seiten oder Kanten *ab*, *ac*, *ad*, *bd*, *bc*, *cd* = 1 sind, so bilden die 4 Ecken *a*, *b*, *c*, *d* die 4 Punkte für die Grundzahl 4.

Fig. 638.



Verlängert man nun die 3 Kante
ac, *ad* um die gleichen Längen =
dafs sämmtliche 6 Kanten *ae*, *af*,
eg, *fg* = 2 werden, so erfordern die
ten 3 Kanten noch jede einen Pu
in ihrer Mitte. Es sind also zu der
ten Tetraedralzahl hinzugekommen
punkte *e*, *f*, *g* + 3 Kantenpunkte
ist die Zahl = 4 + 2 × 3 = 10.

Verlängert man die 3 Kanten
um die Länge 1, so dafs die Kante
ai, *ak*, *hi*, *hk*, *ik* = 3 werden, so
dern die 3 letzten Kanten jede 2 mit
Punkte *β*; es sind also zur 4ten Te
dralzahl hinzugekommen 3 Eckpunkt
i, *k* und 3 × 2 = 6 Kantenpunkte *β*.

Jede der drei sichtbaren Dreiecksebenen hat nun 4 Reihen Punkte, z. B. die Ebene aki; die Reihe a mit 1 Punkt, die Reihe bc mit 2 Punkten, die Reihe ef mit 3 Punkten und die Reihe hi mit 4 Punkten. Die untere, nur in den 3 Kanten hi, hk, ik sichtbare Ebene hat in der obersten Reihe h einen Punkt, die zweite Reihe $\beta\beta$ mit 2 Punkten, die dritte Reihe $\beta'\beta'$ nur mit 2 Punkten, die Reihe ik wieder mit 4 Punkten; es fehlt also in der Mitte zwischen $\beta'\beta'$ ein Punkt, und dieser eingesetzt entsteht die 4te Tetraedralzahl $10+3+3\times2+1=20$.

Verlängert man wiederum, zieht die mit hi, ik, hk parallelen Kanten, so kommen hinzu 3 Eckpunkte, in jeder der neuen Kante 3 Punkte also 3×3 Kantenpunkte. In der neugebildeten unteren Ebene aber fehlen aufser dem zu $\beta'\beta'$ gehörenden einen mittleren Punkt die in der mit ik correspondirenden Reihe die beiden mit β, β correspondirenden Mittelpunkte. Es sind also zu der 5ten Tetraedralzahl an Punkten hinzugekommen: 3 Eckpunkte, $3\times3=9$ Kantenpunkte und 3 Flächenpunkte und diese 5te Zahl ist $20+3+9+3=35$.

Zur 6ten Tetraedralzahl kommen hinzu 3 Eckpunkte $+3\times4=12$ Kantenpunkte $+(1+2+3)=6$ Flächenpunkte und die Zahl ist $35+3+12+6=56$.

Zur Bildung der Tetraedralzahlenreihe kommen zu jeder unmittelbar vorhergehenden Zahl

zur 1ten die Zahl 1
„ 2ten „ „ 3
„ 3ten „ „ $2\times3=6$
„ 4ten „ „ $3\times3+1=10$
„ 5ten „ „ $4\times3+(1+2)=15$
„ 6ten „ „ $5\times3+(1+2+3)=21$
. . . . . .
„ $n$ten „ „ $(n-1)3+\frac{1}{2}(n-2)(n-3)=\frac{1}{2}n(n+1)$

Diese Zahlen bilden die erste Differenzenreihe:

$1\cdot3\cdot6\cdot10\cdot15\cdot21\ldots\ldots\ \frac{1}{2}n(n+1)$

die zweite Differenzenreihe ist:

$2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\ldots.$

die letzte: $1\cdot1\cdot1\cdot1\ldots.$

Die Tetraedralzahlen bilden also eine arithmetische Reihe der 3ten Ordnung, und diese ist

$1\cdot4\cdot10\cdot20\cdot35\ldots\ldots\ \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

Die Summe der ersten n Glieder ist nach der Formel Bd. I., pag. 128.

$$S=\frac{n}{1}a+\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot2}a_1+\frac{n\cdot(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot a_2+\frac{n\cdot(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}a_3.$$

wo $a=1$; $a_1=3$; $a_2=3$; $a_3=1$ ist; mithin

$$S=\frac{n\cdot(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$$

2. Die Octaedralzahlen. Das Octaeder wird begrenzt durch 8 Dreiecksflächen, 12 Kanten und 6 Ecken, deren jede von 4 Dreiecksflächen gebildet wird.

Fig. 639 sei das (halbe) Octaeder mit der einen Ecke a in der Mitte, Fig. 640 die Seitenansicht desselben, mit welcher eine Fläche der unteren Hälfte sichtbar wird. Das Octaeder $abcdea'$ habe die Kanten = 1, so liefern die 6 Ecken die zweite Octaedralzahl 6.

Mit der Verlängerung der Kanten bis f, g, h, i um die Länge = 1 entsteht das

Fig. 639.

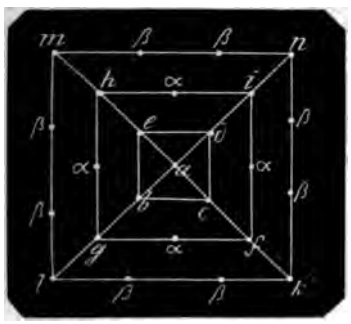
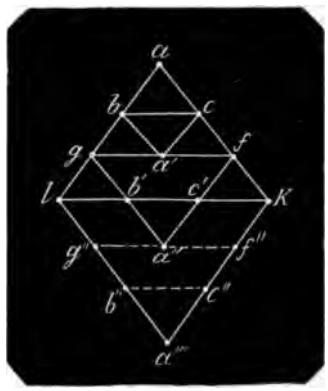


Fig. 640.



neue Octaeder aa'', es kommen also an Punkten hinzu 5 Eckpunkte f, g, h, i, a''; die 4 Kantenpunkte α in dem Quadrat $fghi$, welches der unteren Pyramide gia'' gemeinschaftlich ist; ferner die in den Kanten ga'', fa'', ha'', ia'' noch erforderlichen 4 Kantenpunkte b', c', d', e', zusammen $2 \times 4 = 8$ Kantenpunkte und die 3te Octaedralzahl ist

$$6 + 5 + 2 \times 4 = 19$$

Bei abermaliger Verlängerung der Kanten nach k, l, m, n entsteht das dritte Octaeder aa'''. Es kommen hinzu die 5 Eckpunkte k, l, m, n, a'''; die 8 in dem den beiden Pyramiden gemeinschaftlichen Quadrat befindlichen Kantenpunkte β und die in den 4 unteren Kanten noch fehlenden mit b und g etc. correspondirenden 8 Kantenpunkte b'', g''; c'', f''; d'', i''; e'', h''. Endlich 4 Flächenpunkte α' in den unteren 4 Dreiecksflächen in den Mitten zwischen g'', f''; f'', i''; i'', h'' und h'', g'', welche den oberen 4 Punkten α entsprechen und mit der Projection von a'' (Fig. 640) zusammenfallen. Mithin kommen hinzu: 5 Eckpunkte $+ 4 \times 4$ Kantenpunkte $+ 4$ Flächenpunkte, und die 4te Octaedralzahl ist

$$19 + 5 + 4 \times 4 + 4 = 44$$

Bei nochmaliger Verlängerung kommen hinzu 5 Eckpunkte, 4×3 Kantenpunkte (γ) in dem neuen gemeinschaftlichen Quadrat, und die in den unteren 4 neuen Kanten noch fehlenden, mit b, g, l correspondirenden $4 \times 3 = 12$ zusammen 6×4 Kantenpunkte; endlich in den 4 neuen unteren Dreiecksflächen 4 Punkte α'' und $2 \times 4 = 8$ Punkte β'', zusammen $3 \times 4 = 12$ Flächenpunkte, überhaupt also

$$5 + 6 \times 4 + 3 \times 4 = 41 \text{ Punkte;}$$

daher die 5te Octaedralzahl $= 44 + 41 = 85$.

Zur Bildung der Octaedralzahlenreihe kommen zu jeder unmittelbar vorhergehenden Zahl

zur 1ten die Zahl 1
„ 2ten „ „ 5
„ 3ten „ „ $5 + 2 \times 4 = 13$
„ 4ten „ „ $5 + 5 \times 4 = 25$
„ 5ten „ „ $5 + 9 \times 4 = 41$
„ 6ten „ „ $5 + 14 \times 4 = 61$
. . . . . .
„ $n$ten „ „ $5 + \frac{(n-2)(n+1)}{1 \cdot 2} \cdot 4$
$= 2n(n-1) + 1$

Diese Zahlen bilden den Octaedralzahlen die erste Differenzenreihe

$1 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 25 \cdot 41 \cdot 61 \ldots . 2n(n-1) + 1$

Die zweite Differenzenreihe ist

$4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 20 \ldots .$

die letzte:

$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \ldots .$

Die Octaedralzahlen bilden also eine Reihe der 3ten Ordnung und diese ist

$1 \cdot 6 \cdot 19 \cdot 44 \cdot 85 \cdot 146 \ldots . \frac{1}{3}n(2n^2+1)$

Die Summe der ersten n Glieder nach der Bd. I., pag. 128 aufgeführten Formel für $x' = S$ wo $a = 1$; $a_1 = 5$; $a_2 = 8$; $a_3 = 4$, ist mithin

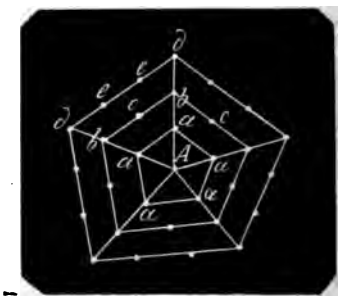
$$S = \tfrac{1}{3}n(n+1)(n^2+n+1)$$

3. Die Icosaedralzahlen. Das Icosaeder wird begrenzt durch 20 Dreiecksflächen, 30 Kanten und 12 Ecken, deren jede von 5 Dreiecksflächen gebildet wird.

Die Grundzahl der Icosaedralzahlen ist die Anzahl der Ecken = 12.

Es sei A eine der 12 Ecken mit den 5 regelmäfsigen Dreiecken Aaa, deren Seiten oder Kanten Aa und $aa = 1$ sind. Bei der Verlängerung der Kanten Aa bis b, so dafs $Ab = bb = 2$ wird, entsteht ein neues Icosaeder, in welchem nur die eine

Fig. 641.



Ecke A mit dem ersten gemeinschaftlich ist, folglich kommen hinzu $12 - 1 = 11$ neue Eckpunkte. Von den 30 neuen Kanten haben nur die 5 Kanten Ab einen mittleren Punkt a, die übrigen $30 - 5 = 25$ Kanten erhalten also noch 25 mittlere Punkte wie c in bb, mithin kommen für die 3te Icosaedralzahl hinzu $11 + 25 = 36$ Punkte und die Zahl ist $12 + 36 = 48$.

Bei einer wiederholten Verlängerung der Kanten um bd entsteht ein 3tes Icosaeder, dessen einzige gemeinschaftliche Ecke mit dem vorigen ist A, mithin kommen hinzu 11 neue Eckpunkte. Von den neuen Kanten haben nur die 5 verlängerten Kanten Ad 2 mittlere Punkte a, b, folglich kommen hinzu $25 \times 2 = 50$ Kantenpunkte c. Endlich haben nur die 5 Dreiecksflächen den einen mittleren

Flächenpunkt c, mithin kommen hinzu noch $20 - 5 = 15$ Dreiecksflächen jede mit einem Mittelpunkt, sind 15 Flächenpunkte. In Summa kommen hinzu $11 + 50 + 15 = 76$ Punkte und die 4te Icosaedralzahl ist $48 + 76 = 124$.

Bei abermaliger Verlängerung der 5 Kanten Ad entsteht ein 4tes Icosaeder; für dieses kommen hinzu 11 Eckpunkte, $25 \times 3 = 75$ Kantenpunkte und $15 \times 3 = 45$ Flächenpunkte, in Summa $11 + 75 + 45 = 131$ und die 5te Icosaedralzahl ist $124 + 131 = 255$ u. s. w.

Die Reihe der Icosaedralzahlen ist

$$1 \cdot 12 \cdot 48 \cdot 124 \cdot 255 \ldots\ldots$$
$$11 \cdot 36 \cdot 76 \cdot 131 \ldots\ldots \text{ (1te Differenzenreihe)}$$
$$25 \cdot 40 \cdot 55 \ldots\ldots \text{ (2te Differenzenreihe)}$$
$$15 \cdot 15 \cdot 15 \ldots\ldots \text{ (3te Differenzenreihe)}$$

Das $n$te Glied der Icosaedralzahlen ist nach der Formel Bd. I., pag. 122:

$$C + \frac{n-1}{1} B + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} A + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d$$

wo $C = 1$, $B = 11$, $A = 25$ und $d = 15$ ist; also $n$tes Glied $= \frac{1}{2}n(5n^2 - 5n + 2)$

Die Summe der ersten n Glieder nach der Bd. I, pag. 128 aufgestellten Formel wo $a = 1$, $a_1 = 11$, $a_2 = 25$; $a_3 = 15$, ist mithin $S = \frac{1}{12}n(15n^3 + 10n^2 - 3n + 2)$

4. Die Hexaedralzahlen. Das Hexaeder oder der Cubus hat zur Begrenzung 6 Vierecksflächen, 12 Kanten und 8 Ecken, deren jede von 3 Vierecksflächen gebildet wird. Es sei $ABCD$, Fig. 636, eine der Vierecksflächen, deren Seiten = 1 sind; die im Abstande = 1 darunter befindliche Fläche sei $A'B'C'D'$ dann sind die 4 Seitenflächen mit welchen diese beiden Grundflächen verbunden werden $AA'BB'$, $BB'CC'$, $CC'DD'$ und $AA'DD'$. Die 8 Ecken A, B, C, D, A', B', C', D' bilden die Grundzahl 8 der Hexaedralzahlen.

Verlängert man die 3 Kanten AB, AD, AA' um 1 bis AE, AG, AA'' und man vollendet das dazugehörige Hexaeder $AEFGA''E''F''G''$, so ist mit diesem die einzige Ecke A des ersten Hexaeders gemeinschaftlich. Zu der 3ten Hexaederzahl kommen also hinzu 7 Eckpunkte. Von den 12 Kanten haben nur die 3 Kanten AE, AG und AA'' schon die Mittelpunkte B, D, A', folglich erhalten von den übrigen 9 Kanten jede einen Punkt a und es kommen hinzu 9 Kantenpunkte. Ferner haben nur 3 Flächen einen Mittelpunkt wie C, nämlich die Fläche $AEFG$ den Punkt C, $AEA''E''$ den Punkt B' und die Fläche $AGA''G''$ den Punkt D'; folglich erhalten von den übrigen 3 Flächen noch jede einen Mittelpunkt und es kommen hinzu 3 Flächenpunkte, die 3te Hexaedralzahl ist demnach

$$8 + 7 + 9 + 3 = 27$$

Verlängert man wieder bis AH, AK, AA''', so kommen zur 4ten Hexaedralzahl hinzu 7 Eckpunkte; 9 Kanten jede mit 2 Punkten wie β, ρ, also $9 \times 2 = 18$ Kantenpunkte und 3 Flächen jede mit 4 Flächenpunkten wie c, α, F, $\alpha = 3 \times 4 = 12$ Flächenpunkten, die 4te Hexaedralzahl ist also $27 + 7 + 18 + 12 = 64$

Die Zahlen, welche den vorangegangenen Hexaedralzahlen zugezählt werden, um die nächstfolgenden zu geben sind

1) 7
2) $7 + 9 \cdot 1 + 3$
3) $7 + 9 \cdot 2 + 4 \cdot 3$
4) $7 + 9 \cdot 3 + 9 \cdot 3$

. . . . . .

n) $7 + 9(n-1) + 3(n-1)^2$

Die Hexaedral- oder Cubikzahlenreihe ist

$$1 \cdot 8 \cdot 27 \cdot 64 \cdot 125 \ldots\ldots n^3$$

und die Summe der ersten n Glieder nach der Formel Bd. I., pag. 128 wo $a = 1$, $a_1 = 7$; $a_2 = 12$; $a_3 = 6$ ist

$$S = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

5. Die Dodekaedralzahlen sind Bd. II., pag. 319 mit Fig. 565 abgehandelt. Die Reihe derselben ist

$1 \cdot 20 \cdot 84 \cdot 210 \cdot 455 \ldots\ldots \frac{1}{2}n(9n^2 - 9n + 2)$

die Summe derselben findet man nach der schon vorher gedachten Formel wo $a = 1$; $a_1 = 19$; $a_2 = 45$; $a_3 = 27$ ist

$$S = \frac{n}{8}(9n^3 + 6n^2 - 5n - 2) = \tfrac{1}{4}n(n+1)(3n+1)(3n-2)$$

6. Die Polyedralzahlen sind Zahlen der Reihe 3ter Ordnung von folgender Form:

1tes Glied $= 1$
2tes „ $= 1 + A$
3tes „ $= 1 + 2A + B$
4tes „ $= 1 + 3A + 3B + C$
5tes „ $= 1 + 4A + 6B + 4C$
6tes „ $= 1 + 5A + 10B + 10C$

. . . . . .

$$n\text{tes Glied} = 1 + \frac{n-1}{1}A + \frac{n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2}B + \frac{n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3}C$$

Die Summe der ersten n Glieder ist

$$S = \frac{n}{1} \cdot 1 + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}A + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}B + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}C$$

$1 + A$ ist die Anzahl der Ecken des Polyeders.
Für Tetraedralzahlen ist $A = 3$, $B = 3$, $C = 1$
für Octaedralzahlen ist $A = 5$, $B = 8$, $C = 4$
für Icosaedralzahlen ist $A = 11$, $B = 25$, $C = 15$
für Hexaedralzahlen ist $A = 7$, $B = 12$, $C = 6$
für Dodekaedralzahlen ist $A = 19$, $B = 45$, $C = 27$.

Firmament (firmus, fest) ist die scheinbare hohle Kugeloberfläche des Himmels, so genannt weil sie als eine feste Kugeloberfläche gedacht wurde, an welcher die Sterne angeheftet sind.

Fische)(das 6te und letzte Himmelszeichen (s. absteigendes Zeichen) der südlichen Halbkugel. Es fängt an am Endpunkt des Wassermanns, 60° vom Winterwendepunkt und endet am Anfangspunkt des Widders, dem Frühlingspunkt.

Fixsterne sind diejenigen Sterne am Himmel, die ihren Stand gegen die Erde nicht ändern (davon, dafs während eines sehr langen Zeitraums kleine Ortsänderungen dieser Sterne entdeckt worden sind vorläufig abgesehen). Dieser feste Stand liegt in der grofsen Entfernung derselben von unsrem Sonnensystem: Ist Bd. I., pag. 31, Fig. 33, S die Sonne, E ein Standpunkt der Erde in der Ekliptik in irgend einem Augenblick, so ist E' deren Stand nach einem halben Jahre und die Länge EE', der Durchmesser der Ekliptik ist etwa 42 Millionen Meilen. Nun ist ein Fixstern s um die Länge sS so weit von der Sonne entfernt, dafs der $\angle sE'D$ von dem $\angle sED$ durch noch so scharfe Mefsinstrumente an Gröfse nicht unterschieden gefunden wird und dafs folglich der Stern s festzustehen scheint.

Diese Fixsterne befinden sich in einer unzählbaren Menge am Himmel, sie haben sämmtlich ein funkelndes Licht und unterscheiden sich dadurch von den Planeten, dafs diese durch Fernröhre betrachtet, in einem ruhigen reflectirten Lichte erscheinen. Die Fixsterne sind also wie unsere Sonne selbstleuchtend, sie sind Sonnen und bilden höchstwahrscheinlich mit den ihnen zugehörenden uns unsichtbar bleibenden Planeten selbstständige Sonnensysteme.

Die Fixsterne sind von verschiedener Lichtstärke und man unterscheidet sie danach in Sterne erster, zweiter, dritter ..... Gröfse (anstatt Lichtstärke zu sagen). Ob diese gröfsere und geringere Lichtstärke von ihrem geringeren und gröfseren Abstand von der Erde herrührt oder von ihren wirklichen gröfseren oder geringeren körperlichen Inhalt und ihrem Umfang ist nur bei einigen erweislich uns näheren Sternen ermittelt. Beides, die wirkliche körperliche Gröfse und der Abstand von uns hat auf deren Lichtstärke Einfluſs.

Man hat 18 Sterne erster, 55 Sterne zweiter, 197 Sterne dritter Gröfse; die Sterne der nachfolgenden Gröfsen betragen das etwa $3\frac{1}{2}$fache an Anzahl der Sterne der ihnen vorhergehenden Klasse

In Folge des Vorrückens der Nachtgleichen unserer Ekliptik um 50,24 Secunden jedes Jahr scheinen alle Sterne parallel mit der Ekliptik ebenfalls fort zurücken, so dafs deren Breite dieselbe bleibt und nur deren Länge sich ändert So hat Hipparch im J. 128 v. Chr. die Länge des Sterns Spica in der Jungfrau 174° gefunden, de la Lande im Jahr 1750 dieselbe 200° 21′, gibt also in 1878 Jahren einen Unterschied = 26° 21′, beträgt in einem Jahr 50,5 Secunden. Bei der Vorrückung der Nachtgleichen um 50,24 Secunden würde die Aenderung der Länge nur 26,2085° = 26° 12′ 30,6″ betragen und Hipparch hätte den Winkel um 8 29,4″ zu klein angegeben, was bei der damaligen Unvollkommenheit der Instrumente ganz erklärlich ist, so dafs die

Spica seit 1878 Jahren ihre Lage gegen unser Sonnensystem nicht geändert hat.

In dem Art. Attraction ist schon nachgewiesen, dafs ein unverrückt bleibender Stand, die absolute Ruhe eines Weltkörpers nicht denkbar ist und die Spica ist demnach entweder so enorm weit von der Sonne entfernt, dafs ihr Lauf in so langen Jahren noch nicht als Bogenlänge zur Wahrnehmung gekommen ist, oder sie hat mit unsrem Sonnensystem, welches ebenfalls nicht in Ruhe bleiben kann, eine fast parallele und gleich gerichtete Bewegung.

Es gibt aber auch Fixsterne, deren Bewegung von uns wahrgenommen wird. Ein Beispiel hierfür zeigt der Art.: Doppelsterne.

Aufser der Unterscheidung der Fixsterne nach deren Leuchtvermögen theilt man dieselben in Gruppen, deren Sterne zusammengenommen ein Sternbild ausmachen wie z. B. das allgemein bekannte nördliche Sternbild: der grofse Bär.

Fixsterntrabant, s. u. Doppelsterne.

Fläche ist eine Ausdehnung des 2ten Grades, eine Ausdehnung nach 2 Hauptrichtungen, der Länge und der Breite; sie bildet die Begrenzung einer Ausdehnung des dritten Grades, die Begrenzung eines Körpers, indem sie kein Theil, kein Bestandtheil derselben ist, aber den Charakter des Körpers mit ausmacht.

Die Flächen sind entweder gerade oder krumme Flächen. Eine gerade Fläche oder Ebene ist eine Fläche, in welcher jede beliebig eingezeichnete gerade Linie mit allen ihren Punkten liegt; oder die in jeder beliebigen Richtung eine gerade Linie ist, oder die mit jeder zwischen 2 beliebigen in ihr befindlichen Punkten verbundenen geraden Linie sämmtliche Punkte derselben gemein hat, so dafs mit jedem noch so kleinen Stück einer Ebene deren ganze Ausdehnung gegeben ist und durch beliebige Verbreitung vergröfsert werden kann (s. den Art. Ebene).

Jede Fläche, die nicht Ebene ist, ist eine krumme Fläche. Diese ist regelmäfsig oder unregelmäfsig. Regelmäfsige Flächen sind die Oberflächen von regelmäfsig gebildeten Körpern: die Kugeloberflächen, die parabolischen, hyperbolischen, elliptischen, cylindrischen durch Umdrehung um eine Axe entstehenden Oberflächen.

Die Durchschnittsebenen und die Grundebenen von Körpern werden auch Durchschnittsflächen, Grundflächen genannt.

Flächen eines Krystalls sind die den Krystall einschliefsenden Ebenen; sie sind stets geradlinig begrenzt und heifsen nach der Zahl ihrer Seiten drei-, vier- und vielseitig. Ein Krystall hat entweder lauter congruente Flächen (gleiche Flächen genannt) oder Flächen von verschiedener Form In diesem Fall hat der Krystall von jeder Fläche einer besonderen Form noch eine oder mehrere ihr gleiche Flächen und diese in symmetrischer Anordnung belegen; sie heifsen unter sich gleichnamig, in Beziehung auf die Flächen der anderen Form ungleichnamig.

Man unterscheidet Seitenflächen, Scheitelflächen und Endflächen. Seitenflächen sind solche, die mit der Hauptaxe ∓ laufen, wie Fig 303, Bd. II., pag. 37, die 4 vierseitigen Flächen; Scheitelflächen solche, die mit den Endpunkten der Hauptaxe und unter sich in Ecken zusammentreffen, wie dieselbe Fig. die 8 dreieckigen Flächen, und Endflächen solche, deren Mittelpunkte zugleich die Endpunkte der Hauptaxe sind. Wenn also in einem Krystall Scheitelflächen sich befinden, so können in demselben keine Endflächen sein, und gegenseitig: die Einen schliefsen die anderen aus wie Fig. 303. In dem Hexaeder (s. Bd. I., pag. 256, Fig. 135) ist jede Fläche zugleich Endfläche und Seitenfläche, weil jede der drei Axen *ab*, *de*, *fg* als Hauptaxe betrachtet werden kann.

Gleichnamige Flächen, die noch so weit verlängert, für sich einen Raum nicht einschliefsen, heifsen zusammengehörige Flächen; sie können nur in zusammengesetzten Formen, d. h. in demselben Krystall nicht allein, sondern nur mit gleichnamigen Flächen anderer Art vorkommen. In Fig. 303 sind die 4 Seitenflächen zusammengehörige Flächen; im Würfel Fig. 135 sind alle Flächen gleichnamig, desgleichen in dem Octaeder Fig. 138, in dem Granatoeder Fig. 564, Bd. I., pag. 319, und daher haben diese Krystalle keine zusammengehörigen Flächen.

Flächenanziehung, s. v. w. Adhäsion.

Flächeneinheit ist die bestimmte Gröfse einer Fläche, in deren Anzahl man die Gröfse einer anderen Fläche ausdrückt. Sie ist eine Ebene und der Einfachheit wegen das Quadrat der Längeneinheit, daher auch wie diese in Beziehung auf zu messende Längen nach der Gröfse der

zu messenden Fläche grofs und klein, jedoch so dafs die kleineren Einheiten aliquote Theile der gröfseren sind Ferner sind sie in den verschiedenen Ländern verschieden: In Frankreich hat man die Quadratmeter, in anderen Ländern, wie in Preufsen Quadratmeilen, Quadratruthen, Quadratfufse u. s. w. (s. Flächenmaafs).

Flächeninhalt ist die Anzahl der Flächeneinheiten einer Fläche als Gröfse derselben.

Flächenkörperzahl ist das Product aus der Multiplication von 5 Zahlen mit einander, von welchen 2 Factoren die Flächenzahl und die anderen 3 Factoren die Körperzahl geben.

Flächenkraft, s. v. w. Flächenanziehung.

Flächenmaafs. Jedes Maafs mufs mit dem Gegenstand den es mifst gleichartig und die möglich einfachste Gröfse derselben Art sein. Ein Flächenmaafs mufs also eine Fläche und zwar die möglich einfachste Fläche, also eine Ebene sein. In keiner begrenzten Ebene sind aber die beiden Hauptausdehnungen „Länge und Breite" so unmittelbar vor Augen liegend als in dem rechtwinkligen Parallelogramm, und als Maafseinheit desselben das Quadrat der Längeneinheit.

Es ist aber in den meisten Fällen nicht möglich, ein Quadrat als Maafsebene auf die zu messende Fläche wiederholt zu legen und deren Gröfse direct zu messen, wie bei der geraden Linie geschieht. Z. B. ist dies bei dem Dreieck, jeder vieleckigen Figur, dem Kreise und allen Figuren mit krummen Begrenzungen nicht möglich; noch viel weniger bei krummen Flächen und aus diesem Grunde müssen solche zu messende Ebenen und krumme Flächen in rechtwinklige Parallelogramme verwandelt, d. h. solche angegeben werden, die mit den zu messenden Flächen einerlei Flächeninhalt haben, welches die Geometrie lehrt, und diese Parallelogramme werden dann mit der Maafseinheit verglichen.

Die Elementargeometrie lehrt nämlich, dafs Parallelogramme von gleichen Grundlinien sich verhalten wie ihre Höhen und Parallelogramme von gleichen Höhen wie ihre Grundlinien, also Parallelogramme überhaupt wie die Producte aus Grundlinie und Höhe. Ist also die zu messende Fläche in ein Parallelogramm von a Fufs Grundlinie und b Fufs Höhe umgewandelt, so vergleicht sich dessen Flächen-Inhalt mit dem der Maafseinheit von 1 Fufs Länge und ein Fufs Höhe, dafs $a \times b$ dieser Einheitsquadrate enthält.

Diese Multiplication von 2 Linien m einander und die Natur des daraus en stehenden Products läfst sich folgend Art veranschaulichen.

Denkt man sich irgend eine endlic gerade Linie, so entsteht aus deren B wegung nach einer anderen als der Längenrichtung eine Fläche. Die mö lich einfachste Bewegung der Linie i dafs jeder Punkt derselben einen gl chen Weg zurücklegt und dafs dies Weg eine gerade Linie ist. Es entste dann ein Parallelogramm, und dem ob angeführten Satze gemäfs bei einer Weg das gröfste wenn dieser Weg no mal mit der sich bewegenden gerad Linie ist.

Hält man mit dieser Bewegung irge wo an, so hat die gerade Linie offenb so viele gleich grofse gerade Linien od Wege zurückgelegt als Punkte in ihr vo handen sind. Weifs man die Anza dieser Punkte, so hat man diese Za nur mit dem gleich grofsen Weg jed einzelnen Punkts zu multipliciren u die summarische Länge der ganzen B wegung zu erhalten. Da aber die Punk der Linie unendlich nahe an einand liegen, so drückt die Länge der ursprün lichen Linie selbst die Anzahl ihrer Punk aus und folglich ist die summarische B wegung gleich dem Product wenn m die bewegte Linie mit der Länge der B wegung multiplicirt.

Denkt man sich die ursprüngliche Lin nach beiden Richtungen unendlich la und deren Bewegung in demselben Sin nach 2 entgegengesetzten Richtungen l in die Unendlichkeit fort, so hat au diese Ebene noch das Vermögen, ihr Ort zu ändern und zwar wo sie sich au befinden möge, weil sie überall in d Mitte des unendlichen Raums sich b findet. Bewegt sich nun die Ebene na beiden Richtungen, so dafs wieder jed einzelne Punkt der Ebene gleich grof geradlinige Wege normal der Ebene z rücklegt, so wird nach und nach jed einzelne Punkt des unendlichen Raum durchlaufen und eine weitere Ortsänd rung ist nicht mehr möglich: Zu Läng und Breite ist noch eine dritte Norma dimension, die Höhe gekommen und d mit diesen drei Dimensionen begriffe Raum ist der gesammte Raum, der kö perliche Raum und wird mit dem Kör permaafs gemessen (vgl. cubisches Maaf

Flächenraum ist die Gröfse einer b grenzten Fläche.

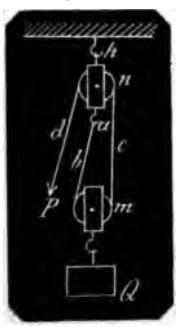
enwinkel ist ein Winkel den zwei mit einander bilden, die Neigung Ebenen zu einander, wie die Neiweier geraden Linien ebener el oder schlechtweg Winkel gerird. Der F. wird gemessen durch igungswinkel der beiden Ebenen, den F. bilden (s. Ebene No. 21) r Neigungswinkel der Ebenen wird eigungswinkel des Flächenls genannt Man sagt daher, winkel verhalten sich wie ihre Neinkel, Flächenwinkel sind gleich, h, wenn ihre Neigungswinkel gleich, h sind; sie sind mit diesen rechte, fe, spitze und erhabene F. Ebenen oder die Stücke derselben, den F. bilden, heifsen die Schenchen, die gerade Durchschnittserselben heifst die Kante oder heitellinie des F.

enzahl ist das Product aus der ication von 2 Zahlen mit einander. Flächenkörperzahl).

henzug ist ein uralter Apparat wältigung von Lasten, ein Hebelessen Erfindung dem Archimedes rieben wird. Es besteht aus 2 n oder Gehäusen, Flaschen gein welchen eine oder mehrere jeur selten über 3 Rollen um Axen befestigt sind. Beide Flaschen unterhalb Haken; an den Haken teren Flasche wird die zu hebende an den der oberen Flasche das feste les Zugseils befestigt. Die obere wird mit einer Oese um einen unverrückbaren Haken *h* aufge-

t in jeder Flasche nur eine Rolle 42), so wird das Zugseil um die der unteren Flasche geschlungen, ort in die Höhe genommen über lle der oberen Flasche geführt und

Fig. 642.

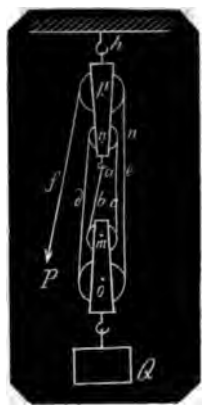


an das über diese Rolle hinwegreichende Ende die Kraft *P* zum Angriff gebracht.

Führt *P* das Seilende *d* um die Länge *l* fort, so macht das Seilende *c* ebenfalls den Weg *l*, und da das Seilstück *c* an dem festen Haken *a* um eben so viel sich verkürzt und zu dem Ende *c* hinzutritt, so geben beide Enden *b* und *c* die Länge *l* her und die Rolle *m* steigt mit der Flasche und der Last *Q* nur um die Höhe $\frac{1}{2}l$. Da nun bei einem System von Kräften diese mit den von ihnen gleichzeitig zurückgelegten Wegen in umgekehrtem Verhältnifs stehen, so ist $P:Q = \frac{1}{2}:1$ und die zur Hebung der Last *Q* erforderliche Kraft *P* ist $= \frac{1}{2}Q$.

3. Befinden sich in jeder Flasche 2 Rollen (Fig. 643), so geschieht die Seilführung über die Rollen *m* und *n* wie in

Fig. 643.



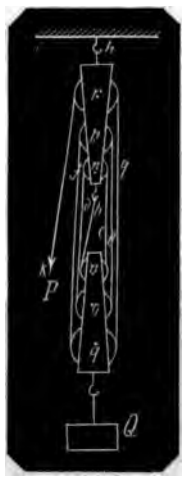
dem ersten Fall; anstatt aber, dafs an das Seilende *d* die Kraft *P* angreift, wird es unter die unterste Rolle *o* der unteren Flasche, von hier über die oberste Rolle *p* der oberen Flasche genommen und an das freie Ende *f* die Kraft *P* zum Angriff gebracht.

Wird nun die Last *Q* mit der unteren Flasche und den beiden Rollen *m*, *o* um die Höhe *l* gehoben, so wird das Seilende *b* um die Länge *l* verkürzt, mithin legt das Seilende *c* den Weg $2l$ zurück und mit demselben das Seilende *d* denselben Weg $2l$. Das Seilende *e* verhält sich aber zu dem Ende *d* wie *c* zu *b*, folglich macht das Seilende *e* und mit demselben die Kraft *P* den Weg $4l$. Es ist mithin für den Flaschenzug mit 2 Rollen in jeder Flasche $P = \frac{1}{4}Q$.

4. Befinden sich in jeder Flasche 3 Rol-

len (Fig. 644), so geschieht die Seilführung über die Rollen m, o und n, p wie vorher. Das Seilende F wird nun unter die 3te Rolle q der unteren Flasche, von dort über die 3te Rolle r der oberen Flasche geführt und das freie Seilende k mit der Kraft P bespannt.

Fig. 644.



Wird nun die Last Q mit der unteren Flasche und den 3 Rollen n, o, q um die Höhe l gehoben, so macht wieder das Seilstück c den Weg $2l$, mit diesem das Seilstück d den Weg $2l$ und das Seilstück e den Weg $4l$ und auch f und g den Weg $4l$. Wegen der um l aufsteigenden Rolle q macht jedes der beiden Seilstücke noch den Weg l und zwar f durch Verkürzung, folglich das Seilstück g wie in den vorigen Fällen allein noch $2l$, zusammen also $6l$ und auch die Kraft P macht den Weg $6l$, folglich ist $P = \frac{1}{3}Q$.

Ueberhaupt verhält sich P zu Q wie 1 zu der Anzahl der Rollen in beiden Flaschen zusammengenommen.

5. Hat jede Flasche nur eine Rolle, so sind beide von gleichem Durchmesser, sind aber mehrere Rollen darin, so werden die inneren Rollen hinter einander kleiner genommen, weil sonst die Seilstücke an einander sich reiben schädigen. Wenn grofse La hoch zu heben sind, so spannt m vor das Seil und damit deren immer gleichmäfsig angreife f das freie Seilende senkrecht ab unten in der Zugbahn über e Leitrolle, damit die Pferde st ihrer Natur angemessenen ho Zug behalten. Die Kraft P w auf die oberste Rolle der obere senkrecht abwärts.

6. Berücksichtigt man bei Be der Kraft P die Nebenhindernis für eine Rolle in jeder Fla 642)

der Halbmesser der Rolle n b
Mitte des Seils $= r$ Zoll
der Halbmesser des Bolzenzapfen
der Durchmesser des Seils $= \delta$
die Spannung des Seilstücks c
das Gewicht des Seils und der R
Zapfen $= w$
der Reibungscoefficient $= \mu$
so ist der Gesammtdruck auf d
von $n = P + s + w$
das Moment der Reibung $= \mu\varrho(P$
das Moment von $P = rP$
das Moment von s wegen der
des Seils auf dessen Seite =
folglich hat man die Momenten

$$rP = (r + \tfrac{1}{2}\delta^2)\, s + \mu\varrho\,(P + s +$$

Nennt man die Spannung stücks $b = s'$, und gelten die üb stimmungen für die Rolle m so hat man den Druck auf di zapfen $= Q$, mithin die Mom chung

$$(r + \tfrac{1}{2}\delta^2)\, s' + \mu\varrho Q = r \cdot s$$

hierzu die Kräftegleichung

$$s + s' = Q + w$$

In Gleichung 2 die Werthe s' aus Gleichung 3 gesetzt ent

$$s = \frac{r + \tfrac{1}{2}\delta^2 + \mu\varrho}{2r + \tfrac{1}{2}\delta^2}\, Q + \frac{r + \tfrac{1}{2}\delta^2}{2r + \tfrac{1}{2}\delta^2}$$

$$s' = \frac{r - \mu\varrho}{2r + \tfrac{1}{2}\delta^2}\, Q + \frac{r}{2r + \tfrac{1}{2}\delta^2}\, w$$

Schreibt man für Gleichung

$$(r - \mu\varrho)\, P = (r + \tfrac{1}{2}\delta^2 + \mu\varrho)\, s$$

und setzt hierin den Werth f Gleichung 4, so erhält man

$$(r - \mu\varrho)\, P = \frac{(r + \tfrac{1}{2}\delta^2 + \mu\varrho)^2}{2r + \tfrac{1}{2}\delta^2}\, Q + \frac{(3r + \delta^2)\,\mu\varrho + (r + \tfrac{1}{2}\delta^2)^2}{2r + \tfrac{1}{2}\delta^2}\, w$$

Läfst man in Vergleich mit der bedeutenden Last Q und der noch gröfser erforderlichen Kraft das Gewicht w der Flasche und des Seils aufser Betracht, so erhält man

$$P = \frac{(r + \tfrac{1}{2}\delta^2 + \mu\varrho)^2}{(2r + \tfrac{1}{2}\delta^2)(r - \mu\varrho)}\, Q$$

7. Die Entwickelung der Kraft P durch Q ausgedrückt wird für 2 Rollen in jeder Flasche, Fig. 643, viel schwieriger, besonders wenn man berücksichtigen will, daſs beide Rollen in derselben Flasche verschiedene Halbmesser r, r' und verschiedene Gewichte w, w' haben. Nimmt man für die Halbmesser beider Rollen einen mittleren $= r$, für die Halbmesser der Bolzenzapfen einen mittleren $= \varrho$ und läſst das mittlere Gewicht w fort, so erhält man durch Fortsetzung der Schlüsse ad 6:

Für 2 Rollen in jeder Flasche:

$$P = \frac{2\varrho\mu + \frac{1}{2}d^2}{r - \varrho\mu} \cdot \frac{(r + \mu\varrho + \frac{1}{2}d^2)^4}{(r + \mu\varrho + \frac{1}{2}d^2)^4 - (r - \mu\varrho)^4}$$

Für 3 Rollen in jeder Flasche (Fig. 644)

$$P = \frac{2\varrho\mu + \frac{1}{2}d^2}{r - \varrho\mu} \cdot \frac{(r + \mu\varrho + \frac{1}{2}d^2)^3}{(r + \mu\varrho + \frac{1}{2}d^2)^6 - (r - \mu\varrho)^6}$$

Fliehkraft, s. Centrifugalkraft.

Flüssigkeit ist jeder Körper, welcher flieſst, der also nicht starr ist, und man unterscheidet tropfbare und expansible oder luftförmige Flüssigkeiten. Die Statik und Mechanik der tropfbaren F. heiſsen die Hydrostatik und die Hydraulik; die der luftförmigen F. die Aerostatik und die Aerodynamik oder Aeromechanik (s. Aerodynamik, Ausfluſs des Wassers, Ausfluſs der Luft).

Focus, s. v. w. Brennpunkt bei wirklicher Sammlung von Lichtstrahlen, s. Brennglas, Brennspiegel.

Folgen der Vorzeichen in den auf Null reducirten geordneten Gleichungen sind je nach Beschaffenheit der Vorzeichen zweier auf einander folgender Glieder entweder Folgen gleichnamiger oder Folgen ungleichnamiger Vorzeichen.

In der Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ befinden sich 3 Folgen gleichnamiger Vorzeichen, nämlich zwischen dem ersten und zweiten Gliede $(+\,+)$ dem 2ten und 3ten Gliede $(+\,+)$ und dem 3ten und 4ten Gliede $(+\,+)$.

In der Gleichung $x^3 + ax^2 + bx - c = 0$ befinden sich zwischen dem 1ten und 2ten Gliede $(+\,+)$ und zwischen dem 2ten und 3ten Gliede $(+\,+)$ also im Ganzen 2 Folgen gleichnamiger Vorzeichen, das 3te und 4te Glied bilden eine Folge ungleichnamiger Vorzeichen $(+\,-)$.

In der Gleichung $x^3 + ax^2 - bx - c = 0$ sind 2 Folgen gleichnamiger (1tes und 2tes Glied $+\,+$, 3tes und 4tes Glied $-\,-$) und eine Folge ungleichnamiger Vorzeichen (2tes und 3tes Glied $+\,-$).

In der Gleichung $x^3 - ax^2 - bx - c = 0$ sind 2 Folgen gleichnamiger Vorzeichen (2tes und 3tes Glied $-\,-$; 3tes und 4tes Glied $-\,-$) und eine Folge ungleichnamiger Vorzeichen $(+\,-)$.

In der Gleichung $x^3 - ax^2 \pm bx + c = 0$ sind für jedes der beiden Vorzeichen des 3ten Gliedes eine Folge gleichnamiger und 2 Folgen ungleichnamiger Vorzeichen:

entweder $+\,-;\ -\,+;\ +\,+$.

oder $+\,-;\ -\,-;\ -\,+$.

In der Gleichung $x^4 + ax^2 - bx + c = 0$ fehlt das Glied mit x^3, d. h. der Coefficient von x^3 ist $= 0$. Um zu bestimmen, welches die Folgen der Vorzeichen in der Gleichung sind, hat man das fehlende Glied $= 0$ mit $\pm$ als Vorzeichen hinzuzusetzen, also

$$x^4 \pm 0 + ax^2 - bx + c = 0$$

also entweder $+\,+,\ +\,+,\ +\,-,\ -\,+$.

oder $+\,-,\ -\,+,\ +\,-,\ -\,+$.

Im ersten Fall 2 Folgen gleichnamiger und 2 Folgen ungleichnamiger, im zweiten Fall 4 Folgen ungleichnamiger Vorzeichen.

Die Folge ungleichnamiger Zeichen wird auch Wechsel der Vorzeichen genannt.

Welchen Einfluſs die Folgen und Wechsel der Vorzeichen auf die Vorzeichen der Wurzeln haben zeigt der Art.: algebraische Gleichung: Für quadratische Gleichungen No. 12, pag. 49 nämlich, daſs jede quadratische Gleichung so viele positive Wurzeln hat als Wechsel und so viele negative Wurzeln als Folgen der Vorzeichen. No. 17, pag. 51 erklärt, daſs dies auch bei den cubischen Gleichungen der Fall ist. No. 19 beweist aus den Folgen und Wechseln der Vorzeichen, daſs die gegebene unvollständige Gleichung vom 3ten Grade $x^3 + bx \pm c = 0$ zwei unmögliche Wurzeln haben muſs.

Dieses Gesetz findet bei den Gleichungen aller übrigen höheren Grade statt:

Für die Gleichung vom 4ten Grade seien die Producte

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = 0$$

die Wurzeln a, b, c, d also sämmtlich negativ, so entsteht die geordnete Gleichung

$$x^4 + (a+b+c+d)x^3 + (ab + ac + ad + bc + bd + cd)x^2 + (abc + abd + acd + bcd)x + abcd = 0$$

mithin für 4 negative Wurzeln 4 Folgen von Vorzeichen.

Sind die Producte:

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=0$$

so entsteht

$$x^4-(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+\ldots)x^2-(abc+\ldots.)x+abcd=0$$

also für 4 positive Wurzeln 4 Wechsel der Vorzeichen.

Sind die Producte

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x-d)$$

so entsteht die Gleichung

$$x^4+(a+b+c-d)x^3+(ab+ac-ad+bc-bd-cd)x^2+(abc-abd-acd-bcd)x-abcd=0$$

Je nachdem d kleiner oder gröfser als $a+b+c$ ist, entstehen die Gleichungen von der Form

$$x^4\pm Ax^3\pm Bx^2-Cx-D=0$$

Also in beiden Fällen entstehen 3 Folgen und 1 Wechsel der Vorzeichen für 3 negative und 1 positive Wurzel.

Sind die Producte

$$(x+a)(x+b)(x-c)(x-d)=0$$

so entsteht die Gleichung

$$x^4+(a+b-c-d)x^3+(ab-ac-ad-bc-bd+cd)x^2+(-abc-abd+acd+bcd)x+abcd=0$$

Je nachdem nun $c+d$ kleiner oder gröfser ist als $a+b$, hat man die Gleichungen von der Form

$$x^4\pm Ax^3-Bx^2+Cx+D=0$$

In beiden Fällen 2 Folgen und 2 Wechsel der Vorzeichen für 2 negative und 2 positive Wurzeln.

Sind endlich die Producte

$$(x+a)(x-b)(x-c)(x-d)=0$$

so entsteht die Gleichung

$$x^4-(-a+b+c+d)x^3+(-ab-ac-ad+bc+bd+cd)x^2+(abc+abd+acd-bcd)x-abcd=0$$

Je nachdem nun a kleiner oder gröfser ist als $b+c+d$ entstehen die beiden Gleichungen von der Form

$$x^4\mp Ax^3\pm Bx^2+Cx-D=0$$

In beiden Fällen 1 Folge und 3 Wechsel der Vorzeichen für eine negative und 3 positive Wurzeln.

Die oben als Beispiel aufgeführte unvollständige Gleichung:

$$x^4+ax^2-bx+c=0$$

hat also 2 unmögliche Wurzeln, weil sie je nach Ergänzung des fehlenden Gliedes einmal 2 Folgen und 2 Wechsel und das andere Mal 4 Wechsel hat, weil sie also sowohl 2 positive und 2 negative und zugleich 4 positive Wurzeln haben müfste, welches nicht möglich ist.

Diese Entwickelungen und Schlüsse auf Gleichungen von jedem noch so hohen Grade angewendet ergeben, dafs die ausgesprochene Regel allgemein gilt (s. Fouriers Lehre etc.)

Folge der Zeichen, der himmlischen Zeichen, der Himmelszeichen ist die Reihenfolge nach welcher die 12 Sternbilder, welche die 12 Zeichen des Thierkreises um die Ekliptik am Himmel ausmachen, vom Frühlingspunkt nach dem Sommer-, dem Herbst- und dem Winterpunkt bis wieder zum Frühlingspunkt hin gezählt werden.

In dem Art. „Absteigendes Zeichen“ mit Fig. 19 sind die 12 Himmelszeichen der Reihe nach im Kreise abgebildet, sie werden auch in der dort angegebenen Folge gezählt, es wird aber mit dem Widder angefangen.

In dem Art. „Erde“ mit Fig. 615 ist die wirkliche Bewegung der Erde E und die scheinbare Bewegung der Sonne S in der Ekliptik über F, S, H, W dargestellt. Man nennt diese Bewegungen die von der Rechten zur Linken, oder von Abend (über Mittag) nach Morgen. Wenn man aber die Ekliptik, wie Fig. 19 geschehen, mit den himmlischen Zeichen versieht, so kann man auch sagen, dafs die Bewegungen der Erde und der Sonne nach der Folge der Zeichen geschehen; wenn man nämlich mit dem in dem Frühlingspunkt F gezeichneten Sternbilde, dem Widder anfängt.

Die Erde bewegt sich also wirklich und die Sonne scheinbar nach der Folge der Zeichen:

1. Widder (Frühlingspunkt F)
2. Stier
3. Zwillinge
4. Krebs (Sommerpunkt S)

frau
:e (Herbstpunkt *H*)
ion
ize
bock (Winterpunkt *W*)
ermann
e

egebene Stand dieser Sternbil-
r wie er vor uralten, den chal-
onomischen Zeiten gewesen ist.
ls bis jetzt sind die beiden
henpunkte, der Frühlingspunkt
r Herbstpunkt *H* um cc. 30°
nach Fische und *H* nach Jung-
Sternbilder also um so viel vor-
las 1te Sternbild, der Widder
, wenn *F* und *H* constant ge-
ben, in dem Ort wo der Stier
:h befand.

ng ist die Erkennung einer
aus vorangegangenen Bedin-
ler Gründen.

tz ist die in Form eines Satzes
e Folgerung. Er wird auch
Corollarium (s. d.) genannt,
ann ein Lehrsatz, dessen Wahr-
inem vorher aufgestellten Lehr-
eder unmittelbar oder doch mit
nur wenigen Schlufsfolgen sich
Wenn z. B. erwiesen worden ist,
inem Dreieck nur ein Winkel
, der gleich einem rechten Win-
der gröfser ist, so ergibt sich
atz, dafs in jedem Dreieck noth-
rei spitze Winkel sein müssen.

ung ist das Verlangen, einen
essen Merkmale aus Definitio-
Grundsätzen hervorgegangen
haulich zu machen, ihn zu con-
Z. B. einen Kreis zu zeichnen,
ct aus 2 Factoren darzustellen,
jeder eine Summe zweier Sum-
st.
ctionen, die auf Lehrsätzen be-
id ausgeschlossen.

ngssatz, Postulat ist ein Satz,
Forderung ausspricht.

ner Gröfse ist das Gesetz, nach
lie Gröfse zusammengesetzt oder
st. Zu jeder Form, der allge-
orm gehören mehrere Gröfsen;
d Gröfsen von einerlei Form.
ratische Gleichung hat die Form

$$x^2 + ax + b = 0$$

st in diese Form zu bringen.

reise haben einerlei Form und
d in der Erklärung desselben
chen.

Ist n eine ganze Zahl, so ist $2n$ die Form jeder geraden Zahl; $2n+1$ die Form jeder ungeraden Zahl.

Formen der Krystalle sind entweder einfache oder zusammengesetzte F. Die ersteren bestehen aus lauter gleichnamigen Flächen, die letzteren aus zweierlei gleichnamigen Flächen. Durch Verlängerung der gleichnamigen Flächen einerlei Art verschwinden die anderen, und es entsteht eine einfache Form, eine Kernform oder Grundform des Krystalls.

Man wählt zur Grundform diejenige, welche aus den gröfseren, den vorherrschenden Flächen gebildet wird. S. Combination pag. 36 mit Fig. 301 und 302. Vergröfsert man immerfort die gröfseren 8eckigen Flächen, so verschwinden die dreieckigen und es entsteht das Hexaeder *abcdefgh*.

Eben so wird aus einer einfachen Form durch Enteckungen und Entkantungen eine zusammengesetzte hervorgebracht. Setzt man diese Enteckungen oder Entkantungen bis zum Maximum, also bis zu den Mitten der anliegenden Kanten fort', so entsteht wieder eine einfache Form, eine abgeleitete Form. Z. B. aus dem Würfel entsteht durch fortgesetzte Enteckung das reguläre Octaeder, wie Fig. 302, wo die Enteckung des Hexaeders so weit fortgesetzt ist, dafs das Octaeder $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\eta$ hervorgeht.

Die Begriffe: einaxige und vielaxige Formen s. u. Axen der Krystalle, Bd. I., pag. 256.

Es ist hier noch ganz besonders der Unterschied von homoedrischen und hemiedrischen Formen zu merken: die Krystalle werden nach Axensystemen, s. d., so unterschieden, dafs in jedem Krystall die Axen nachzuweisen sein müssen, welche dem System angehören; desgleichen die ihm zugehörige Anzahl von Flächen. Nun gibt es aber Krystalle, in welchen nur die Hälfte, auch wohl nur ¼ der ihm zukommenden Flächen vorhanden sind, die deshalb Hälftflächner oder Viertelflächner genannt werden und der hemiedrischen Form angehören, während die Krystalle der ursprünglichen, der homoedrischen Form, Vollflächner heifsen.

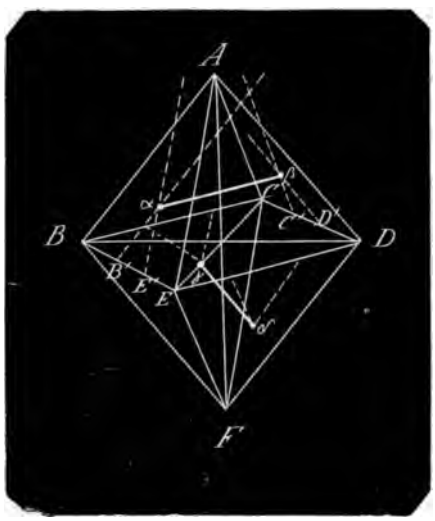
Z. B. dem Octaeder, einer homoedrischen Form des regulären Systems von 8 gleichseitigen Dreiecksflächen gehört als abgeänderte hemiedrische Form das Hemioktaeder oder Halbachtflächner an. Dieser hat nur 4 gleichseitige Dreiecksflächen, ist also das eigentliche

reguläre Tetraeder und wird auch Vierflächner genannt.

Wenngleich nun dieser Körper ein regulärer, also ein Körper von primitiver Form ist, so wird er dennoch dem Krystallisationssystem gemäfs aus dem Octaeder entstanden gedacht.

Es sei *ABCDEF* das Octaeder. Man denke die Flächen *AED* und *ABC* beide ∓ mit sich selbst einander entgegengerückt, *E* ist in *E'*, *D* in *D'*, *B* in *B'* und *C* in *C'*, so schneiden sich beide Flächen

Fig. 645.



in der geraden Linie $\alpha\beta$, der Endpunkt α liegt in der Fläche *ABE*, der Endpunkt β in der Fläche *ACD*.

Eben so rücke man die Flächen *FBE* und *FCD* ∓ mit einander näher bis sie sich in der geraden Linie $\gamma\delta$ schneiden; γ liegt in der Fläche *FBC*, δ in der Fläche *FED*. Die Linien $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ liegen auf entgegengesetzten Seiten und ∓ der Basis *BCDE* in einem Abstande von derselben $= \frac{1}{4}AF$ und $\alpha\beta$ und $\delta\gamma$ zugleich rechtwinklig zu einander in einem gegenseitigen Abstand $\frac{1}{2}AF = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}CE$. Sie sind = lang $= \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}BE$ und liegen wie die Halbirungslinie der gegenüberliegenden Seiten des Quadrats *BCDE*. Nimmt man also $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ als Kanten, construirt die Dreiecksebenen $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\gamma\delta$, $\beta\gamma\delta$ und $\alpha\beta\delta$, so sind die Dreiecke gleichseitig, congruent und bilden das reguläre Tetraeder.

So nun wie dieses Hemioctaeder aus dem Octaeder entstanden gedacht wird, so werden alle übrigen hemiedrischen Formen aus den ihr zu Grunde liegenden homoedrischen Formen entstanden gedacht.

Formel ist in dem Art. „algebraische Formel“ definirt und für diese sind Beispiele gegeben. Aufser der Algebra liefert die Analysis Formeln für Differenziale, Integrale, Reihen-Entwickelungen (s. Differenzialrechnung); die algebraische Geometrie (s. d.) Formeln für den Zusammenhang zwischen den Seiten, den Diagonalen und dem Inhalt der Figuren; die Trigonometrie liefert Formeln zwischen genannten Stücken und den Winkeln.

Fortschreitende Bewegung, s. u. Bewegung No. 2.

Fouriers Lehre von der Auffindung der Wurzeln algebraischer Gleichungen mit einer unbekannten Gröfse.

Die Methode, die Wurzeln einer auf Null reducirten geordneten Gleichung zu finden besteht darin, dafs deren Differenziale der Reihenfolge nach gebildet und deren Wurzeln mit denen der gegebenen Gleichung verglichen werden.

Ist $X = fx = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + px + q = 0$

$X_1 = f'x = nx^{n-1} + a(n-1)x^{n-2} + b(n-2)x^{n-3} + \ldots + p$

$X_2 = f''x = n(n-1)x^{n-2} + \ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$X_n = n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1$

so kann man in jede dieser Functionen einen so grofsen Werth M für x setzen, dafs das erste Glied, weil es den höchsten Exponent hat, gröfser wird als alle übrigen Glieder zusammengenommen. Ist M positiv, so werden die Werthe aller Functionen positiv, ist M negativ, so werden die Werthe der Functionen positiv oder negativ, je nachdem deren erste Glieder gerade oder ungerade Exponenten haben. Die Folgen oder Wechsel der Vorzeichen spielen aber eine wichtige Rolle für die Auffindung der Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Beispiel. Es ist folgende Gleichung vom 5ten Grade gegeben und von derselben sind der Reihe nach die 5 möglichen Differenziale genommen.

$[(x+1)(x+5)(x-2)(x-6)(x-50)]$

$X = x^5 - 52x^4 + 69x^3 + 1582x^2 - 1540x - 3000 = 0$

$X_1 = 5x^4 - 208x^3 + 207x^2 + 3164x - 1540$

$20x^3 - 624x^2 + 414x + 3164$

$60x^2 - 1248x + 414$

$120x - 1248$

120

a in Betreff der positiven und ne-
en Vorzeichen alle nur möglichen
nwerthe einzuschliefsen sei $M = \pm\infty$,
ind für $x = M = +\infty$ die Werthe
ntlicher 6 Functionen positiv; für
$M = -\infty$ sind die Werthe der Glei-
g und der geraden Differenziale sub-
iv, die der ungeraden Differenziale
iv. Man hat demnach folgendes
ma:

Für $x = +\infty$	für $x = -\infty$
$X = +$	$X = -$
$X_1 = +$	$X_1 = +$
$X_2 = +$	$X_2 = -$
$X_3 = +$	$X_3 = +$
$X_4 = +$	$X_4 = -$
$X_5 = +$	$X_5 = +$

n sieht, dafs diese Ordnung der auf-
der folgenden Vorzeichen bei jeder
leten auf Null reducirten Gleichung
mmen mufs; nämlich dafs für $x = +\infty$
Werthe der Gleichung und deren n
renziale n Folgen der Vorzeichen
für $x = -\infty$, n Wechsel der Vor-
en abgeben.

das erste Glied x^n subtractiv, so
für $x = +\infty$ sämmtliche Vorzeichen
ctiv.

Diese n Zeichenwechsel bei einer
hung vom $n$ten Grade gegen die
stehenden n Folgen sind nun nach
ier die Ursache, dafs zwischen $x = +\infty$
$x = -\infty$, also dafs überhaupt n Wur-
für die Gleichung existiren.

tzt man in dem Beispiel $x = 10$, so
t man

$X = -280200$

$X_1 = -107200$

$X_2 = -35096$

$X_3 = -6066$

$X_4 = -48$

$X_5 = +120$

e ersten 5 Functionen geben 4 Zei-
folgen, die 5te und die 6te geben
1 Zeichenwechsel. Es sind also 4
n und 1 Wechsel in diesem Bei-
. Da nun für $x = +\infty$ 5 Folgen
iren, so wird geschlossen, dafs zwi-
$x = 10$ und $x = \infty$ eine Wurzel der
hung existirt.

s ist nun freilich schon aus dem
ctiven Werth von X zu schliefsen.
wenn für $x = \infty$, X additiv und
$= 10$, X subtractiv wird, so mufs
zwischen beiden Werthen ein x' existi-
ren, für welches $X = 0$ wird, also eine
Wurzel x' und es geht noch nicht her-
vor, dafs die Fourier'sche Lehre Vortheile
darbietet.

3. Setzt man um der Wurzel näher
zu kommen $x = 100$, so hat man $X =$
$+4884663000$. Man weifs also, dafs die
Wurzel zwischen 10 und 100 liegt; allein
man weifs nicht, ob zwischen $x = 100$
und $x = \infty$, d. h ob über $x = 100$ noch
eine Wurzel für die Gleichung existirt
oder nicht, weil die Uebereinstimmung
der Vorzeichen (+) hierbei nichts ent-
scheidet.

Denn setzt man $x = 3$, so erhält man
für X den Werth $+9724$. Nun ist der
Werth von X für $x = +\infty$ ebenfalls $+$
und gleichwohl existirt zwischen $x = 10$
und $x = 100$ eine Wurzel.

Hier nun gibt die Fourier'sche Lehre
bestimmte Auskunft. Nämlich für x
$= 100$ ist

$X = +4884663000$

$X_1 = +294384860$

$X_2 = +13804564$

$X_3 = +475614$

$X_4 = +10752$

$X_5 = +120$

Da nun bei $x = 100$ und $x = +\infty$ kein
Zeichenwechsel statt findet, so ist nach
Fourier auch über $x = 100$ keine Wur-
zel der Gleichung vorhanden.

Setzt man $x = 0$, so erhält man

$X = -3000$

$X_1 = -1540$

$X_2 = +3164$

$X_3 = +414$

$X_4 = -1248$

$X_5 = +120$

Man findet hier 2 Zeichenfolgen und
3 Wechsel; da nun für $x = \infty$ 5 Folgen
existiren, so existiren nach Fourier zwi-
schen $x = 0$ und $x = +\infty$ oder nach dem
vorigen Satz zwischen $x = 0$ und $x = 100$
drei Wurzeln; und da für $x = 10$ vier
Folgen und 1 Wechsel statt haben, so
existiren zwischen $x = 0$ und $x = 10$ zwei
Wurzeln, die dritte liegt demnach zwi-
schen $x = 10$ und $x = 100$.

Da ferner bei $x = -\infty$ fünf Zeichen-
wechsel vorkommen, so hat die Gleichung
zwischen $x = 0$ und $x = -\infty$ noch $(5 - 3)$
$= 2$ Wurzeln.

4. Nimmt man nämlich für x zwei
Werthe A und B, zwischen welchen kein
Werth von x weder X noch eins der
Differenziale zu Null macht, so müssen

für alle Werthe von x innerhalb A und B die Zeichenreihen dieselben bleiben.

Setzt man $x = 1$, so erhält man in dem obigen Beispiel

$$X = -2940$$
$$X_1 = +1628$$
$$X_2 = +2974$$
$$X_3 = -774$$
$$X_4 = -1128$$
$$X_5 = +120$$

Die Zeichenwechsel sind also mit denen für $x = 0$ nicht dieselben; man ersieht auch, dafs es zwischen $x = 0$ und $x = 1$ Werthe von x gibt, durch welche X_1 und X_2 zu Null werden.

5. Wird ferner mit einem Werth C für x die Function = 0, der Werth jedes der Differenziale aber nicht = 0 so ist, unter z eine positive Gröfse gedacht, nach der Taylor'schen Reihe:

$$f(C+z) = fC + zf'C + \frac{z^2}{2}f''C + \frac{z^3}{6}f'''C + \ldots$$

$$f(C-z) = fC - zf'C + \frac{z^2}{2}f''C - \frac{z^3}{6}f'''C + \ldots$$

Nun ist $fC = 0$; $f'C$ aber nicht = 0, folglich ist

$$f(C+z) = zf'C + \frac{z^2}{2}f''C + \ldots.$$

$$f(C-z) = -zf'C + \frac{z^2}{2}f''C - \frac{z^3}{6}f'''C + \ldots.$$

Nun kann man sich unter z eine so kleine Gröfse denken, dafs $zf'C >$ ist als die absolute Summe aller übrigen Glieder, und es hat sodann

$f(C+z)$ das Vorzeichen +
$f(C-z)$ das Vorzeichen −

für Werthe von $x > C$ behält also die Function das Vorzeichen, für Werthe von $x < C$ wird es geändert und es entsteht für die Function bei $x = A$ gegen die bei $x = B$ ein Zeichenwechsel. Da der Voraussetzung nach für keinen Werth von x zwischen A und B eins der Differenziale = 0 wird, so bleiben nach Satz 4 die Vorzeichen derselben für $x = C \pm z$ dieselben mit denen für $x = A$ und B, oder mit A allein oder mit B allein, je nachdem die Vorzeichen der abgeleiteten Functionen für $x = A$ und B übereinstimmen oder nicht.

In dem Beispiel ist zwischen $x = 10$ und $x = 100$ die Wurzel $C = 50$.

Man hat:

für $x = 51$	für $x = 49$
$X = +6420960$	$X = -5456700$
$X_1 = +6932828$	$X_1 = +5003516$
$X_2 = +1054274$	$X_2 = +878206$
$X_3 = +92826$	$X_3 = +83322$
$X_4 = +4872$	$X_4 = +4632$
$X_5 = +120$	$X_5 = +120$

Es stimmen also die Vorzeichen der Differenziale mit denen für $x = B = 100$.

Man hat zusammengestellt:

	für $x=10$,	für $x=49$,	für $x=51$,	für $x=100$
$X =$	−	−	+	+
$X_1 =$	−	+	+	+
$X_2 =$	−	+	+	+
$X_3 =$	−	+	+	+
$X_4 =$	−	+	+	+
$X_5 =$	+	+	+	+

Setzt man $x = -2$ so erhält man

$$X = +4992$$
$$X_1 = -5296$$
$$X_2 = -320$$
$$X_3 = +3150$$
$$X_4 = -1488$$
$$X_5 = +120$$

Für $x = 0$ (No. 3) hat man 3 Zeichenwechsel, für $x = -2$ hat man 4 Zeichenwechsel, es existirt also eine Wurzel von X für einen Werth von x zwischen 0 und -2 und diese Wurzel ist $= -1$. Nimmt man wieder 2 benachbarte Werthe von -1, z. B. $-1{,}1$ und $-0{,}9$ so erhält man

für $x = -1{,}1$	für $x = -0{,}9$
$X = +438$	$X = -418$
$X_1 = -1002$	$X_1 = -4065$
$X_2 = +1927$	$X_2 = +2192$
$X_3 = +1859$	$X_3 = +1585$
$X_4 = -1116$	$X_4 = -1356$
$X_5 = +120$	$X_5 = +120$

und eine Zusammenstellung der Vorzeichen für A, B, $C+z$ und $C-z$ ergibt

	für $x=0$,	für $x=-0{,}9$,	für $x=-1{,}1$,	für $x=-2$
$X =$	−	+	+	+
$X_1 =$	−	−	−	−
$X_2 =$	+	+	+	−
$X_3 =$	+	+	+	+
$X_4 =$	−	−	−	−
$X_5 =$	+	+	+	+

In beiden Fällen, für die Wurzeln 50 und -1 ersieht man die Uebereinstimmung der Vorzeichen für sämmtliche Differenziale und die entgegengesetzten Vorzeichen in der gegebenen Gleichung. Ferner ist ersichtlich, dafs die Anzahl der Zeichenwechsel in den zusammengestellten Functionen von $x = +\infty$ bis nach $x = -\infty$ hin sich vermehren, oder wie

n gewöhnlich es ausdrückt: es gehen Zeichenwechsel von $x = -\infty$ bis $+\infty$ hin durch die Wurzeln verloren.

. Hat eine Gleichung mehrere gleiche rzeln, so gehen durch dieselben eine iche Anzahl von Wechseln verloren. Denn ist zwischen den Grenzen A und für x die Zahl C zweimal als Wurzel, cht also C die Gleichung 2mal zu Null, wird für $x = C$, fx und $f'x$ oder fC d $f'C = 0$. Man hat wie ad 5

$$C+z) = fC + zf'C + \frac{z^2}{2}f''C + \frac{z^3}{6}f'''C + \ldots$$

$$C-z) = fC - zf'C + \frac{z^2}{2}f''C - \frac{z^3}{6}f'''C + \ldots$$

$$C+z) = +\frac{z^2}{2}f''C + \frac{z^3}{6}f'''C$$

$$C-z) = +\frac{z^2}{2}f''C - \frac{z^3}{6}f'''C$$

Unter z wieder eine sehr kleine Gröfse dacht wie ad 5, ergibt

$f(C+z)$ mit dem Vorzeichen +
d $f(C-z)$ mit dem Vorzeichen +
$= 0$ hat aber den Zeichenwechsel + − geben, und $f'C = 0$ ergibt nun den Zeienwechsel − +, folglich sind von B ch A hin 2 Zeichenwechsel entstanden, er von A nach B hin verloren gegann. Aus den abwechselnden Vorzeichen der zweiten Taylor'schen Reihe erht man, dafs bei 3 gleichen Wurzeln Zeichenwechsel, bei n gleichen Wurln n Zeichenwechsel verloren gehen, dem $fx = f'x = \ldots f^{n-1}x = 0$ wird.

Beispiel $[(x-1)(x-1)(x+5)]$

$X = x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$
$X_1 = 3x^2 + 6x - 9$
$X_2 = 6x + 6$
$X_3 = +6$

Für $x = 1$ wird $X = X_1 = 0$.

Setzt man $x = 0$ und $= 10$, so erhält man

$X = +5$	$X = +1215$
$X_1 = -9$	$X_1 = +351$
$X_2 = +6$	$X_2 = +66$
$X_3 = +6$	$X_3 = +6$

Bei $x = 0$ sind 2 Zeichenwechsel, die bei $x = 10$ verloren gegangen sind.

2tes Beispiel.

$[(x-1)(x-1)(x-1)(x+5)]$

$X = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 14x - 5 = 0$
$X_1 = 4x^3 + 6x^2 - 24x + 14$
$X_2 = 12x^2 + 12x - 24$
$X_3 = 24x + 12$
$X_4 = 24$

Man erhält

für $x = 0$ und für $x = 10$:

$X = -5$	$X = +10935$
$X_1 = +14$	$X_1 = +4364$
$X_2 = -24$	$X_2 = +1296$
$X_3 = +12$	$X_3 = +252$
$X_4 = +24$	$X_4 = +24$

Bei $x = 0$ sind 3 Zeichenwechsel, die bei $x = 10$ verloren gegangen sind. Für $x = 1$ wird $X = X_1 = X_2 = 0$.

7. Es ist No. 4 in dem Beispiel gezeigt, dafs Differenziale für Werthe von x innerhalb zweier Grenzen A und B zu Null werden. Gesetzt es gehe für einen Werth von $x = C$ zwischen A und B das $m$te Differenzial in den Werth $= 0$ über, so liegen der Gleichung und deren ersten $(m-1)$ Differenzialen die vorhin ermittelten Gesetze zu Grunde. Dann aber hat man:

$$f_{m+1}(C+z) = f_mC + zf_{m+1}C + \frac{z^2}{2}f_{m+2}C + \ldots.$$

$$f_{m+1}(C-z) = f_mC - zf_{m+1}C + \frac{z^2}{2}f_{m-2}C - \ldots.$$

der da $f_mC = 0$ ist

$$f_{m+1}(C+z) = +zf_{m+1}C + \frac{z^2}{2}f_{m+2}C + \ldots.$$

$$f_{m+1}(C-z) = -zf_{m+1}C + \frac{z^2}{2}f_{m+2}C - \ldots.$$

Es hat also wie No. 5 nachgewiesen, i sehr kleinem z das erste Differenzial Vorzeichen +, das zweite das Vorchen −.

Stellt man diese Werthe mit $f_{m+1}C$ $f_{m-1}C$ zusammen, so erhält man, X bis X_{m-1} keine Aenderung erfahren

Für $x =$	$\ldots X_{m-1}$	X_m	X_{m+1}
$C+z$	$f_{m-1}C$	$+zf_{m+1}C$	$f_{m+1}C$
C	$f_{m-1}C$	0	$f_{m+1}C$
$C-z$	$f_{m-1}C$	$-zf_{m+1}C$	$f_{m+1}C$

Haben nun $f_{m-1}C$ und $f_{m+1}C$ gleiche Vorzeichen, etweder + oder −, so entstehen folgende Zeichenreihen

$x=$	$\ldots X_{m-1}$	X_m	X_{m+1}
$C+s$	+	+	+
C	+	0	+
$C-s$	+	−	+

$x=$	$\ldots X_{m-1}$	X_m	X_{m+1}
$C+s$	−	−	−
C	−	0	−
$C-s$	−	+	−

wobei zu bemerken, daſs für $-X_{m+1}=-f_{m+1}C$ auch $s\times(-f_{m+1}C)=-sf_{m+1}C$ und $-s(-f_{m+1}C)=+sf_{m+1}C$ wird.

Die 3 Differenziale für $x=C+s$ haben also 2 Zeichenfolgen, die 3 Differenziale für $x=C-s$ haben 2 Zeichenwechsel und diese gehen bei dem Durchgang bei $x=C$ durch den Werth 0 verloren.

Sind die Vorzeichen von $f_{m-1}C$ und $f_{m+1}C$ ungleich, ± oder ∓ so entsteht

$x=$	$\ldots X_{m-1}$	X_m	X_{m+1}
$C+s$	+	−	−
C	+	0	−
$C-s$	+	+	−

$x=$	$\ldots X_{m-1}$	X_m	X_{m+1}
$C+s$	−	+	+
C	−	0	+
$C-s$	−	−	+

In beiden Fällen haben die drei Differenziale für $x=C+s$ und $x=C-s$ einen Wechsel und eine Folge und es ist kein Zeichenwechsel verloren gegangen.

Wenn also ein Differenzial = 0 wird, so gehen entweder 2 Zeichenwechsel oder es geht keiner verloren, und dies findet für jedes Differenzial statt, wenn mehrere derselben, die auch aufeinander folgen können, zu Null werden.

8. In einer Gleichung können höhere Werthe von x nie mehr Zeichenwechsel liefern als niedrigere: für $x=+\infty$ entstehen nur Folgen, für $x=-\infty$ nur Wechsel von Zeichen. Wird für einen Werth von x die Gleichung $X=0$, so geschieht dies immer mit Verlust eines Zeichenwechsels. Bei gleichen Wurzeln werden immer so viele hintereinanderliegende Funtionen von X ab gerechnet zu Null als die Anzahl der gleichen Wurzeln beträgt.

Hat eine Gleichung vom $n$ten Grade n reelle Wurzeln, so kann kein Zeichenwechsel verloren gehen, ohne daſs zwischen den dazu gehörigen Grenzen (A und B) eine Wurzel sich befinde.

Hat eine Gleichung vom $n$ten Grade $n-m$ reelle Wurzeln, so gehen durch dieselben $n-m$ Zeichenwechsel verloren, und m gehen verloren, ohne daſs dabei $X=0$ wird, also dadurch, daſs Differenziale zu Null werden. Da dies immer nur paarweise geschehen kann, so muſs m eine gerade Zahl sein und es kann in einer Gleichung mit lauter reellen Gliedern nur eine gerade Anzahl von unmöglichen Wurzeln sich befinden.

9. Beispiele 1. In dem ad 1 gewählten Beispiel:

$$X=x^5-52x^4+69x^3+1582x^2-1540x\\ =3000=0$$

hat man folgendes Schema:

$x=$	X	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
$+\infty$	+	+	+	+	+	+
100	+	+	+	+	+	+
51	+	+	+	+	+	+
50	0	+	+	+	+	+
49	−	+	+	+	+	+
10	−	−	−	−	−	+
6	0	−	−	−	−	+
5	+	−	−	−	−	+
2	0	+	+	−	−	+
1	−	+	+	−	−	+
0	−	−	+	+	−	+
−1	0	−	+	+	−	+
−2	+	−	−	+	−	+
−5	0	+	−	+	−	+
$-\infty$	−	+	−	+	−	+

Von $x=+\infty$ bis $x=51$ bleiben dieselben Zeichenfolgen, es existirt also in diesem Interwall keine Wurzel der Gleichung. Für $x=49$ ist ein Zeichenwechsel mit 4 Zeichenfolgen, für $x=10$ entstehen 4 Folgen und ein Wechsel, zwischen $x=10$ und $x=49$ ist also keine Wurzel. Da aber $x=51$ fünf Folgen, $x=49$ und $x=10$ vier Folgen hat, so existirt zwischen $x=10$ und $x=+\infty$ eine aber nur eine Wurzel und diese ist = 50.

Nimmt man das Intervall für $x=10$

1 oder $x = 0$, so hat man bei
ein Wechsel, bei $x = 0$ oder 1
chsel; es existiren also in die-
ervall entweder 2 Wurzeln oder
1 auch Differenziale in den Werth
r. Um dies zu finden theilt man
rvall: für $x = 5$ erhält man nun
el, bei $x = 10$ ist nur 1 Wechsel
t ganz bestimmt zwischen 5 und
Wurzel, und diese ist = 6. Aus
en Grunde ist zwischen 0 und 5
rzel (2) vorhanden.

$x = 0$ drei Wechsel, für $x = -\infty$
chsel vorhanden sind, so existi-
weder 2 negative Wurzeln oder
n Differenziale verloren. Durch
des Intervalls findet man, dafs
Wurzeln (− 1 und − 5) existiren.

lgendes Beispiel
$x^3 - 3x + 4)(x - 3)(x + 1)]$
nmögliche Wurzeln. Es ist
$- 5x^3 + 7x^2 + x - 12 = 0$
$^3 - 15x^2 + 14x + 1$
$x^3 - 30x + 14$
$x - 30$
24
tsteht

X	X_1	X_2	X_3	X_4
+	−	+	−	+ (24)
− (12)	+ (1)	+ (14)	− (30)	+ (24)

r $x = 0$ ein Zeichenwechsel we-
t als für $x = -\infty$, so hat die
g nothwendig eine negative Wur-
übrigen 3 Wurzeln sind positiv,
auch $x = 0$ mit 3 Zeichenwech-
ibt, indem $x = +\infty$ vier positive
liefert.

Für $x = 1$ entstehen die Zeichen
− (8) + (4) − (4) − (6) + (24)
in 3 Wechseln, so dafs zwischen 0 und 1 keine Wurzel liegt.

Für $x = 10$ entstehen die Zeichen
+ (5698) + (2641) + (914) + (210) + (24)
so dafs keine Wurzel existirt, die > 10 ist, die 3 Wurzeln also zwischen 1 und 10 liegen. Man erhält ferner

für $x = 4$: + 40 + 73 + 86 + 66 + 24
$= 2$: − 6 + 1 + 2 + 18 + 24
hierzu $= 1$: − 8 + 4 − 4 − 6 + 24

$x = 4$ stimmt in den Zeichen mit $x = \infty$, also gibt es keine Wurzel > 4. Für $x = 2$ entsteht ein Wechsel, mithin liegt eine Wurzel zwischen 2 und 4. Zwischen 1 und 2 für x liegen also entweder 2 Wurzeln oder es existirt keine reelle Wurzel.

11. Das Verfahren um zu erkennen, ob Wurzeln vorhanden sind oder nicht, ist nach Fourier etwas weitläufig und soll mit den Beweisen für die Richtigkeit fortgelassen werden. Hat man das Intervall auf möglichst enge Grenzen gebracht, wie es auch von Fourier geschieht, so ist es in vielen Fällen am einfachsten, wenn man die Differenziale ignorirt und sich einzig mit der gegebenen Gleichung beschäftigt.

Man thut wohl, das Intervall auf eine Einheit grofs zu bringen, wie in dem vorliegenden Beispiel, wo die beiden Wurzeln zwischen $x = 1$ und $x = 2$ angezeigt sind. Nun setze man $x = 1 + \alpha$, wo α einen positiven ächten Bruch bedeutet und ermittle durch α den Werth von X.

Man erhält

$$\begin{array}{rrrrrrr} x^4 = & (1+\alpha)^4 = & 1 + & 4\alpha + & 6\alpha^2 + & 4\alpha^3 + & \alpha^4 \\ -5x^3 = & -5(1+\alpha)^3 = & -5 - & 15\alpha - & 15\alpha^2 - & 5\alpha^3 & \\ +7x^2 = & +7(1+\alpha)^2 = & +7 + & 14\alpha + & 7\alpha^2 & & \\ x = & & 1 + & \alpha & & & \\ -12 = & & -12 & & & & \\ \hline X = & & -8 + & 4\alpha - & 2\alpha^2 - & \alpha^3 + & \alpha^4 \end{array}$$

röfste Werth, den α annehmen
$= 1$, mithin der gröfste negative
on $X = -6$, nämlich für $x = 2$;
n kleineren Werth von α bleibt
hen − 6 und − 8 und es existirt
wischen 1 und 2 kein Werth
von x, der die Function $X = 0$ macht, also auch keine Wurzel, woraus hervorgeht, dafs die Gleichung 2 unmögliche (imaginäre) Wurzeln hat.

12. Man soll aus folgender gegebenen Gleichung die Wurzeln finden:

$$\begin{array}{rl} X = & x^5 - 21x^4 + 43x^3 - 485x^2 + 450x + 1000 = 0 \\ \text{ist} \quad X_1 = & 5x^4 - 84x^3 + 129x^2 - 970x + 450 \\ X_2 = & 20x^3 - 252x^2 + 258x - 970 \\ X_3 = & 60x^2 - 504x + 258 \\ X_4 = & 120x - 504 \\ X_5 = & 120 \end{array}$$

Man erhält folgendes Schema

$x=$	$-\infty$	0	10	100	$+\infty$
X	−	+	−	+	+
X_1	+	+	−	+	+
X_2	−	−	−	+	+
X_3	+	+	+	+	+
X_4	−	−	+	+	+
X_5	+	+	+	+	+

Bei $x=0$ sind 4 Zeichenwechsel, bei $x=-\infty$ sind 5 Wechsel, folglich existirt eine negative Wurzel. Ueber $x=+100$ ist keine Wurzel vorhanden; bei $x=+10$ ist ein Zeichenwechsel, daher liegt eine positive reelle Wurzel zwischen 10 und 100; die übrigen 3 Wurzeln liegen zwischen 0 und 10; bei 0 sind 4 bei 10 ist ein Zeichenwechsel. Um nun zu erfahren, ob nur eine oder ob 3 reelle Wurzeln zwischen 0 und 10 vorhanden sind, schränke das Intervall ein

für $x=0$ sind die Zeichen $+\,+\,-\,+\,-\,+$
für $x=1$ „ „ „ $+\,-\,-\,-\,-\,+$

Es existiren mithin zwischen 0 und 1 entweder 2 reelle Wurzeln oder keine; die 3te Wurzel liegt jedenfalls zwischen 1 und 10 und ist reell.

Um nun das Intervall $0-1$ auf Wurzeln zu untersuchen, ignorire die Differenziale, setze $x=\alpha=$ einem ächten Bruch, so hat man

$$X=\alpha^5-21\alpha^4+43\alpha^3-485\alpha^2+450\alpha+1000$$

für $\alpha=0$ ist $X=+1000$
für $\alpha=1$ ist $X=+988$

Für $\alpha=1$, den höchsten Werth den α annehmen kann, wird die algebraische Summe der mit α versehenen Glieder $=-12$.

Für jeden kleineren Werth wird die Summe gröfser, X bleibt also von $x=0$ bis $x=1$ positiv und es existirt keine Wurzel für X innerhalb $x=0$ und $x=1$.

13. Folgende Gleichung ist gegeben und es sind deren Differenziale aufgeführt:

$$X=x^4-6x^3+6x^2+8x+2=0$$
$$X_1=4x^3-18x^2+12x+8$$
$$X_2=12x^2-36x+12$$
$$X_3=24x-36$$
$$X_4=24$$

Man erhält vorläufig folgendes Schema:

$x=$	$-\infty$	0	1	10
X	+	+	+	+
X_1	−	+	+	+
X_2	+	+	−	+
X_3	−	−	−	+
X_4	+	+	+	+

Man ersieht, dafs über $+10$ hinaus keine Wurzel mehr statt findet, dafs zwischen 1 und 10 zwei Wurzeln und dafs zwischen 0 und $-\infty$ ebenfalls 2 Wurzeln angezeigt werden.

Für $x=-1$ erhält man die Zeichenreihe

$X=+(7)$; $X_1=-(26)$; $X_2=+(60)$;
$X_3=-(60)$; $X_4=+(24)$

also 4 Wechsel, mithin ist unterhalb -1 keine Wurzel mehr und beide angezeigten Wurzeln können nur zwischen 0 und -1 liegen.

Für $x=0{,}5$ ist die Zeichenreihe für X bis X_4

$$+\;;\;-\;;\;+\;;\;-\;;\;+$$
$$0{,}1875\;;\;3\;;\;33\;;\;24\;;\;24$$

Es liegen mithin die angezeigten Wurzeln zwischen 0 und $-0{,}5$.

Für $x=-\frac{1}{2}=-0{,}375$ ist die Reihe

$$+\,+\,+\,-\,+$$

die Wurzeln liegen also zwischen $-0{,}375$ und $-0{,}5$

Für $x=-4$ hat man $+\,+\,+\,-\,+$
für $x=-0{,}45$ $+\,-\,+\,-\,+$

Es liegt mithin zwischen $-0{,}4$ und $-0{,}45$ ein Werth von x, welcher X_1 zu Null macht während X positiv bleibt, und also sind die beiden angezeigten Wurzeln nicht vorhanden.

Für $x=10$ ist $X=+4682$; $X_1=+2328$
$x=5$ ist $X=+227$; $X_1=+112$
$x=2$ ist $X=+10$; $X_1=-8$
$x=1$ ist $X=+11$; $X_1=+6$

Für einen Werth von x zwischen 1 und 2 wird also $X_1=0$ und es existiren auch diese beiden Wurzeln nicht, woher die gegebene Gleichung keine reelle Wurzel hat.

14. Es ist die Gleichung gegeben:

$$X=x^4-4x^2-5x-1=0$$

hieraus

$$X_1=3x^2-8x-5$$
$$X_2=6x-8$$
$$X_3=6$$

Man findet:

für $x=$	X	X_1	X_2	X_3
10	+	+	+	+
	549	215	58	6
5	−	+	+	+
	1	30	22	6
0	−	−	−	+
	1	5	8	6
−1	−	+	−	+
	1	6	14	6

Für $x = 10$ sind nur Zeichenfolgen, für $x = -1$ nur Wechsel, daher existirt über $+10$ und unter -1 keine Wurzel. Eine Wurzel liegt zwischen 5 und 10, 2 Wurzeln (oder keine) zwischen 0 und -1.

Für $x = -0{,}5$ erhält man

$$+ \quad - \quad - \quad +$$
$$2{,}375 \quad 0{,}25 \quad 11 \quad 6$$

Es sind also 2 Wurzeln vorhanden, die eine zwischen 0 und $-0{,}5$ die zweite zwischen $-0{,}5$ und -1.

15. Die Gleichung

$X = x^5 + x - 1 = 0$

$X_1 = 5x^4 + 1$

$X_2 = 20x^3$

$X_3 = 60x^2$

$X_4 = 120x$

$X_5 = 120$

für $x =$	X	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
$+\infty$	+	+	+	+	+	+
$+1$	+	+	+	+	+	+
0	−	+	0	0	0	+
-1	−	+	−	+	−	+

Für $x = +1$ bestehen sämmtliche Folgen, bei $x = -1$ sämmtliche Wechsel, mithin liegen alle 5 Wurzeln der Gleichung zwischen $+1$ und -1.

Setzt man einen beliebig kleinen positiven Bruch α für x, so erhält man die Zeichenreihe

$$- + + + + +$$

und setzt man einen beliebig kleinen negativen Bruch $-\alpha$ für x, so entsteht

$$- + - + - +$$

Innerhalb der beliebig kleinen Differenz zwischen $+\alpha$ und $-\alpha$ gehen also 4 Zeichenwechsel, mit diesen 4 Wurzeln verloren und es existirt mithin nur die eine reelle Wurzel zwischen 0 und $+1$, die übrigen 4 sind unmögliche Gröfsen.

16. Es liegt oft sehr daran, eine irrationale Wurzel genau in möglichst vielen Decimalstellen zu erhalten, und man hat für die möglichst schnelle Berechnung derselben auch mancherlei Hülfsmittel. Bevor ich auf die Fourier'sche Methode komme, soll auf anderen Wegen die Wurzel zwischen 0 und 1 in Gleichung 15 berechnet werden.

Um dieser Wurzel sich durch Probiren schneller zu näheren, schreibe die Gleichung

$$x(x^4 + 1) = 1$$

Man erhält den links stehenden Ausdruck X

Für $x = 0{,}5 \quad X = 0{,}53125$

$x = 0{,}6 \quad X = 0{,}67776$

$x = 0{,}7 \quad X = 0{,}86807$

$x = 0{,}8 \quad X = 1{,}12768$

Die Wurzel liegt also zwischen 0,7 und 0,8.

Wendet man die Regula falsi an, so hat man

$$0{,}8 - 0{,}7 : x - 0{,}7 = 1{,}12768 - 0{,}86807 : 1 - 0{,}86807$$

woraus $x(x^4 + 1) = 0{,}92778$

die Regel wiederholt gibt

$$0{,}8 - 0{,}75 : x - 0{,}75 = 1{,}12768 - 0{,}92778 : 1 - 0{,}92778$$

woraus $x = 0{,}768$

und $x(x^4 + 1) = 1{,}03518$

wiederum

$$0{,}768 - 0{,}75 : x - 0{,}75 = 0{,}10740 : 0{,}07222$$

woraus $x = 0{,}7621$ und $x(x^4 + 1) = 1{,}01917$

Versucht man nun nahe Werthe, so erhält man

für $x = 0{,}76; \quad X = 1{,}0135$

$x = 0{,}755; \quad X = 1{,}00042$

$x = 0{,}752; \quad X = 0{,}99248$

$x = 0{,}753; \quad X = 0{,}99508$

$x = 0{,}754; \quad X = 0{,}99770$

$x = 0{,}8545; \quad X = 0{,}99900$

$x = 0{,}75495; \quad X = 1{,}000194$

$x = 0{,}7549; \quad X = 1{,}000058$

$x = 0{,}75481; \quad X = 0{,}999822$

u. s. w. Es sind bis jetzt erst die 4 ersten Decimalen richtig gefunden.

17. Um nach Fouriers Methode eine zwischen 2 Intervallen liegende Wurzel zu finden mufs diese allein und von allen übrigen Wurzeln gesondert in dem Intervall sich befinden.

In dem Beispiel No. 12 hat man

für $x =$	X	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
0	+	+	−	+	−	+
10	−	−	−	+	+	+

Der erste Werth von x liefert 4, der zweite nur einen Zeichenwechsel, in dem Intervall $0 + 10$ befinden sich also 3 Wurzeln und es mufs dasselbe durch Zwischenwerthe von x so eingeschränkt werden, dafs der Unterschied beider Reihen nur in einem Zeichenwechsel bestehe.

In demselben Beispiel hat man

für $x =$	X	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
10	−	−	−	+	+	+
100	+	+	+	+	+	+

Es ist also bei dem einen Zeichenwechsel nur eine reelle Wurzel zwischen 10 und 100, dagegen kann das Intervall noch nicht zur Anwendung kommen, weil in demselben X_1 und X_2 ebenfalls Wurzeln haben, welche nicht sein dürfen und durch Einschränkung des Intervalls fortgeschafft werden müssen.

Man erhält nun

für $x=$	X	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
40	+	+	+	+	+	+
20	−	+	+	+	+	+

und dieses Intervall ist mithin für die Anwendung der Methode geeignet.

18. Es ist also erforderlich, daſs die Zeichen der X entgegengesetzt sind und daſs die der Differenziale einzeln mit einander übereinstimmen. Ferner ist zur Auffindung der Wurzel nur das erste Differenzial zu beachten. Bezeichnet man im Intervall den höheren Werth von x mit b, den niederen mit a, so sind in Beziehung auf die Zeichen für das Intervall $b-a$ folgende 4 Fälle möglich

$x=$	X	X_1
a	−	+
b	+	+

$x=$	X	X_1
a	+	−
b	−	−

$x=$	X	X_1
a	−	−
b	+	−

$x=$	X	X_1
a	+	+
b	−	+

Die Werthe von X; X_1 sind für $x=b$ und $x=a$ bekannt; die Wurzel liegt zwischen a und b und man bestimmt die Gröſsen α und β so, daſs $a+\alpha=b-\beta$ die Wurzel gibt. Es ist dann

$$X=f(a+\alpha)=f(b-\beta)=0 \qquad (1)$$

Nun ist nach der Taylor'schen Reihe

$$f(a+\alpha)=fa+\alpha f'a+\frac{\alpha^2}{2}f''a+\ldots.$$

$$f(b-\beta)=fb-\beta f'b+\frac{\beta^2}{2}f''b-\ldots.$$

Für ein kleines Intervall $b-a$ sind α und β ebenfalls nur klein und dann sind $\alpha f'a$ und $\beta f'b$ mit den Zeichen vorherrschend; bezeichnet demnach μ einen positiven ächten Bruch, so kann man setzen

$$f(a+\alpha)=fa+\alpha f'(a+\mu\alpha)=0 \qquad (2)$$

$$f(b-\beta)=fb-\beta f'(b-\mu\beta)=0 \qquad (3)$$

wo μ in beiden Formeln verschiedene Werthe hat.

Es ist hieraus

$$\alpha=\frac{-fa}{f'(a+\mu\alpha)} \qquad (4)$$

$$\beta=\frac{fb}{f'(b-\mu\beta)}$$

Für den Fall I. ist $X_1=f'x$ po da mithin die Werthe von X von bis $x=b$ fortdauernd wachsen, so is

$$f'b>f'(b-\mu\beta)$$
$$>f'(a+\mu\alpha)$$

Diese Vergleichung mit 4 und 5 bunden gibt

$$\alpha>\frac{-fa}{f'b}$$

$$\beta>\frac{fb}{f'b}$$

Berechnet man also $\frac{-f'a}{f'b}$, addirt die a, so erhält man einen Werth von x, kleiner ist als die Wurzel $a+\alpha$, un rechnet man $\frac{fb}{f'b}$, zieht diesen von so erhält man einen Werth von x, gröſser ist als die Wurzel $b-\beta$; m erhält man die beiden neuen W $a+\frac{-f'a}{f'b}$ und $b-\frac{fb}{f'b}$ welche ein näher liegen als a und b und welch Grenzen die Wurzel einschlieſsen.

Für den Fall II. hat man dieselben gleichungen wie I. Nur ist zu beac daſs α und β positive Gröſsen sind daſs man also für fa, fb und $f'b$ d absolute Werthe einsetzen muſs

also $\alpha>\frac{fa}{f'b}$

$$\beta>\frac{fb}{f'b}$$

und $a+\frac{fa}{f'b}$ und $b-\frac{fb}{f'b}$ geben nähere Wurzel einschlieſsende Grenzen.

Z. B. $X=-x^3+x^2$

$X_1=-3x^2+2x$

für x	X	X'
$a=-2$	+12	−16
$b=+2$	− 4	− 8

Man hat nun zu neuen Grenzen

$$a+\frac{fa}{f'b}=-2+\frac{12}{8}=-\tfrac{1}{2}$$

$$b-\frac{fb}{f'b}=+2-\frac{4}{8}=+1\tfrac{1}{2}$$

Nun ist eine Wurzel $=+1$ m $\alpha=x-a=1-(-2)=+3$ und $\beta=$ $=2-1=+1$.

Es ist also

$$\frac{fa}{f'b}=1\tfrac{1}{2}<\alpha;\quad \frac{fb}{f'b}=\tfrac{1}{2}<\beta$$

Für den Fall III. hat man dieselben Rücksichten wie für den vorigen Fall.

Beispiel. $X = x^4 - 10x^2 + 3$

$X_1 = 4x^3 - 20x$

für x	X	X_1
$a = -3$	-6	-48
$b = +\frac{1}{2}$	$+\frac{9}{16}$	$-\frac{19}{2}$

Man erhält die engeren Grenzen

$$a + \frac{fa}{f'b} = -3 + \frac{6}{\frac{1}{2} \cdot 19} = -2\frac{7}{19}$$

$$b - \frac{fb}{f'b} = +\frac{1}{2} - \frac{9}{16} : \frac{19}{2} = +\frac{67}{152}$$

(Die Wurzel liegt zwischen -1 und $-\frac{1}{2}$).

Dieselbe Bewandniſs hat es mit Fall IV.

19. Es soll nun das Beispiel No. 15 zu Prüfung der Fourier'schen Methode benutzt werden.

Es ist $X = x^5 + x - 1$

$X_1 = 5x^4 + 1$

Bekannt ist, daſs die Wurzel zwischen 0,7 und 0,8 liegt.

Es ist also $a = 0{,}7$

$b = 0{,}8$

das Intervall ist $0{,}8 - 0{,}7 = 0{,}1$

Es ist nun $fa = -0{,}13193$

$fb = +0{,}12768$

$f'b = +3{,}048$

also $a + \frac{-fa}{f'b} = 0{,}7 + \frac{0{,}13193}{3{,}048} = 0{,}743$

und $b - \frac{fb}{f'b} = 0{,}8 - \frac{0{,}12768}{3{,}048} = 0{,}758$

Das Intervall ist jetzt 0,015

Nun ist $fa = f0{,}743 = -0{,}03056$

$fb = f0{,}758 = +0{,}00823$

$f'b = f'0{,}758 = +2{,}6506$

mithin von neuem

$$a + \frac{-fa}{f'b} = 0{,}743 + \frac{0{,}03056}{2{,}6506} = 0{,}7545$$

$$b - \frac{fb}{f'b} = 0{,}758 - \frac{0{,}00823}{2{,}6506} = 0{,}7549$$

Die 3 ersten Decimalen sind also richtig.

Nun ist $fa = f0{,}7545 = -0{,}00099$

$fb = f0{,}7549 = +0{,}00006$.

$f'b = f'0{,}7549 = +2{,}62375$

und

$$a + \frac{-fa}{f'b} = 0{,}7545 + \frac{0{,}00099}{2{,}62375} = 0{,}754877$$

$$b - \frac{fb}{f'b} = 0{,}7549 - \frac{0{,}00006}{2{,}62375} = 0{,}754878$$

Bis hierher reichen nur die Logarithmen aus, und man ersieht, daſs das Fourier'sche Verfahren weniger mühsam und zugleich sicherer ist als das vorher beispielsweise ausgeführte Probiren. Sollen noch mehrere Decimalen zugefügt werden, so werden die directen fünffachen Potenzirungen langwierig und man verfährt am zweckmäſsigsten mit Anwendung des Taylor'schen Satzes, wenn man die Werthe der Function für einen zunächst kleineren oder gröſseren Werth von x vorher genau bestimmt hat.

Die Taylor'sche Reihe ist:

$$f(x \pm z) = fx \pm z f'x + \frac{z^2}{2} f''x \pm \ldots\ldots$$

Es ist die Bestimmung der Function und der Differenzialen bei x auf obige 6 Decimalen nicht so schwierig wenn man die 1 bis 9fachen der Zahl tabellarisch unter einander stellt, so daſs man diese bei der Multiplication nur abzuschreiben hat.

Nämlich $a = 754877$

$2a = 1509754$

$3a = 2264631$

$4a = 3019508$

$5a = 3774385$

$6a = 4529262$

$7a = 5284139$

$8a = 6039016$

$9a = 6793893$

$10a = 7548770$

Man erhält zunächst

$a = 0{,}754877$

$a^2 = 0{,}56983\ 92851\ 29$

$a^3 = 0{,}43015\ 85700\ 40324\ 133$

$a^4 = 0{,}32471\ 68108\ 76329\ 76054\ 6641$

$a^5 = 0{,}24512\ 12520\ 43891\ 18065\ 21667\ 18157$

Hieraus ist

$fa = a^5 + a - 1 = -0{,}00000\ 17479\ 56108\ 81934 \ldots\ldots$

$f'a = 5a^4 + 1 = +2{,}62358\ 40543\ 81648\ 80273\ 3205$

$f''a = 20a^3 = 8{,}60317\ 14008\ 11402\ 66$

$f'''a = 60a^2 = 34{,}19035\ 71077\ 4$

$f^{IV}a = 120a = 90{,}58524$

$f^{V}a = 120$

Setzt man nun das Mittel der Differenz zwischen a und $b = +z = 0{,}0000005$

So hat man

$f(a+z) = f0{,}7548775$
$= fa = -0{,}00000\ 17479\ 56108\ 81934....$
$z \cdot f'a = +\ 13117\ 92027\ 19082....$
$\frac{z^2}{3} f''a = +\ 0{,}1075\ 39642....$
$\frac{z^2}{6} f'''a = +\ 71....$

$f(a+z) = -0{,}00000\ 04361\ 63006\ 23139$

Man kann sich nun mit weniger Mühe der Wurzel schnell nähern, wenn man erwägt, dafs den meisten Einfluſs das Glied $z \cdot f'a$ hat.

Es ist $f'a = 2{,}62358\ 40543.....$
die Grenze ist $fa = -0{,}00000\ 17479.....$
dividirt man daher 17479 .... durch 2,623584 ....
so erhält man sehr nahe z in den geltenden Decimalen = 6662 und $f(a+z)$ $= 0{,}7548776662$

Dieser Werth probirt gibt

$z \cdot f'a = 0{,}00000\ 17478\ 31686\ 36304$
$\frac{z^2}{2} f''a = \quad 1909\ 14026$

$+0{,}00000\ 17478\ 33595\ 50630$
$fa = -0{,}00000\ 17479\ 56108\ 81934$

$f0{,}7548776662 =$
$-0{,}00000\ 00001\ 22513\ 31304$

Für $x = 0{,}7548776663$
entsteht X positiv, die ersten 10 Decimalstellen sind also richtig und man kann das Verfahren für beliebig mehrere Decimalen wiederholen.

20. Das letzte abgekürzte Verfahren mit Hülfe der Taylorschen Reihe ist so recht geeignet zu erkennen, dafs Fourier seine Lehre aus der Taylorschen Reihe entnommen hat. Denn man dividirt fa durch $f'a$, man erhält also, wenn man die Division vollständig ausführt, den Werth von z zu grofs; sowie man den Werth von z durch $\frac{fb}{f'b}$ zu klein also beide Werthe $(a+z)$ und $(b-z)$ für x zu grofs erhält. Wendet man, unbekümmert um Fouriers Satz gleich von vorn herein die Taylor'sche Reihe an, so habe man durch Probiren vorläufig gefunden: (s. No. 19)

$f7 = -0{,}13193$
$f8 = +0{,}12768$

so erhält man

$f'7 = 2{,}2005$
$f'8 = 3{,}048$

Nun ist $\frac{f7}{f'7} = 0{,}05995$; also $x = 0{,}75995$

$\frac{f8}{f'8} = 0{,}04189$; also $x = 0{,}75811$

Da nun $z = \frac{fb}{f'b}$ zwar immer ein zu grofses, aber bei Wiederholung ein immer kleiner werdendes x liefert, so ist die Anwendung der Reihe für $f(b-z)$ vorzuziehen, wenn man sich von einer Seite nur der Wurzel nähern will.

Aus No. 19 ersieht man

$$x = 0{,}758 - \frac{f0{,}758}{f'0{,}758} = 0{,}7549$$

$$x = 0{,}7549 - \frac{f0{,}7549}{f'0{,}7549} = 0{,}754878$$

und x schon auf 5 Decimalstellen richtig.

Fourier hat also verstanden, aus der Taylor'schen Reihe, welche von selbst eine Grenze für die Wurzel gibt, noch kleinere Grenzen zu entwickeln.

Frageglied oder **Fragezahl** ist beim bürgerlichen Rechnen die Zahl, über welche eine Frage geschieht; die übrigen Zahlen oder Glieder heifsen Bedingungsglieder. In der Regel de trie wird das 3te Glied zum Frageglied genommen, z. B.

Wenn 4 Pfund einer Waare 3 Thlr. kosten, was kosten 7 Pfund davon? Hier ist 7 Pfund das Frageglied weil über dessen Preis gefragt wird.

Die Regel quinque hat 2, die Regel septem hat 3 Fragezahlen u. s. w. Z. B. Wie viel Zinsen geben 350 Thlr. in 8 Monaten zu 5 pro cent pro anno; wird angesetzt:

100 Thaler (in 12 Monat) geben 5 Thlr. (350 Thaler? was geben in 8 Monaten?)

wo 350 Thaler und 8 Monat die Fragezahlen sind.

Die Gesellschaftsrechnung hat so viel Fragegleder als Theilnehmer zur Gesellschaft gehören: z. B. 5 Personen spielen gemeinschaftlich ein Lotterieloos, welches 50 Thlr. kostet: A gibt dazu 1 Thlr., B gibt 2 Thlr., C gibt 5 Thlr., D gibt 10 Thlr., E gibt 12 Thlr. und F gibt 20 Thlr. Sie gewinnen 5000 Thlr. wie viel bekommt jeder? der Ansatz ist

50 Thlr. gewinnt 5000 Thlr.
wie viel gewinnt .....
1 Thlr.?
2 Thlr.?
5 Thlr.?
10 Thlr.?
12 Thlr.?
20 Thlr.?

Die Kettenrechnung hat nur ein Frageglied. Z. B. Wie viel an preufsischem Courant sind 300 oldenburger Pi-

stolen, wenn 35½ Stück derselben auf 1 Mark bei 21½ Karat fein kommen, wenn 35 preufsische Friedrichsd'or auf 1 Mark bei 21 Karat 8 Grän fein kommen und wenn 1 preufsischer Friedrichsd'or 5 Thlr. 20 gr. Courant gilt? der Ansatz ist

Wie viel preufs.
Thaler sind = 300 oldenb. Pistl.?
wenn 35½ Pistolen = 21½ Karat
wenn 21½ Karat = 35 Friedrichsd'or
wenn 1 Frd'or = 5⅞ preufs. Thaler

Frühling ist in der von uns bewohnten nördlichen Erdhalbkugel die Jahreszeit von dem Augenblick des scheinbaren Eintritts der Sonne (mit ihrem Mittelpunkt) in den Frühlingspunkt bis zu dem Augenblick des scheinbaren Eintritts der Sonne in den Sommerpunkt der Ekliptik. Also die Jahreszeit von dem wirklichen Eintritt der Erde in den Herbstpunkt bis zu dem wirklichen Eintritt derselben in den Winterpunkt der Ekliptik (vergl. astronomische Jahreszeiten, Ekliptik, Erde, Aequator der Erde).

Frühlingsnachtgleiche, s. u. Aequator der Erde, Ekliptik.

Frühlingspunkt, Punkt der Frühlingsnachtgleiche, Widderpunkt, Widder-Nullpunkt ist einer der beiden Punkte (*F*, *H*, Fig. 34, pag. 33, Bd. I.) in der Ekliptik *FSHW*, in welchen diese mit der durch die Sonne gelegten dem Erdaequator parallelen Ebene sich schneidet. Beide Punkte *F*, *H* sind zugleich die Aequinoctialpunkte der Ekliptik, weil wenn die Erde in diesen Punkten sich befindet, innerhalb 24 Stunden auf jedem Punkt der Erdoberfläche Tag und Nacht gleich also 12 Stunden lang ist, wie auch Fig. 34 in I. und III. darstellt.

Die Astronomen des Alterthums wufsten nicht, dafs die Sonne in dem Brennpunkt innerhalb der Ekliptik steht, und dafs die Erde es ist, welche in der Ekliptik um dieselbe sich herumbewegt. Befand sich also die Erde in *H*, so glaubten sie die Sonne stehe in *F*, und da von nun ab die wärmeren Tage begannen, so nannten sie den Punkt *F*, den in welchen ihrer Wahrnehmung nach die Sonne tritt, wann der Frühling beginnt, den Frühlingspunkt.

Seitdem die von Copernicus entdeckte und von den späteren Astronomen bestätigte Umdrehung der Erde und der Stillstand der Sonne in mitten der Erdbahn bekannt geworden, ist nun eigentlich *H* Frühlingspunkt und *F* Herbstpunkt, so wie *W* der Sommerpunkt und *S* der Winterpunkt, weil die Erde beim Beginn des Frühlings in *H*, beim Beginn des Herbstes in *F*, beim Beginn des Sommers in *W* und beim Beginn des Winters in *S* steht; allein die neueren Astronomen haben aus Pietät gegen die Gelehrten des Alterthums die Punkte und deren Namen der Ueberlieferung nach beibehalten und erklären: Frühlingspunkt ist derjenige Punkt der Ekliptik, in welchen die Sonne zu treten scheint wann der Frühling beginnt. Und in derselben Weise werden die anderen 3 Hauptpunkte der Ekliptik erklärt.

Die 4 Hauptpunkte der Ekliptik, oder vielmehr die beiden Nachtgleichenpunkte *F* und *H* sind nicht constant, sie rücken jährlich um 50,1 bis 50,24 Secunden von links nach rechts, oder der Zeichenfolge entgegen (s. Folge der Zeichen), indem die Weltaxe (die der Erdaxe parallele Axe) um die feste Axe der Ekliptik diesen Bogen jährlich beschreibt, womit die Punkte *F* und *H* des Aequators den Punkten *W* und *S* der Ekliptik sich nähern, eine Bewegung, die seit der chaldäisch astronomischen Zeit schon über 30 Grade betragen hat.

Da die in dieser uralten Zeit bekannten Planeten in ihren Bahnen nur um 9° bis 10° von der Ekliptik abwichen, so zogen die damaligen Astronomen 2 in Entfernung 10° von der Ekliptik belegene mit dieser parallele Kreise, bildeten somit eine 20° breite Zone, vereinigten von 30° zu 30° Länge die Sterne zu 12 Sternbildern, gestalteten dieselben zu Thieren, gaben ihnen Thiernamen und nannten sie die 12 Himmelszeichen, so wie die Zone in denen sie sich befanden, den Thierkreis, und bestimmten vermittelst der Zeichen die Standpunkte der Planeten und anderer Gestirne (s. Folge der Zeichen). In den Frühlingspunkt wurde der Widder gesetzt, woher der Name Widderpunkt, und da dieser Punkt zugleich Anfangspunkt (Nullpunkt) für alle Längenbestimmungen war und noch jetzt es ist, so wird der Frühlingspunkt noch heut Widderpunkt, Widder-Nullpunkt genannt, wenngleich dieses Sternbild über 30° vorwärts steht und der Frühlingspunkt in dem Sternbild „Fische" sich befindet.

Gestirne, die in *F* sich befinden, haben weder Länge, noch Breite, noch Abweichung, noch gerade Aufsteigung. Daher bestimmt man auch diesen so wichtigen Punkt alljährlich (um den 21ten März) durch Beobachtung der Sonne und es ist derjenige Punkt der Frühlingspunkt, in welchem die Sonne in dem Augenblick

steht in welchem sie sich ohne Abweichung ergiebt.

Füllung eines Gefäfses, einer Schleusenkammer mit Wasser, eines leeren Raums mit Luft unter gegebenen Bedingungen, s. Inhaltsverzeichnifs und Sachregister des 1ten Bandes, pag. 450.

Fünfeck ist eine ebene von 5 geraden Linien (Seiten) begrenzte Figur. Aus jeder Ecke sind 2 Diagonalen möglich, die das Fünfeck in 3 Dreiecke zerlegen. Der Winkel, von dessen Ecke (c) aus die Diagonalen gezogen werden wird in 3 Theile, jeder der beiden Winkel nach deren Ecken (A, E) hin sie gezogen werden, in 2 Theile getheilt, die beiden anderen Umfangswinkel (B, D) bleiben ungetheilt. Die 5 Umfangswinkel des Fünfecks sind also in Summa die Umfangswinkel von 3 Dreiecken und da in jedem Dreieck die 3 Umfangswinkel zusammen = 2 rechten Winkeln sind, so ist die Summe der Umfangswinkel jedes Fünfecks = 6 Rechten. Daher können in einem Fünfeck höchstens 2 convexe Winkel statt finden (s. Fig. 650 und 651).

Jedes Dreieck erfordert zu seiner Verzeichnung 3 Bestimmungsstücke, die 3 Dreiecke also, in welche das Fünfeck zerlegt wird, erfordern zusammen 9 Bestimmungsstücke. Ist aber das mittlere Dreieck (CAE) bestimmt, so hat dieses Dreieck für jedes der beiden anliegenden Dreiecke in der Diagonale schon ein Bestimmungsstück, folglich bedarf jedes der beiden Seitendreiecke nur noch 2 Bestimmungsstücke, das Fünfeck im Ganzen also $3 + 2 \times 2 = 7$ Bestimmungsstücke.

2. Bezeichnet man den Winkel, den die Seite $AB = a$ mit der Seite $AE = e$ macht mit ae, den Winkel zwischen $BC = b$ und e mit be, den $\angle$ zwischen $CD =$ und e mit ce, den Winkel zwischen $D = d$ und e mit de jedoch so verstande dafs man immer einerlei Richtung d Seiten gegen die feste Seite $AE = e$ beobachten hat.

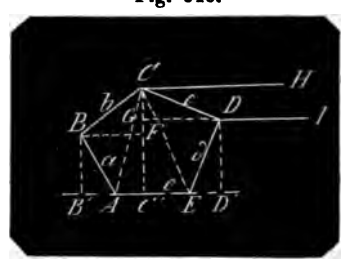
Nimmt man für die Seite a die Ric tung BA, also der spätere Buchsta voran, so ist die analoge Richtung v $b = CB$, die von $c = DC$ von $d = E$ Beide letzte Richtungen treffen die Se e nicht und damit dies geschehe w Winkel gebildet werden müssen. so de man sich in C und D Parallelen C DJ mit e.

Ist nun für die Ecke A der $\angle BAE =$ so ist $\angle CBF = be$, der links liegen erhabene $\angle DCH = ce$ und der links gende erhabene $\angle EDJ = de$. In dies Sinne genommen ist

$$e = a\cos ae + b\cos be + c\cos ce + d\cos de$$

denn fällt man auf die verlängerte die Lothe BB', CC', DD' und zieht mit e Parallelen BF und DG bis in Normale CE so ist

Fig. 646.



$$a\cos ae = a\cos BAE = -AB'$$
$$b\cos be = b\cos CBF = +BF$$
$$c\cos ce = c\cdot\cos(\text{convex}\angle DCH) = c\cdot\cos(\text{concav}\angle DCH) = \cos CDG = +DG$$
$$d\cos de = d\cdot\cos(\text{convex}\angle EDJ) = d\cdot\cos(\text{concav}\angle EDJ) = \cos DEA = -ED'$$

Mithin

$$a\cos ae + b\cos be + c\cos ce + + d\cos de = -AB' + BF + DG - ED' = AE = e$$

3. Bezeichnet man die Umfangswinkel mit deren Eckpunkten A, B, C, D, E so hat man

$$\angle ae = A;\ \cos ae = \cos A$$

ferner ist $\angle FBA + \angle BAE = 2R$

oder $\angle B - \angle be + \angle A = 2R$

hieraus $\angle be = A + B - 2R$

und $\cos be = \cos(A + B - 2R)$

$$= -\cos(A + B)$$

Noch ist $\angle CBF + \angle C + \angle CDG = 2R$

oder $\angle be + \angle C - \angle ce = 2R$

oder $A + B - 2R + C - \angle ce = 2R$

woraus $\angle ce = (A + B + C) - 4F$

und $\cos ce = \cos[(A + B + C) - 4R]$

$$= +\cos(A + B + C)$$

endlich ist $\angle de = -E = (A+B+C+D) - 6$

folglich $\cos de = -\cos(A + B + C + D)$

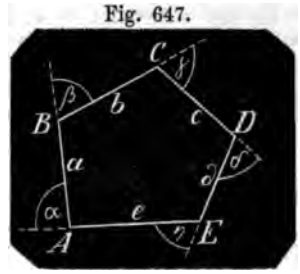
Man hat daher auch

$$e = a\cos A - b\cos(A+B) + c\cos(A+B+C$$
$$- d\cos(A + B + C + D)$$

4. Bezeichnet man nach Fig. 647 die nach einerlei Richtung genommenen Außenwinkel der Umfangswinkel mit α, β, γ, δ, η so ist

$$A = 2R - \alpha$$
$$B = 2R - \beta$$
$$C = 2R - \gamma$$
$$D = 2R - \delta$$
$$E = 2R - \eta$$

Fig. 647.



Man hat demnach nach Formel 2:

$$e = a\cos(2R - \alpha) - b\cos[4R - (\alpha + \beta)] + c\cos[6R - (\alpha + \beta + \gamma)] - d\cos[8R - (\alpha + \beta + \gamma + \delta)]$$

oder reducirt

$$e = -a\cos\alpha - b\cos(\alpha + \beta) - c\cos(\alpha + \beta + \gamma) - d\cos(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$$

oder

$$-e = a\cos\alpha + b\cos(\alpha + \beta) + c\cos(\alpha + \beta + \gamma) + d\cos(\alpha + \beta + \gamma + \delta) \quad (3)$$

Beispiel.

Es sei $A = 110°$, also $ae = 110°$ und $\alpha = 70°$
$B = 120°$, also $be = 50°$ und $\beta = 60°$
$C = 100°$, also $ce = -30°$ und $\gamma = 80°$
$D = 80°$, also $de = -130°$ und $\delta = 100°$
$E = 130°$, also $ee = -180°$ und $\eta = 50°$

Nach Formel 1 ist $e = a\cos 110° + b\cos 50° + c\cos(-30°) + d\cos(-130°)$
Nach Formel 2 ist $e = a\cos 110° - b\cos 230° + c\cos 330° - d\cos 410°$
Nach Formel 3 ist $-e = a\cos 70° + b\cos 130° + c\cos 210° + d\cos 310°$

Reducirt man auf Winkel unter 90° so erhält man aus allen 3 Formeln

$$e = -a\cos 70° + b\cos 50° + c\cos 30° - d\cos 50°$$

5. Es ist in jedem Fünfeck:

$$a\cdot\sin ae + b\cdot\sin be + c\cdot\sin ce + d\cdot\sin de = 0 \quad (4)$$

denn nach Fig. 646 und No. 2 hat man

$a\cdot\sin ae = a\cdot\sin BAE = BB'$
$b\cdot\sin be = b\cdot\sin CBF = CF$
$c\cdot\sin ce = c\cdot\sin(-CDG) = -c\cdot\sin CDG = -CG$
$d\cdot\sin de = d\cdot\sin(-DEA) = -d\cdot\sin DEA = -DD'$

Mithin $a\sin ae + b\sin be + c\sin ce + d\sin de = BB' + CF - CG - DD' = 0$

6. Um diese Formel durch die Umfangswinkel A, B, C, D auszudrücken hat man nach No. 3

$$a\sin A + b\sin(A + B - 2R) + c\sin(A + B + C - 4R) + d\sin(A + B + C + D - 6R) = 0$$

und reducirt

$$a\sin A - b\sin(A + B) + c\sin(A + B + C) - d\sin(A + B + C + D) = 0 \quad (5)$$

7. Um diese Formel durch die Außenwinkel α, β, γ, δ auszudrücken hat man nach No. 4

$$a\sin(2R - \alpha) - b\sin[4R - (\alpha + \beta)] + c\sin[6R - (\alpha + \beta + \gamma)] - d\sin[8R - (\alpha + \beta + \gamma + \delta)] = 0$$

und reducirt

$$a\sin\alpha + b\sin(\alpha + \beta) + c\sin(\alpha + \beta + \gamma) + d\sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 0 \quad (6)$$

Nach dem Beispiel No 4 hat man

aus Formel 4 $a\sin 110° + b\sin 50° + c\sin(-30°) + d\sin(-130°)$
aus Formel 5 $a\sin 110° - b\sin 230° + c\sin 330° - d\sin 410°$
aus Formel 6 $a\sin 70° + b\sin 130° + c\sin 210° + d\sin 310°$

Die Winkel auf den 1 Quadrant reducirt gibt übereinstimmend

$$a\sin 70° + b\sin 50° - c\sin 30° - d\sin 50°$$

Aus den vorstehenden 2 Formeln (1 bis 3) und (4 bis 5) lassen sich nun Formeln finden, aus welchen man bei gegebenen 7 Bestimmungsstücken die fehlenden 3 Stücke finden kann.

8. Es sind 4 Seiten a, b, c, d und die 3 von ihnen gebildeten Winkel l D oder β, γ, δ oder die Winkel ab, ac, ad, bc, bd und cd. So sind zu finde Seite e und die Winkel A und E.

Wenn man die Gleichung 1 mit e multiplicirt, so erhält man

1. $e^2 = ae\cos ae + be\cos be + ce\cos ce + de\cos de$

Eben so erhält man für die 4 anderen Seiten

$$a^2 = ab\cos ab + ac\cos ac + ad\cos ad + ae\cos ae$$
$$b^2 = ab\cos ab + bc\cos bc + bd\cos bd + be\cos be$$
$$c^2 = ac\cos ac + bc\cos bc + cd\cos cd + ce\cos ce$$
$$d^2 = ad\cos ad + bd\cos bd + cd\cos cd + de\cos de$$

Zieht man von der ersten Gleichung die folgenden 4 Gleichungen a erhält man

$$e^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 = -2[ab\cos ab + ac\cos ac + ad\cos ad + bc\cos bc + bd\cos bd + cd\cos$$

woraus

$$e^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2[ab\cos ab + ac\cos ac + ad\cos ad + bc\cos bc + bd\cos bd + cd\cos c$$

Schreibt man aus No. 3 die Werthe dieser Winkel in Umfangswinkel a drückt, so erhält man:

$$e^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2[ab\cos B + ac\cos(B+C-2R) + ad\cos(B+C+D-4R) + bc\cos$$
$$+ bd\cos(C+D-2R) + cd\cos$$

und reducirt

$$e^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2[ab\cos B - ac\cos(B+C) + ad\cos(B+C+D) + bc\cos C$$
$$- bd\cos(C+D) + cd\cos D]$$

Schreibt man aus No. 4 für die Umfangswinkel deren Aufsenwinkel, so erhält

$$e^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2[ab\cos(2R-\beta) - ac\cos(4R-\beta-\gamma) + ad\cos(6R-\beta-\gamma-\delta)$$
$$+ bc\cos(2R-\gamma) - bd\cos(4R-\gamma-\delta) + cd\cos(2R$$

und reducirt

$$e^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab\cos\beta + 2ac\cos(\beta+\gamma) + 2ad\cos(\beta+\gamma+\delta) + 2bc\cos\gamma$$
$$+ 2bd\cos(\gamma+\delta) + 2cd\cos\delta$$

9. Nun findet man eine Formel für $\cos ae$ oder $\cos A$ oder $\cos\alpha$ aus den meln 1, 2, 3 wenn man mit der Seite a statt mit e anfängt.

Aus No. 2 Formel 1 erhält man

$$a = b\cos ba + c\cos ca + d\cos da + e\cos ea$$

Nun ist $ea = 540^\circ - ae$

also $\cos ea = \cos(bR - ae) = -\cos ae$

Mithin hat man

$$\left.\begin{aligned}\cos ae &= \frac{1}{e}[-a + b\cos ba + c\cos ca + d\cos da]\\ &= \frac{1}{e}[+a - (b\cos ba + c\cos ca + d\cos da)]\end{aligned}\right\}$$

Aus No. 3 Formel 2 hat man

$$a = b\cos B - c\cos(B+C) + d\cos(B+C+D) - e\cos(B+C+D+E)$$

Hier ist wieder $B + C + D + E = 540^\circ - A$

folglich $$-e\cos(B+C+D+E) = e\cos A$$

hieraus $$\cos A = \frac{1}{e}[a - b\cos B + c\cos(B+C) - d\cos(B+C+D)]$$

Aus No. 4 Formel 3 erhält man

$$-a = b\cos\beta + c\cos(\beta+\gamma) + d\cos(\beta+\gamma+\delta) + e\cos(\beta+\gamma+\delta+\eta)$$

Nun ist $\beta + \gamma + \delta + \eta = 4R - \alpha$

also $\cos(\beta+\gamma+\delta+\eta) = +\cos\alpha$

daher $$-\cos\alpha = \frac{1}{e}[a + b\cos\beta + c\cos(\beta+\gamma) + d\cos(\beta+\gamma+\delta)]$$

10. Man findet eine Formel für den Sinus der um die Ecke A liegenden kel, wenn man die Formel 4, 5, 6 mit der Seite b anfängt:

Aus No. 5, Formel 4 hat man

$$b\sin ba + c\sin ca + d\sin da + e\sin ea = 0$$

Nun ist $\sin ea = -\sin ae$

hieraus $$\sin ae = \frac{1}{e}(b \sin ba + c \sin ca + d \sin da) \quad (13)$$

Aus No. 6, Formel 5 hat man

$$b \sin B - c \sin (B+C) + d \sin (B+C+D) - e \sin (B+C+D+E) = 0$$

Nun ist $\sin (B+C+D+E) = \sin A$

folglich $$\sin A = \frac{1}{e}[b \sin B - c \sin (B+C) + d \sin (B+C+D)] \quad (14)$$

Aus No. 7, Formel 6 hat man

$$b \sin \beta + c \sin (\beta+\gamma) + d \sin (\beta+\gamma+\delta) + e \sin (\beta+\gamma+\delta+\eta) = 0$$

Nun ist $\sin (\beta+\gamma+\delta+\eta) = -\sin \alpha$

hieraus $$\sin \alpha = \frac{1}{e}[b \sin \beta + c \sin (\beta+\gamma) + d \sin (\beta+\gamma+\delta)] \quad (15)$$

11. Verbindet man die Formeln 10 bis 12 mit den Formeln 13 bis 15 so erhält man 3 Formeln für Tangente ae, A und α, und zwar unabhängig von der Seite e, nämlich:

$$tg\, ae = \frac{b \sin ba + c \sin ca + d \sin da}{a - (b \cos ba + c \cos ca + d \cos da)} \quad (16)$$

$$tg\, A = \frac{b \sin B - c \sin (B+C) + d \sin (B+C+D)}{a - b \cos B + c \cos (B+C) - d \cos (B+C+D)} \quad (17)$$

$$tg\, \alpha = \frac{b \sin \beta + c \sin (\beta+\gamma) + d \sin (\beta+\gamma+\delta)}{a + b \cos \beta + c \cos (\beta+\gamma) + d \cos (\beta+\gamma+\delta)} \quad (18)$$

12. Den Inhalt des Fünfecks findet man folgender Art:

Es ist (Fig. 646)

$\Delta CBA = \frac{1}{2} b \cdot a \sin ba$

$\Delta CAE = \frac{1}{2} e \cdot CE' = \frac{1}{2} e \cdot [b \sin be + a \sin ae]$
$= \frac{1}{2} be \sin be + \frac{1}{2} ae \sin ae$

und $\Delta CED = \frac{1}{2} cd \sin cd$

also $$J = \tfrac{1}{2}(ab \sin ab + be \sin be + ae \sin ae + cd \sin cd) \quad (19)$$

Man sieht dafs dies keine Formel ist, deren Gesetz man wie die früheren übersehen kann.

Formel 4 zu Hülfe genommen, nämlich

$$a \sin ae + b \sin be + c \sin ce + d \sin de = 0$$

gibt, wenn man mit dem in Buchstaben nur einmal vorhandenen letzten Gliede $cd \sin cd$, oder den Factor c als gegeben fortgelassen, mit $d \sin cd$ beginnt, so hat man Formel 4 gemäfs $d \sin dc$ zu schreiben und über e, a, b weiter fortzugehen, es ist also

$$d \sin dc + e \sin ec + a \sin ac + b \sin bc = 0$$

und $$d \sin dc = -e \sin ec - a \sin ac - b \sin bc$$

Diesen Werth von $d \sin dc$ in den Ausdruck für J gesetzt gibt

$$J = \tfrac{1}{2}[ab \sin ab + be \sin be + ae \sin ae - ce \sin ec - ca \sin ac - cb \sin bc]$$

In diesem Ausdruck sind die Winkel nicht nach einerlei Richtung bezeichnet. Nimmt man e als die erste Seite, also die Winkel in der Ordnung ae, be, ce, ba, ca, cb so hat man

$$-ce \sin ec = +ce \sin ce$$
$$-ca \sin ac = +ca \sin ca$$
$$-cb \sin bc = +cb \sin cb$$

und es wird wenn man ordnet

$$J = \tfrac{1}{2}[ae \sin ae + be \sin be + ce \sin ce + ba \sin ba + ca \sin ca + cb \sin cb]$$

oder wenn man wie gewöhnlich mit a anfängt und die Ordnung nach b, c, d nimmt: (vergl. Formel 7)

$$J = \tfrac{1}{2}(ab \sin ab + ac \sin ac + ad \sin ad + bc \sin bc + bd \sin bd + cd \sin cd) \quad (20)$$

Wenn man diese Formel durch die Umfangswinkel ausdrücken will so erhält man wie man Formel 8 aus 7 gefunden hat

$$J = \tfrac{1}{2}[ab \sin B + ac \sin (B+C-2R) + ad \sin (B+C+D-4R) + bc \sin C + bd \sin (C+D-2R) + cd \sin D]$$

Hieraus reducirt:

$$J = \tfrac{1}{2}[ab \sin B - ac \sin (B+C) + ad \sin (B+C+D) + bc \sin C - bd \sin (C+D) + cd \sin D] \quad (21)$$

und durch die Aufsenwinkel ausgedrückt:

$$J=\tfrac{1}{2}[ab\sin\beta+ac\sin(\alpha+\beta)+ad\sin(\alpha+\beta+\gamma)+bc\sin\gamma+bd(\gamma+\delta)+cd\sin\delta] \quad (22)$$

Beispiel zu No. 8 bis 12.

Es sei $a=20$, $b=25$, $c=30$, $d=35$

$B=110°$ also $ba=110°$ und $\beta=70°$

$C=90°$ also $ca=20°$ und $\gamma=90°$

$D=120°$ also $da=320°$ und $\delta=60°$

ferner $bc=90°$, $bd=30°$, $cd=120°$

Nun ist also aus Gleichung 7

$$e^2=20^2+25^2+30^2+35^2-2\,[500\cos 110°+600\cos 20°+700\cos 320°+750\cos 90°+875\cos 30°+1050\cos 120°]$$

aus Gleichung 8

$$e^2=20^2+25^2+30^2+35^2-2\,[500\cos 110°-600\cos 200°+700\cos 320°+750\cos 90°-875\cos 210°+1050\cos 120°]$$

aus Gleichung 9

$$e^2=20^2+25^2+30^2+35^2+2\,[500\cos 70°+600\cos 160°+700\cos 220°+750\cos 90°+875\cos 150°+1050\cos 60°]$$

Alle 3 Gleichungen geben

$$e^2=3150+1000\cos 70°-1200\cos 20°-1400\cos 40°+0-1750\cos 30°+2100\cos 60°=826{,}39$$

woraus $e=28{,}75$

Aus Gleichung 10 bis 12 erhält man

$$\left.\begin{matrix}\cos A\\-\cos\alpha\end{matrix}\right\}=\frac{1}{28{,}75}\,[20+25\cos 70°-30\cos 20°-35\cos 40°]$$

$$=\frac{11{,}255352}{28{,}75}=0{,}3915$$

woraus

$$\left.\begin{matrix}\cos A\\-\cos\alpha\end{matrix}\right\}=-\frac{26{,}45189}{28{,}75}=-0{,}92006$$

woraus $\alpha=23°\,3\tfrac{1}{2}'$

$A=156°\,56\tfrac{1}{2}'$

$$\left.\begin{matrix}A\\\alpha\end{matrix}\right\}=\text{entweder } 23°\,2\tfrac{1}{2}' \text{ oder } 156°\,57\tfrac{1}{2}'$$

Aus Gleichung 13 bis 15 erhält man

$$\left.\begin{matrix}\sin A\\\sin\alpha\end{matrix}\right\}=\frac{1}{28{,}75}(25\sin 70°+30\sin 20°-35\sin 40°)$$

Aus Gleichung 16 bis 18 erhält man

$$\left.\begin{matrix}tg\,A\\-tg\,\alpha\end{matrix}\right\}=\frac{11{,}255352}{-26{,}45189}=-0{,}425503$$

woraus $\alpha=23°\,3'$

$A=156°\,57'$

Nun ist $\angle E=540°-(110°+90°+120°+156°\,57'=63°\,3'$

also $\angle\eta=116°\,57'$

Der Inhalt J ist nach Formel 20 bis 22

$$J=\tfrac{1}{2}[20\cdot 25\sin 70°+20\cdot 30\sin 20°-20\cdot 35\cdot\sin 40°+25\cdot 30\cdot 1+25\cdot 35\cdot\sin 30°+30\cdot 35\cdot\sin 60°]=1160{,}987\,\square\text{Fufs.}$$

13. Es sind 3 Seiten z. B. a, b, d und sämmtliche Winkel gegeben. Für die beiden unbekannten Seiten c, e hat man die beiden Gleichungen 1 bis 3 und 4 bis 6

1) $e=a\cos ae+b\cos be+c\cos ce+d\cos de$

4) $0=a\sin ae+b\sin be+c\sin ce+d\sin de$

Aus Gleichung 4 ist $$c=-\frac{a\sin ae+b\sin be+d\sin de}{\sin ce} \quad (23)$$

diesen Werth in Gl. 1 gesetzt ergibt e.

Diese Gleichungen in den Umfangswinkeln ausgedrückt hat man die Gleichung 2:

2) $e=a\cos A-b\cos(A+B)+c\cos(A+B+C)-d\cos(A+B+C+D)$

und aus Gleichung 5:

$$e=\frac{-a\sin A+b\sin(A+B)+d\sin(A+B+C+D)}{\sin(A+B+C)} \quad (24)$$

Diese Gleichungen in den Aufsenwinkeln ausgedrückt, hat man Gleichung 3.

3) $-e=a\cos\alpha+b\cos(\alpha+\beta)+c\cos(\alpha+\beta+\gamma)+d\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$

und aus Gleichung 6:

$$e = -\frac{a\sin\alpha + b\sin(\alpha+\beta) + d\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)} \quad (25)$$

Sind c und e gefunden, so erhält man J aus Formel 20 bis 22.

Beispiel (das vorige pag. 128).
Gegeben $a = 20$, $b = 25$, $d = 35^0$

$$\angle A = 156^0\,57'; \; B = 110^0; \; C = 90^0; \; D = 120^0; \; E = 63^0\,3'$$

Man findet aus den Formeln 23 bis 25

$$e = -\frac{20 \cdot \sin 20^0\,3' + 25\sin 93^0\,3' - 35 \cdot \sin 63^0\,3'}{-\sin 3^0\,3'} = +30$$

Diesen Werth in Gleichung (1 bis 3) gesetzt gibt reducirt:

$$-e = 20 \cdot \cos 23^0\,3' - 25\cos 86^0\,57' - 30 \cdot \cos 3^0\,3' - 35\cos 63^0\,3'$$

woraus $e = 28{,}75$

14. Es sind 4 Seiten, z. B. a, b, d, e und 3 Winkel B, C, D oder β, γ, δ gegeben, so dafs die beiden unbekannten Winkel A, E oder α, η an einer gegebenen Seite e liegen.

Aus Gleichung 7 hat man folgende geordnete Gleichung für die Unbekannte c:

$$c^2 - 2c[a\cos ac + b\cos bc + d\cos cd] + a^2 + b^2 + d^2 - e^2 - 2(ab\cos ab + ad\cos ad + bd\cos bd) = 0 \quad (26)$$

oder aus 8

$$c^2 + 2c[a\cos(B+C) - b\cos C - d\cos D] + a^2 + b^2 + d^2 - e^2 - 2ab\cos B - 2ad\cos(B+C+D) + bd\cos(C+D) = 0 \quad (27)$$

oder aus 9

$$c^2 + 2c[a\cos(\beta+\gamma) + b\cos\gamma + d\cos\delta] + a^2 + b^2 + a^2 - e^2 + 2ab\cos\beta + 2ad\cos(\beta+\gamma+\delta) + 2bd\cos(\gamma+\delta) = 0 \quad (28)$$

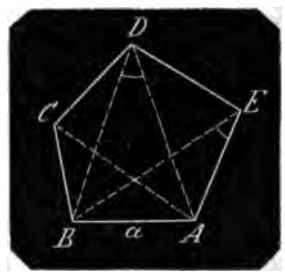
Ist c gefunden, so erhält man aus Formel 10 bis 18 die Winkel A und E.

15. Es ist nur eine Seite gemessen, z. B. $AB = a$ und sämmtliche Winkel von A und von B aus mit den beiden Seiten AE und BC und mit den nach C, D und E visirten Diagonalen; das Fünfeck zu bestimmen. (Feldmesser-Aufgabe.)

Man theile das Fünfeck in die 3 Dreiecke ABE, BDE und BCD, so hat man aus dem Art. „Dreieck“ pag. 331, Formel 35 und 38

die Seite $BE = b = a \cdot \frac{\sin BAE}{\sin AEB}$ (1)

Fig. 648.



den Inhalt des $\triangle ABE = \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{\sin ABE \cdot \sin BAE}{\sin AEB}$ (2)

Eben so $BD = c = b \cdot \frac{\sin BED}{\sin BDE} = a\frac{\sin BAE}{\sin AEB} \cdot \frac{\sin BED}{\sin BDE}$

und $\triangle BDE = \frac{b^2}{2} \cdot \sin DBE \cdot \frac{\sin BED}{\sin BDE}$

Aus den nur bei A und B zu messen möglichen Winkeln lassen sich aber die $\angle BAE$ und BDE nicht berechnen, daher können dieselben nicht in die Formel aufgenommen werden.

Nun hat man aber

$$BD = c = a\frac{\sin BAD}{\sin ADB} = b \cdot \frac{\sin BED}{\sin BDE} \quad (3)$$

Setzt man für diesen letzten Werth den ersten in die eben erhaltene Formel für das $\triangle BDE$ so hat man

$$\triangle BDE = \frac{b}{2} \cdot \sin DBE \cdot a\frac{\sin BAD}{\sin ADB}$$

Setzt man hierein den Werth von b aus Gleichung 1, so ist

$$\triangle BDE = \tfrac{1}{2}a^2 \cdot \frac{\sin BAD \cdot \sin BAE}{\sin ADB \cdot \sin AEB} \cdot \sin DBE \quad (4)$$

Endlich ist

$$\triangle BCD = \tfrac{1}{2}c^2 \cdot \sin CBD \cdot \frac{\sin BDC}{\sin BCD}$$

wo wiederum die beiden Winkel BDC und BCD nicht zu berechnen sind. Man hat aber aus $\triangle ABC$

die Seite $BC = a\dfrac{\sin BAC}{\sin ACB}$

und $BC : (BD = c) = \sin BDC : \sin BCD$

woraus $c \cdot \dfrac{\sin BDC}{\sin BCD} = BC = a \cdot \dfrac{\sin BAC}{\sin ACB}$

Diesen Werth in die Formel für $\triangle BCD$ gesetzt gibt

$$\triangle BCD = \tfrac{1}{2}c \sin CBD \cdot a \cdot \frac{\sin BAC}{\sin ACB}$$

und aus Gleichung 3 den Werth von c entnommen

$$\triangle BCD = \tfrac{1}{2}a^2 \cdot \frac{\sin BAC \cdot \sin BAD}{\sin ACB \cdot \sin ADB} \cdot \sin CBD$$

Es ist demnach der Inhalt des Fünfecks

$$J = \tfrac{1}{2}a^2 \left[\frac{\sin BAC \cdot \sin BAD}{\sin ACB \cdot \sin ADB} \times \sin CBD + \frac{\sin BAD \cdot \sin BAE}{\sin ADB \cdot \sin AEB} \times \sin DBE + \frac{\sin BAE}{\sin AEB} \times \sin ABE\right] \quad (5)$$

In dieser Formel für J ist $\frac{1}{2}a^2$ multiplicirt mit dem

1ten Klammerglied der Inhalt von $\triangle CBD$

2ten „ „ „ „ $\triangle DBE$

3ten „ „ „ „ $\triangle ABE$

Der in der Klammergröfse befindliche

$\angle ACB$ ist $= 180° - \angle ABC - \angle BAC$

$\angle ADB$ „ $= 180° - \angle ABD - \angle BAD$

$\angle AEB$ „ $= 180° - \angle ABE - \angle BAE$

Die Seiten und Diagonalen des Fünfecks sind übrigens leicht zu finden:

Seite BC und Diagonale AC aus $\triangle ABC$; gegeben eine Seite a und 2 anliegende Winkel.

Diagonalen AD und BD aus $\triangle ABD$; gegeben $a + 2$ anliegende Winkel.

Seite CD und $\angle C$ aus $\triangle BCD$; gegeben BD, BC und der eingeschlossene Winkel.

Seite AE und Diagonale BE aus $\triangle ABE$; gegeben $a + 2$ anliegende Winkel.

Seite DE und $\angle E$ aus $\triangle ADE$; gegeben AE, AD und der eingeschlossene Winkel.

Der Umfangswinkel CDE ist

$= 540° - (A + B + C + E)$

16. Das zu berechnende auf dem Felde befindliche Fünfeck kann einen auch 2 convexe Winkel haben; je nachdem daraus die Gestalt desselben hervorgeht sind die Klammerglieder positiv oder negativ zu nehmen.

Bezeichnet man die Klammerglieder in Formel 5 der Reihe nach mit X, Y, Z so ist

für Fig. 648: $J = \frac{1}{2}a^2(X + Y + Z)$

für Fig. 649: $J = \frac{1}{2}a^2(X - Y + Z)$

für Fig. 650: $J = \frac{1}{2}a^2(X + Y - Z)$

für Fig. 651: $J = \frac{1}{2}a^2(-X + Y - Z)$

Fig. 649.

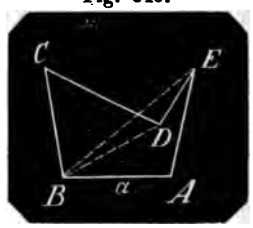


Fig. 650.

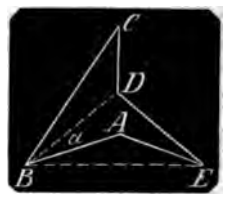


Fig. 651.

Fünfeck, regelmäfsiges.

Euklid (IV, 11) enthält die geometrische Construction des regulären Fünfecks im Kreise, nachdem der Satz vorher die Construction eines gleichschenkligen Dreiecks zeigt, in welchem jeder Winkel an der

rundlinie das Doppelte des Winkels an er Spitze beträgt. In dem Art „Constructionen, geometrische" Bd. II., ag. 71 ist No. 88 mit Fig. 404 der 10te latz und No. 93 mit Fig. 405 der 11te latz des Euklid, die Construction des Fünfcks ausgeführt.

Der Centriwinkel für die Seite ist = $R\angle = 72°$

er Umfangswinkel ist = $\frac{1}{2}R\angle = 108°$

Die Seite s als Sehne des mit dem Halbmesser $= r$ um das Fünfeck beschriebenen Kreises

$$=r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} = 2r\sin 36° = r\cdot 1{,}175\,5706$$

Die Seite S als Tangente des mit dem Halbmesser $= r$ in dem Fünfeck beschriebenen Kreises

$$S=2r\sqrt{5-2\sqrt{5}} = 2r\,tg\,36° = r\cdot 1{,}453\,0852$$

Der Halbmesser

$$=r\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} = \tfrac{1}{2}s\cdot cosec\,36° = s\cdot 0{,}805\,6508$$

$$=\tfrac{1}{2}S\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} = \tfrac{1}{2}S\cdot cot\,36° = S\cdot 0{,}688\,1909$$

Der Inhalt f des Fünfecks im Kreise

$$=\tfrac{1}{4}s^2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} = \tfrac{1}{4}s^2 cot\,36° = s^2\cdot 1{,}720\,4774$$

$$=\tfrac{1}{2}r^2\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \tfrac{1}{2}r^2\cdot sin\,72° = r^2\cdot 2{,}377\,6412$$

Der Inhalt F des Fünfecks um den Kreis

$$=5r^2\sqrt{5-2\sqrt{5}} = 5r^2\,tg\,36° = r^2\cdot 3{,}632\,7130$$

$$=\tfrac{1}{4}S^2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} = \tfrac{1}{4}S^2 cot\,36° = S^2\cdot 1{,}720\,4774$$

Function ist eine veränderliche Gröfse, welche von einer anderen veränderlichen Gröfse oder mehreren derselben abhängig ist, eine abhängig veränderliche Gröfse, während die eine oder mehrere veränderliche Gröfsen, von denen die unction abhängt, und die beliebig wählbar sind, unabhängig veränderliche oder urveränderliche Gröfsen genannt werden.

Wenn nämlich in dem Zusammenhang mehrerer Gröfsen einige immer denselben Werth behalten, während andere beliebig viele Werthe annehmen können, heifsen die ersteren beständige oder constante Gröfsen, die letzteren veränderliche oder variable Gröfsen. Die einzelne beständige Gröfse, welche die veränderliche gesetzt werden kann, heifst ein Werth der Veränderlichen.

Beispiele von beständigen und veränderlichen Gröfsen in Zusammenhang, kommen in allen Theilen der Elementarmathematik vor:

In der Arithmetik ist das allgemeine Glied einer gegebenen arithmetischen Reihe ausgedrückt durch $a + (n-1)\,d$; wo a das erste Glied der Reihe und d die Differenz je zweier neben einander befindlichen Glieder bezeichnet. Durch dieses allgemeine Glied läfst sich nun jedes bestimmte Glied unmittelbar dadurch erhalten, dafs man für n die betreffende bestimmte Stellenzahl setzt. Folglich ist n nicht das Zeichen einer bestimmten Zahl wie dies von a und d bei derselben bestimmten Reihe gilt, sondern n ist das Zeichen für den Inbegriff aller bestimmten Stellenzahlen, also eine veränderliche Gröfse und die bestimmten Stellenzahlen sind ihre Werthe.

In der Geometrie vergleicht man Kreisumfänge und Kreisflächen mit ihren Halbmessern oder Durchmessern bekanntlich dadurch, dafs man um und in den Kreis ähnliche Vielecke verzeichnet, dafs man diese nun mit dem Halbmesser des Kreises vergleicht und dafs man, mit beliebig fortgesetzter Vermehrung deren Seitenzahl, ihr Verhältnifs zu dem Halbmesser dem Verhältnifs des Kreises zu dem Halbmesser immer näher bringt und somit endlich zu dem gesuchten Verhältnifs des Kreisumfangs und der Kreisfläche zu dem Halbmesser selbst gelangt. In diesem Falle sind die Kreisfläche, der Kreisumfang, der Halbmesser und der Durchmesser beständige Gröfsen, die Vielecke dagegen sind veränderliche Gröfsen und jedes Vieleck mit einer bestimmten Anzahl von Seiten stellt in seinem Umfang oder in seinem Flächeninhalt einen Werth der veränderlichen Gröfse dar.

Während also eine beständige Gröfse eine einzige ganz bestimmte Gröfse ist, ist die veränderliche Gröfse eine ganze Klasse einzelner Gröfsen derselben Art.

In dem obigen Beispiel ist jedes Glied $a + (n-1)\,d$ der Reihe eine Function von n und n ist die Urveränderliche; ist aber auch die Differenz d beliebig wählbar, so ist der Werth des Gliedes nicht nur von dem Werth von n, sondern auch von dem Werth von d abhängig, das Glied $a + (n-1)\,d$ ist eine Function der bei den Urveränderlichen n und d.

In dem 2ten Beispiel ist der Inhalt jedes Vielecks nur abhängig von der Anzahl n dessen Seiten, wenn der Halbmesser r des Kreises, in oder um welchen es beschrieben worden, unveränderlich ist. Wird aber r ebenfalls beliebig wählbar, so ist der Inhalt des Vielecks eine Function von 2 Urveränderlichen n und r.

Die allgemeine Bezeichnung der Abhängigkeit einer Veränderlichen von einer oder mehreren anderen geschieht durch den Anfangsbuchstaben des Wortes Function:

$y = fx$ heifst: y ist eine Function von x
$z = F(x, y)$ heifst: z ist eine Function der beiden Urveränderlichen x und y.

Die Eintheilung der Functionen in algebraische und transcendente Functionen s. in dem Art. „algebraische Function" Bd. I, pag. 44. Es sind aufserdem noch folgende Bezeichnungen zu merken:

Gehört zu einem bestimmten Werth der Urveränderlichen nur ein bestimmter Werth der Function, so heifst diese einförmig; gehören dagegen zu einem bestimmten Werth der Urveränderlichen mehrere Werthe der Function, so heifst diese vielförmig und zwar zweiförfig, dreiförmig u. s. w., wenn der Function 2, 3 u. s w. Werthe zukommen. Vielförmig kann eine Function nur sein, wenn sie in einer Potenz gegeben ist. Als:

$$y^2 - axy + b = 0$$

woraus $y = +\frac{1}{2}ax \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2x^2 - b}$

wo y als Function von x zweiförmig ist.

2. Ist eine Function durch eine oder mehrere Urveränderliche gegeben, so heifst sie eine unmittelbare Function; ist sie dagegen von Veränderlichen gegeben, die selbst wieder Functionen von anderen Veränderlichen, den Urveränderlichen sind, so heifst sie eine mittelbare Function; die Veränderlichen, von welchen die Function zunächst abhängt, heifsen die vermittelnden Veränderlichen.

3. Kommt in einer Function der Urveränderlichen diese nur in den geraden Potenzen vor, so ist die Function eine gerade, kommt die Urveränderliche nur in den ungeraden Potenzen vor, so heifst die Function eine ungerade. Gerade Functionen sind daher auch solche, bei welchen für gleiche und entgegengesetzte Werthe der Urveränderlichen dieselben Werthe der Function gehören; ungerade Functionen solche, bei welchen für gleiche und entgegengesetzte Werthe der Urveränderlichen auch gleiche und entgegengesetzte Werthe der Function entstehen.

4. Gleichartig heifst eine Function zweier oder mehrerer Veränderlichen wenn die Summe deren Exponenten in allen Gliedern gleich grofs ist. Z. B.:

$$ay^3 + by^2x + cyx^2 + dy^3 = 0$$

5. Aehnlich heifsen Functionen, wenn in ihnen die Verbindungen zwischen den Unveränderlichen und den Veränderlichen auf einerlei Weise geschieht, als

$$qx = \frac{a + bx}{cx^2}$$

$$qy = \frac{A + By}{Cy^2}$$

6. Unter den transcendenten Functionen begreift man

1. die Exponentialfunction, in welcher die Potenz von dem Exponent abhängig ist; als $y = a^x$.

2. Die logarithmische Function, in welcher der Exponent einer Potenz bei constanter Basis von der Potenz abhängig ist; als $x = a^y$
weil man diese Function auch schreibt

$$y = \frac{log\, x}{log\, a}$$

oder wenn a die Basis des Systems ist:

$$y = log\, x$$

3. Die Winkel- oder Kreisfunctionen, unter welchen zweierlei Functionen begriffen werden:

a. die trigonometrischen Linien in ihrer Abhängigkeit von dem zugehörigen Winkel oder dem für den Halbmesser = 1 gehörenden Bogen als Urveränderliche, als

$$y = sin\, x;\ y = cos\, x$$

b. die Bogen in ihrer Abhängigkeit von einer ihm zugehörigen trigonometrischen Linie als

$$y = arc \cdot sin\, x;\ y = arc \cdot cos\, x$$

7. Setzt man anstatt der urveränderlichen Gröfse x 2 aufeinander folgende Werthe derselben x', x'' so heifst der Unterschied zwischen beiden $(x' - x'')$ der Zuwachs der Urveränderlichen. Der Unterschied zwischen den beiden zugehörigen Werthen y', y'' der Function $(y' - y'')$ heifst der Zuwachs der Function. Kann der Zuwachs der Urveränderlichen kleiner werden als jede noch so klein gegebene Gröfse und gilt dies zugleich von dem Zuwachs der Function, so heifst die Urveränderliche und die Function stetig.

Das Weitere s. den Art. „Differenzial".

8. Ist y eine Function von x, so ist auch x eine Function von y. Es gehört mit zu den wichtigsten Aufgaben, eine Function umzukehren, d. h. eine gegebene Function $y = fx$ in die umgekehrte $x = \eta y$ zu verwandeln. Bei algebraischen Functionen hat es keine Schwierigkeit z. B.

$$y = fx = \sqrt{a^2 + x^2}$$

gibt durch Umformung

$$x = \varphi x = \sqrt{y^2 - a^2}$$

Ist eine Function durch eine nach Potenzen der Urveränderlichen fortlaufende Reihe gegeben, so wendet man die unbestimmten Coefficienten an: die Function

$$y = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots.$$

umzukehren hat man $y = 1$ für $x = 0$. Also setzt man

$$x = A(y-1) + B(y-1)^2 + C(y-1)^3 + D(y-1)^4 + \ldots.$$

hieraus hat man

$$\begin{aligned} x^2 &= A^2(y-1)^2 + 2AB(y-1)^3 + (B^2 + 2AC)(y-1)^4 + \ldots. \\ x^3 &= \quad + A^3(y-1)^3 \quad + 3A^2B(y-1)^4 \quad + \ldots. \\ x^4 &= \quad\quad\quad\quad + A^4(y-1)^4 \quad + \ldots. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Die Werthe von x, x^2, x^3, x^4.... in die Function gesetzt und auf 0 reducirt gibt

$$0 = (A-1)(y-1) + (A^2 + B)(y-1)^2 + (C + 2AB + A^3)(y-1)^3$$
$$+ (D + B^2 + 2AC + 3A^2B + A^4)(y-1)^4 + (2BC + 2AD + 3AB^2 + A^3C + A^5)(y-1)^5$$

Hieraus $A - 1 = 0$

$A^2 + B = 0$

$C + 2AB + A^3 = 0$

$D + B^2 + 2AC + 3A^2B + A^4 = 0$

woraus $A = 1$

$B = -1$

$C = +1$

$D = -1$

mithin die umgekehrte Function

$$x = (y-1) - (y-1)^2 + (y-1)^3 - (y-1)^4 + \ldots$$

Beispiele von Umkehrung transcendenter Functionen durch unbestimmte Coefficienten geben die Art. Cosecante, No. 12, pag. 138; Cosinus, No. 16, pag. 143; Cosinus versus, No. 4, pag. 146; Cotangente No. 11, pag. 149.

Functionalgröße, s. v. w. urvariable Größe, s. u. Function.

Functionalzeichen ist das Zeichen F, f, φ... für Function vor der Urvariablen oder mehreren derselben als

$$Fx;\ f(x, z);\ \varphi(z, u)\ldots.$$

Functionenlehre, die Lehre von den Functionen, Aufstellung des Begriffs, Eintheilung derselben, ihre Behandlung und Umformung; überhaupt die Rechnung mit Functionen. Der Begriff Function und die Eintheilung der Functionen ist in dem Art. Function angegeben, der Unterschied zwischen der Rechnung mit Functionen und der Buchstabenrechnung und Algebra in dem Art. Analysis. Die Umformung oder Verwandlung einer F. geschieht vorliegenden Bedürfnissen entsprechend; unter diesen ist eine der wichtigsten, die Umkehrung einer F. in dem Art. Function gezeigt.

2. Eine gegebene gesonderte algebraische Function (s. d. Bd. I., pag. 44), die nach Potenzen der Urveränderlichen geordnet ist, wird nach der Lehre von den algebraischen Gleichungen in ein Product verwandelt:

Bd. I., pag. 57 ist die Gleichung aufgestellt

$$x^5 - 4x^4 - 186x^3 + 916x^2 + 4673x - 17160 = 0$$

Die Wurzeln derselben sind gefunden

$$+3;\ +8;\ +11;\ -5;\ -13$$

Setzt man den Ausdruck $= y$ statt $= 0$, so ist y eine gesonderte algebraische Function und sie ist nach der Lehre von den algebraischen Gleichungen in das Product verwandelt

$$y = (x-3)(x-8)(x-11)(x+5)(x+13)$$

Eben so wird die dort befindliche auf 0 reducirte Gleichung als Function von y genommen:

$$y = x^5 - 3x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 9x + 27$$
$$= (x-3)(x-3)(x+3)(x-\sqrt{-1})(x+\sqrt{-1})$$

3. Ist die algebraische Function ungesondert und man will eine gesonderte zwischen y und x erhalten, so verfährt man wie bei der Umkehrung der Function, z. B. die Function (Klügel 2, pag. 301)

$$y^3 + 4yx^2 - 5y^2 + 7y + 24x - 3 = 0$$

Setzt man

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6 + \ldots$$

so ist

$$\begin{aligned} y^3 = {} & A^3 + 3A^2Bx + 3(AB^2 + A^2C)x^2 + (B^3 + 6ABC + 3A^2D)x^3 \\ & + 3(B^2C + AC^2 + 2ABD + A^2E)x^4 \\ & + 3(BC^2 + B^2D + 2ACD + 2ABE + A^2F)x^5 \\ & + (C^3 + 6BCD + 3AD^2 + 3B^2E + 6ABF + 3A^2G)x^6 + \ldots \end{aligned}$$

$$4yx^2 = 4Ax^2 + 4Bx^3 + 4Cx^4 + 4Dx^5 + 4Ex^6 + \ldots.$$
$$5y^2 = 5A^2 + 10ABx + 5(B^2 + 2AC)x^2 + 10(BC + AD)x^3 + 5(C^2 + 2BD + 2AE)x^4 + 10(CD + BE + AF$$
$$+ 5(D^2 + 2CE + 2BF + 2AG)x^6$$
$$7y = 7A + 7Bx + 7Cx^2 + Dx^3 + 7Ex^4 + 7Fx^5 + 7Gx^6$$
$$24x - 3 = -3 + 24x$$

hieraus

1) $A^3 - 5A^2 + 7A - 3 = 0$
2) $3A^2B - 10AB + 7B + 24 = 0$
3) $3(AB^2 + A^2C) + 4A - 5(B^2 + 2AC) + 7C = 0$
4) $B^3 + 6ABC + 3A^2D + 4B - 10(BC + AD) + 7D = 0$
5) $3(B^2C + AC^2 + 2ABD + A^2E) + 4C - 5(C^2 + 2BD + 2AE) + 7E = 0$
6) $3(BC^2 + B^2D + 2ACD + 2ABE + A^2F) + 4D - 5(C^2 + 2BD + 2AE) + 7F$
7) $C^3 + 6BCD + 3AD^2 + 3B^2E + 6ABF + 3A^2G + 4E - 5(D^2 + 2CE + 2BF + 2AG$

u. s. w.

Aus Gleichung 1 ergeben sich für die 3 Wurzeln

$$A = 1;\ A = 1;\ A = 3$$

folglich hat man entweder $A = 1$ oder $A = 3$.

Aus Gleichung 2 ergibt sich

$$(3A^2 - 10A + 7)B = -24$$

für $A = 1$ ist $B = \infty$; für $A = 3$ ist $B = -6$

Aus Gleichung 3 ergibt sich, wenn man $A = 3$ und $B = -6$ setzt:

$$C = -39$$

Aus Gleichung 4 ist nun $D = -408$.

Aus Gleichung 5 ist $E = -5325$ u. s. w.

Und die gesonderte Function ist

$$y = 3 - 6x - 39x^2 - 408x^3 - 5325x^4 - \ldots.$$

für $x = 0$ wird $y = 3$

Statt der ersten Gleichung für A erhält man die Gleichung für y wenn man in der gegebenen Gleichung $x = 0$ setzt, nämlich

$$y^3 - 5y^2 + 7y - 3 = 0$$

Man hat also für $x = 0$ die 3 Werthe von $y = A = 1$, 1 und 3.

Setzt man $y = 0$ so erhält man aus der gegebenen Gleichung

$$24x - 3 = 0$$

woraus $x = \frac{1}{8}$

Also für jeden Werth $x > \frac{1}{8}$ wird y negativ; für positive Werthe von y muſs $x < \frac{1}{8}$ sein.

Es läſst sich auch eine Reihe mit absteigenden Exponenten von x darstellen als $y = Ax^0 + Bx^{\frac{1}{2}} + Cx^{\frac{1}{3}} + \ldots$ sie führt aber zu irrationalen Gliedern und macht eine Berechnung höchst langwierig.

4. Eine andere Art der Verwandlung von Functionen ist die Zerlegu Bruchs in 2 oder mehrere Brüch dessen Nenner ein Product aus mehreren Factoren ist. Z. B. de

$$\frac{(3a+b)x - 2ab}{x^2 + (a-b)x - ab} = \frac{(3a+b)x -}{(x+a)(x}$$

Der Bruch kann nun in zwei zerlegt werden, welche die Fact Nenners zu Nennern haben, dere nun zu finden sind. Bezeichnet selben mit A und B so hat Brüche

$$\frac{A}{x+a} + \frac{B}{x-b}$$

Diese auf gleiche Benennung gebr

$$\frac{(A+B)x - Ab + aB}{(x+a)(x-b)}$$

folglich ist

$$(A+B)x - Ab + aB = (3a+b)x$$

Und es kann also nur sein:

$$(A+B)x = (3a+b)x$$

und $$-Ab + aB = -2ab$$

aus 1 ist $$A + B = 3a + b$$

Diese mit b multiplicirt, mit Gl 2 addirt und entwickelt gibt

$$B = \frac{ab + b^2}{a+b} = b$$

woraus man $A = 3a$

folglich

$$\frac{(3a+b)x - 2ab}{(x+a)(x-b)} = \frac{3a}{x+a} + \frac{}{x}$$

5. Man kann auch folgendes V einschlagen um A und B zu fin

Aus der Gleichung

$$\frac{A}{x+a} + \frac{B}{x-b} = \frac{(3a+b)x -}{(x+a)(x-}$$

folgt

$A(x-b)+B(x+a)=(3a+b)x-2ab$

Wird nun $A(x-b)=0$, d. h. wird $x=b$ genommen, so ist auch

$-B(x+a)+(3a+b)x-2ab=0$

also $-B(b+a)+(3a+b)b-2ab=0$

woraus $B=b$

hiernach $A=3a$

6. Ein Bruch mit zweien oder mehreren gleichen Factoren als Nenner ist in so viele Brüche als Factoren sind, oder überhaupt in ein Agregat nicht zu zerlegen, denn es würde sein müssen

$$\frac{N}{(a+x)^n}=\frac{A}{a+x}+\frac{B}{a+x}+\frac{C}{a+x}+\ldots.=\frac{A+B+C\ldots.}{a+x}$$

Es müfste also sein

$N=(a+x)^{n-1}\cdot(A+B+C\ldots.)$

7. Befinden sich aufser der Potenz noch andere Factoren im Nenner, so mufs die Potenz als einfacher Nenner angesehen werden, z. B.

$$\frac{a^3-5a^2b-2ab^2-2b^3}{(a+b)^2(a-b)}=\frac{A}{(a+b)^2}+\frac{B}{a-b}$$

woraus

$A(a-b)+B(a+b)^2=a^3-5a^2b-2ab^2-2b^3$

für $a=b$ wird

$4a^2B=-8a^3$ also $B=-2a$

aber auch $4b^2B=-8b^3$ also $B=-2b$

hieraus $B=-(a+b)$

mithin

$A(a-b)-(a+b)^3=a^3-5a^2b-2ab^2-2b^3$

woraus $A=2a^2+b^2$

folglich der Bruch $=\frac{2a^2+b^2}{(a+b)^2}-\frac{a+b}{a-b}$

Fundamentalebene ist die Ebene der Ekliptik.

Funfzehneck ist eine von 15 Seiten eingeschlossene Figur. Es wird von jeder beliebigen Ecke aus durch 12 Diagonalen in 13 Dreiecke zerlegt und erfordert also $3+2\times12=27$ Bestimmungsstücke, die Summe sämmtlicher Umfangswinkel ist $=26$ rechte Winkel mit höchstens 12 convexen Winkeln, die Anzahl der möglichen Diagonalen ist $\frac{1}{2}\cdot15\cdot12=90$.

Funfzehneck, reguläres. Euklid Bd. IV., S. 16 lehrt die Construction der Seite desselben: Man beschreibe von einem Punkt der Peripherie eines Kreises die die Seite des regulären Dreiecks, von demselben Punkt aus nach derselben Richtung die Seite des regulären Fünfecks im Kreise, so ist der Bogen für die Dreiecksseite $=\frac{1}{3}=\frac{5}{15}$, der Bogen für die Fünfecksseite $=\frac{1}{5}=\frac{3}{15}$ der Peripherie, die Differenz beider Bogen also $\frac{2}{15}$ der Peripherie. Halbirt man also diese Differenz, so erhält man den Bogen für die Seite des regulären Funfzehnecks (s. Dreieck, Fünfeck, regelmäfsiges.)

Der Centriwinkel ist $=\frac{4}{15}R\angle=24°$

der Umfangswinkel ist $=\frac{13}{15}R\angle=156°$

die Seite s als Sehne des mit dem Halbmesser $=r$ um das Fünfzehneck beschriebenen Kreises

$$s=\tfrac{1}{2}r\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3}\right]=2r\sin12°$$
$$=r\cdot0{,}415\ 8234$$

die Seite S als Tangente des mit dem Halbmesser r in dem Funfzehneck beschriebenen Kreises

$$2r\,tg\,12°=r\cdot0{,}425\ 1130$$

der Halbmesser

$$r=\tfrac{1}{2}s\cdot cosec\,12°=s\cdot2{,}404\ 8671$$
$$=\tfrac{1}{2}S\cdot cot\,12°=s\cdot2{,}352\ 3150$$

der Inhalt des Funfzehnecks im Kreise

$$f=\frac{15}{2}r^2\sin24°=r^2\cdot3{,}050\ 5245$$
$$=\frac{15}{4}s^2\,cot\,12°=s^2\cdot17{,}642\ 3629$$

der Inhalt des Funfzehnecks um den Kreis

$$F=15r^2\,tg\,12°=r^2\cdot3{,}188\ 3475$$
$$=\frac{15}{4}S^2\cdot cot\,12°=S^2\cdot17{,}642\ 3629$$

G.

g, das Zeichen der Beschleunigung eines in der Nähe der Erdoberfläche frei fallenden Körpers, d. h. des Weges, den ein frei fallender Körper von der Ruhe aus in der ersten Secunde zurücklegt.

Man ermittelt die Gröfse von g mittelst des Pendels durch Versuche, und zwar am einfachsten mit Hülfe des Secundenpendels. In dem Art.: Fall durch einen Kreisbogen, pag. 72, Formel 18 ist für kleine Bogen die Länge des Secundenpendels r oder $l = \frac{2g}{n^2}$ also $g = \frac{1}{2}n^2 l$

Die Längen der Secundenpendel auf der Erdoberfläche sind unter den verschiedenen geographischen Breiten wegen der an den Polen stattfindenden Abplattung verschieden und somit auch die Beschleunigungen.

Für folgende geographische Breiten hat man die Längen l der Secundenpendel in preufs. Zollen und die Beschleunigung g in preufs. Fufsen:

für	0° (Aequator)	$l = 37{,}88509$ Zoll	$g = 15{,}5796$ Fufs
„	10°	37,90028	15,5868 „
„	20°	37,90809	15,5891 „
„	30°	37,93426	15,5998 „
„	40°	37,96632	15,6130 „
„	50°	38,00043	15,6271 „
„	52° 31′ 13″ (Berlin)	38,00891	15,6305 „
„	60°	38,03256	15,6403 „
„	70°	38,05871	15,6510 „
„	80°	38,07578	15,6580 „
„	90° (Pol	38,08171	15,6605 „

Für unsere Gegend rechnet man im Mittel

$g = 15\frac{1}{2} = 15{,}625$ preufs. Fufs
$= 4{,}904$ Meter
$= 14{,}7$ neue pariser Fufs
$= 15{,}096$ alte pariser Fufs

Man hat noch

$g = 15{,}625$; $\log g = 1{,}193\,9200$
$\frac{1}{g} = 0{,}064$; $\log \frac{1}{g} = 0{,}806\,1800 - 2$
$\sqrt{g} = 3{,}95285$; $\log \sqrt{g} = 0{,}596\,9100$
$\sqrt{\frac{1}{g}} = 0{,}25474$; $\log \sqrt{\frac{1}{g}} = 0{,}406\,0900 - 1$

Galilei'sches Fernrohr, s. u. Fernrohr 2.

Galilei'sches Gesetz ist das Gesetz des Falls der Körper.

Galilei'sche Zahl ist die von Galilei ermittelte Zahl g (s. den Art. g).

Ganz ist etwas Ungetheiltes oder was

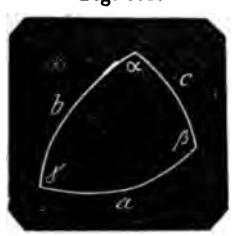
ɔr Gesammtsumme seiner Theile
:. Der 9te Grundsatz des Euklid
das Ganze ist gröfser als sein
andere Lehrbücher haben als Grund-
las Ganze ist seinen Theilen zu-
ıgenommen gleich.

ı Zahl heifst ganz, wenn sie aus
oder mehreren ungetheilten Ein-
zusammengesetzt ist; so auch die
hnung: dekadische Ganze für
sche Zahlen im Gegensatz zu de-
ben Brüchen. Ganze Function
ılgebraische Function.

ı. Das Gesetz deren Ausdehnung
Rudberg's Versuchen tabellarisch,
I., pag. 213. Unter dem Art.
luſs der Luft, Bd. I., pag. 230
esonders für andere Gase als Luft
ısetze beim Ausfluſs der Gase aus
ıngen No. 12, pag. 233 zusammen-
lt. Dieselben beim Einströmen von
. No. 17, pag. 235.

ıſ'sche Gleichungen. Es sei ne-
ıhendes Kugeldreieck von den Sei-
, b, c und den diesen gegenüber-
ıden Winkeln α, β, γ, so sind die
hungen

Fig. 652.



ı $\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}\gamma = \cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}c$.
ı $\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}\gamma = \sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}c$
ı $\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}\gamma = \cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}c$
ı $\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}\gamma = \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}c$

ı deren Verbindung mit einander
: man die fehlenden Stücke des
:ks, wenn entweder 2 Seiten und
ron ihnen eingeschlossene Winkel
2 Winkel und die eingeschlossene
gegeben sind.

d z. B. a, b, γ gegeben, so hat man
die Division von Gl. 1 durch 2:

$$\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}\,tg\,\gamma$$

die Division von Gl. 3 durch 4:

$$\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}\,tg\,\gamma$$

nun die Cotangenten von $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ und $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ bekannt sind, so sind es auch die Winkel $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ und $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$

Setzt man nun $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\delta$
und $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\varepsilon$
so ist $\alpha=\delta+\varepsilon$
und $\beta=\delta-\varepsilon$

Eben so findet man, wenn α, β und c gegeben sind, durch Division von Gl. 1 durch 3:

$$tg\,\tfrac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\,tg\,\tfrac{1}{2}c$$

durch Division von Gleichung 2 durch 4:

$$tg\,\tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\,tg\,\tfrac{1}{2}c = D$$

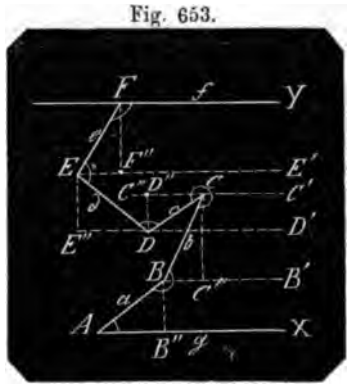
Ist nun gefunden $\frac{1}{2}(a+b)=d$
$\frac{1}{2}(a-b)=e$
so erhält man $a=d+e$
$b=d-e$

In dem Art.: Kugeldreieck wird die Richtigkeit der Gauſs'schen Gleichungen erwiesen werden.

Gebrochene Linie.

1. Die Parallellinien AX, FY sind durch eine gebrochene Linie $ABCDEF$ mit einander verbunden. Bezeichnet man die Winkel auf einer Seite der gebrochenen Linie, wie sie durch kleine Bogen angegeben sind, mit A, B, C, D, E, F, zieht die mit AX und FY parallelen BB', CC', DD', EE', so hat man:

Fig. 653.



$\angle A + \angle ABB' = 2R$
$\angle CBB' + \angle BCC' = 2R$
also $\angle A + \angle B + \angle BCC' = 4R$

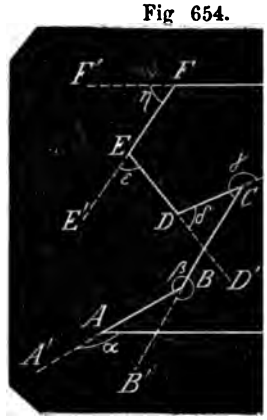
Hierzu kommt
der gestreckte $\angle C'CC^\circ = 2R$
$\angle DEE' + \angle EDD'$ oder
$\angle DEE' + \angle EDC + \angle C^\circ CD = 2R$
zusammen $= 8R$

Nun ist
$\angle BCC' +$ gestreckter $\angle C'CC^0 + \angle C^0CD = \angle C$
$\angle CDE = \angle D$
folglich
$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle DEE' = 8R$
hierzu $\angle F + \angle FEE' = 2R$
und da
$\angle FEE' + \angle DEE' = \angle E$
so ist
$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F = 10R$ (1)

Man sieht, dafs bei jeder beliebigen Anzahl von Theillinien, aus welchen die gebrochene Linie besteht, die Summe der auf einer Seite der gebrochenen Linie liegenden Winkel = ist 2mal so vielen rechten Winkeln als Theillinien vorhanden sind.

2. Verlängert man die Theillinien sämmtlich nach einerlei Richtung BA, CB, DC, ED, FE, YF, und bezeichnet die entstehenden Aufsenwinkel, nach einerlei Richtung von jeder Theillii der Verlängerung der nä Theillinie mit α, β, γ, δ, man

Fig 654.



$\alpha = 2R - A$
$\beta = 4R - \angle ABB' = 4R - (B - 2R) = 6R - B = 2R - B$
$\gamma = 4R - \angle C'CB = 4R - (C - 2R) = 2R - C$
$\delta = 2R - D$
$\varepsilon = 2R - E$
$\eta = 2R - F$

$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \eta = 12R - (A + B + C + D + E + F)$
$= 2R$

Also die Summe der Aufsenwinkel einer zwischen Parallellinien senen gebrochenen Linie ist = zweien rechten Winkeln.

3. Um die Entfernung H zwischen AX und FY durch die Längen de und deren Winkel auszudrücken, setze die Längen der auf einand Theillinien a, b, c, d, e u. s. w., fälle die Lothe BB'', CC'', DD'', E hat man:

$BB'' = a \sin A$
$CC'' = b \sin CBB' = b \sin (B - ABB') = b \sin (A + B - 2R) = - b \sin (A +$
$DD'' = c \sin DCC^0 = c \sin (C - 2R - BCC') = c \sin [C - 2R - (2R - CBB$
$= c \sin (A + B + C - 6R) = - c \sin (A + B + C)$
$EE'' = d \sin EDE'' = d \sin (2R - D - CDD') = d \sin (2R - D - DCC^0)$
$= d \sin (4R - A - B - C - D) = - d \sin (A + B + C + D)$
$FF'' = e \sin FEE' = e \sin (E - E'ED) = e \sin (E - EDE'')$
$= e \sin (A + B + C + D + E - 4R) = e \sin (A + B + C + D + E)$

Nun ist $H = BB'' + CC'' - DD'' + EE'' + FF'' \pm \ldots .$
folglich $H = a \sin A - b \sin (A + B) + c \sin (A + B + C) - d \sin (A + B +$
$+ e \sin (A + B + C + D + E) - \ldots .$
woraus das Gesetz der Fortschreitung erkannt wird.

4. H durch die Aufsenwinkel α, β, γ, δ, ε, η ausgedrückt, nach No. 2:

$$A = 2R - \alpha$$
$$A + B = 4R - (\alpha + \beta)$$
$$A + B + C = 6R - (\alpha + \beta + \gamma)$$
$$A + B + C + D = 8R - (\alpha + \beta + \gamma + \delta)$$
$$A + B + C + D + E = 10R - (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon)$$

Hieraus

$$H = a\sin\alpha + b\sin(\alpha+\beta) + c\sin(\alpha+\beta+\gamma) + d\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta) + e\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon) \quad (4)$$

5. Bezeichnet man Fig. 653 den $\angle BAX$ zwischen g und a mit ag, den $\angle CBB'$ zwischen b und g mit bg; den $\angle$ zwischen c und g mit cg u. s. w.; so erhält man aus No. 1:

$$\begin{aligned}
ag &= A\\
bg &= A+B-2R\\
cg &= A+B+C-4R\\
dg &= A+B+C+D-6R\\
eg &= A+B+C+D+E-8R\\
fg &= A+B+C+D+E+F-10R = 0 \quad (5)
\end{aligned}$$

Sind FY und AX nicht parallel, so hat man wie vorhin

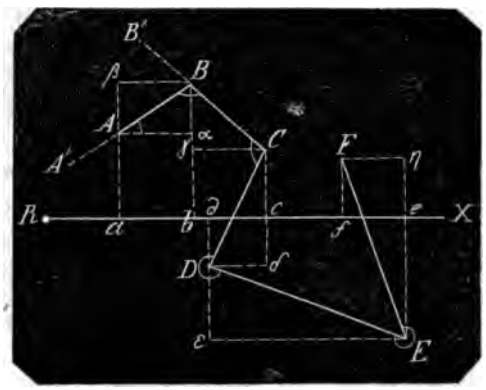
$$fg = \angle FEE' = A+B+C+D+E+F-10R$$

Ist fg positiv, so liegt der Schneidungspunkt zwischen FY und AX links, ist fg negativ, rechts der gebrochenen Linie.

6. $ABCDEF$ ist eine gebrochene Linie, RX eine beliebige Abscissenlinie, R der Anfangspunkt der Coordinaten; es sollen die Coordinaten der Eckpunkte $A, B, C\ldots$ aus den Längen $AB, BC, CD\ldots$ der Theillinien und den Winkeln bestimmt werden, welche diese Theillinien unter sich oder mit der Abscissenlinie bilden.

Zu diesem Behuf sind die Theillinien in allen möglichen Lagen gegen die Abscissenlinie gewählt. Fällt man nun die Lothe Aa, $B\beta\ldots$ auf die Abscissenlinie, zieht die mit derselben parallelen $A\alpha, B\beta\ldots$, bestimmt den Anfangspunkt R der Abscissen durch die Länge $Ra = a'$; bezeichnet den Winkel zwischen BA und RX (von BA rechts bis auf RX) also $\angle BA\alpha$ mit A, den Winkel zwischen CB und BA (von CB rechts bis auf BA) also $\angle CBA$ mit B, die eben so gemessenen Winkel in den übrigen Eckpunkten mit C, D, E, so ist

Fig. 655.



$$\begin{aligned}
ab &= AB\cos AB\beta = AB\cos A\\
bc &= C\gamma = BC\cos BC\gamma = BC\cos(2R-A-B) = -BC\cos(A+B)\\
cd &= D\delta = CD\cos CD\delta = CD\cos DC\gamma = CD\cos(C-BC\gamma)\\
&= CD\cos(A+B+C-2R) = -CD\cos(A+B+C)\\
de &= E\varepsilon = DE\cos DE\varepsilon = DE\cos ED\delta = DE\cos(4R-D-CD\delta)\\
&= DE\cos(4R-D-DC\gamma) = DE\cos(6R-A-B-C-D) = -DE\cos(A+B+C+D)\\
ef &= F\eta = EF\cos EF\eta = EF\cos FE\varepsilon = EF\cos(4R-E+DE\varepsilon) = EF\cos(4R-E+ED\delta)\\
&= EF\cos(10R-A-B-C-D-E) = -EF\cos(A+B+C+D+E)
\end{aligned}$$

Bezeichnet man nun, wie Ra mit a', so Rb mit b', Rc mit c' u. s. w., so hat man

$$\begin{aligned}
Ra &= a'\\
Rb &= b' = a'+ab = a'+AB\cos A\\
Rc &= c' = b'+bc = a'+AB\cos A - BC\cos(A+B)\\
Rd &= d' = c'-cd = a'+AB\cos A - BC\cos(A+B) + CD\cos(A+B+C)\\
Re &= e' = d'+de = a'+AB\cos A - BC\cos(A+B) + CD\cos(A+B+C)\\
&\qquad - DE\cos(A+B+C+D)\\
Rf &= e'-ef = a'+AB\cos A - BC\cos(A+B) + CD\cos(A+B+C) - DE\cos(A+B+C+D)\\
&\qquad + EF\cos(A+B+C+D+E) \quad (6)
\end{aligned}$$

woraus das allgemeine Gesetz der Fortschreitung hervorgeht.

7. Es stimmt dies Resultat vollkommen überein mit Formel 3 (No. 3, Fig. 653) für H, wenn man die Ordinaten aA und fF, Fig. 655 als die einschliefsenden End-

parallelen AX und FY (Fig. 653) betrachtet, wenn man also $H = af$ setzt; al ist nämlich $\angle BA\alpha = A'$ für $\angle AB\beta = A$ in Fig. 655 zu nehmen, wenn die ü Winkel B, C, D, E in beiden Figuren übereinstimmen sollen.

Man hat demnach

$$\cos A = \cos AB\beta = \cos BA\alpha = \cos(A' - 90°) = \sin A' \cos(A + B) = \cos(A' + B - \\ = \sin(A' + B)$$

u. s. w.

folglich

$$Rf = f' = a' + H = a' + AB \sin A' - BC \sin(A' + B) + CD \sin(A' + B + C) \\ - DE \sin(A' + B + C + D) + EF \sin(A' + B + C + D + E$$

8. Construirt man Fig. 655 die Aufsenwinkel wie No. 2, Fig. 654, ist als αA die Parallele RX gedacht)

$$\angle \alpha AA' = \alpha = 2R - A$$
$$\angle ABB' = \beta = 2R - B$$

u. s. w.

so ist wie No. 4:

$$A = 2R - \alpha$$
$$A + B = 4R - (\alpha + \beta)$$
$$A + B + C = 6R - (\alpha + \beta + \gamma)$$
$$A + B + C + D = 8R - (\alpha + \beta + \gamma + \delta)$$
$$A + B + C + D + E = 10R - (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon)$$

hieraus

$$ab = AB \cos(2R - \alpha) = -AB \cos\alpha$$
$$bc = -BC \cos(4R - \alpha - \beta) = -BC \cos(\alpha + \beta)$$
$$cd = -CD \cos(6R - \alpha - \beta - \gamma) = +CD \cos(\alpha + \beta + \gamma)$$
$$de = -DE \cos(8R - \alpha - \beta - \gamma - \delta) = -DE \cos(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$$
$$ef = EF \cos(10R - \alpha - \beta - \gamma - \delta - \varepsilon) = +EF \cos(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon)$$
$$Rf = a' - AB \cos\alpha - BC \cos(\alpha + \beta) - CD \cos(\alpha + \beta + \gamma) - DE \cos(\alpha + \beta + \gamma + \\ - EF \cos(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon)$$

Beispiel. Es sei

$AB = 4$; $BC = 5$; $CD = 6$; $DE = 7$; $EF = 8$

$A = 30°$ also $\alpha = 150°$
$B = 90°$ „ $\beta = 90°$
$C = 110°$ „ $\gamma = 70°$
$D = 270°$ „ $\delta = -90°$
$E = 340°$ „ $\varepsilon = -160°$

Aus Formel 6 und 8 erhält man reducirt:

$$Rf = a' + 4 \cos 30° + 5 \cos 60° - 6 \cos 50° + 7 \cos 40° - 8 \cos 60°$$

Aus Formel 7 hat man, weil $A' = 120°$ ist:

$$Rf = a' + AB \sin 120° - BC \sin 210° + CD \sin 320° - DE \sin 590° + EF \sin 930$$
$$= a' + 4 \sin 60° + 5 \sin 30° - 6 \sin 40° + 7 \sin 50° - 8 \sin 30°$$
$$= a' + 4 \cos 30° + 5 \cos 60° - 6 \cos 50° + 7 \cos 40° - 8 \cos 60°$$

9. Um das Gesetz der Ordinaten zu erhalten hat man gegeben

$$Aa = a''$$
$$Bb = Aa + B\alpha = Aa + AB \sin A$$
$$Cc = Bb - B\gamma = Bb - BC \sin BC\gamma = Bb - BC \sin(2R - A - B) = Bb - BC \sin($$
$$= Aa + AB \sin A - BC \sin(A + B)$$
$$Dd = -(C\delta - Cc) = Cc - C\delta = Cc - CD \sin CD\delta = Cc - CD \sin(A + B + C - $$
$$= Cc + CD \sin(A + B + C)$$
$$= Aa + AB \sin A - BC \sin(A + B) + CD \sin(A + B + C)$$
$$Ee = Dd + (-D\varepsilon) = Dd - DE \sin DE\varepsilon = Dd - DE \sin(6R - A - B - C - D)$$
$$= Dd - DE \sin(A + B + C + D) = Aa + AB \sin A - BC \sin(A + B) + CD \sin(A + \\ - DE \sin(A + B + C + D)$$
$$Ff = E\eta - (-Ee) = E\eta + Ee = Ee + EF \sin EF\eta = Ee + FF \sin(10R - A - B - C - \\ = Ee + EF \sin(A + B + C + D + E)$$

$$= Aa + AB\sin A - BC\sin(A+B) + CD\sin(A+B+C) - DE\sin(A+B+C+D) + EF\sin(A+B+C+D+E) - \ldots.$$

u. s. w.

Das Beispiel ad No. 8 gibt

$Aa = a''$

$Bb = Aa + 4\sin 30°$

$By = 5\sin(30°+90°) = 5\sin 120° = 5\sin 60°$

daher

$Cc = Aa + 4\sin 30° - 5\sin 60°$

$-Cd = 6\sin(30°+90°+110°) = 6\sin 230° = -6\sin 50°$

daher

$Dd = Aa + 4\sin 30° - 5\sin 60° - 6\sin 50°$

$-D\varepsilon = -7\sin 500° = -7\sin 40°$

daher

$Ee = Aa + 4\sin 30° - 5\sin 60° - 6\sin 50° - 7\sin 40°$

$E\eta = 8\sin 840° = 8\sin 60°$

daher

$Ff = Aa + 4\sin 30° - 5\sin 60° - 6\sin 50° - 7\sin 40° + 8\sin 60°$

10. Sollen die Ordinaten durch die Aufsenwinkel angegeben werden, so ist nach No. 4:

$$Ff = Aa + AB\sin(2R-\alpha) - BC\sin(4R-\alpha-\beta) + CD\sin(6R-\alpha-\beta-\gamma) - DE\sin(8R-\alpha-\beta-\gamma-\delta) + EF\sin(10R-\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon)$$

also

$$Ff = Aa + AB\sin\alpha + BC\sin(\alpha+\beta) + CD\sin(\alpha+\beta+\gamma) + DE\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta) + EF\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon) \quad (10)$$

Für das obige Beispiel hat man

$$Ff = Aa + 4\sin 150° + 5\sin 240° + 6\sin 310° + 7\sin 220° + 8\sin 60°$$
$$= Aa + 4\sin 30 - 5\sin 60° - 6\sin 50° - 7\sin 40° + 8\sin 60°$$

Gefäfsbarometer, s. u. Barometer, Bd. I., pag. 321.

Gegebene Gröfsen, s. v. w. bekannte Gröfsen; diese werden zu gegebenen Gröfsen, wenn aus ihnen Unbekannte gefunden werden sollen.

Gegenbewegung ist Bewegung nach entgegengesetzter Richtung.

Gegendreieck ist das einem gegebenen Kugeldreieck, wenn man dessen Seiten zu vollen Kreisen verlängert, diametral gegenüber entstehende ihm congruente Dreieck.

Gegendruck ist der Druck, der als Widerstand aus dem einen Druck empfangenden Körper hervorgerufen wird und den der drückende Körper gegenseitig empfängt. Hat der gedrückte Körper das Vermögen einen gröfseren Druck zu entwickeln als er empfängt, so bleiben beide Körper in Ruhe; der dynamische Zustand beider Körper heifst Spannung. Hat der Körper nicht die Fähigkeit einen so hohen Druck entgegen zu setzen als er empfängt, so weicht der Körper dem Ueberschufs an Druck, es entsteht Bewegung; der Ueberschufs der Kraft ist die bewegende Kraft und die Spannung beider Körper ist gleich dem geringeren Gegendruck.

Gegenfüfsler, s. v. w. Antipoden.

Gegengewicht ist ein Gewicht, welches die bewegende Kraft eines anderen Gewichts vermindern oder ganz aufheben oder auch eine abwechselnd rückgängige Bewegung hervorbringen soll.

Eine Last, die über einer Rolle an einem Seil herabgelassen wird, würde allein thätig immer schneller und schneller fallen; es wird daher auf der entgegengesetzten Seite durch Zugkräfte entsprechend gehemmt und zu Erleichterung der Hemmung daselbst ein Gewicht, also ein Gegengewicht angebracht, welches nun um so viel aufsteigt als die Last sinkt.

Bei den früheren einseitigen Dampfmaschinen drückte der Dampf den Kolben herab und mit demselben das eine Ende des Balanciers; an dem anderen Ende desselben war ein Gegengewicht, welches hiermit in die Höhe gezogen wurde. Hatte der Kolben den tiefsten Stand erreicht, so wurde der Dampf im Kessel abgesperrt, der in den Kolben geleitete Dampf in die freie Luft gelassen, das Gegengewicht hatte nun die Kraft zu fallen, die Balancierseite herab und den Kolben zu neuem Angriff des Dampfes wieder in die Höhe zu ziehen.

Bei den Gewichtsuhren bildet das Pendel mit der Hemmung das Gegengewicht zu augenblicklich gänzlicher Aufhebung der Kraft des Gehgewichts.

Gegenschattige, s. Antiscii.

Gegenschein, s. u. Aspecten und Con-

junction. G. ist der Kalenderausdruck für Opposition.

Gegenwirkung ist die einer ursprünglichen Wirkung entgegengesetzte Wirkung. Zwei gleich grofse Kräfte nach geraden entgegengesetzten Linien oder Richtungen wirkend heben einander auf, sie bleiben in Ruhe, sie befinden sich blofs in Spannung. Ist eine Kraft gröfser als die andere so geschieht nach der Richtung der gröfseren mit dem Ueberschufs an Kraft d. h. mit der Differenz beider Kräfte als bewegende Kraft eine Bewegung.

Ein Körper vom Gewicht P und der Geschwindigkeit C hat das Bewegungsvermögen $P \cdot C$; trifft er einen ruhenden Körper vom Gewicht p, so setzt dieser ihm eine Wirkung entgegen, die Geschwindigkeit des ersteren Körpers wird vermindert, der Körper p wird dafür in die Bewegung mit hineingeführt und da von dem ursprünglichen Bewegungsvermögen nichts verloren gehen kann, so ist bei einer beiden Körpern gemeinschaftlichen Geschwindigkeit c

$$(P+p)\,c = P \cdot C$$

folglich die gemeinschaftliche neue Geschwindigkeit

$$c = \frac{P}{P+p} \cdot c$$

Vergleiche den Art. Gegengewicht.

Gegenwohner, s. s. Antoëci.

Geist ist das Regierende der Natur. Eine Natur ohne den sie regierenden Geist zu denken ist unmöglich. Der Geist, etwas Nichtkörperliches, von dessen Beschaffenheit wir keinen Begriff, sondern nur hypothetische Vorstellungen haben, die je nach den Richtungen des Gedanken- und Auffassungssystems eines jeden einzelnen Menschen eben so vielfach verschieden sein können, mufs offenbar die ganze Natur durchdringen, so dafs nicht Gott in der Welt sondern die Welt in Gott ist, der als Geist in seiner Continuität durch keine Körperlichkeit und nirgend unterbrochen wird, also allgegenwärtig, allwissend und somit fähig durch die That überall augenblicklich einzugreifen.

Die Naturkräfte können betrachtet werden als Richtungen oder Theile dieses allgemeinen Geistes zur Regierung willenloser Dinge nach Gesetz.

Gemäfsigte Zonen sind die beiden Zonen auf der Erdoberfläche, welche parallel mit dem Aequator zwischen den Wendekreisen und den ihnen zunächst liegenden Polarkreisen sich befinden; so genannt wegen der hier herrschenden mittleren Temperatur zwischen der kalten jenseits der Polarkreise und der heifsen zwischen beiden Wendekreisen.

Die mathematische Geographie bestimmt die Polarkreise als diejenigen, deren Peripherien von der Axe der Ekliptik und die Wendekreise als diejenigen, welche von der Ebene der Ekliptik berührt werden. Die Ekliptik durch den Erdmittelpunkt gelegt.

Gemeinschaftliches Maafs ist ein Maafs, mit welchem mehrere Dinge derselben Art gemessen werden. Das allen Dingen derselben Art g. M. ist deren Einheit: die Zahlen 10, 15 haben 5 und 1 zum g. M.; die Zahlen 3, 10, 15 haben das einzige gemeinschaftliche (ganze) Maafs in der Einheit 1.

Incommensurable Gröfsen haben mit commensurabelen Gröfsen kein g. M., z. B. 4 und $\sqrt{3}$. Dagegen können incommensurable Gröfsen untereinander ein g. M. haben. Z. B. $\sqrt{6}$ und $\sqrt{15}$ haben das g M. $\sqrt{3}$. Es ist nämlich

$$\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3} \text{ und } \sqrt{15} = \sqrt{5} \times \sqrt{3}$$

Aus diesem Grunde haben 2 gleiche Catheten mit der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks kein g. M.

Gemeinschaftlicher Theiler ist ein gemeinschaftliches Maafs zweier oder mehrerer Zahlen. Es wird in der Arithmetik oft nach dem gröfsten g. T. mehrerer gegebener Zahlen gefragt. Dieser kann nicht gröfser sein als die kleinste der gegebenen Zahlen und man hat mit dieser also in die anderen zu dividiren, wenn man dieselbe als Theiler versuchen will.

Von den Zahlen 7, 91, 135 findet man 7 als den gröfsten (und einzigen) g. Th. Denn es ist $7 = 7 \cdot 1$; $91 = 7 \cdot 13$ und $105 = 7 \cdot 15$

Zwischen den Zahlen 14, 133, 182 kann wegen der ungeraden mittleren Zahl die Zahl 14 kein Theiler sein und da $14 = 2 \cdot 7$, so ist entweder 7 der g. T. oder die Zahlen haben keinen g. T.

Man findet durch Division

$14 = 7 \cdot 2$; $133 = 7 \cdot 19$; $182 = 7 \cdot 26$

Um den g. T zweier oder mehrerer Zahlen zu finden ist demnach das einfachste Mittel, die kleinste gegebene Zahl in ihre Primfactoren zu zerlegen.

Sind die Primfactoren nicht sogleich zu übersehen, so dividirt man die gröfsere Zahl durch die kleinere; wenn die Division ohne Rest nicht aufgeht, so dividirt man die kleinere Zahl durch den

sofort den vorhergegangenen
ırch den erhaltenen letzten Rest
einen Rest behält; dieser letzte
dann der gröfste gemeinschaft-
ler zwischen beiden Zahlen und
ritte gröfseste Zahl noch gege-
ird der gröfste g. T. mit letz-
durch Division mit dem so
tenen Theiler untersucht. Z. B.
n 9737 und 20202

$$\text{t } \frac{20202}{9737} = 2 + \frac{728}{9737}$$

$$\text{t } 20202 = 2 \times 9737 + 728$$

ich kann zwischen 9737 und
ein Theiler existiren, der zu-
eiler zwischen 728 und 9737
leshalb ist mit 728 in 9737 zu
Man erhält

$$\frac{9737}{728} = 13 + \frac{273}{728}$$

ım kann zwischen 728 und 9737
hen 9737 und 20202 kein Thei-
en, der nicht zugleich Theiler
273 und 728 ist. Man erhält

$$\frac{728}{273} = 2 + \frac{182}{273}$$

schränkt sich wieder die Auf-
die Untersuchung des gröfsten
chen den Zahlen 182 und 273.

$$\frac{273}{182} = 1 + \frac{91}{182}$$

$$\frac{182}{91} = 2$$

ist 91 der gröfste g. Th.

	zwischen	91 und	182
auch	zwischen	182 und	273
auch	zwischen	273 und	728
auch	zwischen	728 und	9737
auch	zwischen	9737 und	20202

t 9737 = 91 × 107 und 20202
, vergl. Bruch No 5.

ıt ist in der Mathematik was
ichartigen Theilen zusammen-

mischter Bruch ist ein un-
ıch, der als ganze Zahl + einem
ruch dargestellt ist. Z. B. $5\frac{1}{4}$
einen und unächten Bruchs $\frac{21}{4}$.

emischte ebene Figur ist
r, die von geraden und krum-
en oder aus krummen Linien,
rschiedene Bildungsgesetze zu
egen, als Seiten eingeschlos-

chte Mathematik nennt man auch wohl die angewandte *M*, weil Naturgesetze und Erfahrungen darüber mit den reinen Lehren der Mathematik in Verbindung vorkommen.

Gemischte Verhältnisse sind solche Verhältnisse, die aus ungleichnamigen einfachen Verhältnissen zusammengesetzt sind, als die durch Multiplication gewonnenen Endverhältnisse bei der Regel quinque, der Kettenrechnung u. s. w.

Gemischte Zahl ist eine Zahl, die aus ganzen und gebrochenen Zahlen zusammengesetzt ist, also in so fern gleichbedeutend mit gemischtem Bruch; auch eine Zahl die aus rationalen und irrationalen Gliedern besteht, als $3 + \sqrt{5}$ ist eine gemischte Zahl.

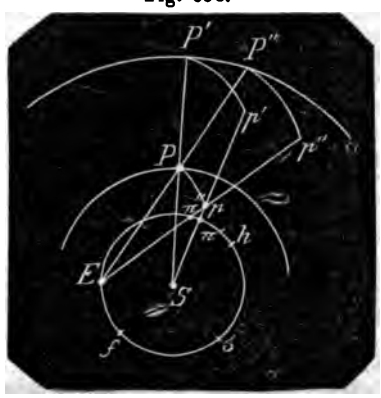
Generalnenner, s. Addition No. 6 und Bruch No. 6.

Genetische Erklärung, genetische Definition ist Sacherklärung, Erklärung von dem Entstehen des Begriffs. z. B. eine Kugel entsteht, indem ein Halbkreis um seinen Durchmesser sich herumdreht.

Geocentrisch ist was sich auf den Mittelpunkt der Erde bezieht, im Gegensatz zu heliocentrisch, was sich auf den Mittelpunkt der Sonne bezieht; beide Beziehungen für Planeten genommen.

Es sei *Efsh* die Ekliptik, *E* ein augenblicklicher Standort der Erde darin, *S* in deren Mittelpunkt die Sonne, *P* ein Planet; die Kreislinie, in der sich *P* befindet sei seine Bahn, welche gegen die Ebene der Ekliptik geneigt ist und sie in 2 Punkten, den Knotenpunkten schneidet, die äufsere Kreislinie eine gröfste Kreislinie des scheinbaren Himmelsgewölbes. Von *E* aus sieht man *P* in der

Fig. 656.



geraden Linie *EP* und der Ort des Planeten scheint in *P''* zu sein; von der Sonne aus sieht man den Planeten in der geraden Linie *SP* und versetzt seinen Ort in *P'*; es ist somit *P'* der heliocentrische und *P''* der geocentrische Ort des Planeten.

Denkt man sich die Ebene der Ekliptik bis in die scheinbare Himmelskugel erweitert, so fälle den lothrechten Bogen *Pp* auf dieselbe und *p* ist der reducirte Ort des Planeten. Von der Sonne *S* aus wird derselbe in *p'* gesehen, da wo der lothrechte von *P'* auf die Ekliptik gefällte Bogen *P'p'* dieselbe schneidet, und von der Erde *E* aus wird der Ort *p* in *p''* gesehen, dem Endpunkt des von *P''* in der Himmelskugel auf die Ebene der Ekliptik gefällten Lothes *P'' p''*. Beide Linien *Sp'* und *Ep''* schneiden die Ekliptik *Efsh* in den Punkten *n'* und *n''*. Ist demnach *f* der Frühlingspunkt, so ist Bogen *fsn'* die heliocentrische und Bogen *fsn''* die geocentrische Länge des Planeten *P*.

Geodäsie, s. v. w. Feldmefskunst Ein Theil derselben ist in dem Art. Baculometrie vorgetragen. Zusammengesetzte Vermessungen geschehen mit Hülfe von Winkel-Instrumenten, s. Boussole. Sollen Vermessungen sehr genau werden, so bedient man sich der Theodoliten als Winkelmesser. Man mifst eine möglichst lange gerade Linie; bei coupirtem Terrain nivellirt man sie auch, um deren Horizontalprojection zu erhalten und verbindet mit deren beiden Endpunkten 2 oder mehrere Hauptlinien zu Dreiecken indem man die Winkel an den Endpunkten der vermessenen Grundlinie mifst und die anderen Seiten trigonometrisch berechnet. Die Details zwischen den Hauptlinien werden dann mit Kette und Stäben vermessen und aufgetragen. Zwei oder mehrere neue Hauptlinien werden dann mit den berechneten Dreiecksseiten wiederum zu Dreiecken verbunden und so weiter auf dieselbe Weise fortgefahren.

Geoden in einem Fossil sind die im Innern mit Krystallen besetzten Höhlungen.

Geographische Breite, s. Breite, geographische.

Geographische Länge eines Orts der Erdoberfläche ist der in dem Breitenkreise des Orts nach Graden gemessene Abstand des Orts von einem bestimmten beliebig gewählten ersten Meridian.

So wie für die astronomische Länge die Ekliptik der Grund- oder Normalkreis ist, so ist es für die geographische Länge der Erdaequator. Dieser hat aber nirgend eine Auszeichnung für den Nullpunkt wie die Ekliptik in dem Frühlingspunkt und daher kann man jeden beliebigen Punkt des Aequators dazu nehmen. Es kommt ferner hinzu, dafs jeder beliebige mit dem Aequator parallele Breitenkreis, der wie jener in 360 Grade getheilt wird, durch die von Pol zu Pol über den Aequator hinweg zu führenden Meridiane mit dem Aequator überall in Betreff der Längenbestimmung einerlei Beziehung hat, so dafs in jedem beliebigen Breitenkreis ein beliebiger Punkt als Nullpunkt, also der zu diesem Punkt gehörende Meridian als der erste angenommen werden kann.

Ein solcher erster Meridian ist für Frankreich durch Befehl Ludwigs XIII. vom 25. April 1634 derjenige, welcher die äufserste Westküste der Insel Ferro berührt und von den meisten Staaten als solcher angenommen worden, woher dieser erste Meridian der Ferro'sche Meridian heifst.

Es hat sich später ergeben, dafs dieser Meridian von der Pariser Sternwarte 20° 2′ 30″ westlich liegt und man ist übereingekommen, den Ferro'schen Meridian genau 20° westlich von dem der Pariser Sternwarte anzunehmen, so dafs eigentlich dieser pariser Meridian die Norm gibt und der Ferro'sche Meridian unbestimmt und nur dem Namen nach vorhanden ist. Daher kommt es, dafs der Pariser Meridian auch als der erste vielfach angenommen wird, so z. B. geschieht dies in Ritters geographisch-statistischem Lexicon; in Littrows Verzeichnifs geographischer Ortsbestimmungen (Gehlers physikalisches Wörterbuch Bd. X., am Schlufs).

In den neuesten Zeiten hat man auch angefangen, den Meridian der Greenwicher Sternwarte als den ersten anzunehmen; dieser liegt 2° 20′ 23″ westlich von dem Pariser.

Die Längen werden in der Regel nur bis 180° gezählt und je nachdem ein Ort östlich oder westlich von einem der ersten Meridiane liegt, hat derselbe östliche oder westliche Länge.

Der Pariser Meridian ist 20° östlich, der Greenwicher 17° 39′ 37″ östlich von dem Ferro'schen Meridian.

Der Ferro'sche Meridian ist 20° westlich, der Greenwich'sche 2° 20′ 23″ westlich von dem Pariser Meridian.

Der Ferro'sche Meridian ist 17° 39′ 37′

estlich, der Pariser 2° 20′ 23″ östlich
on dem Greenwicher Meridian.

Die alte Sternwarte von Berlin hat
on Ferro 31° 3′ 23″ östliche Länge
on Paris 11° 3′ 23″ „ „
on Greenwich 13° 23′ 46″ „ „

Die neue Sternwarte von Berlin hat
on Ferro 31° 3′ 30″ östliche Länge
on Paris 11° 3′ 30″ „ „
on Greenwich 13° 23′ 53′ „ „

Die geogr. Länge zwischen zweien Or-
n der Erde mifst man mit einer richti-
en Uhr, wenn man die Zeit der Culmi-
ation eines Fixsterns in beiden Orten
obachtet. Die Differenz beider Zeit-
unkte gibt das Zeitmaafs der Länge,
elches in Bogenmaafs verwandelt wird,
dem 4 Zeitminuten einen Grad Länge
eben.

Geographische Meile ist festgestellt
orden auf den 5400ten Theil des Erd-
equator-Umkreises, so dafs eine geogr.
leile = ist $\frac{360^\circ}{5400} = \frac{1}{15}$ des Aequatorgrades,
der dafs ein Aequatorgrad 15 geogr. Mei-
en enthält. Da es schwierig ist, Län-
engradmessungen genau zu erhalten, so
st auch die g. M. verschieden angegeben
orden.

Nach der neuesten genauen Ermitte-
ung des Grades im Aequator beträgt
ieser 57106,442 Toisen, also

die geogr. Meile = 3807,09 Toisen
= 7420,158 Meter
= 0,9850 876 prfs. Meilen
= 1970,1752 prfs. Ruthen
= 23642,1 preufs. Fufs.

Geomechanik ist die Wissenschaft von
er Bewegung fester Körper, s. d. Art.
ngewandte Mathematik, Bd. I.,
ag. 72.

Geometer ist ein der Geometrie Kun-
iger, gebräuchlich ist auch die Bezeich-
ung für Feldmesser.

Geometrie ist diejenige Disciplin der
athematik, welche sich mit den Raum-
öfsen beschäftigt. Da der Raum in
ner bis drei Dimensionen gegeben wird,
ist die natürlichste Eintheilung der
in die Longimetrie, in die Pla-
metrie und in die Stereometrie,
mlich in die Wissenschaft der Raum-
öfsen von einer von zweien und von
l Dimensionen.

Man macht aber diesen Unterschied
ht in diesem Sinne. Man hat eine
ementargeometrie, die Lehre von
jenigen Linien, Flächen und Körpern,
deren Natur einfache Untersuchungen zu-
lassen: Von den Linien nämlich die ge-
rade und die Kreislinie, von den Flächen
die Ebenen und die krummen Flächen,
welche von der Kreislinie erzeugt wer-
den, und von den Körpern diejenigen,
deren Oberflächen Ebenen und die aus
der Kreislinie hervorgehenden krummen
Flächen sind. Dieser letzte Theil der
G. ist die Elementar-Stereometrie;
sie behandelt die vieleckigen Körper, den
Cylinder, den Kegel und die Kugel.

Die höhere Geometrie beschäftigt
sich mit den krummen Linien, deren
Formen andere sind als der Kreis und
die aus gegebenen Gesetzen hervorgehen,
mit den von diesen Linien eingeschlos-
senen Ebenen und Flächen und mit den
Körpern, deren Oberflächen aus jenen
krummen Linien erzeugt werden.

Die Geometrie wird synthetisch und
analytisch behandelt. Die synthetische
Behandlung besteht darin, dafs die ge-
gebenen Raumgröfsen zusammengesetzt,
getheilt und in Gröfse und Form mit
einander verglichen werden, wie dies im
Euklid stattfindet. Die analytische Be-
handlung besteht darin, dafs die Gröfsen
auf Einheiten zurückgeführt, mit der Ein-
heit verglichen und als Vielfache derse-
ben, also als Zahlen betrachtet werden,
mit denen nun gerechnet wird. (Vergl.
algebraische und analytische Geometrie).

Meine Ansicht über die Weise wie die
Elementargeometrie mit Hülfe eines ein-
facheren Lehrgebäudes vorgetragen wer-
den könnte, s. d. Art. Axiom.

Geometrisch ist was zur Geometrie
gehört.

Geometrisch ähnlich, s. u. Aehnlich,
2, pag. 30.

Geometrische Analysis ist die Bezeich-
nung des analytischen Verfahrens oder
der analytischen Methode, um geome-
trische Constructionen zu erfinden; heut
unsere analytische Geometrie, s. d.
und analytische Auflösung, analytische
Methode.

Geometrische Auflösung ist die Auf-
lösung einer Rechenaufgabe mit Hülfe
der geometrischen Gröfsen; so sind z. B.
Bd. I., Fig. 41 bis 43, pag. 45 und 46
die geometrischen Auflösungen der Re-
chenexempel 3 Fufs × 4 Fufs; 4′ × 3′ 5″
und 3′ 5″ × 2′ 2″.

Geometrischer Beweis eines Satzes ge-
schieht nur mit Hülfe vorangegangener
anerkannter geometrischer Wahrheiten

durch deren Verbindung und Schlufsfolgen und ohne Hülfe der Arithmetik.

Geometrische Construction ist die Auflösung einer geometrischen Aufgabe durch Zeichnung.

Geometrische Construction der Gleichungen, s. Construction der Gleichungen, Bd. II., pag. 120.

Geometrische Curven und Flächen sind solche, deren Form dadurch gegeben ist, dafs sämmtliche Punkte derselben ihrer Lage nach einem gemeinschaftlichen Gesetz unterworfen sind.

Geometrische Gröfsen sind die Raumgröfsen.

Geometrischer Körper ist ein körperlicher Raum im Gegensatz zu physischem Körper, der mit Stoff angefüllte Raum.

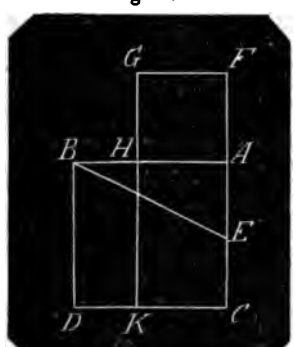
Geometrische Methode der Alten für die Auflösung der geometrischen Aufgaben ist wie noch bei dem heutigen Standpunkt der Mathematik der Fall ist, zweierlei: synthetisch und analytisch. Die erstere Methode besteht in der Beschreibung der nach und nach erforderlichen Zeichenarbeiten bis zur Vollendung der Auflösung und dem hierauf folgenden Beweis für die Richtigkeit der Operationen zu dem geforderten Zweck.

Die zweite analytische Methode ist jetzt die Anwendung der analytischen Geometrie; die Alten jedoch kannten dieselbe noch nicht und verfuhren mit der Construction wie mit einem umgekehrt zu führenden Beweis.

Als Beispiel gelte die Aufgabe in dem Art.: Analytische Auflösung, Euklid 2. Buch, 11. Satz:

Eine gegebene gerade Linie (AB) so zu schneiden, dafs das unter der ganzen (AB) und einem (BH) der beiden Abschnitte (AH, BH) enthaltene Rectangel (BK) dem Quadrate (FH) des übrigen Abschnitts (AH) gleich sei.

Fig. 657.



Die synthetische Auflösung Euklids ist folgende:

Beschreibe von AB das Quadrat $ABCD$, halbire AC in E und ziehe BE. Verlängere CA nach F bis $EF = EB$, beschreibe von AF das Quadrat FH und verlängere GH bis K, so ist AB in H so geschnitten, dafs $AB \times BH =$ Quadrat von AH.

Denn da CA in E halbirt und ihr die AF gerade fort angesetzt ist, so ist (2, 6. Satz).

$$CF \times AF + \square(AE) = \square(EF) = \square(EB)$$

Nun ist $\angle BAE = K$

und daher $\square(EB) = \square(AB) + \square(AE)$

folglich ist

$$CF \times AF + \square(AE) = \square(AB) + \square(AE)$$

folglich wenn man $\square(AE)$ wegnimmt

$$CF \times AF = \square(AB)$$

oder weil $AF = FG$

auch $FK = AD$

folglich wenn man AK wegnimmt

$$FH = HD$$

Nun ist

$FH = \square(AH)$ und $HD = DB \times BH = AB \times BH$

folglich ist $AB \times BH = \square(AH)$

Die analytische Methode würde mit Benutzung des eben aufgeführten Satzes (Euklid 2. B., 6. Satz) etwa folgender sein:

Gesetzt es wäre H der Theilungspunkt der Linie AB, so zeichne die Quadrate AD über AB und AG über AH, verlängere GH bis K so wäre

Rectangel $BK = AB \times BH$

Quadrat $AG = \square(AH)$

hierzu Rectangel $AK = AK$

gibt Quadrat $BC =$ Rect. CG

oder $\square(AC) = CF \times AF$

Nun ist nach 2. Buch, 6. Satz, wenn AC in E halbirt wird

$$\square(EF) = CF \times AF + \square(AE)$$

zieht man nun BE so ist

$$\square(AB) + \square(AE) = \square(BE)$$

Also $\square(EF) + \square(AB) + \square(AE)$

$= CF \times AF + \square(BE) + \square(AE)$

also $\square(EF) + \square(AB) = CF \times AF + \square(BE)$

Ist also $\square(EF) = \square(BE)$

so ist auch $\square(AB) = CF \times AF = CG$

Hiervon $AK = AK$

bleibt Rect. $BK = \square(AH)$

oder $AB \times BH = \square(AH)$

Damit diese verlangte Theilung der raden Linie AB geschehe, muſs dem- ch $BE = EF$ sein und die von Euklid rgenommene Construction ist durch s eben beobachtete analytische Verfah- n aufgefunden.

Geometrisches Mittel zwischen zweien röſsen ist die Quadratwurzel aus deren roduct. Ist $b^2 = a \cdot c$, so ist b das g. M. wischen a und c.

Geometrischer Ort ist eine Linie oder ine Fläche, welche als Grenze beobachtet, llen Linien, Flächen und Körpern der- elben Art irgend eine Eigenschaft ge- einschaftlich macht.

Z. B. Alle Dreiecke von einerlei Grund- inie und einerlei Höhe haben gleichen Flächeninhalt. Ist nun die Grundlinie $= a$ und der Inhalt F gegeben, so ist die n a erforderliche Höhe $h = 2\frac{F}{a}$. Zieht man daher mit der Grundlinie a eine Parallele von unbegrenzter Länge in dem Abstand $2\frac{F}{a}$, so ist diese der geome- trische Ort für die Spitzen sämmtlicher Dreiecke von einerlei Grundlinie a und einerlei Flächeninhalt F. Dreht man diese Linie um die Grundlinie bis in ihre ur- sprüngliche Lage, so erhält man einen Cylindermantel für denselben geometri- schen Ort.

Soll der geometrische Ort für Dreiecke von einerlei Grundlinie und einerlei Win- kel an der Spitze angegeben werden, so beschreibt man um das Dreieck einen Kreis und man hat in dem zwischen der Grundlinie und der Spitze befindlichen Bogen den g. O. für die Spitzen sämmt- licher Dreiecke der genannten gemein- schaftlichen Eigenschaft, weil sämmtliche Winkel an der Spitze Peripheriewinkel in demselben Kreisbogen sind.

Eine mit einer ebenen Grundfläche pa- rallele Ebene ist der g. Ort für alle Pris- men oder Kegel von einerlei Grundebene und einerlei körperlichem Inhalt.

Um den g. O. zu finden, dafs die von 2 gegebenen Punkten A, B an jeden be- liebigen Punkt desselben gezogenen ge- raden Linien zusammengenommen immer die Länge a erhalten, hat man über AB ein gleichschenkliges Dreieck ABC zu be- schreiben, in welchem die Schenkel $AC = BC = \frac{1}{2}a$ sind. Nimmt man dann C als Scheitelpunkt der kleinen Axe, A, B als Brennpunkte und construirt nach ig. 256, Bd. I., pag. 418, die Ellipse, so t diese der verlangte g. O.

Geometrische Progression, s. geome- trische Reihe.

Geometrische Proportion ist die Gleich- heit zweier geometrischen Verhältnisse: 2 verhält sich geometrisch zu 5 wie 4 zu 10, denn die Quotienten $\frac{2}{5}$ und $\frac{4}{10}$ beider Verhältnisse sind einander gleich. Man vereinigt beide gleichen Verhältnisse zu einer Proportion und schreibt:

$$2 : 5 = 4 : 10$$

und wie man $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ hat, so hat man auch

$$2 \times 10 = 5 \times 4 = 20$$

überhaupt in jeder geometrischen Pro- portion

$$A : B = a : b$$

wo also die Quotienten $\frac{A}{B}$ und $\frac{a}{b}$ bei- der Verhältnisse einander gleich sind, hat man aus diesem Grunde oder durch arith- metische Operation

$$Ab = aB$$

d. h. das Product der äufseren Glieder ist gleich dem Product der inneren Glie- der. Aus diesem Grunde ist jede Pro- portion mehrfach umzustellen.

Wenn $A : B = a : b$

so ist auch $A : a = B : b$

$B : A = b : a$

$B : b = A : a$

$a : b = A : B$

$a : A = b : B$

$b : a = B : A$

$b : B = a : A$

2. Sind die beiden inneren Glieder oder die beiden äufseren einander gleich, wie

$$A : C = C : D$$

oder

$$D : E = F : D$$

so heifst die Proportion eine stetige geometrische P. und das gleiche Glied heifst das geometrische Mittel oder die mittlere geometrische Propor- tionale zwischen den beiden anderen Gliedern.

Es ist $C^2 = A \cdot D$ also $C = \sqrt{A \cdot D}$

$D^2 = E \cdot F$ „ $D = \sqrt{E \cdot F}$

Vergl. „arithmetische Propor- tion“.

3. Sind mehrere Proportionen mit Wie- derholung von Gliedern gegeben als:

$A : B = a : b$

$B : C = b : c$

$C : D = c : d$

so ist auch $A : C = a : c$

$A : D = a : d$

$B : D = b : d$

Man schreibt daher auch solche Proportionen zusammenhängend

$$A:B:C:D = a:b:c:d$$

und sagt, die Gröſsen stehen in fortlaufender oder in geordneter Proportion.

4. Die ersten Elementaraufgaben aus der Lehre von den geometrischen Proportionen sind in dem Vorigen schon gelöst: nämlich

A. Aus 2 gegebenen gleichen Producten eine Proportion zu bilden. Dies geschieht, indem man die beiden zu dem einen Product gehörenden Factoren zu äuſseren, die zu dem andern Product gehörenden zu inneren Gliedern macht:

Aus $a \cdot b = A \cdot B$

entsteht $a : A = B : b$

oder $A : a = b : B$

B. Aus zwei gegebenen geometrischen Verhältnissen oder Quotienten zwei gleiche Producte zu bilden, welches die umgekehrte Operation erfordert; denn

aus $\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$ oder $a : b = A : B$

entsteht $aB = Ab$.

C. Aus drei gegebenen Gliedern a, b, c einer geometrischen Proportion das 4te Glied zu finden, oder wie man sagt: zu 3 gegebenen Zahlen die vierte geometrische Proportionale zu finden:

Nennt man das 4te Glied x, so ist

$$a : b = c : x$$

woraus $bc = ax$

also $x = \frac{b \cdot c}{a}$

D. Sind 2 der 3 gegebenen Glieder einander gleich, z. B. a, b, b, so findet man das 4te Glied einer stetigen g. P. oder man findet zwischen 2 gegebenen Gröſsen a, b die 3te geometrische Proportionale x aus $a : b = b : x$

oder $b^2 = ax$

mit $x = \frac{b^2}{a}$

E. Zwischen 2 gegebenen Zahlen a, b findet man endlich die mittlere geometrische Proportionale x in der Quadratwurzel des Products

denn da $a : x = x : b$

so ist $x = \sqrt{ab}$

5. Folgende Sätze sind mit Hülfe ganz einfacher arithmetischer Operationen als richtig abzuleiten, oder indem man die Producte der äuſseren und inneren Glieder bildet als richtig nachzuweisen.

Wenn $A : B = a : b$

so ist

1. $nA : nB = na : nb$
2. $A : nB = a : nb$
3. $nA : B = na : b$
4. $A : B = na : nb$
5. $nA : nB = a : b$
6. $\frac{A}{n} : \frac{B}{n} = \frac{a}{n} : \frac{b}{n}$
7. $A : B = \frac{a}{n} : \frac{b}{n}$
8. $\frac{A}{n} : \frac{B}{n} = a : b$
9. $A : \frac{B}{n} = a : \frac{b}{n}$
10. $\frac{A}{n} : B = \frac{a}{n} : b$
11. $A : nB = \frac{a}{n} : b$
12. $A : \frac{B}{n} = na : b$
13. $An : B = a : \frac{b}{n}$
14. $\frac{A}{n} : B = a : nb$
15. $An : Bn = \frac{a}{n} : \frac{b}{n}$

. . . . . .

$$A^n : B^n = a^n : b^n$$

$$\sqrt[n]{A} : \sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$$

6. Wenn $A : B = a : b$

so ist auch

$$nA \pm mB : pA \pm qB = na \pm mb : pa \pm qb$$

denn aus $A : B = a : b$

folgt $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$

also auch $\frac{A}{B} \pm \frac{m}{n} = \frac{a}{b} \pm \frac{m}{n}$

oder $\frac{nA \pm mB}{nB} = \frac{na \pm mb}{nb}$

Ebenso $\frac{A}{B} \pm \frac{q}{p} = \frac{a}{b} \pm \frac{q}{p}$

oder $\frac{pA \pm qB}{pB} = \frac{pa \pm qb}{pb}$

Die Gleichung 1 durch Gl. 2 div gibt

$$\frac{nA \pm mB}{pA \pm qB} \times \frac{pB}{nB} = \frac{na \pm mb}{pa \pm qb} \times \frac{pb}{nb}$$

Nun ist $\frac{pB}{nB} = \frac{pb}{nb} = \frac{p}{n}$

die letzte Gleichung durch $\frac{p}{n}$

$$\frac{nA \pm mB}{pA \pm qB} = \frac{na \pm mb}{pa \pm qb}$$

die behauptete Proportion ist:

ın hat aus dem vorstehenden all-
en Satz über die Bildung neuer
ionen aus einer gegebenen ein-
in der Summe oder Differenz der
Vielfachen des ersten und zwei-
edes zur Summe oder Differenz
derselben Vielfachen des dritten und vier-
ten Gliedes eine grofse Anzahl einfache-
rer abzuleiten

Wenn $A : B = a : b$

so ist 1. $A : A \pm B = a : a \pm b$

2. $A : A \pm nB = a : a \pm nb$

3. $A : nA \pm mB = a : na \pm mb$

u. s. w.

Beispiele.

Da $5 : 10 = 1 : 2$

so ist auch $5 : 10 \pm 5 = 1 : 2 \pm 1$

und $5 : 5 + 3 \cdot 10 = 1 : 1 + 3 \cdot 2$

$$2 \times 5 + 3 \times 10 : 4 \times 5 - 10 = 2 \times 1 + 3 \times 2 : 4 \times 1 - 2$$
$$40 : 10 = 8 : 2$$

folgenden Proportionen soll die
nnte x gefunden werden:

$$15 + x : x = 6 : 1$$

hat $15 + x - x : x = 6 - 1 : 1$

$$15 : x = 5 : 1$$
$$5x = 15$$

also $x = 3$

2. $8 - x : 3 = x : 1$

hier ist $8 - x + x : 3 + 1 = x : 1$

oder $8 : 4 = x : 1$

woraus $x = 2$

3. $3x + 5 : 10x - 1 = 13 : 8$

n hat $3x + 5 - \frac{3}{10}(10x - 1) : 3x + 5 = 13 - \frac{3}{10} \cdot 8 : 13$

$$\frac{53}{10} : 3x + 5 = \frac{106}{10} : 13$$

$$1 : 3x + 5 = 2 : 13$$

ın ist $1 : 3x + 5 - 5 \cdot 1 = 2 : 13 - 5 \cdot 2$

$$1 : 3x = 2 : 3$$
$$x = \tfrac{1}{2}$$

Wenn die gleichnamigen Glieder
er Proportionen mit einander mul-
; werden, so entsteht aus den 4
ten wieder eine geometrische Pro-
.

n $A : B = a : b$

$C : D = c : d$

$E : F = e : f$

. . . . . .

$A \cdot C \cdot E \ldots : B \cdot D \cdot F \ldots = a \cdot c \cdot e \ldots : b \cdot d \cdot f \ldots$

ı es ist $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$

$\frac{C}{D} = \frac{c}{d}$

$\frac{E}{F} = \frac{e}{f}$

. . . . . .

$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} \cdot \frac{E}{F} \ldots = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \ldots$

woraus $ACE : BDF = ace : bdf$

Dieser 8te Satz gibt das Mittel, aus n gegebenen Proportionen n unbekannte Gröfsen zu finden:

Z. B. Gegeben sind die beiden Proportionen:

$$5 + 2x : 3y = 3 : 7$$
$$y : 7x = 1 : 2$$

beide Proportionen mit einander multiplicirt entsteht

$$(5 + 2x)\, y : 21xy = 3 : 14$$

also mit y die beiden ersten Glieder dividirt:

$$5 + 2x : 21x = 3 : 14$$

oder $5 + 2x : 3x = 3 : 2$

oder $3(5 + 2x) - 2 \cdot 3x : 3x = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 : 2$

oder $15 : 3x = 5 : 2$

oder $5 : x = 5 : 2$

woraus $x = 2$

Setzt man nun in die gegebene zweite

Proportion für x den Werth 2, so erhält man

$$y : 7 \times 2 = 1 : 2$$

woraus $y = 7$

9. Wenn $A : B = a : b = \alpha : \beta =$ u. s. w., so ist auch

$$A + a + \alpha + \ldots : B + b + \beta + \ldots = A : B = a : b = \ldots.$$

denn aus $A : B = a : b$

ist $A : a = B : b$

und nach No. 7

$$A + a : B + b = a : b = \alpha : \beta$$

hieraus $A + a : \alpha = B + b : \beta$

wieder aus No. 7:

$$A + a + \alpha : \alpha = B + b + \beta : \beta$$

u. s. w.

z. B. da $1 : 2 = 3 : 6 = 4 : 8 = 7 : 14$

so ist auch

$$1 + 3 + 4 + 7 : 2 + 6 + 8 + 14 = 1 : 2$$

oder 15 : 30 = 1 : 2

10. Hat man n Gröfsen a, b, c ... und deren Verhältnisse untereinander durch $n - 1$ Proportionen bestimmt gegeben, so kann man aus denselben eine fortlaufende Proportion bilden. Zuerst bestimmt man das Verhältnifs nur einer der Gröfsen zu jeder aller übrigen, hierauf verwandelt man durch Multiplicationen alle dieser einen Gröfse zukommenden Verhältnifszahlen in eine gemeinschaftliche Zahl und bestimmt dieser gemäfs das Verhältnifs der Gröfse zu den übrigen.

Soll eine fortlaufende Proportion zwischen 6 Gröfsen a, b, c, d, e, f gebildet werden, so müssen zwischen denselben 6 Verhältnisse bekannt sein: z. B.

1. $a : b = 1 : 3$
2. $c : d = 2 : 5$
3. $e : f = 7 : 4$
4. $e : b = 11 : 10$
5. $d : f = 5 : 9$

Hier kommen die Gröfsen c, d, e, f zweimal vor.

Schreibt man No. 4: $b : e = 10 : 11$

und multiplicirt mit No. 1; oder dividirt man 1 durch 4, so erhält man

6. $a : e = 10 : 33$

diese Proportion mit No. 3 multiplicirt und reducirt

7. $a : f = 35 : 66$

No. 5 umgekehrt geschrieben und mit 7 multiplicirt oder 7 durch 5 dividirt und reducirt

8. $a : d = 21 : 22$

diese Proportion durch No. 2 dividirt

9. $a : c = 105 : 44$

Man hat demnach

$a : b = 1 : 3$
$a : c = 105 : 44$
$a : d = 21 : 22$
$a : e = 10 : 33$
$a : f = 35 : 66$

Die kleinste Zahl für die Factoren von a: 1, 105, 21, 10, 35 ist die Zahl 210. Man hat demnach:

$a : b = 210 : 630$
$a : c = 210 : 88$
$a : d = 210 : 220$
$a : e = 210 : 693$
$a : f = 210 : 396$

woraus die fortlaufende Proportion

$a : b : c : d : e : f = 210 : 630 : 88 : 220 : 693 : 396$

11. Es gibt Gröfsen, die in zusammengesetzten Verhältnissen stehen. Z. B. die Werthe zweier Waaren in Beziehung auf Menge und Güte. Die Werthe von Gebäuden in Beziehung auf Dimensionen, auf die Werthe der dazu verwendeten Materialien, auf Alter und Abnutzung, auf Abgaben, Lage, Ertrag u. s. w. Stehen nun 2 Gröfsen in solchen vielfachen geometrischen Verhältnissen, so verhalten sie sich überhaupt wie die Producte der Verhältnisse.

Verhalten sich z. B. 2 Gröfsen A und B in einer Beziehung wie $a : b$, in einer zweiten Beziehung wie $\alpha : \beta$ so verhalten sie sich überhaupt wie $a \cdot \alpha : b \cdot \beta$; und haben dieselben noch Beziehungen $a' : b'$, $a'' : b''$ u. s. w., so verhalten sie sich überhaupt wie $aa'a''\alpha : bb'b''\beta$.

Denn denkt man sich eine Gröfse E, die für jede einzelne Beziehung die Einheit = 1 ist, so ist für die erste Beziehung A das $a$fache von $E = aE$, für die zweite Beziehung wird dieses aE das αfache von $E = a\alpha E$ u. s. w. Ebenso ist B das $b\beta$fache u. s. w. von E und es ist überhaupt

$$A : B = a \cdot \alpha \ldots. : b \cdot \beta \ldots.$$

Z. B. die Geldwerthe zweier Aecker A, B verhalten sich

in Bezug auf Gröfse $A : B = 2 : 5$
„ „ „ Bonität $= 6 : 7$
„ „ „ erforderliche Arbeitskräfte $= 1 : 3$
„ „ „ die Transportkosten zum Markt $= 5 :$

so verhält sich der summarische Werth von $A : B = 2 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 5 : 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 1 = 4 :$

Geometrische Reihe. Reihe und ge-ometrische Reihe sind in dem Art. Arithmetische Reihe, Bd. I., pag. 118 erklärt. Sie besteht in einer Reihenfolge von Zahlen, von welchen jede 2 nebeneinander stehenden in einerlei geometrischem Verhältnifs sich befinden; wie bei der arithmetischen Reihe heifsen auch hier die einzelnen Zahlen der Reihe Glieder, die von einem beliebig gewählten ersten Gliede ab mit den Stellenzahlen als 2, 3, 4 ... $n$tes Glied bezeichnet werden. Die der ganzen Reihe zugehörige Verhältnifszahl je zweier aufeinander folgender Glieder heifst der Exponent; und wenn man ein beliebiges $n$te Glied durch den Exponent dividirt, so erhält man das ihm unmittelbar vorhergehende $(n-1)$te Glied. Wenn die aufeinander folgenden Glieder immer gröfser werden, so heifst die Reihe steigend oder wachsend; wenn sie immer kleiner werden, fallend oder abnehmend.

2. Bezeichnet man das erste Glied einer g. R. mit a, den Exponent mit e, so hat man das allgemeine Schema einer g. R.

$$a \cdot ae \cdot ae^2 \cdot ae^3 \cdot ae^4 \ldots . ae^{n-1} \cdot ae^n \ldots .$$

Ist $e > 1$, so ist die Reihe wachsend, ist $e < 1$ so ist die Reihe abnehmend. a ist das erste, ae das zweite, ae^2 das dritte überhaupt ae^{n-1} das $n$te Glied. Bezeichnet man dies mit u so ist

$$u = e^{n-1} \cdot a \qquad (1)$$

3. Um die Summe S der ersten n Glieder einer g. R. zu finden, multiplicire dieselbe mit e.

Dann ist

die einfache Reihe $a + ae + ae^2 + ae^3 + \ldots . ae^{n-1} = S$
die efache Reihe $ae + ae^2 + ae^3 + ae^4 + \ldots . ae^n = eS$

Zieht man die obere Reihe von der unteren ab, so heben sich bis auf das übrigbleibende erste Glied a sämmtliche Glieder der oberen Reihe mit den Gliedern der unteren Reihe auf, so dafs nur das $n$te Glied ae^n übrig bleibt und es ist

$$ae^n - a = eS - S$$

oder $$a(e^n - 1) = S(e - 1)$$

woraus

$$S = \frac{e^n - 1}{e - 1} a = \frac{e^n a - a}{e - 1} = \frac{eu - a}{e - 1} \qquad (2)$$

Ist das erste Glied a, das letzte Glied u und der Exponent e gegeben, so erhält man aus Gleichung 1:

$$(n-1) \log e = \log u - \log a$$

woraus $$n = \frac{\log u - \log a}{\log e} + 1 \qquad (3)$$

Ist $e < 1$, so schreibt man

$$S = \frac{1 - e^n}{1 - e} a = \frac{a - eu}{1 - e} \qquad (4)$$

In folgender Reihe

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512

ist nach Formel 1 das 10te Glied

$$u = 2^9 \cdot 1 = 512$$

die Summe der ersten 10 Glieder ist nach Formel 2

$$S = \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} \cdot 1 = \frac{2 \cdot 512 - 1}{2 - 1} = 1023$$

In folgender Reihe:

$$1 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{1}{16} \cdot \tfrac{1}{32} \cdot \tfrac{1}{64} \cdot \tfrac{1}{128} \cdot \tfrac{1}{256} \cdot \tfrac{1}{512}$$

ist das 10te Glied nach Formel 1.

$$u = (\tfrac{1}{2})^9 \cdot 1 = \tfrac{1}{512}$$

Die Summe der ersten 10 Glieder nach Formel 4

$$S = \frac{1 - (\frac{1}{2})^{10}}{1 - \frac{1}{2}} \cdot 1 = \frac{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{512}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1023}{512} = 2 - \frac{1}{512}$$

4. In jeder Reihe kann die Anzahl der Glieder bis ins Unendliche fortgesetzt werden. Bei jeder steigenden Reihe ist das letzte Glied ∞ grofs und die Summe ist ∞ grofs. Bei einer fallenden Reihe ist das letzte Glied = Null zu setzen.

In der obigen Reihe

$$1 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{8} \ldots . .$$

ist man sodann nach Formel 4

$$S = \frac{1 - (\frac{1}{2})^{\infty}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2} \cdot 0}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

5. Die Einschaltung von Gliedern s. den Art. Einschalten No. 12.

Geometrischer Rifs ist die genaue Zeichnung eines Gegenstandes nach seinen Dimensionen, wie er sich der Anschauung gemäfs auf einer Ebene als Bild darstellen würde, in der Regel in verjüngtem Maafsstabe.

Geometrischer Schritt ein selten zur Anwendung kommendes Maafs von 5 Fufs.

Geometrisches Verhältnifs zwischen

zwei Zahlen ist die Angabe das Wievielfache die eine Zahl von der andereñ ist, während arithmetisches V. die Angabe ist um wie viel Einheiten die eine gröfser oder kleiner ist als die andere.

Geordnet ist was einer Ordnung gemäfs dargestellt ist.

Geordnet sind in Combinationen die Elemente, wenn sie der Ordnung des Alphabets gemäfs aufgestellt werden. Bei den gegebenen 5 Elementen *a*, *b*, *c*, *d*, *e* sind die möglichen Combinationen der 4ten Klasse

abcd, *abce*, *abde*, *bcde*

geordnet.

acbd, *bcea* u. s. w. sind ungeordnete Elemente.

Folgende Permutationen sind geordnet.

abc, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*

In einer anderen Reihenfolge würden sie nicht geordnet sein.

Folgende Variationen sind geordnet:

aaa, *aab*, *aba*, *abb*; *baa*, *bab*, *bba*, *bbb*

In einer anderen Folge sind sie ungeordnet.

Geordnete Gleichungen, s. u. Algebraische Gleichungen, No. 4, pag. 48.

Geostatik, s. u. Angewandte Mathematik, pag. 72.

Gerade hat in der Mathematik vielerlei Bedeutungen, s. d. folgenden Artikel und die zu gerade gehörenden Hauptwörter.

Gerade Aufsteigung und Absteigung, s. u. Aufsteigung und Absteigung eines Gestirns, pag. 180.

Gerader Kegel ist ein Kegel, dessen Axe auf der Grundebene winkelrecht steht.

Gerade Linie kann man eigentlich nicht anders erklären, als: sie ist eine Linie, welche gerade ist.

Euklid sagt in seiner 2ten Erklärung: Eine Linie ist eine Länge ohne Breite, und in der 4ten: Eine gerade Linie ist, welche zwischen den in ihr befindlichen Punkten auf einerlei Art liegt. Diese Erklärung pafst aber auch auf die Kreislinie: Es wird auch die gerade Linie erklärt, dafs sie mit ihrem kleinsten Theil ganz gegeben ist; aber auch dies findet bei jeder Kreislinie statt. Man stellt in Lehrbüchern als Grundsatz auf: Zwischen 2 Punkten ist nur eine gerade Linie möglich und nicht eine zweite. Diesen Grundsatz kann man zu einer Erklärung umformen und sagen: Eine gerade Linie ist diejenige Linie, welche zwischen zweien Punkten nur einmal vorhanden ist; allein diese Erklärung wäre offenbar zu abstract.

Als Sacherklärung kann folgende gelten: Eine gerade L. ist die einzige Linie welche, wenn man sie zwischen zweien ihrer Punkte um sich selbst dreht keinen geschlossenen Raum beschreibt, sondern dieselbe Linie bleibt. Alsdann wäre hiermit zugleich nachgewiesen, dafs zwischen zwei Punkten nur eine einzige gerade Linie möglich ist.

Der Einfachheit einer geraden Linie wegen ist es auch keine Aufgabe: eine g. L. zu zeichnen; nach Euklid schon ist es nur eine Forderung, so wie die zweite Forderung bei ihm, eine begrenzte gerade Linie stetig gerade zu verlängern.

Gerades Parallelogramm ist ein P., bei welchem die Seiten gegenseitig einander normal sind.

Gerades Parallelepipedum und **gerades Prisma** ist ein solches P., bei welchem die Seitenkanten auf der Grundebene normal stehen.

Gerade Zahl ist eine Zahl, welche durch 2 ohne Rest theilbar ist; doppelt gerade oder geradgerade wurde früher eine Z. genannt, die durch 4 ohne Rest theilbar ist; so wie ungeradgerade, die durch 4 dividirt den Rest 2 läfst.

Geradlinig heifsen Figuren, die von geraden Linien begrenzt werden.

Gesammtdifferenzial oder **Totaldifferenzial** im Gegensatz zu Theil- oder Partialdifferenzial einer Function, s. Differenzial No. 45, pag. 273.

Geschoben oder **verschoben** nennt man bisweilen Vierecke mit schiefen Winkeln also die Rhomben und die Rhomboide.

Geschwindigkeit ist der in irgend einer Zeiteinheit zurückgelegte Weg. Weg ist die Länge, um welche ein Punkt oder eine Masse sich fortbewegt; G. findet also nur statt wo Bewegung ist. Die Zeiteinheit wählt man der Natur der Bewegung angemessen: Man hat G. in einer Secunde, in einer Minute, in einer Stunde, in 24 Stunden oder einem Tage, in einem Jahre, in 100 Jahren. Den Weg drückt man in Längeneinheiten aus: in Linien, Zollen, Fufsen, Schritten, Ruthen, Metern, Knoten, Toisen, Meilen. Das Licht hat die G. von cc. 42000 geogr. Meilen in einer Secunde; von einem Eisenbahn-Personenzug sagt man, er habe eine G. von 6 preufs. Meilen in einer Stunde.

Bei gleichförmiger Bewegung eines

leibt die G. immer dieselbe. So egt sich die Erde um ihre Axe constanten Zeit von 24 Stunden, ikt des Aequators hat also eine G. von 5400 geogr. Meilen in en. Bei ungleichförmiger Be- st die G. in jedem Augenblick gung eine andere: Beim freien s Körpers ist die G. im ersten :k des Falles, die Anfangsge- ligkeit = Null; sie wächst mit genden Augenblick und die End- ligkeit ist am gröfsten. Bei egungen ist die Anfangsgeschwin- n gröfsten, die Endgeschwindig- geringsten; beim senkrecht auf- ichteten Wurf wird die Endge- keit = Null und zugleich zur eschwindigkeit für den nun er- senkrecht abwärts gerichteten

etig beschleunigter und verzö- wegung wird unter Geschwin- in Weg verstanden, der nicht st und der nur berechnet wer- t. S. darüber den Art.: „At- Fallmaschine", Bd. I., pag. s: „Ein drittes Gesetz" u. s. w.; „Bewegung, gleichförmig unigte," pag. 352; den Art. ung, ungleichförmig ver- che", pag. 356.

irtueller Geschwindigkeit man die G., welche aus einer g in Folge einwirkender Kräfte ien würde, wenn nicht andere räften entgegengesetzt wirkende e Bewegung hinderten.

lgen die Angaben einiger Ge- keiten in preufs. Fufsen per

schwindigkeit		
llsten Ströme höch-		
. . . . .	13	pr. Fufs
gen Windes. . .	10	„ „
as	über 50	„ „
is höchstens . .	120	„ „
kräftiger Hand ge-		
ir Stein	50	„ „
ugel ⅛" Durchmes-		
einer Windbüchse		
em Lauf mit 100		
omprimirter Luft		
ehler höchstens 654		
ufs sind	677	„ „
aus einem Militair-		
nach Gehler 1167		
ufs	1208	„ „
senkugel nach dem-		
höchstens 1500 par.		
. . . . .	1550	„ „
einer 24pfündigen Kanonen-		
kugel nach demselben		
höchstens 2300 par. Fufs	2380	pr. Fufs
des Schalls in der Luft 337½		
Meter sind	1074	„ „
in Silber 3037 Mtr. . .	9677	„ „
in Messing 3610 Mtr. . .	11500	„ „
in Kupfer 4050 Mtr. . .	12900	„ „
in Hölzern 5000 bis 6000		
Mtr. . . 15900 bis	19100	„ „
eines langsamen Fufsgän-		
gers 1 Meile in einer		
Stunde	3½	„ „
eines raschen Fufsgängers		
½ Meile in einer Stunde	6⅔	„ „
die preufsische Fahrpost 1		
Meile in 50 Minuten . .	8	„ „
von Nummerstein zu Num-		
merstein = 20° in 30 Sec.		
die preufsische Schnellpost		
1 Meile in 40 Min. . .	10	„ „
eine Chausseestein-Num-		
mer = 20° in 24 Sec.		
die preufsische Courierpost		
1 Meile in 30 Min. . .	13⅓	„ „
1 Chausseesteinnummer		
= 20° in 18 Sec.		
1 Schnellsegelschiff . . .	14½	„ „
1 Dampfschiff 3 Meilen in		
1 Stunde	20	„ „
Güterzug mit Personenbe-		
förderung in einer Stunde		
4⅔ Meilen	31⅓	„ „
1 Steinnummer 20° in		
7½ Sec.		
Personenzug in 1 Stunde		
6 Meilen	40	„ „
1 Steinnummer 20° in		
6 Sec.		
Kourierzug 1 Stunde 10		
Meilen	66⅔	„ „
1 Steinnummer 20° in		
3,6 Sec.		
die Erdoberfläche bei Dre-		
hung um ihre Axe im		
Aequator 123,136° . .	1477,6	„ „
der Erde in der Ekliptik im Mittel s. Erde.		
des Lichts nach Delambre 41935 geogr. Ml.		
nach Struve 41545	„	„

Gesellschaftsrechnung. Diese besteht in der allgemeinen Aufgabe: n Gröfsen $z, y, x, w \ldots$ zu finden, deren Summe einer gegebenen Zahl S = ist und die unter einander in gegebenen geometrischen Verhältnissen stehen.

1. Der einfachste Fall ist, wenn die Verhältnifszahlen eine fortlaufende geometrische Proportion bilden. Z. B. (Meier Hirsch, pag. 165, No. 16).

Eine Zahl a in 3 solche Theile zu zerlegen, dafs der zweite $m$mal und der

dritte $n$mal so groſs sei als der erste. Welche Theile sind es? Die Aufgabe besagt also, es sollen 3 Zahlen z, y, x gefunden werden, deren Summe $= a$ ist und die unter einander in dem Verhältnifs $= 1 : m : n$ stehen.

Wenn $z : y : x = 1 : m : n$

so hat man nach dem Art. „Geometrische Proportionen“ No. 9

$$z : z+y+x = 1 : 1+m+n$$

oder $$z : a = 1 : 1+m+n$$

Eben so $$y : a = m : 1+m+n$$

$$x : a = n : 1+m+n$$

mithin ist

$$z = \frac{a}{1+m+n};\quad y = \frac{ma}{1+m+n};\quad x = \frac{na}{1+m+n}$$

Einen Zahlenfall gibt Meier Hirsch, pag. 166, No. 19:

1170 Thaler sollen unter 3 Personen A, B, C nach Verhältnifs ihres Alters vertheilt werden. Nun ist B um den dritten Theil älter, C aber doppelt so alt als A. Wieviel erhält jeder?

Die gegebene fortlaufende Proportion ist

$$A : B : C = 1 : 1\tfrac{1}{3} : 2$$

folglich der Ansatz

$$\left.\begin{matrix} A: \\ B: \\ C: \end{matrix}\right\} \begin{matrix} 1 \\ 1170 = 1\frac{1}{3} \\ 2 \end{matrix} \left.\begin{matrix} : \\ : \\ : \end{matrix}\right\} 4\tfrac{1}{3}$$

woraus A erhält $\frac{1}{4\frac{1}{3}} \times 1170$ Thlr. $= 270$ Thlr.

B $\frac{1\frac{1}{3}}{4\frac{1}{3}} \times 1170$ Thlr. $= 360$ Thlr.

C $\frac{2}{4\frac{1}{3}} \times 1170$ Thlr. $= 540$ Thlr.

Summa 1170 Thlr.

2. Wenn die Zahlenverhältnisse in fortlaufender Proportion nicht gegeben werden, so sind dieselben in eine solche zuvor zu verwandeln, (s. „geometrische Proportionen“, No. 10).

Meier Hirsch, pag. 166, No. 22 gibt folgendes Schema:

Eine Zahl a in 3 solche Theile zu zerlegen, dafs der erste Theil (z) sich zum zweiten (y) wie $m : n$ und der zweite Theil zum dritten (x) wie $p : q$ verhalte. Diese Theile sind?

Die gegebenen Proportionen sind

$$z : y = m : n$$

$$y : x = p : q$$

das erste Verhältnifs mit p, das zweite mit n multiplicirt ergibt

$$z : y : x = mp : np : nq$$

also

$$\left.\begin{matrix} z: \\ y: \\ x: \end{matrix}\right\} \begin{matrix} mp: \\ a = np: \\ nq: \end{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} mp+np+nq$$

woraus $$z = \frac{mp}{mp+np+nq} \cdot a;\quad y = \frac{np}{mp+np+nq} \cdot a;\quad x = \frac{nq}{mp+np+nq} \cdot a$$

Ein Zahlenbeispiel gibt Meier Hirsch, pag. 166, No. 21:

Eine Schuldenmasse von 21000 Thlr. soll unter 4 Gläubiger A, B, C, D nach Verhältnifs ihrer Forderungen vertheilt werden. Nun verhält sich die Forderung des A zu der des B wie 2 : 3, die Forderung des B zu der des C wie 4 : 5 und die Forderung des C zu der des D wie 6 : 7. Wie viel erhält demnach jeder Gläubiger?

Die gegebenen Proportionen fortlaufend zu machen ist

$$A : B = 2 : 3 = 8 : 12 = 16 : 24$$

$$B : C = 4 : 5 = 12 : 15 = 24 : 30$$

$$C : D = 6 : 7 = 6 : 7 = 30 : 35$$

Man hat also

$$\left.\begin{matrix} A: \\ B: \\ C: \\ D: \end{matrix}\right\} 21000 \text{ Thlr.} = \begin{matrix} 16: \\ 24: \\ 30: \\ 35: \end{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} (16+24+30+35 = 105)$$

A erhält $\frac{16}{105} \times 21000$ Thlr. $= 3200$ Thlr.

B erhält $\frac{24}{105} \times 21000$ Thlr. $= 4800$ Thlr.

C „ $\frac{30}{105} + 21000$ Thlr. $= 6000$ Thlr.

D „ $\frac{35}{105} \times 21000$ Thlr. $= 7000$ Thlr.

Summa 21000 Thlr.

3. Die gegebenen Verhältnifszahlen können auch gemischte sein.

Beispiel. (Meier Hirsch, pag. 168, No. 33).

Eine Wittwe soll nach dem Testament ihres verstorbenen Ehemannes mit ihren 2 Söhnen und 3 Töchtern eine Summe von 7500 Thlr. theilen, und zwar soll jeder Sohn doppelt so viel bekommen wie jede Tochter, sie selbst aber gerade so viel wie ihre Kinder zusammengenommen und noch überdies 500 Thlr. Wie viel wird die Wittwe und jedes ihre Kinder bekommen?

Nennt man den Antheil der Tochter T, so sind die Verhältnisse:

3 Töchter erhalten	$3\,T$	
2 Söhne „	$4\,T$	
die Wittwe	$7\,T + 500$	
die Summe ist	$14\,T + 500$ Thlr.	
	$= 7500$ Thlr.	
	$14\,T$	$= 7000$ Thlr.

Hiernach bekommt jede Tochter 500 Thlr., jeder Sohn 1000 Thlr. und die Mutter 4000 Thlr.

Gesetz ist die Art und Weise des inneren Zusammenhanges der Elemente oder der einzelnen Theile mit der Beschaffenheit oder der Natur des Ganzen.

Die Entwickelung einer Reihe geschieht mit Beobachtung des Gesetzes, nach welchem die Glieder für die Darstellung der Reihe fortschreiten müssen. Dies Gesetz bestimmt dann die Regel oder die Vorschrift des Verfahrens dabei.

Jeder Lehrsatz in der Geometrie ist das Gesetz für die Beschaffenheit einer geometrischen Gröfse, als deren Zusammenhang mit ihren einzelnen Theilen. Z. B. der Satz, dafs die Inhalte der Dreiecke und Parallelogramme von gleichen Grundlinien und Höhen wie 1 : 2 sich verhalten.

In den dynamischen Wissenschaften kommen noch die Kraft und die Zeit als Elemente hinzu, und jede Art des Zusammenwirkens von Kräften in Zeit und Raum ergibt ein Gesetz, nach welchen dieselbe als Erscheinung sich äufsert.

Die Gesetze des freien Falls sind die summarischen Ergebnisse aus der Attraction der Erdkugel, der Entfernung des frei im Raum befindlichen Körpers von derselben und der Zeitdauer, innerhalb welcher die Attraction auf den freien Körper ohne Unterstützung im Raum einwirkt.

Gesichtsaxe, s. v. w. Augenaxe.

Gesichtsfeld ist der Raum, den man entweder mit bloſsem Auge oder mit einem Fernrohr auf einmal übersehen kann.

Gesichtskreis, s. v. w. Horizont, s. „Astronomischer Horizont".

Gestalt eines Körpers (Kryst). Diese ist regelmäfsig, wenn sie durch die Form und die gegenseitige Lage der Begrenzungsflächen mathematisch bestimmbar ist, sonst unregelmäfsig.

Gestirn ist der allgemeine Name für jeden Himmelskörper, für Fixsterne, Planeten, Trabanten und Kometen. Deren scheinbare Bahnen unter dem Aequator, den Polen und den zwischen diesen liegenden Punkten der Erdoberfläche, desgleichen deren geometrische Construction, s. u. „Aufgang und Untergang der Gestirne", Bd. I., pag. 174 mit Fig. 108 bis 111.

Die Bewegung der Gestirne ist 1. die gemeine oder tägliche Bewegung derselben, nämlich die Erscheinung ihres täglichen Auf- und Untergangs und des sichtbaren Bogens, den sie über dem Horizont am Himmel beschreiben. 2. die eigene oder besondere Bewegung, die sie aufserdem noch machen, indem sie zu derselben Zeit an verschiedenen Tagen an verschiedenen Orten des Himmels sich befinden, eine Bewegung, welche allen Planeten, Monden und Kometen eigen ist.

Dafs diese Fixsterne täglich 3 Minuten 56 Secunden von Ost nach West vorrücken ist eine scheinbare eigene Bewegung; die Ursach davon ist die eigene Bewegung der Sonne, nach welcher sie täglich von West nach Ost um 3′ 56″ zurück bleibt. Die Fixsterne haben nur gemeine Bewegung.

Gestrichelte Buchstaben. Buchstaben, welche mathematische Gröfsen bezeichnen, werden der leichteren Uebersicht wegen gestrichelt, wenn sie Gröfsen derselben Art, von demselben Zusammenhange mit anderen Gröfsen oder von demselben Gesetz bezeichnen sollen. In Fig. 224, Bd. I., pag. 352 sind die waagerechten Linien, welche als Längen die Geschwindigkeiten ausdrücken sollen, mit aa', bb', dd' ... bezeichnet, weil diese Längen einerlei Zusammenhang haben, weil sie daher, ohne dafs man nöthig hat auf die Figur zu sehen, also schneller sich niederschreiben lassen und beim Lesen schneller verstanden werden.

Meier Hirsch hat pag. 222, No. 69 folgende Aufgabe: Es sollen 3 Zahlen aus folgenden Angaben bestimmt werden: Wenn die erste zum $m$fachen der übrigen addirt wird, so ist die Summe $= a$; wird die zweite zum m'fachen der übrigen addirt, so ist die Summe $= a'$, wird aber die dritte zum m''fachen der übrigen addirt, so ist die Summe a''. Welche Zahlen sind es?

Der erste Ansatz ist:

$$x + my + mz = a$$
$$y + m'x + m'z = a'$$
$$z + m''x + m''y = a''$$

Die äufserst bequeme Bezeichnung läfst es zu, dafs man die 3 Gleichungen ansetzen kann, nachdem man die Aufgabe

nur einmal durchgelesen hat, was bei Gebrauch verschiedener Buchstaben nicht gut möglich wäre. Auch das Calcül wird dahin erleichtert, daſs keine Schreibfehler vorkommen können und das Resultat ist von den Formen, daſs man über dessen Richtigkeit kein Zweifel haben kann. Es ist, wenn

$$\frac{m}{m-1}+\frac{m'}{m'-1}+\frac{m''}{m''-1}=A$$

und $$\frac{a}{m-1}+\frac{a'}{m'-1}+\frac{a''}{m''-1}=B$$

gesetzt wird

$$x=\frac{1}{m-1}\left(\frac{mB}{A-1}-a\right)$$

$$y=\frac{1}{m'-1}\left(\frac{m'B}{A-1}-a'\right)$$

$$z=\frac{1}{m''-1}\left(\frac{m''B}{A-1}-a''\right)$$

Geviertschein, s. u. „Aspecten“, No. 3, Bd. I., pag. 131.

Gewicht eines Körpers ist die Aeuſserung der Gröſse eines Drucks, den er ruhend auf seiner Unterlage ausübt; die Gröſse seines Druckes, sein Gewicht wird durch Einheiten, Gewichtseinheiten gemessen, nämlich durch Gewichte allgemein bekannter unveränderlicher Stoffe von bestimmtem Rauminhalt und den vervielfältigten Exemplaren von Körpern anderen Stoffs, welche drückend mit derselben Gewichtseinheit sich äuſsern.

In dem Art. Attraction, No. 9, Bd. I., pag. 169 ist auseinandergesetzt, daſs die Anziehung unsres Erdkörpers, deren Sitz in dem Erdmittelpunkt zu denken ist, auf jedes Massenelement eine gleich groſse Kraft äuſsert, daſs also jedes Massenelement mit gleichem Bestreben dem Mittelpunkt der Erde sich nähern will. Dies Bestreben eines auf der Erdoberfläche frei befindlichen Elements äuſsert sich durch Fall, das eines ruhenden Elements durch Druck.

Eine so groſse Anzahl der Elemente in einem Körper angehäuft ist, so viele gleich groſse Bestrebungen sind vorhanden, die Bewegung nach dem Erdmittelpunkt zu beginnen, so groſs ist also auch die Anzahl der Elementar-Druckkräfte, die in dem Körper angehäuft sind.

Massenelemente wissen wir nicht einzeln zu unterscheiden, haben also auch keine Kenntniſs von deren Anzahl in einem Körper. Ferner sind der Atomenlehre nach die Massenelemente oder Atome von verschiedenem Gewicht, welches wir wieder nicht kennen (s. Atom, Atomgewicht, Atomvolu wichtig die Untersuchung übe Gegenstand auch ist, so liegt vorliegenden Fall nicht daran, d zelheiten zu wissen, sondern n die summarischen Druckwirkunge licher in einem Körper vereinigte d. h. das Gewicht des Körpers ren, indem dies mit dem bekan wicht eines bestimmten Körpe chen, oder in dem es als ein V einer Gewichtseinheit angegeben

Nun ist aus dem Obigen klar, Gewichte zweier Körper desselb sich nothwendig verhalten müs die in beiden Körpern befindlic senelemente, und wenn die Kö verschiedenen Stoffen sind, wie ducte aus der Anzahl der At dem Atomgewicht. Sieht man sem letzten Umstand ab, der h falls ohne alle Bedeutung ist, mit dem Verhältniſs der Gewi gleich das Verhältniſs der Masse oder mehrerer Körper gegeben, setzt in den dynamischen Wis ten deshalb auch Gewicht = Mas

2. Die Gewichtseinheit obigen Erklärung zu Folge nur a Stoff hervorgehen, der auf das G cubisch zu messen ist: der ge Stoff ist also ein unelastischer flüssiger Körper, der möglichst in unverfälschter Reinheit zu h folglich das destillirte Was dem Weingeist, Quecksilber u. s durch mühsame Arbeiten rein s ten sind. Die nothwendige Ge erfordert auch, daſs die Tempera gestellt wird, und endlich ist sches Maaſs für den Stoff festzu

Da nun das cubische Maaſs bar mit dem Längenmaaſs im menhang steht, fast jedes Land dere Längenmaaſse hat, so gibt eben so viele verschiedene Gew heiten, z. B. Pfunde als es Fuſs

So z. B. war das ehemalig fsische Pfund = dem 66ten T Gewichts eines preuſsischen K destillirten Wassers bei 15° Rea

Die neapler Libbra ist = wicht von 30 Kubik-Once destill. unter 0,76 Meter Barometerdr 12,95° Réaumur.

Das russische Pfund von 9 wird bestimmt, daſs der russisc lische) Kubikzoll destillirtes Wa 62° Fahrenheit (Normaltemperatu englische Längenmaaſs) im l Raum 368,361 Doli wiegt.

Das englische Imperial Troy-Pound von 5760 Troy-Grän hat zur Bestimmung, dafs 1 englischer Kubikzoll destillirtes Wasser bei 30 engl. Zoll Barometerstand und 62° Fahrenheit 252,458 Troy-Grän wiegt.

Das französische Normalgewicht ist das Grammengewicht; die Gramme hat das Gewicht eines Kubik-Centimeters destillirten Wassers bei 3,5° Réaumur.

Dieses letzte Grammengewicht hat die gröfste Verbreitung erhalten und man rechnet danach jetzt in Preufsen, dem ganzen Zollverein, in Dänemark, in der Schweiz, in den Niederlanden, in Belgien u. s. w. Das Pfund in diesen Ländern ist = dem halben Kilogramm = 500 Gramme, in den Niederlanden ist das Pfund (Pond) und in Belgien die Livre = dem Kilogramm = 1000 Gramme.

3. Es ist bekanntlich von grofser Wichtigkeit zu wissen, welches Gewicht ein aus einem bestimmten Stoff bestehender Körper hat, wenn dessen Rauminhalt gegeben ist; oder welch einen Raum ein Körper von gegebenem Gewicht einnehmen wird, und es ist daher die Aufgabe der Wissenschaft gewesen, die Gewichte aller im Leben vorkommenden Stoffe für eine bestimmte Kubikeinheit zu ermitteln.

Um nun diese Angaben von den so überaus verschiedenen Maafs- und Gewichtseinheiten unabhängig zu machen und zeitraubende und unsichere Gewichtsreductionen zu vermeiden, bedient sich die Wissenschaft nicht einer Gewichtseinheit, sondern einer Stoffeinheit und wiederum die eines überall in unverfälschter Beschaffenheit aufzufindenden Stoffs, nämlich des destillirten Wassers bei einer bestimmten Temperatur, von dem das Gewicht der landesüblichen Kubikeinheit in der landesüblichen Gewichtseinheit überall bekannt ist.

Das Gewicht eines Stoffs in Beziehung auf das Gewicht = 1 des destillirten Wassers als Stoffeinheit heifst das specifische Gewicht desselben Stoffs; dem gegenüber das Gewicht des Stoffs für eine Volumeneinheit in Bezug auf eine Gewichtseinheit dessen absolutes Gewicht. Ist für einen Stoff S (Eisen, Blei u. s. w.) das specifische Gewicht $= \gamma$ ermittelt, und wiegt 1 Kubikfufs destillirtes Wasser p Pfund, so ist das absolute Gewicht von 1 Kubikfufs des Stoffes $S = \gamma p$ Pfund.

4. Diese erforderlichen Gewichtsbestimmungen gehören mit zu den wesentlichsten Gründen, dafs die Gewichte des destillirten Wassers bei den verschiedenen Temperaturen im Vergleich zu dem Wasser bei 0° C. so überaus genau durch vielfache Versuche ermittelt worden sind. In dem Art. „Ausdehnung des Wassers", Bd. I., pag. 200 u. f. sind die Gröfsen der jeder einzelnen Temperatur zugehörigen Ausdehnung und Dichtigkeit tabellarisch geordnet, die specifischen und absoluten Gewichte aber verhalten sich genau direct wie die Dichtigkeiten und indirect wie die Ausdehnungen.

In der Tabelle pag. 201 bis 204 ist die Dichtigkeit und die Ausdehnung des Wassers bei 0° C. Temperatur mit 1,000... zu Grunde gelegt. Bei 20° C. ist 0,998409 die Dichtigkeit. Wird nun das specifische Gewicht des Wassers bei 0° C. = 1 gesetzt, so ist das specifische Gewicht des Wassers bei 20° C. = 0,998409.

Nach No. 2 wiegt der preufs. Kubikfufs Wasser bei 15° R. 66 alte preufs. Pfund; 15° R. sind = 18¾° C.

Das Volumen bei 19° C. ist (Tabelle) =	1,001397
Die Differenz der Volumen zwischen 18° und 19° ist 187 mithin ¾ · 187 =	0,000047
Gibt Volumen für 18¾°	1,001350

Es ist mithin das specifische Gewicht des Wassers bei 0° C. = 1,001350.

1 Kubikfufs Wasser bei 0° C. wiegt $1{,}00135 \times 66 = 66{,}08910$ alte preufsische Pfund.

4. Die Ermittelung des specifischen Gewichts fester und flüssiger Körper geschieht durch das Aräometer, das der Gase mit Hülfe von geräumigen Ballons. Der Art. „Aräometer", Bd. I., pag. 86, gibt von No. 1 bis 6 die Beschreibung und Einrichtung des A. zu Bestimmung der specifischen Gewichte tropfbar flüssiger Körper; in den folgenden Abschnitten die Theorie und die practische Anwendung desselben: No. 17 betrachtet besonders das Alkoholometer, mit welchem die Gradigkeit der Alkoholmischungen gemessen wird und pag. 97 erklärt das Gewichtsaräometer, welches von dem vorher beschriebenen Skalenaräometer darin abweicht, dafs die eintauchende Röhre nur einen Theilstrich hat, dafs unten eine Kugel angeblasen ist, in welche zur Beschwerung Schrot oder Quecksilber geschüttet wird und dafs oberhalb zu Einlegung von Gewichten eine Schale sich befindet. Soll dieses Aräometer zu Bestimmung des specifischen Gewichts fester Körper benutzt werden, so ist noch unterhalb eine Schale anzubringen, in welche der zu

untersuchende Körper behufs des Eintauchens unter Wasser gelegt werden kann, und die zu verschliefsen sein mufs, wenn derselbe leichter als Wasser ist.

Gesetzt nun man wolle das specifische Gewicht eines Körpers untersuchen, so legt man den Körper in die obere Schale und so viele kleine Gewichtstücke, in Summa das Gewicht P hinzu, bis das Aräometer bis zu dem Theilstrich in dem Wasser einsinkt, alsdann nimmt man den Körper heraus, legt in dieselbe Schale so viele Gewichtstücke in Summa von dem Gewicht p hinzu bis das Aräometer wieder bis zu demselben Theilstrich eingesenkt ist und hat mit diesem hinzugelegten Gewicht p das absolute Gewicht des Körpers. Hiernach nimmt man das Gewicht p fort, legt den Körper in die untere Schale und senkt das A. wiederum ins Wasser. Der Körper wiegt nun um so viel weniger als das Gewicht des von ihm verdrängten Wassers, und das Gewicht q, welches nun in die obere Schale gelegt werden mufs, damit das A. bis zu dem Theilstrich einsinke, ist um so viel gröfser. Es ist also $q-p$ das Gewicht des von dem Körper verdrängten Wassers und dies Gewicht verhält sich zu dem Gewicht des Körpers wie $q-p:p$. Es ist mithin das specifische Gewicht des Körpers $= \frac{p}{q-p}$.

Die Ermittelung des specifischen Gewichts von Flüssigkeiten geschieht durch einfaches Eintauchen des Aräometers in dieselben, wie dies der Art. „Aräometer" angibt.

Den specifischen Gewichten der Gase liegt das der atmosphärischen Luft als Einheit zu Grunde. Es wird ein möglichst geräumiger Ballon von dünner Glaswandung evacuirt, mit dem zu untersuchenden Gase angefüllt und direct gewogen. Wiegt nun der evacuirte Ballon Q, mit atmosphärischer Luft angefüllt $Q+p$, mit Gas gefüllt $Q+q$ so ist $\frac{q}{p}$ das specifische Gewicht des Gases.

Tabelle der specifischen Gewichte fester Körper.

Achat	2,590
Ahornholz	0,750
Alabaster	2,700
Alaun	1,714
Alaunerde	1,20—1,740
Alaunstein, derb	2,671
„ krystall.	2,694
Albit	2,53—2,630
Allanit	3,52—4,000
Aluminit	1,66—1,705
Analcim	2,086
Anatas	3,820
Andalusit	3,1—3,160
Anhydrit	2,70—2,899
Anthophyllit	3,120
Anthracit	1,4—1,480
Antimon	6,702
„ blende	4,600
„ glanz	4,660
„ oxyd	5,560—5,778
„ silber	9,440—9,820
Antimonige Säure	6,525
Apathit	3,128—3,218
Apfelbaumholz	0,793
Apophyllit	2,335
Arragonit	2,920
Arsenige Säure	3,698—3,738
Arsenik	5,760—5,960
„ kies	6,127
„ nikel	7,650
„ säure	3,39—3,698
Asbest, biegsamer	0,908—2,444
„ gemeiner	2,050—2,800
Asphalt	1,070—1,160
Augit	3,23—3,340
Auripigment (Rauschgelb)	3,480
Axinit	3,270
Balsam, peruvianischer	1,150
Barium	4,000
Baryt	3,30—4,800
Basalt	2,722—2,864
Bausteine durchschn.	2,500
Benzoë	1,063—1,090
Bergkork	0,680—0,993
Bergkrystall	2,685—2,880
Bergmehl	0,360—1,372
Bergtheer	1,130
Bernstein	1,065—1,085
„ säure	1,350
Beryllerde	2,967
Bildstein	2,810
Bimsstein	0,914—1,647
Birkenholz vom Stamm frisch	0,702
Birkenholz vom Stamm trocken	0,580
Birnbaumholz vom Stamm trocken	0,661
Bitterkalk	2,878
Bittersalz	1,750
Bitterspath	2,926
Blätterkohle	1,27—1,340
Blättertellur	7,00—8,910
Blasenoxyd	1,577
Blasenstein (menschl.)	1,700
Blei, englisches	11,600
„ deutsches	11,352—11,445
„ chromsaures	5,7—6,000
„ phosphorsaures	7,090
Bleiglanz	7,585
„ hornerz	6,080
„ oxyd, verglastes	9,277—9,500
„ spath	6,460

›xyd	8,902
›xydul	9,096—9,190
›l	6.309
ar	2,395
	4,070
en	1,126
	1,90—2,050
	2,566—2,911
	1,720
s	2,600
re, geschmolzen	1,830
krystallisirt	1,479
it	5,790
holz	1,031
ıle	1,280
in	3,69—3,760
tin	2,73—2,800
	3,201—3,252
›lz, frisch	0,852
hb. Weifsb.	
ımholz, franz.	0,912
holländ.	1,028
brasil.	1,031
fererz	5,000
	0,942
ter	0,892
	7,14—7,700
eholz	0,913
	0,986
ıc	0,9345
	1,124
	2,620
›lz, wildes	0,596
aus Palästina	0,613
indisches	1,315
amerikanisches	0,561
›utr. flufssaures)	4,700
	4,930
	0,969
	2,040
n	2,207—2,691
th	2,940
re	1,637
n.	1,320
um	1,826—3,860
lenstoff in max.	1,5767
	5,900
en	4,362
ydul	2,500
rill	3,750
h	3,34—3,440
	2,00—2,180
ıolz	0,726
ıäure	1,617
mholz	0,726
	3,858
	1,230
	1,069—1,139
	2,580
t	4,000
t	3,348
nholz, spanisches	0,644

Dachschiefer	2,67—3,500
Datolith	2,85—2,980
Diamant	3,40—3,530
Diaspor	3,430
Disthen	3,545—3,676
Drachenblut	1,196
Dysodil	1,14—1,250
Ebenholz von den Alpen	1,050
„ amerikanisches	1,331
„ indisches	1,209
„ spanisches	0,800
Edingtonit	2,710
Eibenbaum, holländisch	0,788
„ spanisches	0,807
Eichenholzkohle	1,573
Eichenkernholz, frisch	1,170
s. Sommer-Steineichen.	
Eis	0,9268—0,950
Eisen, gegossen	7,207—7,251
„ geschmiedet, brandenb.	7,600
„ englisches	7,790
„ meteorisches	7,6—7,830
„ phosphorsaures	2,660
Eisenchrom	4,498
„ hammerschlag	5,480
„ oxyd, rothes	4,93—5,240
„ oxydhydrat	3,940
„ oxydul	3,500
„ sinter	2,2—2,400
„ vitriol	1,970
Eiweifsstoff	1,0408
Elaterit	0,9—1,230
Elemi	1,083
Elfenbein	1,825—1,917
Epheuharz	1,294
Epidot	3,269—3,425
Epistilbit	2,249
Erde lehmicht{ frisch	2,066
und fest{ trocken	1,930
„ magere, trocken	1,340
„ s. Gartenerde.	
Erdkobalt	2,240
Erdpech	1,07—1,165
Erlenholz, Stamm frisch	0,788—0,800
„ „ trocken	0,586—0,660
„ Splint trocken	0,485—0,574
Eschenholz, Stamm trocken	0,845
„ Zweige „	0,734
Euklas	3,090
Fahlerz	4,79—5,100
Fahlunit	2,61—2,660
Federharz, fossiles	0,905
Feldspath	1,841—2,717
Feldsteine	2,502
Fergusonit	5,830
Fernambukholz	1,014
Fett von Ochsen	0,923
„ „ Schweinen	0,937
„ „ Hammeln	0,924
„ „ Kälbern	0,934
Feuerstein	2,594—2,700

Fichtenharz 1,073
Fichtenholz, frisch 0,546
„ trocken . . 0,370—0,498
Fliederholz, spanisches . . . 0,770
Flintglas, englisches . . 3,373—3,442
„ französisches . 3,158—3,200
„ Körners 3,341
„ Fraunhofers . . . 3,779
Flufsspath . . . . . 3,094—3,300
Franklinit 5,090
Franzosenholz 1,333
Gadolinit 4,230
Gahnit . . . . . 4,23—4,700
Gallensteinsäure . . . 0,80—1,000
Galmei 3,380
Gartenerde fest, frisch . . . 2,047
„ „ trocken . . 1,630
Gehlenit 3,020
Gelberde 2,240
Glanzerz (Schwefelsilber) . . 7,000
Glas, grünes 2,642
s. Spiegelglas, Flintglas, Krystallglas
Glaubersalz 1,470
Glaukolith 2,900
Glimmer . . . . . 2,654—2,934
Gmelinit 2,050
Gold, das reinste gegossen . 19,258
„ „ „ gehämmert 19,361
„ in Ducaten 19,352
„ französisches zu 22 Carat
gegossen 17,486
geschlagen 17,589
„ guineisches 18,888
„ in englischen Guineen . 17,629
Granat, gemeiner . . . 3,668—3,757
„ edler . . . . 3,639—4,230
Granatbaum 1,354
Granit, ägyptischer 2,654
„ gemeiner . . . 2,538—2,956
Graphit . . . . . 2,24—2,450
Griesholz 1,200
Grobkohle . . . . . 1,45—1,600
Grünspan, destillirter . . . 1,914
Guajakharz 1,205
Gummi, arabisches 1,452
„ gutti 1,482
„ lack 1,139
Gyps, dichter . . . . 1,872—2,964
„ fasriger 2,300
„ körniger . . . . 2,199 · 2,310
„ spermberger . . 2,199—2,266
„ „ gebrannter 1,810
„ „ frisch gegossen 1,292
„ „ gegossen und
ausgetrocknet 0,973
Gypsspath 2,322
Harmotom 2,390
Harnstoff 1,350
Harz, fossiles 1,046
s. Fichtenharz
Haselnufsholz 0,600
Hauyn . . . . . 2,28—2,833

Helvin 3
Hisingerit 3
Holunderbaum 0
Holz, fossiles . . . . 0,20—1
Holzkohle . . . . . 0,28—0
Honigstein . . . . . 1,58—1
Hornblende . . . . . 2,922—3
Hornsilber, chlorsaures . 4,74—5
Hühnereier 1
Hyazinth . . . . . 4,35—4
Hypersthen 3
Jamesonit 5
Jaspis . . . . . 2,358—2
Idokras . . . . . 3,08—3
Indigo 0
Jod 4
Jodkalium 3
Jodsilber 5
Iridium . . . . . 15,588—15
Ittnerit 2
Kadmium, gegossen 8
„ gehämmert . . . 8
„ oxyd 8
Käsestoff 1
Kalium 0
Kali, arseniks. 2
„ chroms. 2
„ kohlens. 2
„ schwefelsaures 2
„ talgs. 0
Kalihydrat . . . . . 1,708—2
Kalk, gebrannter 1
„ kieselsaurer . . . 2,76—2
„ phosphorsaurer . . . 3
„ salzsaurer 2
Kalkmörtel, frisch 1
„ trocken 1
Kalkspath 2
Kalkstein, dichter . . . 2,396—2
„ rüdersdorfer . . . 2
„ körniger . . 2,707—2
Kannelkohle . . . . . 1,21—1
Kaolin 2
Karpolit 2
Kiefernholz Kern, frisch, harzig 0
„ Kern u. Splint frisch 0
„ Kern trocken . . 0
„ Kern u. Splint trocken 0
„ Splint trocken 0,400—0
Kieselerde 2
Kieselkupfer 2
Kieselmalachit 2
Kieselmangan . . . . 3,50—3
Kirschbaumholz 0
Kleesäure 1
Knebelit 3
Knochen von Ochsen . . . 1
Kobalt, gegossen 8
„ gestreckt 9
„ arseniksaurer . . . 3
„ glanz 6
„ überoxyd 5

Kochsalz	2,12—2,170
Korallen	2,690
Korkholz	0,240
Korund	3,9—3,970
Kreide	2,252—2,675
„ schwarze	2,144—2,210
„ weifse	1,797—2,657
Kryolith	2,963
Kupfer, gegossen	8,788
„ gehämmert	9,000
„ draht	8,878
„ japanisches	8,434
„ erz, rothes	5,7—6,000
„ glanz	5,690
„ kies	4,160
„ lasur	3,831
„ glimmer	2,540
„ oxyd	6,09—6,400
„ oxydul	5,3—5,749
„ phosphorsaures	3,60—3,800
„ schaum	3,090
„ smaragd	2,10—3,278
„ vitriol	2,194—2,300
Labrador	2,714—2,751
Lambertsnufsholz	0,600
Laumonit	2,300
Lava	2,795—2,823
Lasulith	3,024—3,039
Leberkies	4,630
Lehm, fetter, frisch	1,664
„ erhärtet	1,516
„ mit Stroh vermischt zum Staken frisch	1,192
trocken	1,072
Leucit	2,48—2,500
Lievrit	3,82—3,990
Limonienbaum	0,703
Lindenholz	0,604
Lorbeerbaum	0,822
Magnesia	2,300
Magneteisenstein	5,090
Magnetkies	4,400
Mahagoni	1,063
Malachit	3,670—4,001
Mangan	7,00—8,013
„ glanz	3,950
„ oxyd	4,328
„ oxydul	4,720
„ überoxyd	3,69—3,760
Marmor, ägyptischer, grüner	2,668
„ baireuther	2,840
„ blankenburger	2,675
„ campanischer	2,736
„ cararischer	2,717
„ elbingeroder	2,851
„ italienischer schwarzer	2,712
„ „ weifser	2,715
„ parischer weifser	2,838
„ schlesischer. Jaspis	2,739
„ „ blauer	2,711
„ „ grüner	2,700
„ „ weifser	2,648
Marmor, schwedischer	2,725
Mastix	1,04—1,074
Mastixbaum	0,849
Mauerstein	2,000
Mauerwerk mit Kalkmörtel	
von rüdersdorfer Bruchsteinen	
frisch	2,461
trocken	2,396
von magdeburger Sandsteinen	
frisch	2,123
trocken	2,047
von Ziegelsteinen	
frisch	1,554—1,699
trocken	1,471—1,593
Maulbeerbaum	0,897
Meerschaum	1,27—1,600
Menakan	4,10—4,500
Mergel, erdiger	2,40—2,606
„ erhärteter	2,300—2,700
Mesotyp	2,249
Messing, gegossen	8,396
„ draht	8,544
Meteorstein	3,55—3,600
Milchzucker	1,534
Mispelbaum	0,944
Molybdän	7,50—8,600
„ glanz	4,590
„ säure	3,460
Monophan	2,150
Mühlenstein	2,490
Myricin	1,000
Myrthenwachs	1,010
Napthalin	1,048
Natrium	0,972
Natron, weinsteinsaures	1,744
„ alaun	1,600
„ hydrat	1,536
Nephelin	2,760
Nephrit	3,020
Nickel, gegossen	8,279
„ gestreckt	8,666
„ antimonglanz	6,450
„ überoxyd	4,846
Obsidian	2,34—2,390
Olivenbaum	0,927
Olivenit	4,400
Onyx	2,638—2,816
Opal	1,70—2,114
Ophit	2,560
Opium	1,336
Opopanax	1,622
Orangenbaum	0,705
Orthit	3,280
Osmium	10,000
Osmium-Iridiumerz	17,97—19,250
Palladium, gegossen	11,30—11,800
„ gehämmert	12,148
Pappel, s. Schwarz-, Weifspappel	
Pech	1,150
„ weifses	1,072
Pechblende	6,5—6,600
Pechkohle	1,29—1,350

Pechstein	2,210
Perlen, orientalische	2,684
„ gemeine	2,750
Petalit	2,440
Pflaumenbaum	0,785
Pharmakolith	2,640
Phosphor	1,7—1,770
„ eisen	6,700
„ kupfer	7,122
„ säure	2,687
Prikrosmin	2,59—2,660
Platin, geschmolzen	20,855
„ gehämmert	21,25—21,314
„ geprägt	21,343
„ draht	21,4—21,500
„ erz	16,0—17,7—18,940
„ staub, schwarzer	16,680
Polyhalit	2,65—2,769
Polymignit	4,800
Porphyr	2,7—2,800
Porzellan, berliner	2,293
„ chinesisches	2,385
„ französisches (Sévres)	2,146
„ meifsener	2,493
„ wiener	2,075—2,386
Prehnit	2,925
Probirstein	2,415
Pyrodmalith	3,080
Pyrorthit	2,190
Quarz	2,652
Quecksilber, deutsches	14,000
„ englisches	13,593
„ gefrornes	14,391—15,612
„ oxyd	11,0—11,290
„ oxydul	11,074
„ sublimat	5,139—5,420
Quittenbaum	0,705
Realgar	3,3—3,600
Retinit	1,07—1,350
Rhodium	11,000
Rothbuchen, Stamm, trocken	0,666—0,854
„ Splint, trocken	0,600—0,721
Rothgiltigerz	5,42—5,830
Rothtannenholz, s. Fichten.	
Rubin, orient.	3,990
Rutil	4,240
Salmiak	1,45—1,600
Salpeter	1,930
„ feuerbeständiger	2,745
Sand, gemeiner, trocken	1,638
„ aus Bächen	1,900
„ mit Wasser gesättigt	1,945
Sandarach	1,05—1,090
Sandelholz, weifses	1,041
„ rothes	1,128
„ gelbes	0,809
Sandstein	1,933—2,699
„ magdeburger	1,971—2,123
Saphir, orient.	4,29—4,830
„ brasilianischer	3,130
Saphirin	3,420
Sassafrasholz	0,
Sauerkleesäure	1,
Saussürit	3,256—3,
Schaumkalk	2,
Scheelit	6,
Schiefer	2,
„ thon	2,600—2,
Schiefspulver, gehäuft	0,
„ geschüttelt	0,
„ gestampft	1,
Sillerspath	2,
Schmergel	3,
Schrifttellur	5,
Schwarzgiltigerz	5,9—6,
Schwarzpappel, trocken	0,
Schwefel in Stangen	1,92—1,
„ gediegen	2,07—2,
„ krystallisirt	2,
„ blumen	2,
„ kies	4,60—4,
„ säure, krystallisirte wasserfreie	1,
„ wismuth	6,
Schwerspath	4,412—4,
Schwimmstein i.	0,405—0,
Selen	4,
„ blei	7,
Serpentin	2,43—2,
Silber, gegossen	10,
„ gehämmert	10,
„ glanz	6,9—7,
„ hornerz	5,55—7,
„ oxyd	7,143—7,
Skorodit	3,
Smaragd	2,678—2,
Sodalit	2,37—2,
Sommereichen, Kern, trocken	0,720 - 0,
„ Kern und Herz, trocken	0,618—0,
„ Splint, trocken	0,
„ Stamm, frisch	0,
„ Wurzel, frisch	0,
„ Zweige, frisch	0,698—0,
Speckstein	2,
Speiskobalt	6,
Spinell	3,48—3,
Stahl, geschlagen	7,
„ ungeschlagen	7,
„ kölnisches	8,
„ von engl. Feilen	8,
„ gegossen (Gufsstahl)	7,
Staurolith	3,
Steineichen, Stamm, frisch	0,99—1,
„ trocken	0,724—0,
„ Wurzel, frisch	1,008—1,
„ Zweige, frisch	0,819—0,
Steinkohle	1,232—1,
Steinsalz	2,142—2,
Stilbit	2,192—2,
Strahlkies	4,69—4,

. . . . .	3,5—3,600
mmengebunden .	0,053
mmengepreſst . .	0,125
. . . . .	3,4—3,958
ohlensaures .	3,67—3,800
chwefelsaures .	3,5 3,900
. . . . .	4,0—5,000
. . . . .	1,046
. . . . .	0,986
. . . . .	2,350
iosphorsaure . . .	3,130
, weiſses	0,550
rothes	0,498
n Kimito . . .	7,6—7,900
. . . . .	6,500
Eibenbaum	
. . . . .	6,115
uth	7,820
. . . . .	4,375
. . . . .	2,370
. . . . .	1,80—2,630
reine . . .	1,305—1,699
r	2,76—2,880
. . . . .	9,402
. . . . .	5,300
. . . . .	4,62—4,890
. . . . .	3,85—4,240
. . . . .	3,49—3,600
. . . . .	3,49—3,560
. . . . .	1,316
. . . . .	1,0—2,200
. . . . .	3,690
. . . . .	2,86—3,000
. . . . .	5,9—6,600
. . . . .	3,0—3,300
vom Stamm, trocken	0,600—0,742
. . . . .	9,000
er	3,12—3,300
r	0,556
lbes	0,965
iſses	0,969
. . . . .	2,622—2,893
. . . . .	1,5—2,000
ium	0,671
. . . . .	0,942
hn	1,933
. . . . .	2,330
z	0,585
. . . . .	1,221
. . . . .	1,327
rahm	1,900
säure	1,596—1,750
en, Stamm, trocken	0,755—0,805
erz	5,322
el, trocken .	0,529—0,810
. . . . .	2,720
gegossen . .	9,822—9,831
lanz	6,540
cker	4,360
xyd	8,449
Witherit	2,27—4,436
Wolfram	7,600
„ metall . . .	17,22—17,600
„ säure	6,120
Wollastonit	2,805
Wootz	7,665
Würfelerz	2,990
Yttererde	4,842
„ phosphorsaure . . .	4,557
„ schwefelsaure . . .	2,790
Ziegel, gebrannt . . .	1,410—2,215
Zink, gegossen	7,213
„ gehämmert	7,861
„ blüthe	3,350
„ oxyd	5,43—5,600
„ spath	4,441
„ vitriol	1,912
Zinn, englisch, gegossen . .	7,291
„ gehämmert	7,799
„ erz	6,51—6,960
„ kies	4,350
„ oxyd (Zinnstein) .	6,30—6,900
„ oxydul	6,666
Zinnober	8,090
Zirkon	4,0—4,700
„ erde	4,300
Zucker, weiſser	1,606
Zurlit	3,274

Tabelle der specifischen Gewichte tropfbar flüssiger Körper.

Aethersäure	1,0150
Alkohol	0,7920
Ameisenäther	0,9157
Ameisensäure	1,1168
Ammoniakflüssigkeit	0,8750
Anisöl	0,9958
Arsenikäther	0,6900
Arseniksäure, stärkste . . .	2,5500
Baldrianöl	0,9650
Benzoeäther	1,0540
Bergamottöl	0,8855
Bier	1,0230—1,0340
Blausäure	0,7050
Blutwasser	1,0250—1,0310
Boraxsäure	1,7770
Bucheckeröl	0,9225
Buttersäure	0,9675
Butyrin	0,9080
Cajeputöl	0,9474
Calmusöl	0,9950
Cascarillöl	0,9380
Citronenöl	0,8470—0,8517
Chloräther	1,1340
„ arsenik	6,3000
„ cyan	1,3200
„ kohlenstoff in med. . .	1,5526
„ phosphor in min. . . .	1,4800
„ säure	1,3000
„ „ oxydirte	1,6500
„ schwefel in min. . . .	1,7000

Chlorschwefel in max.	1,6280
„ stickstoff	1,6530
„ zinn	2,2500
Copaivabalsam	0,95—0,9666
Cyan, flüssig	0,9000
Delphinöl	0,9178
„ säure	0,9320
Dillöl	0,8810
Erdöl	0,75—0,8400
Essigäther	0,8660
„ säure	1,0630
„ „ concentrirte	1,0791
Essigsäurehydrat	1,0630
Fenchelöl	0,9990
Fluorarsenik	2,7300
Flussäure	1,0609
Fuselöl	0,8210
Galbanumöl	0,9165
Hanföl	0,9288
Harn	1,0110
Honig	1,4500
Hopfenöl, spanisch	0,9465
Hydriotäther	1,9206
„ säure	1,7000
Kleesäure	1,0450
Kohlenwasserstoff	0,6270
Krausemünzöl	0,9696
Kümmelöl	0,9598
„ römisches	0,9450
Kuhsäure	0,9100
Lavendelöl	0,9480
Leberthran	0,9450
Leinöl	0,9395
Mandelöl	0,9200
Melissenöl	0,9750
Milch	1,020—1,0410
Mohnöl	0,9243
Mohrrübenöl	0,8860
Muskatblüthenöl	0,9538
„ nussöl	0,9480
Naphta, ameisensaure	0,9157
Nelkenöl	1,0660
Nussöl	0,9260
Oelsäure	0,8980
„ stoff	0,9130
„ süss	1,2700
Oel des ölbildenden Gases	1,2200
Perubalsam	1,1400
Petersilienöl	1,0150
Petroleum	0,836—0,7580
Pfeffermünzöl	0,9550
Pflaumenkernöl	0,9127
Pommeranzenblüthenöl	0,9085
„ schalenöl	0,8880
Rainfarrnöl	0,9315
Rautenöl	0,9110
Repsöl	0,9136
Ricinusöl	0,9699
Rosenöl	0,8320
Rosmarinöl	0,9100
Rüböl	0,9128
Sadebaumöl	0,9155
Salbeiöl	0,9
Salpeteräther	0,9
„ naphta	0,9
„ säure	1,5130—1,5
Salpetrige Säure	1,4
Salzäther, leichter	0,9
„ säure	1,2109—1,2
Sassafrasöl	1,0
Sauerkleeäther	0,7
Schaafgarbenöl	0,9
Schwefeläther	0,7
„ blausäure	1,0
„ kohlenstoff	1,2
„ säure (Vitriolöl)	1,8
„ „ Nordhäuser	1,8
„ wasserstoff, flüssig	0,9
Seewasser	1,0
„ im todten Meer	1,2
Selensäure	2,5
Senföl	1,0
Spiköl	0,9
Steinkohlentheeröl	0,7
„ öl	0,836—0,7
Terpenthinöl	0,7920—0,8
Thran	0,9
Tymianöl	0,9
Unterschwefelsäure	1,2
Wachholderöl	0,9
Wasser	1,0
Wasserstoffüberoxyd	1,4
Wein, Bordeaux	0,9
„ Burgund	0,9
„ Canarien	1,0
„ Capwein	1,0
„ Champagner	0,9
„ französischer, weisser	1,0
„ Madeira	1,0
„ Malaga	1,0
„ Portwein	0,9
„ Rheinwein	0,9925—1,0
Weinöl, schweres	1,1
„ leichtes	0,9174—0,9
Weinsteinöl	1,2
Wermuthöl	0,9
Wurmsaamenöl	0,9
Ziegensäure	0,9
Zimmtöl	1,0

Tabelle der specifischen Gewichte Gasen. Das der atmosphäris Luft als Einheit genomme

Ammoniakgas	0,5
Arsenikwasserstoffgas	0,529 (und 2,6
Atmosphärische Luft	1,0
Chlorgas	2,4
„ kohlenoxydgas	2,4
„ oxydgas	2,3
„ oxydulgas	2,4
Chlorborgas	2,3
Chlorcyangas	2,1
Cyangas	1,8

;as	2,3709
sphor	5,9390
ıumgas	3,5735
ıures Gas . .	4,4288—4,3700
;as	4,4193
ydgas	0,9727
ures Gas	1,5240
ısserstoffgas	0,5590
ısserstoffgas, ölbildendes	0,9784
wasserstoffgas in min.	
. . . . .	0,9022—1,7610
wasserstoffgas in max.	
. . . .	0,9700, 1,214, 1,2500
s Gas	1,2474
fgas	1,1026
wasserstoffgas . . .	1,1912
saures Gas	2,2470
gas	0,9760
oxydgas	1,0393
oxydulgas	1,5270
offgas . . .	0,0688—0,0689

Tabelle
ecifischen Gewichte von
n, das der atmosphäri-
uft als Einheit genommen.

ampf . . .	1,6018—1,6133
ampf	5,1839
herdampf	5,4090
f	0,7487
ıpf	5,3934
edampf	0,9476
ınikdampf in min. .	6,3006
ndampf	2,1130
sphordampf in min. .	4,8750
iumdampf	5,9390
ndampf $Ti Cl^2$ . . .	6,8360
ıdampf $St Cl^4$ . . .	1,1997
edampf	0,9476
ırdampf	3,0670
therdampf	4,8720
f	8,6195—8,7160
ampf von Miano . .	2,8330
dampf	2,2052
erdampf	6,9760
therdampf	2,6270
saurer Dampf . . .	1,4500
dampf	2,2190
(schwerer) . .	3,4484
ätherdampf . . .	5,0870
itherdampf	2,5860
kohlenstoffdampf . .	2,6447
äuredampf	2,1204
ampf	1,0197
inöldampf	5,0130
ıpf	2,1070
ımpf	0,6200
pf	4,0530

ıtsaräometer, s. u. Aräometer, ıg. 97.

ıtsverlust ist der Verlust, den ein Körper an seinem Gewicht erleidet, wenn er in Wasser gesenkt wird. Die Erklärung davon gibt der Art. Druck, hydrostatischer, Bd. II., pag. 333, No. 2 und 3; die Ermittelung specifischer Gewichte von Körpern mit Hülfe des gefundenen Gewichtsverlustes derselben der Art. Gewicht, No. 4 Der Art. Archimedische Aufgabe, Bd. I., pag. 99 lehrt, bei gegebenen Mischungen aus 2 bestimmten Stoffen das Gewicht jedes dieser Stoffe mit Hülfe der bekannten Gewichtsverluste zu finden.

Gewölbe über einen Raum ist dessen hohle gekrümmte Decke; die Wände des Raums oder einzelne Pfeiler, auf welchen das Gewölbe ruht, heifsen seine Widerlager. Je nach der Form der Krümmung erhält das Gewölbe den speciellen Namen, jedoch nicht in geometrischer Bezeichnung, sondern im Vergleich mit Gegenständen aus dem practischen Leben mit denen das Gewölbe Aehnlichkeit hat.

Ist die Krümmung eine Halbkugelfläche oder eine Calotte, so heifst das Gewölbe Kuppel; man bedeckt mit derselben kreisförmige und viereckige Räume. Ist die Krümmung der Theil eines Cylindermantels, so heifst das Gewölbe Tonnen- oder Kufengewölbe und wenn die Decke nur einen kleinen Theil eines Cylindermantels ausmacht, Kappengewölbe. Zwei Tonnen- oder Kappengewölbe über einen Raum, die sich in scharfen Kanten überschneiden heifst Kreuzgewölbe. Werden diese Kanten zu krummen Flächen abgerundet, Muldengewölbe. Geschieht der mittlere Schluſs eines Muldengewölbes oder einer Kugel durch eine horizontale Ebene, so heifst das Gewölbe ein Spiegelgewölbe, die Ebene selbst der Spiegel. Treffen 2 halbe Tonnengewölbe in der Mitte des überdeckten Raums in einer mit beiden Widerlagern parallelen Kante zusammen, so heifst das Gewölbe Spitzgewölbe. Die unteren sichtbaren krummen Oberflächen der Gewölbe heifsen Wölbungen.

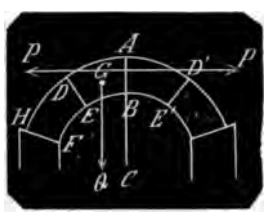
Die Gewölbe werden, abgesehen von künstlichen Holz- und Eisenconstructionen, den Bohlendächern und dergleichen, aus keilförmigen Bausteinen zusammengesetzt, der Art, daſs diese Steine eine gegenseitige Spannung auf einander ausüben, die sich bis auf die Widerlager fortpflanzt, dieselben belastet und in ihnen einen festen Halt findet. Es sind also diese gegenseitigen Wirkungen zu untersuchen erforderlich, und es soll zuerst abgehandelt werden

die Statik der Tonnengewölbe.

1. Das Tonnengewölbe hat mit dem Kappengewölbe und dem Spitzgewölbe einerlei Construction, nur in der Profilform sind sie verschieden und sie haben zugleich die gemeinschaftliche Eigenschaft, dafs in jedem Gewölbe alle lothrecht auf die ⊣ mit einander befindlichen Widerlager genommenen Profile einander ≏ sind. Es wird vorläufig angenommen, dafs das Gewölbe keinen Schlufsstein, sondern eine Fuge in der lothrechten Scheitelebene hat.

Es seien *ABDE* und *ABD'E'* die beiden obersten gleichgeformten und gleichliegenden Gewölbstücke, *A* also der Scheitel, *AB* die Scheitelfuge des Gewölbes, *DE*, *D'E'* die Lagerfugen beider Steine, mit welchen sie auf den unmittelbar darunter befindlichen Steinen ruhen, so wie von den folgenden Steinen die oberen auf den zunächst unteren ihre Stützen finden bis zum Widerlager hin.

Fig. 658.



Aus dieser Zusammensetzung schwerer keilförmiger Körper entspringen zunächst 2 gleich grofse horizontale Druckwirkungen *P*, welche die beiden obersten Steine gegenseitig auf einander ausüben, die Scheitelspannungen, die sich einander aufheben.

2. Hierauf wirken die Steine von oben nach unten bis zu den Widerlagern hin als Keile: ein oberer Stein hat das Bestreben längs seiner Lagerfuge auf dem zunächst unteren Stein herabzugleiten und diesen zum Rückgleiten nach aufsen zu veranlassen. Diese Wirkung heifst die Keilwirkung und das Gewölbe mit seinen Widerlagern mufs in seinen Abmessungen so construirt werden, dafs es dieser Wirkung widersteht, dafs es im Gleichgewicht gegen die Keilwirkung ist.

3. Ist *G* der Schwerpunkt des Gewölbestücks *ABDE*, *Q* sein in *G* zu denkendes senkrecht abwärts wirkendes Gewicht, so fällt dies Gewicht aufserhalb der Lagerfuge. Es hat also der Stein das Bestreben sich um die Kante Lagerfuge rechts nach einwärts hen und die Fuge in der Aufse *D* zu öffnen. Mit diesem Bestret offenbar das zur Drehung des Stei die Kante *A* nach links und zu Oe der Fuge *AB* in *B* verbunden. erhält das darunter befindliche G stück auf der oberen Innenkante *E* einen lothrechten Druck, theils ein rizontalen Schub und somit ein ben, nach links um *H* und auswär zu drehen. Diese Wirkung heifs Hebelwirkung; sie findet bei Gewölbstücken statt, von deren S punkten die Lothe aufserhalb der fuge fallen, sie ist bedeutender Keilwirkung und auf den Wid gegen dieselbe mufs ganz besond achtet werden. Das Gleichgewicht wölbes gegen dieselbe heifst das G gewicht gegen die Hebelwi

4. Eine zweite Hebelwirkung e durch die horizontale Scheitelsp *P*, indem diese strebt, das Gewö *ABDE* nach aufsen, nämlich um di *D* nach links zu drehen und so Fuge *DE* in *E* zu öffnen. Mit Drehung geschieht zugleich eine D des Steins um die Kante *B* nac und die Oeffnung der Fuge *AB* i

Dieselbe Wirkung entsteht du Bestreben des unteren Gewölbstücks zur Drehung um die innere Kante ner Lagerfuge nach rechts einwä durch die Kante *D* offenbar zur I für den Stein *ABDE* werden mu

Die ad 3 betrachtete erste H kung könnte demnach die Heb kung nach innen wie die zw Hebelwirkung nach aufsen werden.

5. Dadurch dafs das obere Gewi *ABDE* nach innen zu gleite entsteht in dessen Lagerfuge *DE* rizontalschub nach links. Derselt in der Kante *E* dahin wirken, d untere Stein *DEFH* um die äufs terkante *H* nach links, also nach sich dreht. Eben so kann durch C des unteren Gewölbstücks *DEF* innen der gegen die Kante *D* h hende Horizontalschub das obere stück *ABDE* zu einer Drehung Kante *D* nach links, also nach ob anlassen. Oder es kann auch da Gewölbstück *DEFH*, um die K nach innen rechts sich drehend, d Wölbstück zur Rückgleitung auf gerfuge nach der Richtung *ED*, a aufsen veranlassen.

iese hier gedachten Wirkungen
nbar Keilwirkungen und Hebel-
n vereinigt.

hier genannten Wirkungen der
ücke gegen einander um das
wicht des Gewölbes aufzuheben
enigen, welche am meisten vor-
Es gibt aber noch folgende

unteres Gewölbstück *EDFH* hat
eben um seine innere Unterkante
nach einwärts sich zu drehen,
ber befindliche Gewölbstück wi-
ihm als Hebel, erhält in seiner
Unterkante *D* eine Drehaxe, das
sich um dieselbe zu erheben,
t in seiner inneren Oberkante
Widerstand in dem Horizontal-
Die Untersuchung des Gleich-
geschieht also, indem der Hori-
ub *P* in dem Punkt *B* thätig
men wird. Es ist dies der um-
Fall mit No. 4.

unteres Gewölbstück hat das
nach innen als Keil zu gleiten
rch das darüber befindliche Ge-
aufwärs zu drehen indem es
ntersten Aufsenkante eine Dreh-
t, wo wiederum der Widerstand
n *B* wirkenden Horizontalschub
Gesetzt das untere gleitende
ück läge unter der Fuge *FH*,
as Gewölbstück *DEFH* um die
nach aufsen sich drehen, und
sich nun bei der Untersuchung,
n der Kante *B* wirkende Hori-
ub so grofs ist, dafs er diese
des Gewölbstücks *DEFH* um
e *H* nach aufsen hervorzubrin-
ag.

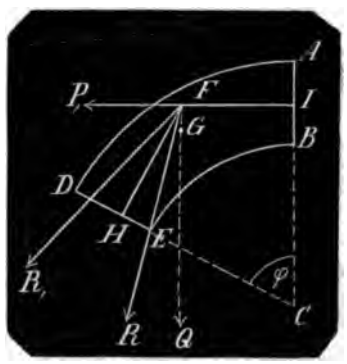
oberes Gewölbstück *ABDE* hat
eben als Keil nach einwärts zu
nd indem es dabei auf die oberste
nte *D* des unteren Gewölbstückes
rizontaldruck ausübt, strebt es
ölbstück um die äufsere Unter-
nach aufsen zu drehen (vergl.

unteres Gewölbstück hat das
zur Drehung um die innere
te *F* nach einwärts, das obere
ück aber wirkt dieser Hebelwir-
Keil entgegen, indem an dessen
Unterkante *D* das untere Ge-
gleitet.

ollen die Bedingungen des Gleich-
eines Gewölbes und seiner Wi-
bei der Voraussetzung einer
Keilwirkung der Gewölb-
f einander bestimmt werden.

Es sei *ABDE* das oberste Gewölbstück der Gewölbehälfte; rechts gegen die Fuge *AB* ist ein zweites gleiches und gleichliegendes Gewölbstück *ABD'E'* wie Fig. 658 zu denken. Wenn nur Keilwirkung statt findet, so haben beide Steine das Bestreben, auf ihren Lagerfugen *DE*, *D'E'* einwärts zu gleiten, und aus diesem

Fig. 659.



Bestreben erfolgt ein gegenseitiger Horizontalschub *P*, der von dem rechts befindlichen Stein auf den hier gezeichneten die Richtung *JP* hat, und der für's Gleichgewicht das Einwärtsgleiten des Steins *ABDE* längs *DE* verhindert.

Ist *G* der Schwerpunkt des Steins, *Q* sein Gewicht, so sind *Q* lothrecht durch *G* und *P* horizontal in *JP* die einzigen beiden wirkenden Kräfte; beider Richtungslinien schneiden sich in *F*, und es ist daher *F* ein Punkt in der zwischen *P* und *Q* statthabenden Mittelkraft *R*, und diese Mittelkraft wird für's Gleichgewicht mit der auf *DE* normalen *FH* den Reibungs$\angle$ $HFR = \tau$ bilden. Bezeichnet man den Winkel *DCA*, den die Lagerfuge *DE* mit der Vertikalen des Scheitels bildet mit φ

so ist auch $\angle PFH = \varphi$

und $\angle PFR = \varphi + \tau$

und $\angle QFR = 90° - (\varphi + \tau)$

folglich wenn man sich das Parallelogramm der Kräfte gezeichnet denkt,

$$P = Q\, tg\, [90° - (\varphi + \tau)] = Q\, cot\, (\varphi + \tau) \quad (I)$$

Zerlegt man die in der Richtung *FR* wirkende Mittelkraft *R* in der Fuge *DE* horizontal und vertikal, so erhält man wieder für die horizontale Seitenkraft *P*, für die vertikale Seitenkraft *Q*. Hat das unter der Fuge *DE* befindliche Gewölbstück das Gewicht *Q'*, so ist auf dessen

Lagerfuge der horizontale Schub = P, der Vertikaldruck = $Q + Q'$. Jede Fuge des Gewölbes also erleidet eine Horizontalwirkung = der Scheitelspannung und einen Vertikaldruck = dem Gewicht der über der Fuge bis zum Scheitel befindlichen Gewölbstücke.

Es entwickelt sich also für jede einzelne Fuge die ihr zugehörige Scheitelspannung, und die wirklich im Scheitel thätige Spannung ist offenbar die, bei welcher $Q \cdot cot(\varphi + \tau)$ ein Maximum ist, welches ermittelt werden muſs und mit welchem die wirkliche Scheitelspannung, der Horizontalschub des Gewölbes vermöge der Keilwirkung gefunden wird.

Wird der Horizontalschub kleiner, so entfernt sich die Mittelkraft R von P, der $\angle PFR$ wird gröſser; ist demnach der Horizontalschub so gering, daſs für das Maximum von $Q\,cot(\varphi + \tau)$ der $\angle HFR$ gröſser wird als der Reibungswinkel, so erfolgt ein wirkliches Gleiten des Gewölbstücks $ABDE$ auf DE nach innen zu; desgleichen ein Gleiten des rechts befindlichen Gewölbstücks $ABD'E'$ längs seiner Lagerfuge $D'E'$.

8. Um den Werth der Scheitelspannung ad 7 zu ermitteln, ist zuerst der Reibungswinkel τ für das Steinmaterial zu bestimmen nöthig, welches nur aus Erfahrungen geschehen kann.

Durch wiederholte Versuche ist ermittelt worden:

	μ	τ
Bei gebrannten Ziegeln (nach Amontons) . .	0,75	36° 52′
Bei behauenen Steinen zwischen welche gesägtes (nicht behobeltes) Holz gelegt ist (nach Perronet)	0,835	39° 52′
Bei Wölbsteinen auf Keilen und trocken versetzt (nach Gauthey) .	0,8	38° 40′
Bei Stein auf Stein oder auf lufttrocknem Mörtel (nach Boistard) . .	0,76	37° 14′
Bei gut zugerichteten Steinen (nach Perronet) . bis .	0,5317 0,5773	28° 30°
Bei den Granitgewölbsteinen der New-London-Bridge, deren Lagerfugen gut und ohne Mörtel zugerichtet . . .	0,65 0,67	33° 34°
Dieselben mit frischem und feingemahlenem Mörtel dazwischen . .	0,47 0,49	25° 26°

	μ
Bei Bramley-Fall- und Wetbey-Sandsteinen, die Fugen auf gewöhnliche Art zugerichtet .	0,7 0,7265
Dieselben mit Mörtel . .	0,649 0,6745
Nach Morin's Versuchen (Mosely-Scheffler)	
Oolith auf Oolith . . .	0,74
Muschelkalk auf Oolith .	0,75
Ziegelstein auf Oolith .	0,67
Muschelkalk auf Muschelkalk	0,70
Oolith auf Muschelkalk .	0,75
Ziegelstein auf Muschelkalk	0,67
Oolith auf Oolith, mit Mörtel aus 3 Theilen feinem Sande und 1 Theil hydraulischen Kalk	0,74
Weicher Kalkstein auf weichem Kalkstein, gut behauen	0,74
Harter Kalkstein auf weichem Kalkstein, gut behauen	0,75
Ziegelstein auf weichem Kalkstein, gut behauen	0,67
Harter Kalkstein auf hartem Kalkstein, gut behauen	0,70
Weicher Kalkstein auf hartem Kalkstein, gut behauen	0,67
Ziegelstein auf hartem Kalkstein, gut behauen	0,67
Weicher Kalkstein auf weichem Kalkstein mit frischem Mörtel . . .	0,74
Weicher Quadersandstein auf demselben (nach Rennie)	0,71
Derselbe auf demselben mit frischem Mörtel (nach Rennie) . . .	0,66
Kalkstein auf Kalkstein, beide Flächen mit dem Meifsel rauh gemacht (nach Bonchardi) . . .	0,78
Gut bearbeiteten Granit auf rauhem Granit (nach Rennie)	0,66
Desgleichen auf frischem Mörtel (nach Rennie) .	0,49
Grob behauener Werkstein auf einer Unterlage von Thon	0,51
Desgl. der Thon feucht und milde	0,34

	μ	τ
Grob behauener Werkstein auf einer Unterlage von feuchtem Thon mit dickem Sande bedeckt	0,40	21° 48′

9. Beispiel. Es soll die Scheitelspannung für die Keilwirkung an einem Gewölbe ermittelt werden, welches im Profil aus 2 concentrischen Kreisbogen besteht.

Es sei Fig. 659 *ABDE* das halbe Gewölbe im Profil, die Halbmesser $AC = R$ und $BC = r$, die Fuge DE mit dem Widerlager bildet mit dem Scheitelloth den $\angle ACD$, dessen Bogen für den Halbmesser = 1 sei $= \varphi$. Das Gewicht der Gewölbhälfte auf die Länge = 1 sei $= Q$, so ist bei der Länge L des Gewölbes das Gewicht desselben $= LQ$, und ist das Profil durch den Schwerpunkt des Gewölbes genommen, so ist der Schwerpunkt G des Kreisringstücks *ABDE* zugleich der Schwerpunkt des halben Gewölbes.

Da die Scheitelspannung von dem Gewicht Q und Q von den Dimensionen des Gewölbes abhängt, so verfährt man am entsprechendsten wenn man Q durch den Flächeninhalt des Ringstücks ausdrückt

folglich mit $Q = \frac{1}{2}(R^2 - r^2)\varphi$ (1)

Da für das Gleichgewicht zwischen den auf das Gewölbe einwirkenden Kräften das Gewölbe eine bestimmte Stärke haben muſs, die innere Weite aber in jedem Fall constant gegeben ist, so setzt man r constant und $R = n \cdot r$. Alsdann ist

$$Q = \tfrac{1}{2}(n^2 - 1)\, r^2 \varphi \qquad (2)$$

Die Scheitelspannung ist nach Formel I., No. 7

$$P = Q\, cot\,(\varphi + \tau) \qquad (3)$$

und diese soll ein Maximum sein. Man hat also das Maximum zu bestimmen von

$$P = \tfrac{1}{2}(n^2 - 1)\, r^2\, \varphi\, cot\,(\varphi + \tau) \qquad (4)$$

und dieser Ausdruck wird für jeden Werth von r und n ein Maximum, wenn $\varphi\, cot\,(\varphi + \tau)$ ein Maximum wird.

Für gegebene Werthe von τ findet man dieses Maximum am bequemsten durch Proberechnungen. Sieht man von den tabellarisch geordneten Versuchszahlen ab, die bei dem angewandten feuchten Thon und frischem oder feinem Mörtel auch nur für die Construction von Lehrbogen Wichtigkeit haben, so ist kein einziger Coefficient kleiner als $\frac{1}{4}$. Nimmt man also den Reibungscoefficient der Sicherheit wegen zu dem kleinen Werth $\frac{1}{4}$, also $\tau = arc\,(tg\,\frac{1}{4}) = 26° 34′$, so erhält man mit Hülfe der Logarithmen, (wenn nämlich eine Zahl ein Maximum ist so ist auch deren Logarithmus ein Maximum).

$$log\,\varphi + log\,cot\,(\varphi + 26° 34′) = \text{Maximum}$$

und erhält bei $\varphi = 27° 17′ = 0{,}4761840$ also $M' = 0{,}5414248 - 1$
bei $\varphi = 27° 18′ = 0{,}4764749$ „ $M = 0{,}5414284 - 1$
bei $\varphi = 27° 19′ = 0{,}4767658$ „ $M'' = 0{,}54142457 - 1$

Es ist demnach für's Maximum der Scheitelspannung

der $\angle\, \varphi = 27° 18′$
der Bogen $\varphi = 0{,}4764749$
und $\varphi\, cot\,(\varphi + \tau) = num \cdot 0{,}5414284 - 1 = 0{,}34788$ (5)

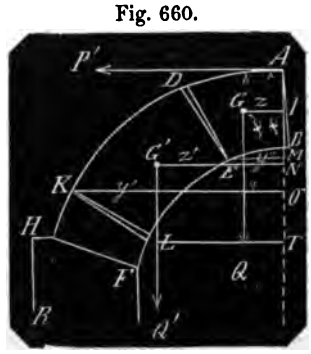
Hieraus der gröfste Horizontalschub für die Keilwirkung

$$P = 0{,}17394 \cdot (n^2 - 1)\, r^2 \qquad (II)$$

10. Es sollen die Bedingungen des Gleichgewichts eines Gewölbes und seiner Widerlagen bei der Voraussetzung der lofsen Hebelwirkung der Gewölbstücke bestimmt werden, wenn also nach No. 3) ein oberes Gewölbstück das darunter befindliche oder das Widerlager um die unterste Aufsenkante auswärts zu drehen strebt.

Fig. 660 ist *ABFH* das Profil des halben Gewölbes mit dem Widerlager *FR*, durch den Schwerpunkt des ganzen Gewölbes genommen, also zugleich eine Schwerebene. Das oberste Wölbstück *ADBE* hat den Schwerpunkt G in Ent-

Fig. 660.



fernung $GJ = z$ vom Scheitelloth und das Gewicht Q; das darunter befindliche Wölbstück $DEKL$ hat den Schwerpunkt G' in dem Abstand $G'N = z'$ vom Scheitelloth und das Gewicht Q'. Die lothrechte Entfernung AM des Scheitels A von der inneren Kante E der ersten Lagerfuge DE sei x, die lothrechte Enfernung AO des Scheitels A von der Aufsenkante K der zweiten Lagerfuge KL sei x'. Der Abstand EM der ersten Kante E von dem Scheitelloth sey y, der KO von der zweiten Kante K bis zum Scheitelloth $= y'$. AB ist eine Scheitelfuge.

Wenn nun das obere Wölbstück $ABDE$ als Hebel wirkend das darunter befindliche Wölbstück $DEKL$ um die Kante K nach aufsen zu drehen strebt, so bilden sich für den Fall der wirklichen Drehung in E und A Drehaxen und die Fugen DE und AB werden in D und B geöffnet. Das Gleichgewicht des oberen Gewölbstücks wird also dadurch bedingt, dafs die andere Gewölbehälfte in A einen horizontalen Gegendruck P' ausübt, während das obere Gewölbestück $ABDE$ in der Kante E seine feste Stütze findet und diese mufs durch das Gewicht Q hervorgebracht werden. Für das Gleichgewicht dieser beiden Kräfte P' und Q mufs die Mittelkraft beider durch die Drehaxe E gerichtet sein, und dies geschieht wenn das Moment der Mittelkraft, also auch die Momentensumme der Seitenkräfte P' und Q in Beziehung auf E als Momentenaxe $= 0$ ist. Oder wenn

$$xP' = (y - z)\,Q$$

woraus
$$P' = \frac{y - z}{x}\,Q \qquad \text{(IIIa)}$$

Zerlegt man die durch den Punkt E gerichtete Mittelkraft in dem Punkt E, so entstehen dieselben beiden Seitenkräfte P' und Q horizontal und vertikal und es wirkt also das obere Gewölbstück auf das darunter befindliche in seiner inneren Oberkante E mit dem horizontalen Schub P' und dem vertikalen Druck Q.

Soll nun durch das obere Gewölbstück, also durch die horizontale Kraft P' in E kein Bestreben des unteren Wölbstücks für die Drehung um K nach aufsen hervorgehen, so darf das Moment von P' in Beziehung auf die Kante K als Momentenaxe nicht gröfser sein, als die auf dieselbe Axe genommenen Momente der Kräfte, welche jener Drehung um K widerstreben. Diese Kräfte sind aber der in E lothrecht abwärts gerichtete Druck Q und das im Schwerpunkt G' vereinigt zu denkende Gewicht Q' des Wölbstücks $DEKL$.

In Beziehung auf K hat die Kraft P' in E den Hebelsarm $MO = x' - x$; der Druck Q in E den Hebelsarm $KO - EM = y' - y$; das Gewicht Q' den Hebelsarm $KO - G'N = y' - z'$. Daher ist für's Gleichgewicht und für Sicherheit:

$$(x' - x)\,P' \gtreqless (y' - y)\,Q + (y' - z')\,Q' \quad (3$$

Nun ist $xP' = (y - z)\,Q$

Addirt man beide; Gleichung und Vergleichung, so erhält man

$$x'\,P' \gtreqless (y' - z)\,Q + (y' - z')\,Q'$$

oder $x'\,P' \gtreqless y'\,(Q + Q') - (zQ + z'\,Q')$ (4

Setzt man das Gewicht beider Gewölbstücke, also

$$Q + Q' = W \qquad (5)$$

den Abstand des Schwerpunkts der Fläche $ABKL$ von dem Scheitelloth $= u$, so hat man

$$uW = zQ + z'\,Q' \qquad (6)$$

Setzt man die Werthe aus 5 und 6 in 4, so erhält man

$$x'\,P' \gtreqless y' \cdot W - uW$$

oder
$$x'\,P' \gtreqless (y' - u)\,W$$

woraus
$$P' \gtreqless \frac{y' - u}{x'}\,W \qquad \text{(IIIb)}$$

Es ist aber $y' - u$ der Abstand des Loths aus dem Schwerpunkt der Ebene oder des Wölbstücks $ABKL$ von der Drehkante K, also ist $(y' - u)\,W$ das Moment dieses Wölbstücks in Beziehung auf die Kante K als Drehaxe.

11. Betrachtet man den Fall, dafs von der Lagerfuge KL nach dem Scheitel hin in keiner Fuge wie DE eine Drehung um die innere Kante wie um E stattfinden kann, so dafs K allein nur Drehaxe sein kann, und nennt man die zu diesem Fall gehörende Scheitelspannung P'' so hat man deren Abstand von $K = AO = x'$ und demnach für's Gleichgewicht

$$x'\,P' = (y' - u)\,W$$

woraus
$$P' = \frac{y' - u}{x'}\,W \qquad \text{(IV}$$

Nun war für den Fall, dafs auch in einem oberen Gewölbstück eine Drehkante sich bilden kann

$$P' \gtreqless \frac{y' - u}{x'}\,W$$

Hieraus die Bedingung $P' \gtreqless P''$ (

Demnach kann ein unteres Wölbstück durch ein darüber liegendes vermöge der Hebelwirkung nicht mehr nach aufsen gedreht und umgeworfen werden, wenn die Horizontalkraft P' die im Scheitel wirksam das obere Gewölbstück auf seine unteren Innenkante als Drehaxe im Gleich

zu erhalten vermag, nicht gröfser
ine Horizontalkraft P' im Schei-
he beiden Gewölbstücken als ein
betrachtet auf ihrer untersten
inte als Drehaxe das Gleichge-
lt.

lso des Gleichgewichts in allen
des Gewölbes versichert sein zu
hat man in jedem besonderen
· nöthig, das Maximum von
das Minimum von P' zu be-
:n; ist dann Ersteres nicht > als
, so ist die Bedingung für den
sten Fall erfüllt und es findet
ehr für alle übrigen Fälle Sicher-
t:

aximum von P' ist übrigens die-
is beiden Gewölbehälften gegen-
Scheitel sich entwickelnde Ho-
pannung also die wirkliche
ilspannung des Gewölbes
Hebelwirkung.

Scheitelspannung ist denn auch
m Horizontalschube, welchen das
m Scheitel ab gerechnete Wölb-
der untersten Innenkante seiner
welcher das Maximum von P'
oder der sogenannten Bre-
fuge ausübt. Da nun für jede
uge die sich gleichbleibende Ho-
pannung denselben Horizon-
b auf ihre Innenkante ausübt,
t man diese wirkliche Scheitel-
g auch den Horizontalschub
wölbes.

inimum von P' würde der Ho-
chub im Scheitel sein, wenn das
:ück, dessen Lagerfuge diesem Mi-
entspricht, blofs in seiner unter-
senkante unterstützt wäre, daher
an auch das Minimum von P'
pothetische Scheitelspan-
es Gewölbes.

er soeben vorgenommenen Be-
g der Stabilität eines Gewölbes
e Hebelwirkung hat die Lage der
gen die Horizontale keinen Ein-
abt, die Gesetze gelten also auch
ilbstücke mit horizontalen Lager-
h. für die Widerlager. Bestimmt
man daher für irgend eine Lagerfuge des Widerlagers die hypothetische Scheitelspannung, die Aufsenkante dieser Fuge als allein unterstützt angenommen, so wird das Widerlager um diese Kante nicht umgeworfen, wenn die hypothetische Scheitelspannung nicht kleiner gefunden ist, als die wirkliche Scheitelspannung.

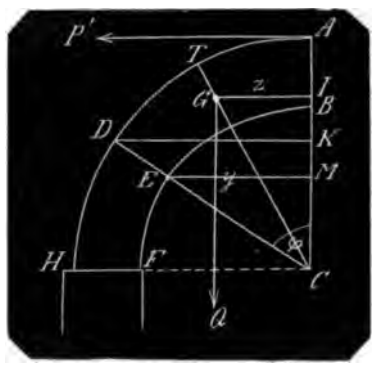
12. Beispiel. Es soll die wirkliche Scheitelspannung für die Hebelwirkung an einem Gewölbe ermittelt werden, welches im Profil aus 2 concentrischen Kreisbogen besteht.

Es ist in No. 10, Formel III.:

$$P' = \frac{y - z}{x} Q$$

für die wirkliche Scheitelspannung ganz allgemeingültig und demnach gleichgültig, ein wie grofses Ringstück, vom Scheitel aus genommen, untersucht wird. In Fig. 661 sind mit Fig. 660 für das Ringstück $ABDE$ mit dem Schwerpunkt G und dem Gewicht Q die Längen x, y, z dieselben; wie in Fig. 660 sei $BC = r$, $AC = R = nr$, $\angle ACD = \varphi$. Halbirt man φ, so trifft die Halbirungslinie CT den Schwerpunkt G.

Fig. 661.



Nun hat man bei der Bezeichnung mit dem Beispiel No. 9:

$$Q = \tfrac{1}{2}(R^2 - r^2)\varphi = \tfrac{1}{2}(n^2 - 1) r^2 \varphi \quad (1)$$

$$y = r \sin \varphi \quad (2)$$

$$AM = x = AC - MC = R - r \cos \varphi = (n - \cos \varphi) r \quad (3)$$

$$z = CG \sin \tfrac{1}{2}\varphi$$

Entfernung des Schwerpunkts des Kreisringstücks $ABDE$ vom Mittel-
t

$$CG = \tfrac{2}{3} \frac{\sin \frac{1}{2}\varphi}{\frac{1}{2}\varphi} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} = \tfrac{2}{3} \frac{\sin \frac{1}{2}\varphi}{\frac{1}{2}\varphi} \cdot \frac{n^3 - 1}{n^2 - 1} r$$

$$z = CG \sin \tfrac{1}{2}\varphi = \tfrac{2}{3} \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\varphi}{\frac{1}{2}\varphi} \cdot \frac{n^3 - 1}{n^3 - 1} \cdot r \quad (4)$$

Endlich
$$P' = \frac{r \sin\varphi - \frac{1}{3}\frac{\sin^2\frac{1}{2}\varphi}{\frac{1}{2}\varphi}\cdot\frac{n^3-1}{n^2-1}r}{(n-\cos\varphi)r}\cdot\tfrac{1}{2}(n^2-1)r^2\varphi$$
$$= \tfrac{1}{2}(n^2-1)r^2\frac{\varphi\sin\varphi - \frac{1}{3}\frac{n^3-1}{n^2-1}(1-\cos\varphi)}{n-\cos\varphi} \qquad \text{(VIa)}$$

Schreibt man für $1-\cos\varphi$ den Ausdruck $1-n+n-\cos\varphi$, so erhält man

$$P' = \tfrac{1}{2}(n^2-1)r^2\left[\frac{\varphi\sin\varphi + \frac{1}{3}\frac{n^3-1}{n+1}}{n-\cos\varphi} - \frac{1}{3}\frac{n^3-1}{n^2-1}\right] \qquad \text{(VIb)}$$

Nun wird P' ein Maximum, wenn der Minuend der Klammergröfse ein Maximum wird, weil die übrigen Aggregate constant sind. Es kommt also darauf an, den Werth von φ für dieses Maximum zu finden. Der mit Hülfe der Differenzialrechnung gefundene Werth von φ für's Maximum wird aber noch verwickelter als die gegebene Formel ist. Aufserdem ist φ noch von n selbst abhängig. Es ist also in einem speciellen Fall mit gegebenem n gerathener, das Maximum für φ durch Proberechnungen zu finden, wo man dann unmittelbar P' erhält. Vermöge dieses Verfahrens findet man das Maximum von P' für φ bei folgenden Werthen von n:

Für $n = 1{,}01$	ist	$\varphi = 32°\ 37'$
$n = 1{,}02$	„	$\varphi = 38°\ 12'$
$n = 1{,}04$	„	$\varphi = 44°\ 26'$
$n = 1{,}05$	„	$\varphi = 46°\ 33'$
$n = 1{,}08$	„	$\varphi = 51°\ 6'$
$n = 1{,}10$	„	$\varphi = 53°\ 16'$
$n = 1{,}12$	„	$\varphi = 55°$
$n = 1{,}2$	„	$\varphi = 59°\ 34'$
$n = 1{,}3$	„	$\varphi = 62°\ 28'$
$n = 1{,}4$	„	$\varphi = 63°\ 48'$
$n = 1{,}496$	„	$\varphi = 64°\ 9'\ 50''$
$n = 1{,}5$	„	$\varphi = 64°\ 9'\ 47''$

Aus dieser Tabelle geht hervor, dafs mit einem gleichförmigen Wachsthum von n um 0,01 die Werthe von φ immer langsamer zunehmen bis für $n = 1{,}496$ wo φ seinen gröfsten Werth erhält. Für gröfsere Werthe von n nähert sich die Fuge des gröfsten Horizontalschubes wieder dem Scheitel und somit kann dieselbe sich nie weiter vom Scheitel entfernen als um 64° 9' 50''.

13. Beispiel. Es soll die hypothetische Scheitelspannung für die Hebelwirkung an demselben Gewölbe No. 12, Fig. 661 ermittelt werden.

Hierfür gilt Formel III b oder IV, welche beide identisch sind.

Ist das Gewölbstück $ABDE$ dasjenige, dessen Lagerfuge dem Minimum von P' entspricht, so mufs für's Gleichgewicht P'' gerade nur so grofs sein, dafs es das Gewölbstück nicht mehr um D links nach aufsen herumdreht. D. h. es mufs sein

$$AK \times P'' = (DK - GJ)\,Q$$

Nun ist $DK = CD\sin\varphi = nr\sin\varphi$

$$GJ = z = \tfrac{1}{3}\frac{n^3-1}{n^2-1}\cdot\frac{\sin^2(\frac{1}{2}\varphi)}{\frac{1}{2}\varphi}\cdot r$$

daher

$$DK - GJ = r\left[n\sin\varphi - \tfrac{1}{3}\frac{n^3-1}{n^2-1}\cdot\frac{\sin^2(\frac{1}{2}\varphi)}{\frac{1}{2}\varphi}\right]$$

ferner ist $Q = \frac{1}{2}(n^2-1)\,r^2\varphi$

daher das Moment von Q in Beziehung auf die Kante D.

$$M = \tfrac{1}{2}(n^2-1)\,r^3\left[n\varphi\sin\varphi - \tfrac{1}{3}\frac{n^3-1}{n^2-1}(1-\cos\varphi)\right]$$

der Hebelsarm von P' ist $AK = AC - KC = R - R\cos\varphi = nr(1-\cos\varphi)$

Mit diesem das Moment M dividirt gibt die Scheitelspannung

$$P'' = \tfrac{1}{2}(n^2-1)\,r^2\left[\frac{\varphi\sin\varphi}{1-\cos\varphi} - \tfrac{1}{3}\frac{n^3-1}{n(n^2-1)}\right] \qquad \text{(1}$$
$$= \tfrac{1}{2}(n^2-1)\,r^2\left[\frac{2\varphi\sin(\frac{1}{2}\varphi)\cos(\frac{1}{2}\varphi)}{2\sin^2(\frac{1}{2}\varphi)} - \tfrac{1}{3}\frac{n^3-1}{n(n^2-1)}\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}(n^2-1)\,r^2\left[\varphi\cot(\tfrac{1}{2}\varphi) - \tfrac{1}{3}\frac{n^3-1}{n(n^2-1)}\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}(n^2-1)\,r^2\left[2\frac{\frac{1}{2}\varphi}{tg(\frac{1}{2}\varphi)} - \tfrac{1}{3}\frac{n^3-1}{n(n^2-1)}\right] \qquad \text{(}$$

Ausdruck wird ein Minimum $\frac{\frac{1}{2}\varphi}{(\frac{1}{2}\varphi)}$ ein Minimum wird. Nun r der Quotient eines Bogens für bmesser = 1 dividirt durch die s des Bogens immerfort kleiner r Bogen von 0 bis 90° wächst, r Bogen gleichförmig, die Tan- ıer beschleunigend zunimmt und = 90° unendlich wird; demnach ıs Minimum in der horizontalen Widerlager statt. Für ein Kreisbogengewölbe von durchweg gleicher Stärke ist also die hypothetische Scheitelspannung = derjenigen am Scheitel anzubringenden Horizontalkraft, welche der Hälfte des Gewölbes für das Umwerfen um seine unterste am Widerlager befindliche Aufsenkante als Drehaxe das Gleichgewicht hält.

Ist diese Fuge horizontal so ist $\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}\pi$, $tg\,(\frac{1}{2}\varphi) = 1$ also das erste Glied der Klammergröfse $= \frac{1}{2}\pi$

$$P' = \tfrac{1}{2}(n^2-1)\,r^2\left[\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{3}\frac{n^3-1}{n\,(n^2-1)}\right] \qquad \text{(VII a)}$$

dagegen die unterste Fuge nicht horizontal, der Winkel derselben mit dem x, so hat man

$$P' = \tfrac{1}{2}(n^2-1)\,r^2\left[\alpha\,cot(\tfrac{1}{2}\alpha) - \tfrac{1}{3}\frac{n^3-1}{n\,(n^2-1)}\right] \qquad \text{(VII b)}$$

ırmel V, No. 10 spricht die Bedin- s, dafs $P' > P$. Der Werth von 13, Formel VII b) vermindert sich t dem Wachsthum des Winkels kann einen Fufswinkel α geben, hem $P' = P$ wird.

ın in einem speciellen Fall n ge- ıo findet man das Maximum von man in Formel VI b den Werth ıus der darunter stehenden Ta- ıxt.

ıat man P' Formel VII b, No. 13 bekannten P zu setzen und er-

$$\cdot^2-1)\,r^2\left[\alpha\,cot\frac{\alpha}{2} - \tfrac{1}{3}\frac{n^3-1}{n\,(n^2-1)}\right]$$

$$t\,(\tfrac{1}{2}\alpha) = \frac{P'}{(n^2-1)\,r^2} + \tfrac{1}{3}\frac{n^3-1}{n\,(n^2-1)}$$

ıchte Seite des Gleichheitszeichens ist eine bekannte Zahl m, $\frac{\alpha}{2}$ bedeutet den Bogen in Theilen von π, $\frac{\alpha}{2}$ ist aber als Winkel in Graden gegeben; man hat also zur Berechnung

$$\angle\varphi^\circ : 180^\circ = \text{Bogen } \varphi : \pi$$

woraus Bogen $\varphi = \frac{\varphi^\circ}{180^\circ} \cdot 3{,}14159\ldots.$

Demnach schreibt man

$$\tfrac{1}{2}\alpha^\circ\,cot\,(\tfrac{1}{2}\alpha) = \frac{180^\circ}{\pi}\cdot m$$

eine einfache Form für Rechnung mit Logarithmen, wenn für ein bestimmtes n Proberechnungen gemacht werden sollen.

Z. B. Bei $n = 1{,}01$ ist für das Maximum von P': $\varphi = 32^\circ\,37'$.

Setzt man den Werth von n in Gl. VI b, No. 12, so erhält man

$$P' = 0{,}01005\cdot r^2\left[\frac{\varphi\,sin\,\varphi + 0{,}01005}{1{,}01 - cos\,\varphi} - 1{,}005009\right]$$

: $\varphi = 32^\circ\,37'$ rechnet man

$$\frac{32{,}6166\ldots}{180}\,\pi\,sin\,32^\circ\,37' = 0{,}306844$$

$$+\,0{,}010050$$

ı Zähler $\qquad 0{,}316894$

ıner ist $\qquad 1{,}01 - cos\,32^\circ\,37' = 0{,}167704$

$$\frac{\varphi\,sin\,\varphi - 0{,}01005}{1{,}01 - cos\,\varphi} = 1{,}88960$$

$$1{,}00501$$

ı Klammergröfse $\qquad 0{,}88459$

$$P' = 0{,}01005 \times 0{,}88459\cdot r^2 = 0{,}0088901\cdot r^2$$

Also ist $$m = \frac{0{,}0088901 \cdot r^2}{0{,}0201 \cdot r^2} + 0{,}497529 = 0{,}939819$$

und endlich $$log \cdot \tfrac{1}{2}\alpha \; cot(\tfrac{1}{2}\alpha) = log \cdot \frac{180}{\pi} \cdot 0{,}939819 = 1\;7311668$$

Man findet $log\,(\frac{1}{2}\alpha)\,cot\,(\frac{1}{2}\alpha)$

für $\frac{1}{2}\alpha = 24° 10' = 1{,}7312413$

$= 24° 25' = 1{,}7310486$

$= 24° 12' = 1{,}7311651$

Es ist mithin der gesuchte Fufswinkel $\alpha = 48° 24'$.

Man erhält diejenigen Fufswinkel des kreisbogenförmigen Gewölbes bei welchen $P = P''$:

Für $n = 1{,}01$ ist $\alpha = 48° 24'$

$= 1{,}04$ „ „ $= 69° 4'$

$= 1{,}05$ „ „ $= 73° 8'$

$= 1{,}1$ „ „ $= 87° 11'$

$= 1{,}11$ „ „ $= 89° 17'$

$= 1{,}12$ „ „ $= 91° 13'$

15. Es soll die Stärke eines Kreisbogengewölbes bestimmt werden, bei welchem die wirklichen Scheitelspannungen der Hebel und der Keilwirkung einander gleich sind und bei welchem die eine die andere übertrifft.

No. 12, Formel VIb ist der allgemeine Ausdruck für die Scheitelspannung P' aus der Hebelwirkung bei einem kreisförmigen Gewölbe; diese wird als Maximum zur wirklichen Scheitelspannung P', und zwar bei den Verhältnissen $R : r = n$, unter den Winkeln φ, wie sie zum Theil in der Tabelle angegeben sind.

No. 9, Formel II gibt den Ausdruck für die Scheitelspannung P aus der Keilwirkung, und für $\mu = \frac{1}{4}$ oder $\tau = 26° 34'$ das Maximum als die wirkliche Scheitelspannung bei dem $\angle\,\varphi = 27° 17'$. Diese ist also bei einerlei τ bei beliebigem n, also in jedem Kreisbogengewölbe bei dem constanten $\angle\,\varphi = 27° 17'$ vorhanden.

Die erste Formel VIb ist

$$P' = \tfrac{1}{2}(n^2 - 1)\,r^2 \left[\frac{\varphi \sin\varphi + \frac{2}{3}\frac{n^3 - 1}{n+1}}{n - \cos\varphi} - \frac{2}{3}\frac{n^3 - 1}{n^2 - 1} \right]$$

Die zweite Formel II ist

$$P = \tfrac{1}{2}(n^2 - 1)\,r^2\,\varphi\;cot\,(\varphi + \tau)$$

Für jedes gegebene n sind also beide Maxima zu bestimmen und mit einander zu vergleichen.

Da der Factor $\frac{1}{2}(n^2 - 1)\,r^2$ beiden Formeln gemeinschaftlich ist, so hat man nur zu vergleichen:

$$\frac{\varphi \sin\varphi + \frac{2}{3}\frac{n^3 - 1}{n+1}}{n - \cos\varphi} - \frac{2}{3}\frac{n^3 - 1}{n^2 - 1}$$

mit $\varphi \cdot cot\,(\varphi + \tau)$

und nach No. 9 ist bei $\tau = 26° 34'$

$log\,\varphi \cdot cot\,(\varphi + \tau) = 0{,}54142486 - 1$

woraus $\varphi\;cot\,(\varphi + \tau) = 0{,}347876$

Für $n = 1{,}01$ ist $\varphi = 32° 37'$ und $M = 0{,}88459$

$n = 1{,}1$ „ $\varphi = 53° 16'$ und $M = 0{,}61320$

$n = 1{,}3$ „ $\varphi = 62° 28'$ und $M = 0{,}41166$

$n = 1{,}4$ „ $\varphi = 63° 48'$ und $M = 0{,}33670$

Von hierab wird das Maximum für die Hebelwirkung immer kleiner und die Gleichheit beider Spannungen liegt zwischen $n = 1{,}3$ und $n = 1{,}4$.

Wenn demnach bei $\mu = \frac{1}{4}$ der äufsere Halbmesser des Gewölbes um $\frac{3}{10}$ und weniger gröfser ist als der innere, so ist die Scheitelspannung für die Hebelwirkung gröfser und wenn es um $\frac{4}{10}$ und darüber gröfser ist als der innere Durchmesser, so ist die Scheitelspannung für die Keilwirkung gröfser.

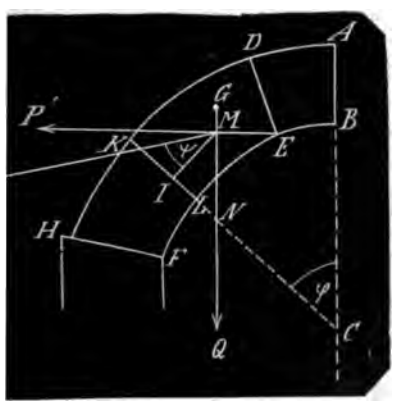
Der Reibungswinkel τ ist aber mit $26° 34'$ in fast allen Fällen zu klein, ein gröfseres τ gibt aber eine kleinere Scheitelspannung für die Keilwirkung und dann mufs auch für ein gröfseres n die Scheitelspannung für die Hebelwirkung noch überwiegend sein.

16. Es sollen die Bedingungen des Gleichgewichts eines Gewölbes und seiner Widerlager unter der Voraussetzung er-

werden, dafs bei vereinigter und Keilwirkung ein oberes ück als Hebel wirkend ein darfindliches auf seiner untersten e nach aufsen zu verschieben

Fig. 662 *ABKL* das Gewölbelches durch die Hebelwirkung en Stücks *ABDE* das Bestreben af der Lagerfuge *KL* nach aufsen n. Ist *P'* die wirkliche horizonitelspannung, so wirkt auch die- No 10) in der Kante *E* horind in *E* das Gewicht des Gets *ABDE* vertikal. Dies letztere mit dem Gewicht des unteren ks *DEKL* zu einer Mittelkraft n, welche dann in dem Schwerles ganzen Gewölbestücks *ABKL* lothrecht abwärts wirkt, und welche = ist dem Gewicht *Q* des Gewölbestücks *ABKL*.

Fig. 662.



Beide Kräfte *P* und *Q* schneiden sich in dem Punkt *M* und durch diesen Punkt ist auch die Mittelkraft *R* zwischen beiden Kräften *P*, *Q* gerichtet. Soll nun ein Gleiten des Steins *DEKL* nach aufsen möglich sein, so kann die Mittelkraft *R* nicht zwischen *Q* und das Loth *MJ* auf *KL* fallen, sondern sie mufs links von dem Loth *MJ* wie nach *MR* gerichtet sein.

Ist nun $\angle JMR$ gröfser als der Reibungswinkel ϱ, so geschieht die Gleitung, ist er kleiner so geschieht sie nicht und für das Gleichgewicht ist $\angle JMR = \psi = \varrho$

Bezeichnet man daher den $\angle ACK$ zwischen dem Scheitelloth und der Fuge mit φ, so ist auch $\angle MNK = \varphi$ also $\angle NMJ = 90° - \varphi$ und $\angle RMQ = 90° + \psi - \varphi = 90° - (\varphi - \psi)$

Nun ist, wenn man mit *P*, *Q*, *R* das Parallelogramm der Kräfte bildet,

$$Q \operatorname{tg} RMQ = P'$$

oder $$Q \operatorname{tg} [90° - (\varphi - \psi)] = P'$$

oder $$Q \cot(\varphi - \psi) = P'$$

oder $$P' \operatorname{tg}(\varphi - \psi) = Q$$

oder $$P' \cdot \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi}{1 + \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\psi} = Q$$

woraus $$\operatorname{tg}\psi = \frac{P' \operatorname{tg}\varphi - Q}{P + Q \operatorname{tg}\varphi} \quad \text{(VIII)}$$

17. Beispiel. Der Satz No. 16 soll auf das in den früheren schon untersuchte Kreisbogengewölbe angewendet werden.

Es ist wie No. 12

$$Q = \tfrac{1}{2}(n^2 - 1) r^2 \varphi'$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{P' \operatorname{tg}\varphi - \tfrac{1}{2}(n^2-1) r^2 \varphi}{P' + \tfrac{1}{2}(n^2-1) r^2 \varphi \operatorname{tg}\varphi} = \frac{\frac{2P'}{(n^2-1) r^2} \operatorname{tg}\varphi - \varphi}{\frac{2P'}{(n^2-1) r^2} + \varphi \operatorname{tg}\varphi} \quad (1)$$

an man den constanten Werth $\frac{2P'}{(n^2-1) r} = A$ setzt

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{A \operatorname{tg}\varphi - \varphi}{A + \varphi \operatorname{tg}\varphi} = \frac{A - \frac{\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}}{\frac{A}{\operatorname{tg}\varphi} + \varphi} \quad \text{(IX)}$$

nun für die Hebelwirkung nach No. 12, Formel VIb

$$P' = \tfrac{1}{2}(n^2-1) r^2 \left[\frac{\varphi \sin\varphi + \frac{1}{3}\frac{n^3-1}{n+1}}{n - \cos\varphi} - \frac{1}{3}\frac{n^3-1}{n^2-1} \right]$$

$$A = \frac{\varphi \sin\varphi + \frac{1}{3}\frac{n^3-1}{n+1}}{n - \cos\varphi} - \frac{1}{3}\frac{n^3-1}{n^2-1} \quad \text{(X)}$$

Wobei zu bemerken, dafs dieses letzte φ in dem Ausdruck für A dem jedesmaligen Maximum für n (No. 12) entspricht, und dafs für jedes bestimmte n das aus dem Maximum hervorgehende constante P in jeder Fugenkante wie E, L dasselbe bleibt.

Nun ist jederzeit $A < 1$: In No. 15 ist berechnet, dafs für $n = 1{,}01$ der Werth von $A = 0{,}88459$ und dafs er mit dem Wachsthum von n immerfort abnimmt. Da nun $\frac{\varphi}{tg\,\varphi}$ ebenfalls < 1 aber mit beliebiger Abnahme von φ dem Werthe $= 1$ beliebig nahe gebracht werden kann, so ist für sehr kleine Werthe von φ, also für die Stellen nahe am Scheitel, $\frac{\varphi}{tg\,\varphi} > A$ und hiermit $tg\,\psi$ und ψ selbst negativ: d. h. die Mittelkraft R ist nach dem Innern des Gewölbes gerichtet und es kann kein Ausweichen eines Gewölbstücks nach aufsen geschehen.

Mit dem Wachsthum von φ wird $\frac{\varphi}{tg\,\varphi}$ immer kleiner und es wird einen Werth von φ geben, für welchen $\frac{\varphi}{tg\,\varphi} = A$ also $tg\,\psi = \psi = 0$ ist. Dies ist der Ort, an welchem die Mittelkraft R in das Loth MJ fällt. Wächst φ noch mehr, entfernt sich also die Fuge vom Scheitel, so wird $\frac{\varphi}{tg\,\varphi} < A$, $tg\,\psi$ wird positiv und die Mittelkraft R fällt von dem Loth MJ ab links nach aufsen.

Nun ist zu untersuchen, ob mit dem ferneren Wachsthum von φ auch $tg\,\psi$ fortgesetzt wächst oder wiederum abnimmt, wo dann für ein bestimmtes φ ein Maximum für ψ entstehen würde. Es wird aber $tg\,\psi$ fortgesetzt wachsen, wenn der Unterschied der Werthe von $tg\,\psi$, die zu 2 zunächst auf einander folgenden Werthen von φ gehören, immer positiv ist. Bezeichnen φ' und φ zwei zunächst auf einander folgenden Fugenwinkel, von welchen $\varphi' > \varphi$ und sind ψ' und ψ die dazu gehörigen Werthe der Mittelkraftswinkel, so hat man

$$\begin{aligned} tg\,\psi' - tg\,\psi &= \frac{A\,tg\,\varphi' - \varphi'}{A + \varphi'\,tg\,\varphi'} - \frac{A\,tg\,\varphi - \varphi}{A + \varphi\,tg\,\varphi} \\ &= \frac{A\sin\varphi' - \varphi'\cos\varphi'}{A\cos\varphi' + \varphi'\sin\varphi'} - \frac{A\sin\varphi - \varphi\cos\varphi}{A\cos\varphi + \varphi\sin\varphi} \\ &= \frac{A^2\sin(\varphi' - \varphi) - A(\varphi' - \varphi)\cos(\varphi' - \varphi) + \varphi'\varphi\sin(\varphi' - \varphi)}{(A\cos\varphi' + \varphi'\sin\varphi')(A\cos\varphi + \varphi\sin\varphi)} \\ &= \frac{A^2 + \varphi'\varphi - A(\varphi' - \varphi)\cot(\varphi' - \varphi)}{(A\cos\varphi' + \varphi'\sin\varphi')(A\cos\varphi + \varphi\sin\varphi)}\sin(\varphi' - \varphi) \end{aligned} \quad (5)$$

Aus dieser letzten Form der Tangentendifferenz ersieht man, dafs das Vorzeichen derselben blofs von dem des Zählers abhängt, denn der Nenner und der zweite Factor sind positiv.

Es kommt also darauf an, für welche verschiedene Werthe von φ' und φ der Zähler positiv und negativ ist.

Nun ist $(\varphi' - \varphi)\cot(\varphi' - \varphi) = \frac{\varphi' - \varphi}{tg\,(\varphi' - \varphi)}$ immer kleiner als 1, kann aber mit Verminderung von $\varphi' - \varphi$ dem Werth 1 beliebig nahe gebracht werden. Daher ist auch $A(\varphi' - \varphi)\cot(\varphi' - \varphi)$ immer kleiner als A und kann durch Annäherung von φ' an φ dem Werthe A beliebig nahe kommen.

Da nun $\varphi' > \varphi$ so ist $\varphi'\varphi > \varphi^2$
und $A^2 + \varphi'\varphi > A^2 + \varphi^2$

Die erstere Summe kann aber wieder der zweiten durch Annährung von φ' an φ beliebig nahe gebracht werden. Aus beiden Vergleichungen

$$\begin{array}{ll} A(\varphi' - \varphi)\cot(\varphi' - \varphi) & < A \\ A^2 + \varphi'\varphi & > A^2\varphi^2 \\ \hline A^2 + \varphi'\varphi - A(\varphi' - \varphi)\cot(\varphi' - \varphi) & > A^2 + \varphi^2 - A \end{array} \quad \text{folgt} \quad (6)$$

Es kann aber das erste Aggregat dem zweiten beliebig nahe kommen.

Ist daher $A^2 + \varphi^2 - A$ negativ, so kann φ' an φ so nahe gebracht werden, dafs auch die linke Seite der Vergleichung negativ wird, und dann ist $tg\,\psi' - tg\,\psi$ ebenfalls negativ.

Wird $A^2 + \varphi^2 - A = 0$ so wird $\psi' - \psi = 0$ oder $\psi' = \psi$. Wird von hier ab $A^2 + \varphi^2 - A$ positiv, so wird auch $tg\,\psi' - tg\,\psi$ und

positiv und $tg\,\psi$ und ψ wächst
igen nach fortdauernd mit dem
ium von φ.

da A immer < als 1 ist, so ist
positiv und für einerlei n con-
s ist also in dem letzten Fall
$-A^2$) und $A^2+\varphi^2-A$ wird mit
ichsthum von φ immer gröfser.

das Verhalten des $\angle\psi$ bei ne-
$A^2+\varphi^2-A$ ist noch Folgendes
rken: Für kleine Winkel ist nach
igen auch ψ negativ. Da nun
$+\varphi^2-A<0$ auch $\psi'-\psi<0$,
und ψ absolut genommen, $\psi'+\psi$
mufs ψ' negativ gröfser sein als
diesem Grunde wächst $\angle\psi$ ne-
m Scheitel ab bis zu dem Werth
für welchen $A^2+Q^2-A=0$ ist,
und ψ ihre gröfsten negativen
haben. Von hier ab nimmt ψ
negativ ab bis zu dem Werth ψ
hen $A=\frac{\varphi}{tg\,\varphi}$, wo $\psi=0$ ist und
r ab bis $\varphi=90°$ wachsen $tg\,\psi$ und
fortdauernd positiv, so dafs ψ für
r untersten am Widerlager be-
n Fuge ein Maximum ist.

man dem Ausdruck $\mu = tg\,\psi$
$\frac{-\alpha}{tg\,\alpha}$ durch Division mit dem Nen-
Form

$$= tg\,\psi = tg\,\alpha - \frac{\alpha\,(1+tg^2\alpha)}{A+\alpha\,tg\,\alpha}$$

ht man, dafs μ mit A zu- und
t, und da mit der Zunahme von
mit der gröfseren Stärke des Ge-
A abnimmt, so ist das Rückglei-
es Gewölbestücks auf der unteren
m so weniger zu besorgen, je stär-
ist, und um so mehr zu erwarten
ächer es ist.

Praxis verlangt die Kenntnifs von
neren Zustand eines zu erbauen-
wölbes und will auch in dem vor-
en Fall nicht nur die gefährlichste
desselben wissen, sondern auch
Verhalten und der Fortschritt der
eile von der ungefährlichsten Stelle
von Interesse. Aus diesem Grunde
s Verfahren zur Ermittelung der
en Punkte mit Zahlen erläutert

ffindung des Orts, wo die
kraft R in die auf die Fuge
richtete Normale fällt.

diesen Fall hat man den Zähler
nel 2:

$$A-\frac{\varphi}{tg\,\varphi}=0$$

oder $$A=\frac{\varphi}{tg\,\varphi}$$

Nach No. 15 ist

für $n=1{,}01$ $A=0{,}88459$
$n=1{,}1$ $A=0{,}61320$
$n=1{,}3$ $A=0{,}41166$
$n=1{,}4$ $A=0{,}33670$

Um nicht den Bogen φ mit Logarithmen in Rechnung bringen zu müssen hat man

$$\text{Bogen}\,\varphi=\frac{\varphi^\circ}{180^\circ}\,\pi$$

also $$\varphi^\circ=\frac{180}{\pi}\,(\text{Bogen}\,\varphi)$$

und $$\frac{\varphi^\circ}{tg\,\varphi}=\frac{180}{\pi}A$$

Nun berechnet man

für $n=1{,}01$ $log\,\frac{180}{\pi}A = 1{,}7048646$
$1{,}1$ $= 1{,}5457247$
$1{,}3$ $= 1{,}3726613$
$1{,}4$ $= 1{,}2853657$

Ferner setzt man $\frac{\varphi}{tg\,\varphi}=\varphi^\circ\,cot\,\varphi$

und berechnet $log\,\varphi + log\,cot\,\varphi = L$

Man erhält, wenn man das Gewölbe bei $n=1{,}01$ zum Beispiel nimmt.

Für $\varphi=33°$ $L=1{,}7059965$
$\varphi=34°$ $L=1{,}7024912$

Es liegt also das gesuchte φ' zwischen 33° und 34°.

Man hat nach der Regula falsi:

$33°-\varphi' : 33°-34° = 11319 : 35053$

woraus $\varphi'-33° = \frac{11319}{35053}\cdot 60' = 20'$

und für 33° 20′ ist $L=1{,}7048440$

Nun ist wieder

$33°-33°\,20' : \varphi'-33°\,20' = 11524 : 206$

woraus $\varphi' = 33°\,19'\,39''$

denn L für φ' ist $= 1{,}7048644$

Es ist also der Winkel zwischen der Fuge und dem Scheitelloth, bei welchem $\angle\psi=0$ ist, wobei also die Mittelkraft R normal auf die Fuge gerichtet ist = 33° 19′ 39″.

Für alle kleineren Winkel wird $tg\,\psi$ und ψ negativ und es fällt die Mittelkraft innerhalb des Gewölbes.

B. Auffindung des Orts wo ψ seinen gröfsten negativen Werth hat, wo also die Mittelkraft dem Mittelpunkt des Gewölbes oder dem Fugenhalbmesser am nächsten liegt.

Für diese Fuge ist $A^2+\varphi^2-A=0$

Nun hat man $A = 0{,}88459$
$A^2 = 0{,}78255$
also Bogen $\varphi = \sqrt{0{,}10204} = 0{,}319437$

und $\angle \varphi = 18^\circ\ 18'\ 8''$

Man findet der Reihe nach aus Formel 2,

für $\varphi = 0$, also dem Scheitel $tg\ \psi = \frac{A-1}{\infty + 0} = -0$

$\varphi = 1^\circ$	$tg\ \psi = -0{,}02267$	$\psi = -1^\circ\ 18'$
$\varphi = 18^\circ$	$tg\ \psi = -0{,}02554$	$\psi = -1^\circ\ 27\frac{1}{2}'$
$\varphi = 18^\circ\ 18'\ 8''$	$tg\ \psi = -0{,}02718$	$\psi = -1^\circ\ 33\frac{1}{2}'$
$\varphi = 19^\circ$	$tg\ \psi = -0{,}02705$	$\psi = -1^\circ\ 33'$
$\varphi = 33^\circ\ 19'\ 39''$	$tg\ \psi = 0$	$\psi = 0$

Am Scheitel ($\varphi = 0$) also fällt die Mittelkraft rechtwinklig auf die Scheitelfuge, $\angle\ \psi$ ist $= 0$ und wächst negativ bis zu seinem gröfsten Werth $1^\circ\ 33\frac{1}{2}'$ von wo er wieder negativ abnimmt und bei $\varphi = 33^\circ\ 19'\ 39''$ wieder zu Null wird.

Die empfindlichste Stelle des Gewölbes für die Rückgleitung ist die Widerlagerfuge.

Nimmt man das schwächste Gewölbe für $n = 1{,}01$, so hat man nach No. 15: $A = 0{,}88459$.

Also $$tg\ \psi = \frac{0{,}88459 - \frac{\alpha}{tg\ \alpha}}{\frac{0{,}88459}{tg\ \alpha} + \alpha}$$

Setzt man für den nachtheiligsten Fall $\angle\ \alpha^\circ = 90^\circ$ also Bogen $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ so ist $tg\ \alpha = \infty$ und

$$tg\ \psi = \frac{0{,}88459}{\frac{1}{2}\pi} = 0{,}56315$$

In allen den Fällen also, wo No. 8 die Versuchszahlen für μ kleiner sind als 0,56315 mufs das Gewölbe stärker sein, oder die Fuge mufs am Widerlager einen kleineren Fufswinkel als 90° erhalten.

Für das Gewölbe $n = 1{,}01$ und $A = 0{,}61320$ hat man für $\alpha = 90^\circ$

$$tg\ \psi \frac{0{,}61320}{\frac{1}{2}\pi} = 0{,}4660$$

Für das Gewölbe $n = 1{,}3$ und $A = 0{,}41166$

$$tg\ \psi = \frac{0{,}41166}{\frac{1}{2}\pi} = 0{,}25887$$

Für das Gewölbe $n = 1{,}4$ und $A = 0{,}33670$

$$tg\ \psi = \frac{0{,}3367}{\frac{1}{2}\pi} = 0{,}21435$$

Alle diese Gewölbe haben für die Mittelkraft am Widerlager einen Winkel ψ, der kleiner ist als der Reibungswinkel und sind somit gegen das Rückgleiten eines Gewölbestücks gesichert.

18. Es sollen die Bedingungen des Gleichgewichts eines überall gleich starken Kreisbogengewölbes und seiner Widerlager unter der Voraussetzung ermittelt werden, dafs ein oberes Gewölbestück als Keil wirkend das darunter befindliche zum Rückgleiten bringt.

Hierunter ist verstanden, dafs ein oberes Gewölbstück vermöge der Keilwirkung nach innen gleiten will und mit diesem Bestreben das darunter befindliche Gewölbstück die Einwirkung zum Gleiten nach aufsen mittheilt.

Die erstgenannte Wirkung des oberen Wölbstücks ist für ein Kreisbogengewölbe in No. 9 mit Fig. 659 betrachtet worden: das Wölbstück *ABDE*, ein Kreisringstück unter dem Centriwinkel φ erhält dadurch das Bestreben nach innen zu rutschen, dafs die aus der Kraft *P* und dem Gewicht *Q* hervorgehende Mittelkraft *R* rechts der Normale *FH* fällt und es ist für's Gleichgewicht (Formel 3)

$$P = Q\ cot\ (\varphi + \imath) = \tfrac{1}{2}(n^2 - 1)\ r^2\ \varphi\ cot\ (\varphi + \imath)$$

Ferner ist zu Verhütung des Rutschens nach innen unter der Bedingung, dafs $\mu = tg\ \imath = \frac{1}{4}$ ist, im Maximo (Formel 5)

$$\varphi\ cot\ (\varphi + \imath) = 0{,}34788$$

und der Horizontalschub (*P*) für die Keilwirkung im Maximo (Formel II)

$$P = 0{,}17394\ (n^2 - 1)\ r^2$$

Mit diesem constanten Werth von *P* ist auch der dem Maximo entsprechende $\angle ACD$ (Fig. 659) $= \varphi = 27^\circ\ 18'$ für die folgende Untersuchung beseitigt.

Die zweite Wirkung, das Gleiten nach aufsen ist im Allgemeinen für das Gewölbe in No. 16 mit Fig. 662 untersucht. Hier ist *ABDE* das Gewölbstück, dessen Kanten *AB* und *DE* den beseitigten Maximalwinkel in *C* bilden und das auf das untere Wölbstück *DEKL* mit der Horizontalspannung in Maximo

$$= 0{,}17394\ (n^2 - 1)\ r^2$$

eine Wirkung zum Auswärtsgleiten äufsert,

das Gewicht beider Gewölbstücke
einzigen Q vereinigt der Hori-
ɔannung P nachgibt, so dafs die
aft R aufserhalb des Gewölbes

Formeln No. 16 beweisen übrigens
ınzliche Unabhängigkeit von der
es Punktes M, in welchem beide
P und Q sich schneiden und For-
III gibt für's Gleichgewicht der
mit der Reibung

$$tg\,\psi = \frac{P\,tg\,\varphi - Q}{P + Q\,tg\,\varphi}$$

len Winkel bedeutet den die un-
ıge beider Gewölbstücke mit dem
lloth bilden.

man nun
len Werth $0{,}17394\,(n^2-1)\,r^2$
len Werth $\frac{1}{4}\,(n^2-1)\,r^2\varphi$
ividirt Zähler und Nenner mit
$1)\,r^2$, so erhält man

$$\frac{0{,}34788\,tg\varphi - \varphi}{0{,}34788 + \varphi\,tg\,\varphi} = \frac{0{,}34788 - \varphi\,cot\,\varphi}{0{,}34788\,cot\,\varphi + \varphi}$$

Werth von $tg\,\psi$ wird also im Ma-
für $\varphi = 90°$. Für diesen Werth
n

$$tg\,\psi = \frac{0{,}34788}{\frac{1}{2}\pi} = 0{,}22145$$

ıt also $tg\,\imath = \mu$ immer gröfser als
nkel, den nach aufsen die Mittel-
mit dem Loth auf die Fuge bil-
d es kann in Folge der Keil-
ng kein unteres Gewölbstück
aufsen rutschen.

Es sollen die Bedingungen des
ɛewichts eines gleich starken Kreis-
ɛewölbes und seiner Widerlager
der Voraussetzung ermittelt wer-
ıfs ein unteres Gewölbstück
ɛbel wirkend sich nach ein-
dreht.

ig. 663 *DEKL* das Gewölbestück,
das Bestreben hat, um die un-
ınenkante L nach einwärts sich
ben, also die Fuge LK bei K zu
so preſst es mit der äufseren
nte D gegen das obere Gewölb-
DEB, es strebt dasselbe um diese
D nach innen zu drehen und die
E bei E zu öffnen. Mit diesem
ɔn entsteht zugleich ein Gegen-
des oberen Stücks $ABDE$ in der
nte B der Scheitelfuge gegen das
befindliche Scheitelstück und ein
ɔn zu Oeffnung der Scheitelfuge

st dieser Fall also der entgegen-
ɔ von No. 10 mit Fig. 660. Der
teldruck wirkt dort in A, hier in
B, und geht von B auf den festen Punkt D über, wo er der Drehung um L widersteht, während dort eine Drehung um K vorausgesetzt worden.

Die Kraft P, wirkt demnach mit dem Hebelsarm $MO = x$, auf die Drehaxe L um die Oeffnung der Fuge bei K zu hindern; ihr entgegen wirkt Q in G mit dem Hebelsarm $(LO - GJ) = (y'' - z)$ indem sie beabsichtigt die Fuge in K zu öffnen; ferner hat das Gewicht Q' in G' dieselbe Absicht und wirkt mit dem Hebelsarm $(LO - G'N) = (y'' - z')$. Man hat also die Gleichung:

$$P,x, \lesseqgtr Q\,(y'' - z) + Q'\,(y'' - z')$$
$$\lesseqgtr (Q + Q')\,y'' - (zQ + z'Q')$$

Setzt man (wie No. 10) $W =$ dem Gewicht beider Gewölbestücke, oder der ganzen $ABKL$; u dessen Abstand vom Scheitelloth, so ist

$$Q + Q' = W$$
$$zQ + z'Q' = uW$$

daher
$$P,x, \lesseqgtr y''W - uW$$
$$\lesseqgtr W\,(y'' - u)$$

wo $y'' - u$ der Abstand des Schwerpunkts des ganzen Gewölbestücks von der Kante L ist.

Vergleicht man diese Bedingung mit der aus No. 10

$$P'x' \lesseqgtr (y' - u)\,W$$

so hat man in beiden die Länge u übereinstimmend, y' aber $> y''$ folglich das Moment der wirklichen Scheitelspannung für die Hebelwirkung gröfser als das für das Einwärtsdrehen eines unteren Wölbstücks. Ist daher das Gewölbe mit der wirklichen Scheitelspannung im Gleichgewicht, so wäre der Bedingung gemäfs $P,x,$ gewifs gröfser als $W\,(y'' - u)$, wäre $P'x'$ aber auch kleiner, so wäre

$$P'x' - P,x, = (y' - u)\,W - (y'' - u)\,W$$
$$= (y' - y'')\,W$$

und es könnte das Moment der wirklichen Scheitelspannung von dem Moment der Spannung für Einwärtsdrehen eines unteren Gewölbestückes nur übertroffen werden, wenn $y'' > y'$ wäre, welches nicht möglich ist.

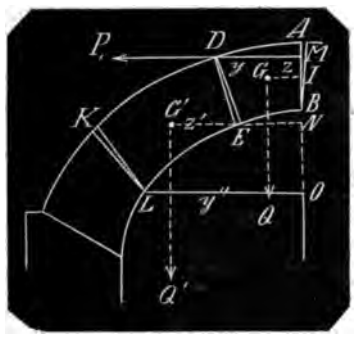
20. Ein unteres Gewölbstück, welches als Hebel wirkend sich einwärts dreht, kann mit diesem Bestreben ein oberes Wölbstück nicht als Keil zum Rückgleiten bringen, denn die wirkliche Scheitelspannung P' für die Hebelwirkung verhindert das Einwärtsdrehen der Wölbstücke, die Keilwirkung kommt aber erst dann in Betracht, wenn deren Scheitelspannung $P >$ ist als die für die Hebelwirkung P' und dann verhindert die Schei-

telspannung P das Einwärtsdrehen der unteren Wölbstücke.

21. In den bisherigen Untersuchungen der Gewölbe ist jederzeit eine Fuge im Scheitel angenommen worden, es fragt sich nun wie die Kräfte und Wirkungen sich verhalten wenn das Gewölbe einen Schlufsstein hat. Da nun die wirklichen Scheitelspannungen für die Keilwirkung und für die Hebelwirkung die hervorragendsten Kräfte sind, so kann die Untersuchung auf diese beiden sich beschränken.

Es sei $ABDE$ der halbe Schlufsstein des Gewölbes von dem Gewicht Q in dem Abstand $GJ = z$ dessen Schwerpunkts G vom Scheitelloth wirkend. Der Abstand DM der oberen Aufsenkante D vom Scheitelloth sei y; der lothrechte Abstand AM der Kante D vom Scheitel A sei x.

Fig. 663.



Das dem Schlufsstein zunächst befindliche Gewölbstück $DELK$ habe das Gewicht Q', der Abstand $G'N$ seines Schwerpunkts G' vom Scheitelloth sei z', der der inneren Unterkante L von dem Scheitelloth sei $LO = y''$, und der Abstand AO der Kante L vom Scheitel A sei x'.

Da nun in AB keine Fuge ist, so kann weder in A noch in B Bestreben zur Drehung sein; die Hebelwirkung kann also nur von dem Gewölbestück $DEKL$ ausgehen, und es wird dann vermöge seines Gewichts Q' in G' das Bestreben haben, sich um die innere Unterkante L nach einwärts zu drehen; hierdurch aber geschieht ein Druck des Gewölbestücks gegen den Schlufsstein in der Kante D und der Schlufsstein wird in dieser Kante D der Drehung um die Kante L mit einem Horizontalschube $P_{,,}$ Widerstand leisten. Das Gewicht des Schlufssteins wirkt im Scheitelloth AB auf beide Gewölbehälften zugleich, der halbe Schlufsstein folglich mit dem halben Gewicht Q in der Stützkante D lothrecht abwärts, beide Kräfte Q und Q' vereinigen sich, die Drehung des unteren Gewölbstücks $EDLK$ um die Kante L zu vollbringen, die Kraft P' wirkt die Drehung zu verhindern. Für's Gleichgewicht hat man daher die Momentengleichung in Beziehung auf die Axe L:

$$(AO-AM)P_{,,} = (LO-DM)Q + (LO-G'N)Q'$$

oder $$x'P_{,,} = (y''-y)Q + (y''-z')Q'$$

woraus $$P_{,,} = \frac{(y''-z')Q' + (y''-y)Q}{x'}$$

oder $$P_{,,} = \frac{y''(Q+Q') - z'Q' - yQ}{x'}$$

In No. 19 ist die Kraft, welche bei einer Scheitelfuge derselben Drehung um L widersteht

$$P_{,} = \frac{y''(Q+Q') - z'Q' - zQ}{x'}$$

also ist $$P_{,} - P_{,,} = (y-z)\frac{Q}{x'}$$

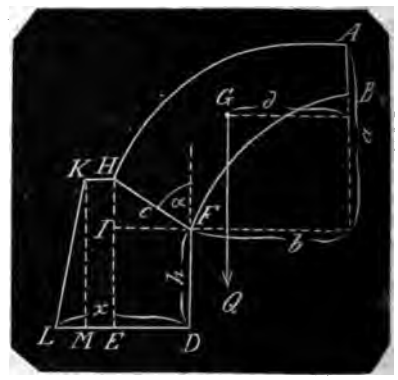
Es ist aber $y > z$

folglich ist die Kraft $P_{,}$ bei einer Scheitelfuge gröfser als die Kraft $P_{,,}$ bei einem Schlufsstein und mithin die Stabilität des Gewölbes bei einem Schlufsstein mehr gesichert als bei einer Scheitelfuge.

22. Für ein Gewölbe ist die Scheitelspannung der Art bestimmt worden, dafs es den Anforderungen der Stabilität entspricht. Die Abmessungen seiner Widerlager sollen so festgesetzt werden, dafs dieselben sowohl gegen das Verschieben als gegen das Umwerfen gesichert sind.

Es sei Fig. 664 $DFHKL$ der Querschnitt des trapezförmigen Widerlagers, die halbe Spannung des Gewölbes $= b$,

Fig. 664.



die lichte Höhe bis zur Horizontalen der inneren Oberkante des Widerlagers $= a$, die wirkliche Scheitelspannung $= P$, der Fufswinkel $FHJ = \alpha$, die innere Höhe des Widerlagers $= h$, die obere Breite desselben $FH = c$, die äufsere Böschung KL sei nfüfsig, die untere Breite $DL = x$; die Gewichtseinheit, wie bei den früheren Untersuchungen = der Flächeneinheit, Q das Gewicht der Gewölbehälfte, d der Abstand dessen Schwerpunkts vom Scheitelloth.

Der Querschnitt des Widerlagers ist = den Trapezen

$$DEFH + EHKL = \tfrac{1}{2}(DF + EH) \cdot DE + \tfrac{1}{2}(HK + EL) \cdot EH$$

Nun ist $DF = h$

$$EH = EJ + JH = h + c \cos \alpha$$

$$DE = c \sin \alpha$$

also $\tfrac{1}{2}(DF + EH) \cdot DE = \tfrac{1}{2}(2h + c \cos \alpha)\, c \cdot \sin \alpha$

$$HK = DL - DE - ML = x - c \sin \alpha - n \cdot EH$$

$$= x - c \sin \alpha - n(h + c \cos \alpha) = x - c(\sin \alpha + n \cos \alpha) - nh$$

$$EL = DL - DE = x - c \sin \alpha$$

also $\tfrac{1}{2}(HK + EL)\, EH = [x - c \sin \alpha - \tfrac{1}{2}n(h + c \cos \alpha)](h + c \cos \alpha)$

Mithin das Trapez $DFHKL$

$$= x(h + c \cos \alpha) + (h + \tfrac{1}{2} c \cos \alpha)\, c \cdot \sin \alpha - [c \sin \alpha - \tfrac{1}{2}n(h - c \cos \alpha)](h + c \cdot \cos \alpha)$$

welches der Kürze wegen bezeichnet werden soll

$$Ax + B$$

dann ist das Gesammtgewicht des Gewölbes mit dem Widerlager

$$Ax + B + Q$$

Aus diesem Gewicht entspringt an der Grundfläche des Widerlagers eine Reibung $= \mu(Ax + B + Q)$

Also für's Gleichgewicht und die Sicherheit gegen das Verschieben des Widerlagers mit dem Horizontalschub

$$P \leqq \mu(Ax + B + Q)$$

Man nimmt für die Sicherheit an, dafs der Reibungswiderstand mindestens um die Hälfte gröfser sei als der Horizontalschub, also die Gleichung für die Stabilität gegen das Verschieben ist

$$\tfrac{1}{2}P = \mu(Ax + B + Q)$$

woraus

$$x = \left(\frac{3P}{2\mu} - B - Q\right)\frac{1}{A} = \frac{3P - 2\mu(B + Q)}{2\mu A}$$

Hat das Widerlager horizontale Fugen, so kann auf der obersten horizontalen Fuge ein Gleiten des Oberkörpers erfolgen; alsdann wird die Stärke x in dieser Fuge und h von derselben Fuge bis zur inneren Anfänger-Kante F gemessen.

Soll das Widerlager durch den Horizontalschub P um die Kante L nicht gedreht und umgeworfen werden können, so darf das Moment des halben Gewölbes und des Widerlagers in Beziehung auf die Kante L genommen nicht kleiner sein, als das Moment des Horizontalschubes P in Beziehung auf dieselbe Kante L.

Der Hebelsarm des halben Gewölbes ist $= x + b - d$

also dessen Moment in Beziehung auf $L = (x + b - d)\, Q$.

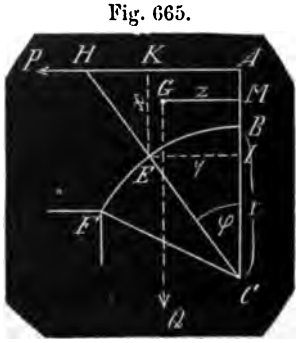
Ist das Gewicht des Widerlagers q, die Entfernung des Loths aus dessen Schwerpunkt von $L = e$ so ist dessen Moment in Beziehung auf die Kante $L = e \cdot q$; der Horizontalschub hat den Hebelsarm $a + h$ mithin ist für's Gleichgewicht und Sicherheit

$$P(a + h) \leqq (x + b - d)\, Q + eq$$

Auch hier soll der Sicherheit wegen das Moment des Widerstandes das $1\frac{1}{2}$fache von dem Moment der Scheitelspannung betragen.

23. Den Horizontalschub eines Gewölbes zu bestimmen, dessen innere Wölblinie ein Kreisbogen, dessen äufsere aber eine Horizontallinie ist, die noch aufserdem eine nach ihrer Länge gleichmäfsig vertheilte Belastung trägt.

Fig. 665.



A. Wenn die Wölbfugen bis zur obersten Horizontallinie sich erstrecken.

Es sei BF die innere Wölblinie vom Halbmesser $BC = r$, die Stärke AB des Gewölbes im Scheitel $= d$, die Belastung der Horizontalen auf die Längeneinheit $= q$, der Winkel HCB eines Wölbstückes $= \varphi$. Alsdann ist die Belastung auf die Länge $AH = (r + d)\, q\, tg\, \varphi$.

Ist G der Schwerpunkt des Gewölbstückes $ABEH$, dessen Abstand GM von dem Scheitelloth $= z$, der Abstand EJ der Bogenkante E von demselben Loth $= y$, der Abstand EK derselben Kante von der Horizontalen $AH = x$, das Gewicht des Gewölbestücks $ABEH = Q$ und die Scheitelspannung in $A = P$, so hat man für die Kante E als Drehaxe: das Moment der Scheitelspannung für die Hebelwirkung = der Summe der Momente von Q und q. D. h.

$$xP' = (y - z)\, Q + (y - \tfrac{1}{2}\, AH)\, AH \cdot q$$
$$= (y - z)\, Q + [y - \tfrac{1}{2}\, (r + d)\, tg\, \varphi]\, (r + d)\, q\, tg\, \varphi$$

hieraus die Scheitelspannung für die Hebelwirkung:

$$P' = \frac{y\,[Q + (r + d)\, q\, tg\, \varphi] - z\, Q - \tfrac{1}{2}\, (r + d)^2\, q\, tg^2 \varphi}{x}$$

Nun ist $Q = \triangle CAH -$ Ausschnitt CBE

$$= \tfrac{1}{2}\, AC \times AH - \tfrac{1}{2}\, BC^2 \varphi$$
$$= \tfrac{1}{2}\, (r + d)^2\, tg\, \varphi - \tfrac{1}{2}\, r^2 \varphi$$

Ferner ist $zQ =$ dem Moment des $\triangle CAH -$ dem Moment des Ausschnitts CBE, beide Momente in Beziehung auf das Scheitelloth AC.

Das Moment des $\triangle CAH$ in Beziehung auf AC ist

$$\triangle CAH \times \tfrac{1}{3}\, AH = \tfrac{1}{2}\, (r + d)^2 tg\, \varphi \cdot \tfrac{1}{3}\, (r + d)\, tg\, \varphi$$
$$= \tfrac{1}{6}\, (r + d)^3\, tg^2 \varphi$$

Der Ausschnitt CBE ist $= \tfrac{1}{2} r^2 \varphi$.

Der Abstand des in der Halbirungslinie von φ liegenden Schwerpunkts des Ausschnitts vom Mittelpunkt C

ist $= \tfrac{2}{3}\, \dfrac{sin\, (\frac{1}{2}\varphi)}{\frac{1}{2}\varphi}\, r$

also der Abstand desselben vom Scheitelloth AC

$$= \tfrac{2}{3}\, \frac{sin\, (\frac{1}{2}\varphi)}{\frac{1}{2}\varphi}\, r \cdot sin\, (\tfrac{1}{2}\varphi) = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{sin^2 (\frac{1}{2}\varphi)}{\varphi}\, r$$

und das Moment des Ausschnitts in Beziehung auf AC

$$= \tfrac{2}{3}\, \frac{sin^2 (\frac{1}{2}\varphi)}{\varphi} \cdot r \times \tfrac{1}{2} r^2 \varphi = \tfrac{1}{3}\, r^3\, sin^2 (\tfrac{1}{2}\varphi)$$

mithin das Moment des Gewölbestücks $ABEH$ auf AC

$$zQ = \tfrac{1}{6}\, (r + d)^3 tg^2 \varphi - \tfrac{1}{3}\, r^3\, sin^2 (\tfrac{1}{2}\varphi)$$

Ferner ist $y = r\, sin\, \varphi$

$$x = r + d - r\, cos\, \varphi$$

Substituirt man alle diese Werthe in den Ausdruck für P', so erhält man die Scheitelspannung für die Hebelwirkung:

$$P' = \frac{r\, sin\, \varphi\, [\frac{1}{2}\, (r + d)^2 tg\, \varphi - \frac{1}{2} r^2 \varphi + (r + d)\, q\, tg\, \varphi]}{r + d - r\, cos\, \varphi}$$
$$- \frac{\frac{1}{6}\, (r + d)^3 tg^2 \varphi - \frac{1}{3}\, r^3\, sin^2 (\frac{1}{2}\varphi) + \frac{1}{2}\, (r + d)^2 q\, tg^2 \varphi}{r + d - r\, cos\, \varphi}$$

oder

$$P' = \frac{r(r+d)\, tg\, \varphi\, sin\, \varphi\, [\frac{1}{2}(r+d) + q] - \frac{1}{2} r^2 \varphi\, sin\, \varphi - \frac{1}{2}(r+d)^2 tg^2 \varphi\, [\frac{1}{3}(r+d) + q] + \frac{1}{3} r^3 sin^2 \frac{\varphi}{2}}{r + d - r\, cos\, \varphi}$$

Nun ist $\tfrac{1}{3}\, r^3\, sin^2 \dfrac{\varphi}{2} = \tfrac{1}{6}\, r^2\, (1 - cos\, \varphi) = \tfrac{1}{6}\, r^2\, [d + r\, (1 - cos\, \varphi) - d]$

$$= \tfrac{1}{6}\, r^2\, [d + r\, (1 - cos\, \varphi)] - \tfrac{1}{6} r^2 d$$

Diesen Werth für das letzte Glied und mit dem ersten Gliede vorangesetzt gibt

$$P' = \frac{\frac{1}{6} r^2 [d + r\, (1 - cos\, \varphi)]}{d + r\, (1 - cos\, \varphi)} + \frac{r\, (r + d)\, tg\, \varphi\, sin\, \varphi\, [\frac{1}{2}\, (r + d) + q] - \frac{1}{2} r^3 \varphi\, sin\, \varphi}{d + r\, (1 - cos\, \varphi)}$$
$$- \frac{\frac{1}{6}\, (r + d)^2 tg^2 \varphi\, [\frac{1}{2}\, (r + d) + q] + \frac{1}{6} r^2 d}{d + r\, (1 - cos\, \varphi)}$$

$$\frac{\frac{1}{2}r^2d+\frac{1}{2}(r+d)^2tg^2\varphi\left(q+\frac{r+d}{3}\right)-\left[r(r+d)\left(q+\frac{r+d}{2}\right)tg\,\varphi-\frac{1}{2}r^2\varphi\right]\sin\varphi}{d+r(1-\cos\varphi)}$$

$\frac{1}{2}r$ dividirt:

$$\frac{\frac{1}{2}rd+\frac{(r+d)^2}{r}\left(q+\frac{r+d}{3}\right)tg^2\varphi-[(r+d)(2q+r+d)\,tg\,\varphi-r^2\varphi]\sin\varphi}{\frac{r+d}{r}-\cos\varphi}$$

eite Glied des Ausdrucks für für jeden Werth von φ subtrac- für $\varphi=0$ und für $\varphi=90°$ ist r positiv. Für $\varphi=0$ wird der $+\frac{1}{3}rd$ und für $\varphi=90°$ wird der $+\infty$. Um also das Maximum von P' für die wirkliche Scheitelspannung zu finden, hat man nur nöthig, von dem zweiten Gliede das Minimum zu bestimmen.

2. Die Scheitelspannung für die Keilwirkung ist nach Formel I.

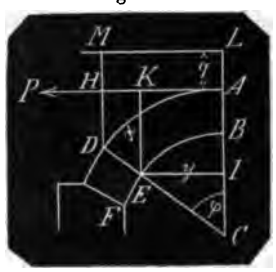
$$\begin{array}{l}Q+(r+d)\,tg\,\varphi\cdot q]\,cot\,(\varphi+\tau)\\ \frac{1}{2}(r+d)^2\,tg\,\varphi-\frac{1}{2}r^2\varphi+(r+d)\,q\,tg\,\varphi]\,cot\,(\varphi+\tau)\\ [(r+d)(r+d+2q)\,tg\,\varphi-\tau^2\varphi]\,cot\,(\varphi+\tau)\end{array}$$

ichte mit Logarithmen ausz- Proberechnung ergibt den $\angle\varphi$ mum von P und P'; das größte xima ist der wirkliche Horizon- les Gewölbes.

ın die Wölbfugen nicht bis zu en horizontalen Linie sich er- sondern nur die Fugen eines ntrischen Kreisbogen bestehen- ılbes sind, welches bis zu der en Oberfläche übermauert ist. nun $ABDE$ der Theil des Ge- on welchem der Horizontalschub

Für den nachtheiligsten Fall sgesetzt werden, dafs die Ueber- ; in einer lothrechten Fuge DH nen kann. Ist dann die Bela- rch dasselbe Material von der $=q$ gegeben, so hat man bei denselben Bezeichnungen mit Fig. 665, und wenn man noch den äufseren Halbmesser AC mit R annimmt, das Gewicht Q = dem Querschnitt $BEDML$ = dem Trapez $CDML$ – dem Kreisausschnitt CBE.

Fig. 666.



$$\begin{array}{l}\frac{1}{2}(CL+DM)\,ML-CBE\\ \frac{1}{2}[(R+q)+(R+q-R\cos\varphi)]\times R\sin\varphi-\frac{1}{2}r^2\varphi\\ (R+q-\frac{1}{2}R\cos\varphi)\,R\sin\varphi-\frac{1}{2}r^2\varphi\end{array}$$

Moment von Q in Beziehung auf das Scheitelloth CL ist = dem Moment ɜzes $CDML$ – dem Moment des Kreisausschnitts CBE.

Abstand des Trapezes von CL ist =

$$\frac{1}{3}ML\,\frac{CL+2DM}{CL+DM}=\frac{1}{3}R\sin\varphi\,\frac{R+q+2(R+q-R\cos\varphi)}{R+q+R+q-R\cos\varphi}$$

$$=\frac{1}{3}R\sin\varphi\,\frac{3(R+q)-2R\cos\varphi}{2(R+q)-R\cos\varphi}$$

multiplicirt mit dem Trapez $(R+q-\frac{1}{2}R\cos\varphi)\,R\sin\varphi$ gibt das Moment ɜzes

$\frac{1}{3}\sin^2\varphi\cdot[3(R+q)-2R\cos\varphi]$

las Moment des Kreisausschnitts nach A

$= \frac{1}{3} r^3 \sin^2(\frac{1}{2}\varphi) = \frac{1}{3} r^3 (1 - \cos\varphi)$ gibt das Moment von Q in Beziehung auf CL

$= z \cdot Q = \frac{1}{4} R^2 \sin^2\varphi \,[3(R+q) - 2R\cos\varphi] - \frac{1}{3} r^3 (1 - \cos\varphi)$

und das Moment auf die Kante E als Drehkante genommen $= (y - z)\,Q$.

Das Moment der Scheitelspannung in der Richtung AP auf dieselbe Kante E genommen ist $= P \cdot EK = Px$, folglich

$$xP' = (y - z)\,Q$$

oder $(R - r\cos\varphi)\,P' = (r\sin\varphi - z)\,Q$

also

$$(R - r\cos\varphi)\,P' = r\sin\varphi\,Q - zQ = r\sin\varphi\,Q - (R + q - \tfrac{1}{2}R\cos\varphi)\,R\sin\varphi - \tfrac{1}{2} r^2\varphi] - zQ$$

Für zQ den obigen Werth gesetzt und reducirt:

$$P' = \frac{R\sin^2\varphi\,[(R+q)(r - \frac{1}{2}R) - \frac{1}{4}R(3r - 2R)\cos\varphi] - \frac{1}{2} r^3 \varphi\sin\varphi + \frac{1}{3} r^3 (1 - \cos\varphi)}{R - r\cos\varphi}$$

Oder wenn man wie früher $\frac{R}{r} = n$ und noch $\frac{q}{r} = m$ setzt:

$$P' = \frac{n\sin^2\varphi\,[(n+m)(1 - \frac{1}{2}n) - \frac{1}{4}n(3 - 2n)\cos\varphi] - \frac{1}{2}\varphi\sin\varphi + \frac{1}{3}(1 - \cos\varphi)}{n - \cos\varphi} r^3$$

Es ist nun in einem gegebenen Fall bei bekanntem n und m der $\angle\varphi$ für's Maximum P' als die wirkliche Scheitelspannung für die Hebelwirkung zu ermitteln.

2. Die Scheitelspannung P für die Keilwirkung ist nach Formel I:

$$P = Q\cot(\varphi + \tau) = [R + q - \tfrac{1}{2}R\cos\varphi)\,R\sin\varphi - \tfrac{1}{2} r^2\varphi]\cot(\varphi + \tau)$$
$$= [(n + m - \tfrac{1}{2}n\cos\varphi)\,n\sin\varphi - \tfrac{1}{2}\varphi]\,r^2\cot(\varphi + \tau)$$

Dieser Ausdruck gibt für's Maximum die wirkliche Scheitelspannung für die Keilwirkung.

24. Zahlenbeispiel für ein Kreisbogengewölbe.

Es soll die Stabilität eines Gewölbes untersucht werden, welches in Form eines Halbkreises eine Spannung von 20 Fuſs und eine durchweg gleichförmige Stärke von 1½ Fuſs hat; ferner soll die Stärke der Widerlager bei deren Höhe von 12 Fuſs gefunden werden.

Es ist (s. No. 9)

$r = 10'$, $R = 10 + 1\frac{1}{2} = 11\frac{1}{2}'$ folglich

$n = 1{,}15$

$n^2 = 1{,}3225$

$n^3 = 1{,}5209$

Die Scheitelspannung im Maximo für die Keilwirkung ist nach No. 9

1) $P = 0{,}17394 \times (n^2 - 1)\,r^2$
$= 0{,}17394 \times 0{,}3225 \times 100 = 5{,}6095$

Die Scheitelspannung im Maximo für die Hebelwirkung ist nach No. 1

$$P' = \tfrac{1}{2}(n^2 - 1)\,r^2 \left[\frac{\varphi\sin\varphi + \frac{2}{3}\frac{n^3 - 1}{n + 1}}{n - \cos\varphi} - \frac{2}{3}\frac{n^3 - 1}{n^2 - 1}\right]$$
$$= 16{,}125\left[\frac{\varphi\sin\varphi + 0{,}16152}{1{,}15 - \cos\varphi} - 1{,}0768\right]$$

Der Tabelle No. 12 zufolge versuche φ zwischen 54° und 58°.

(Nach No. 14 rechnet man

$\varphi\sin\varphi = \frac{\varphi^\circ}{180^\circ}\pi\sin\varphi^\circ$).

Man erhält den ersten Summand der Klammer

für $\varphi = 54^\circ$ Summand $= 1{,}6435$
„ $\varphi = 55^\circ$ „ $= 1{,}6443$
„ $\varphi = 56^\circ$ „ $= 1{,}6449$
„ $\varphi = 57^\circ$ „ $= 1{,}6554$
„ $\varphi = 58^\circ$ „ $= 1{,}6449$

Es ist also für $\varphi = 57^\circ$, P' ein Maximum.

2. $P' = 16{,}125\,(1{,}6554 - 1{,}0768) = 9{,}3299$.

Woraus hervorgeht, dafs die Scheitelspannung für die Hebelwirkung gröfser ist als die für die Keilwirkung.

Die hypothetische Scheitelspannung bei dem Fuſswinkel $= 90^\circ$ hat man nach No. 13, Formel VII a;

3. $P' = \frac{1}{2}(n^2 - 1)\,r^2\left[\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}\frac{n^3 - 1}{n(n^2 - 1)}\right]$
$= 16{,}125\,(1{,}57080 - 0{,}93634) = 10{,}191$

kliche Scheitelspannung für die
ung ist also bedingungsmäfsig
ls die hypothetische Scheitel-
.

nach No. 16 ein oberes Wölb-
Hebel wirkend, ein unteres nach
erschiebt findet man für das
ngewölbe aus No. 17, Formel IX.

$$tg\,\psi = \frac{A - \frac{\varphi}{tg\,\varphi}}{\frac{A}{tg\,\varphi} + \varphi}$$

ch Formel X = ist der Klam-
von P' im Maximo, also für

$$,6554 - 1,0768 = 0,5786$$

t das Maximum der gedachten
bewirkung in der untersten Fuge,
$= 90°$ und

$$\psi = \frac{A}{\frac{1}{2}\pi} = \frac{0,5786}{1,5708} = 0,371$$

in der geringste Werth von
: 0,5 ist, so kann ein Rückglei-
Gewölbstücks auf dem Wider-
it statt finden.

; durch die Keilwirkung eines
ölbstücks ein unteres zum Aus-
en nicht gebracht werden kann
. 18 nachgewiesen.

leichen weist No. 19 nach, dafs
es Gewölbstück als Hebel wir-
kend zur Drehung nach einwärts nicht
kommen kann.

7. Die Widerlager sollen einen recht-
eckigen Querschnitt haben. Um deren
Stärke x zu finden hat man

Die gröfsere von beiden Scheitel-
spannungen, die für die Hebelwirkung
$= 9,3299$

Die lothrechte Entfernung der horizon-
talen Scheitelspannung von der unteren
Aufsenkante des Widerlagers $1\frac{1}{2}' + 10' + 12'$
$= 23\frac{1}{2}'$.

Das Gewicht eines Widerlagers ist $= 12x$
mit dem Hebelsarm $\frac{1}{2}x$.

Das Gewicht des halben Gewölbes

$$= \frac{\pi}{4}(R^2 - r^2) = \frac{\pi}{4}(n^2 - 1)\,r^2$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot 0,3225 \cdot 10^2 = 25,3290.$$

Der Hebelsarm des halben Gewölbes
in Beziehung auf die äufsere Widerlager-
kante findet man folgender Art.

Nach Formel 4, No. 12 ist die Entfer-
nung des Schwerpunkts eines Kreisbo-
gengewölbes vom Scheitelloth

$$\frac{2}{3}\frac{sin^2\frac{1}{2}\varphi}{\frac{1}{2}\varphi} \cdot \frac{n^3 - 1}{n^2 - 1}\,r = \frac{2}{3}\frac{1 - cos\,\varphi}{\varphi} \cdot \frac{n^3 - 1}{n^2 - 1}\,r$$

Für $\varphi = 90° = \frac{1}{2}\pi$ also $= \frac{4}{3} \cdot \frac{(n^3 - 1)\pi}{n^2 - 1}\,r$

also das Moment des Gewölbes in Be-
ziehung auf das Scheitelloth

$$\frac{-1}{-1)\,\pi}\,r \times \frac{\pi}{4}(n^2 - 1)\,r^2 = \frac{1}{3}(n^3 - 1)\,r^3 = \frac{1}{3} \cdot 0,5209 \cdot 1000 = 173,625$$

t das Gewicht des halben Ge-
25,3290 folglich der Abstand
erpunkts vom Scheitelloth

$$z = \frac{173,625}{25,3290}$$

der Abstand des Gewölbeschwer-
in der äufseren Widerlagerkante

$$+ x - z = 10 + x - \frac{173,625}{25,329}$$

so das Moment des Gewölbes
ufsenkante =

$$329 - 173,625 = 25,329x + 79,665$$

ment des Widerlagers =

$$\frac{1}{2}x \cdot 12x = 6x^2$$

das gesammte Widerstandsmo-

$$6x^2 + 25,329x + 79,665$$

Moment der Scheitelspannung:

$$,3299 \times 23\frac{1}{2} = 219,2526$$

Man hat nun für die Sicherheit des
Gewölbes:

I. Gegen das Verschieben des Wider-
lagers:

Das Gesammtgewicht von Gewölbe und
Widerlager $= 25,3290 + 12x$

Die Scheitelspannung $= 9,3299$

also für's Gleichgewicht und für die Si-
cherheit die Vergleichung

$$\mu\,(25,3290 + 12x) \gtrless 9,3299$$

Wenn man für μ den kleinsten Werth
$= \frac{1}{2}$ nimmt, so ersieht man, dafs das Ge-
wölbe gegen das Verschieben der Wider-
lager hinreichend geschützt ist.

Denn nach No. 22 soll der Reibungs-
widerstand das $1\frac{1}{2}$fache der Scheitelspan-
nung betragen, also

$\frac{1}{2}(25,3290 + 12x) = \frac{1}{2} \cdot 9,3299 = 13,9948$

oder $6x = 13,9948 - 12,6645 = 1,3308$

also x nur $= 0,22\ldots$

Es mufs aber die Breite des Widerlagers mindestens = der Gewölbedicke $= 1{,}5$ sein, wobei also ein Verschieben desselben nicht möglich ist.

Gegen das Umwerfen des Widerlagers um die äufsere Kante hat man die Gleichung für's Gleichgewicht

$$bx^2 + 25{,}329x + 79{,}665 = 219{,}2526$$

Nach No. 22 soll für die Sicherheit d Gewölbes das Moment des Widerstand aus der Belastung mindestens das $1\frac{1}{2}$fac des Moments der Scheitelspannung b tragen.

Mithin $bx^2 + 25{,}329x + 79{,}665 = \frac{3}{2} \cdot 219{,}2526 = 328{,}8789$

Diese Gleichung geordnet ist

$$x^2 + 4{,}2215x - 41{,}5316 = 0$$

woraus $x = -2{,}11075 \pm \sqrt{45{,}9868}$

$= -2{,}11075 + 6{,}78136 = 4{,}67061$ Fufs.

25. Zahlenbeispiel. Die vorige Aufgabe mit dem Unterschied, dafs die Höhe der Wölbung nur $\frac{1}{3}$ der Spannung beträgt.

Dieser Aufgabe entspricht die nebenstehende Figur.

Es ist gegeben $DF = 20'$

$$JB = \tfrac{1}{3} \cdot 20' = 6\tfrac{2}{3}'$$

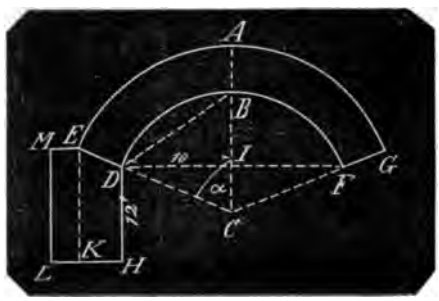
Um nun den Halbmesser $CD = r$ zu bestimmen hat man

Sehne $DB^2 = DJ^2 + JB^2 = 10^2 + 6\tfrac{2}{3}^2 = 144\tfrac{4}{9}$

Nun ist $2 \cdot CD \times JB = BD^2$

also $2r \cdot 6\tfrac{2}{3} = 144\tfrac{4}{9}$

Fig. 667.



woraus $r = 10\frac{5}{6} = 10{,}833\ldots$

ferner $AB = \quad 1{,}500\ldots$

hieraus $AC = R = \quad 12{,}333\ldots$

folglich $n = \dfrac{12{,}33\ldots}{10{,}83\ldots} = \dfrac{74}{65} = 1{,}1385$

$n^2 = 1{,}2961$

$n^3 = 1{,}4755$

$r^2 = 117{,}3611$

Bezeichnet man den Fufswinkel d Fuge DE mit dem Lothe mit α so i dieser $= \angle ACD$ und

$$\sin \alpha = \frac{DJ}{DC} = \frac{10}{10{,}833} = 0{,}923077$$

woraus $\alpha = 67° 23'$

Der gröfste Horizontalschub für d Keilwirkung ist nach No. 9, Formel I

1. $P = 0{,}17394\,(n^3 - 1)\,r^2$

$= 0{,}17394 \cdot 0{,}2961 \cdot 117{,}3611$

$= 6{,}04452$

Der gröfste Horizontalschub für d Hebelwirkung hat nach No. 12, T belle den Maximalwinkel höchste 64° 9′ 50″; der Bogen des halben G wölbes ist 67° 23′ mithin ist der M ximalwinkel in demselben mit begri fen. Man hat nach No. 12 die Sch telspannung

$$P' = \tfrac{1}{2}(n^2 - 1)\,r^2 \left[\frac{\varphi \sin \varphi + \frac{1}{3} \dfrac{n^3 - 1}{n + 1}}{n - \cos \varphi} - \frac{1}{3} \frac{n^3 - 1}{n^2 - 1} \right]$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}2961 \cdot 117{,}3611 \left[\frac{\varphi \sin \varphi + 0{,}1482}{1{,}1385 - \cos \varphi} - 1{,}0706 \right]$$

Eine Proberechnung mit dem ersten Summand der Klammergröfse ergibt fü Maximum $\varphi = 56° 20'$

Demnach ist

$$P' = 17{,}3753 \left[\frac{arc\ 56° 20' \times \sin 56° 20' + 0{,}1482}{1{,}1385 - \cos 56° 20'} - 1{,}0706 \right] = 17{,}3753 \left[\frac{0{,}9665}{0{,}58414} - 1{,}070 \right]$$

$$= 17{,}3753 \times (1{,}6546 - 1{,}0706) = 17{,}3753 \cdot 0{,}584$$

2. $P' = 10{,}1470$

Es ist also die Scheitelspannung für die Hebelwirkung gröfser als die für Keilwirkung.

Die hypothetische Scheitelspannung für den Fufswinkel 67° 23′ hat man nach No. 13, Formel VII, b

$$P'' = \tfrac{1}{2}(n^2-1)\,r^2\left[\alpha\,cot\,\tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{3}\,\frac{n^3-1}{n(n^2-1)}\right]$$
$$= 17{,}3753\cdot[arc\ 67°\ 23' \times cot\ 33°\ 41'\ 30'' - 1{,}0706]$$

3. $P' = 17{,}3753 \times 0{,}6934 = 12{,}0481$

Die wirkliche Scheitelspannung für die Hebelwirkung ist also bedingungsmäfsig kleiner als die hypothetische Scheitelspannung.

4. Ob nach No. 16 ein oberes Gewölbestück als Hebel wirkend ein unteres nach aufsen verschiebt findet man für das Kreisbogengewölbe aus No. 17, Formel IX

$$tg\,\psi = \frac{A - \frac{\varphi}{tg\,\varphi}}{\frac{A}{tg\,\varphi} + \varphi}$$

wo A die Klammergröfse für $P' = 0{,}584$ bedeutet.

Es ist demnach, da das Maximum von $tg\,\psi$ für den gröfsten Werth von φ, also für den Fufswinkel = 67° 23′ entsteht

$$tg\,\psi = \frac{0{,}584 - 0{,}490}{0{,}24330 + 1{,}17606} = 0{,}067$$

Der geringste Werth von $\mu = tg\,\varrho$ ist $= \frac{1}{4}$, mithin ist die gedachte Wirkung nicht zu besorgen.

No. 5 und 6 der Wirkungen, deren bei dem Kreisbogengewölbe Erwähnung geschehen, können hier noch weniger eintreten.

7. Die Scheitelspannung, mit welcher das halbe Gewölbe um die unterste Aufsenkante E gedreht wird, ist nach No. 13, Formel VIII, b

$$P'' = \tfrac{1}{2}(n^2-1)\,r^2\left[\alpha\,cot\,(\tfrac{1}{2}\alpha) - \tfrac{1}{3}\,\frac{n^3-1}{n(n^2-1)}\right]$$

Der Hebelsarm ist $= AC - CE\,cos\,\alpha = R - R\,cos\,\alpha = nr\,(1 - cos\,\alpha)$

Daher das Moment von P'' in Beziehung auf die Kante E

$$\mathfrak{M}\,P' = \tfrac{1}{2}(n^2-1)\,r^3\left[\alpha n\,cot\,(\tfrac{1}{2}\alpha)\,(1-cos\,\alpha) - \tfrac{1}{3}\,\frac{n^3-1}{n^2-1}\,(1-cos\,\alpha)\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}(n^2-1)\,r^3\left[\alpha n\,sin\,\alpha - \tfrac{1}{3}\,\frac{n^3-1}{n^2-1}\,(1-cos\,\alpha)\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}\cdot 0{,}2961\cdot 10{,}833\ldots^3\,[1{,}1385\cdot arc\ 67°\ 23'\cdot sin\ 67°\ 23' - 1{,}0706\,(1-cos\ 67°\ 23')]$$
$$\mathfrak{M}\,P' = 188{,}232\,(1{,}2360 - 0{,}6589) = 108{,}6255$$

Nun ist $HK = DE\cdot sin\,\alpha = 1{,}5\cdot sin\ 67°\ 23' = 1{,}38462$

$$EK = 12 + DE\cdot cos\,\alpha = 12{,}57684$$

Das Moment des Trapezes $DEKH$ gegen EK also

$$\tfrac{1}{2}(DH + EK)\times HK\times\tfrac{1}{3}\,HK\times\frac{EK + 2DH}{EK + DH} = \tfrac{1}{6}\,HK^2\,(EK + 2DH)$$
$$= \tfrac{1}{6}\cdot 1{,}38462^2\cdot(12{,}57684 + 24) = 11{,}6870$$

Mithin die Summe der Momente des halben Gewölbes und des Trapezes in Beziehung auf die lothrechte EK
$= 108{,}6255 + 11{,}6870 = 120{,}3125$

Nun ist der Inhalt des halben Gewölbes
$= \tfrac{1}{2}(n^2-1)\,r^2\cdot arc\ 67°\ 23'$
$= 17{,}3750\times 1{,}17606 = \quad 20{,}450$

Der Inhalt des Trapezes
$= \tfrac{1}{2}(DH + EK)\,HK$
$= \tfrac{1}{2}\cdot 24{,}57684\times 1{,}38462 = \quad 17{,}015$

Die Summe beider Inhalte = $\quad 37{,}465$

Daher der Abstand des gemeinschaftlichen Schwerpunkts von Gewölbe + Trapez von der lothrechten $EK = \frac{120{,}3125}{37{,}465}$

und von der Kante $L = x + \frac{120{,}3125}{37{,}465}$

Daher die Summe der Momente des Gewölbes und des Trapezes in Beziehung auf die Kante L

$$\mathfrak{M} = 37{,}465\left(x + \frac{120{,}3125}{37{,}465}\right)$$
$$= 37{,}465\cdot x + 120{,}3125$$

Hierzu kommt nun das Moment des Rechtecks EL
$= EK\times LK\times\tfrac{1}{2}\,LK = \tfrac{1}{2}x^2\cdot 12{,}57684$
$= 6{,}2884\times x^2$

Folglich ist das Moment des halben Gewölbes und eines Widerlagers in Beziehung auf die Kante L

$$6{,}2884x^2 + 37{,}465x + 120{,}3125$$

Nun ist der lothrechte Abstand des Scheitels A von der Kante L

$$1\tfrac{1}{2} + 6\tfrac{2}{3} + 12 = 20\tfrac{1}{6}$$

Die wirkliche Scheitelspannung P' war 10,147.

Deren Moment auf die Kante L also $= 20\tfrac{1}{6} \times 10{,}147 = 204{,}63$.

Der Sicherheit wegen soll das Moment des Widerstandes das $1\tfrac{1}{2}$fache der Scheitelspannung betragen

$$= 1\tfrac{1}{2} \times 204{,}63 = 306{,}95$$

Demnach hat man die Gleichung für Sicherheit

$$6{,}2884x^2 + 37{,}465x + 120{,}3125 = 306{,}95$$

und geordnet

$$x^3 + 5{,}9578x - 29{,}6796 = 0$$

woraus $x = -2{,}9789 + 6{,}2091 = 3{,}2302$

Daher die Stärke HL des ganzen Widerlagers $= 3{,}2302 + 1{,}3846 = 4{,}6148$

26. Wenn man bei solchen Berechnungen die Logarithmentafeln vermeiden will, kann man die Fuge des gröfsten Horizontalschubes unter dem $\angle \varphi = 60^\circ$ annehmen, dann hat man

$$P' = \tfrac{1}{3}(n^2 - 1)r^2 \left[\frac{arc\ 60^\circ \cdot sin\ 60^\circ + \frac{3}{3}\frac{n^3 - 1}{n+1}}{n - cos\ 60^\circ} - \frac{3}{3}\frac{n^3 - 1}{n^3 - 1} \right]$$

Nun ist $arc\ 60^\circ = \frac{60^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{1}{3}\pi$

$$sin\ 60^\circ = \sqrt{\tfrac{3}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$cos\ 60^\circ = 0{,}5$$

Daher in dem letzten Beispiel:

$$P' = 17{,}3753 \left[\frac{\frac{1}{3}\pi\sqrt{3} + 0{,}1482}{1{,}1385 - 0{,}5} - 1{,}0706 \right]$$

$$= 17{,}3753 \left[\frac{1{,}05512}{0{,}6385} - 1{,}0706 \right] = 17{,}3753 \times (1{,}6525 - 1{,}0706)$$

$$= 17{,}3753 \times 0{,}5819 = 10{,}1107$$

In dem Beispiel hat man, mit dem wirklichen Maximalwinkel $\varphi = 56^\circ\ 20'$ gerechnet $P' = 10{,}1470$, welches einen nur geringen Unterschied ausmacht.

Um nun für die Ermittelung der Stärke des Widerlagers den Fufswinkel α einführen zu können hat man

$sin\ \frac{1}{2}\alpha =$ der halben Sehne BD dividirt durch den Halbmesser r.

Nun ist $BD^2 = BJ \times 2CD = 2rh$

also $sin\ \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\frac{BD}{r} = \frac{1}{2r}\sqrt{2rh} = \sqrt{\frac{h}{2r}}$

Nun ist $h = 6\tfrac{2}{3}$; $r = 10\tfrac{1}{8}$

also $\sqrt{\frac{h}{2r}} = \sqrt{\frac{6\frac{2}{3}}{2 \cdot 10\frac{1}{8}}} = \sqrt{\frac{4}{13}} = 0{,}554703$

Nun hat man zur Bestimmung eines Bogens aus dessen Sinus die Reihe (s. arcus)

$$arc\ sin\ (\tfrac{1}{2}\alpha) = sin\ \tfrac{1}{2}\alpha + \frac{1}{1 \cdot 2}(sin^3\ \tfrac{1}{2}\alpha) + \frac{3}{2 \cdot 4 \cdot 5} \cdot (sin^5\ \tfrac{1}{2}\alpha) + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}(sin^7\ \tfrac{1}{2}\alpha) + \ldots.$$

Eine Reihe, welche so convergirt, dafs man nur 4 Glieder zu berechnen nöthig hat um den Bogen auf 4 Decimalstellen genau zu erhalten.

Für $sin\ (\frac{1}{2}\alpha)$ den Werth 0,55470 gesetzt erhält man

$$sin\ (\tfrac{1}{2}\alpha) = 0{,}55470$$
$$\tfrac{1}{6}\ sin^3\ (\tfrac{1}{2}\alpha) = 0{,}028446$$
$$\tfrac{3}{40}\ sin^5\ (\tfrac{1}{2}\alpha) = 0{,}003938$$
$$1\tfrac{1}{12}\ sin^7\ (\tfrac{1}{2}\alpha) = 0{,}000721$$

mithin $\frac{1}{2}\alpha = 0{,}5878$

und $\alpha = 1{,}1756$

In dem logarithmisch berechneten Beispiel ist $\alpha = 1{,}17606$.

Es liegt dieser Unterschied darin, daf der $\angle 67^\circ\ 23'$ ohne Secunden angegeben ist. Es ist nämlich

$$0{,}923077 = sin\ 67^\circ\ 22'\ 49''$$

Aus dem gefundenen Bogen hat man nun das Gewicht des halben Gewölbebogen $= \frac{1}{2}(n^2 - 1)r^2\alpha = 17{,}3753 \times 1{,}1756 = 20{,}426$ (anstatt 20,450).

Die Entfernung des Schwerpunkts des Kreisringstücks $ABDE$ vom Mittelpunkt ist ebenfalls logarithmisch-trigonometrisch berechnet. Um dies zu vermeiden hat man nach No. 12, Formel 4 den Abstand des Schwerpunkts vom Scheitelloth =

$$z = \frac{2}{3}\,\frac{n^3-1}{n^2-1}\cdot\frac{\sin^2\frac{1}{2}\varphi}{\frac{1}{2}\varphi}\,r$$

Nun ist $\sin\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{h}{2r}}$

also $z = \frac{2}{3}\,\frac{n^3-1}{n^2-1}\cdot\frac{h}{\varphi}$

folglich das Moment des halben Gewölbes in Beziehung auf das Scheitelloth

$= \frac{1}{3}(n^2-1)\,r^2\alpha\cdot z = \frac{1}{3}(n^3-1)\,hr^2$

Nun ist der Abstand der Axe AC von der $LM = x + a$, wenn x die Stärke des Widerlagers und a die halbe Spannung $= DJ$ bezeichnet. Dieser Abstand multiplicirt mit dem Gewicht des halben Gewölbes ist $= \frac{1}{3}(n^2-1)(x+a)\,r^2\alpha$.

Hiervon das Moment in Beziehung auf AC abgezogen, gibt das Moment des halben Gewölbes in Beziehung auf die Axe LM:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}\,P' &= \tfrac{1}{3}(n^3-1)(x+a)\,r^2\alpha - \tfrac{1}{3}(n^3-1)\,hr^2\\ &= \tfrac{1}{3}\,0{,}2961\,(x+10)\,117{,}3611\cdot 1{,}1756 - \tfrac{1}{4}\cdot 0{,}4755\cdot 6\tfrac{1}{3}\cdot 117{,}3611\\ &= 20{,}4264\,x + 80{,}261\end{aligned}$$

Nun ist die fehlende Höhe über $HD = ML - DH = h'$

und $h' : ED = CJ : CD$

oder $h' : R - r = r - h : r$

woraus $h' = \frac{(R-r)(r-h)}{r} = (n-1)(r-h)$

$= 0{,}1385\,(10\frac{1}{3} - 6\frac{1}{3}) = 0{,}5771$

Nimmt man hiervon die Hälfte und setzt die Höhe des Widerlagers im Mittel $12 + \frac{h'}{2} = 12{,}2885$ so ist das Moment des Widerlagers in Beziehung auf die Kante $L = \frac{1}{2}hx^2 = 6{,}14425\cdot x^2$ mithin das gesammte Moment des Widerstandes

$6{,}14425\,x^2 + 20{,}4264\,x + 80{,}261$

Die Scheitelspannung P ist gefunden 10,1107

der Hebelsarm $= 20\frac{1}{6}$

also deren Moment in Beziehung auf die Kante $L =$

$10{,}1107 \times 20\frac{1}{6} = 203{,}899$

und der Sicherheit wegen

$\frac{3}{2}\cdot 203{,}899 = 305{,}848$

daher die Momentengleichung in Beziehung auf L

$6{,}14425\,x^2 + 20{,}4264\,x + 80{,}2610 = 305{,}848$

und geordnet

$x^2 + 3{,}326\,x - 35{,}9014 = 0$

$x = -1{,}663 + \sqrt{38{,}667} = 4{,}545$

Durch logarithmische Rechnung ist $x = 4{,}6148$ gefunden.

27. Zahlenbeispiel. Es soll der wirkliche Horizontalschub eines Kreisbogengewölbes bestimmt werden, dessen Fugen bis zu der Scheitelhorizontalen reichen, und welches über dieser horizontalen noch gleichmäfsig belastet ist. Der lichte Halbmesser sei 100 Fufs, die Stürke des Gewölbes im Scheitel 3′ und die Belastung sei = einer Uebermauerung auf 2′ Höhe.

No. 23, A mit Fig. 666 gibt die Formel für die Scheitelspannung aus der Hebelwirkung

$$P = \tfrac{1}{2}r^2 - \tfrac{1}{2}\,\frac{\frac{2}{3}\,rd + \frac{(r+d)^2}{r}\left(q + \frac{r+d}{3}\right)tg^2\varphi - [(r+d)(2q+r+d)\,tg\,\varphi - r^2\varphi]\,\sin\varphi}{\frac{r+d}{r} - \cos\varphi}$$

Hierein die Werthe 100 für r, 3 für d und 2 für q gesetzt, gibt

$$P = \frac{10000}{3} - \tfrac{1}{2}\,\frac{200 + 106{,}09\cdot 36{,}33\,..\,tg^2\varphi - (103\cdot 107\cdot tg\,\varphi - 10000\,\varphi)\,\sin\varphi}{1{,}03 - \cos\varphi}$$

$$= 3333\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\,\frac{200 + 3854{,}60\,tg^2\varphi - (11021\,tg\,\varphi - 10000\,\varphi)\,\sin\varphi}{1{,}03 - \cos\varphi}$$

$$= 3333\tfrac{1}{3} - 5000\,\frac{0{,}02 + 0{,}38546\,tg^2\varphi - (1{,}1021\,tg\,\varphi - \varphi)\,\sin\varphi}{1{,}03 - \cos\varphi}$$

Man erhält den Quotient des letzten Gliedes

1) Für $\varphi = 38° = \frac{0{,}02 + 0{,}235287 - 0{,}121796}{0{,}2419893} = 0{,}55164$

2) Für $\varphi = 41° = \frac{0{,}02 + 0{,}29128 - 0{,}15906}{0{,}2752904} = 0{,}55294$

3) Für $\varphi = 40° = \frac{0{,}02 + 0{,}27140 - 0{,}14535}{0{,}2639556} = 0{,}55332$

4) Für $\varphi = 39° = \frac{0{,}02 + 0{,}25276 - 0{,}13328}{0{,}2528540} = 0{,}55162$

Es ist mithin für für $\varphi = 39°$ die Scheitelspannung ein Maximum u

$$P' = 3333\tfrac{1}{3} - 5000 \times 0{,}55162 = 575$$

Die Scheitelspannung für die Keilwirkung ist nach No. 23, B

$$P = \tfrac{1}{2}\,[(r + d)\,(r + d + 2q)\,tg\,\varphi - r^2\varphi]\,cot\,(\varphi + \tau)$$

Setzt man hierein die obigen Werthe für r, d und q, für τ das $26° 34'$ ($tg\,\tau = \frac{1}{2}$) so hat man

$$P = \tfrac{1}{2}\,[103 \cdot 107 \cdot tg\,\varphi - 10000\,\varphi]\,cot\,(\varphi + 26° 34')$$

$$P = 5000\,(1{,}1021\,tg\,\varphi - \varphi)\,cot\,(\varphi + 26° 34')$$

Den Logarithmus des Products der beiden letzten Factoren erhält man

für $\varphi = 46°$ $log = 0{,}026398$

$47°$ $log = 0{,}027950$

$48°$ $log = 0{,}027891$

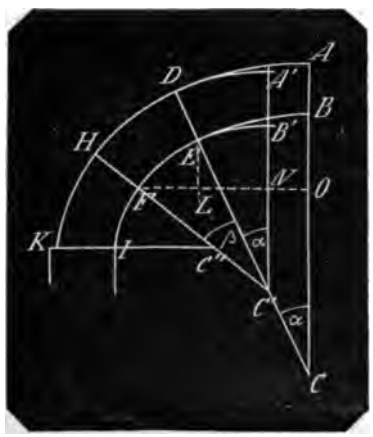
mithin ist P für $\varphi = 47°$ ein Maximum und $P = 533$

Es ist mithin die Scheitelspannung für die Hebelwirkung gröfser als die der Keilwirkung und daher $P' = 575$ die wirkliche Scheitelspannung.

28. Es soll der Horizontalschub eines gleich starken Korbbogengewölbes bestimmt werden, also eines Gewölbes, dessen Wölblinie aus mehreren Kreisbogen von verschiedenen Halbmessern besteht.

Es sei Fig. 668, $ABJK$ ein Korbbogengewölbe, das obere Gewölbstück $ABDE$ aus dem Mittelpunkt C mit den Halbmessern $BC = R$, $AC = nR$ unter dem $\angle ACD = \alpha$ beschrieben. Das zweite Wölbstück $DEFH$ aus dem Mittelpunkt C' mit

Fig. 668.



den Halbmessern $DC' = mr$ und unter dem $\angle \beta$ beschrieben u. zum Widerlager.

Bestimmt man die Momente stücke $ABDE$ und $DEFH$ in auf die Kante F, so ist deren das Moment des ganzen Wölbstüc in Beziehung auf F, und hieraus die Scheitelspannung zu find den vorstehenden Vorträgen ist Moment des Gewölbstücks AB auf die Kante E zu bestimmen, dieser Kante die Radien nR, R haben, und das Moment des W $DEFH$ in Beziehung auf F ist zu bestimmen, wenn man das bi dem Bogen HD zugehörigen S mit in Rechnung bringt.

Es sei M das Moment des W $ABDE$ in Beziehung auf E, de wicht $= Q$, so ist $\frac{M}{Q}$ der Abst sen Schwerpunkt von der Kant

Folglich der Abstand desselbe punkts von der Kante $F = \frac{M}{Q} +$ das Moment von $ABDE$ in auf $F = M + FL \cdot Q$.

Ergänzt man das Wölbstüc bis zum Scheitelloth $A'B'$ so mit AC parallele $A'C'$ den Mi C' des Bogens HDA'.

Ist nun das Moment des Gewö $A'B'HF$ in Beziehung auf die $= M'$, das des Gewölbestücks A Beziehung auf dieselbe Kante F ist $M' - M''$ das Moment des W $DEFH$ in Beziehung auf die Kan das Moment des Wölbstücks Beziehung auf die Kante F

$$= M + FL \cdot Q + M' - M''$$

Nun ist No 12, VIa, die Fo den Horizontalschub P' wenn de belsarm $= (n - cos\,\varphi)\,r$ ist. M

aan mit diesem Hebelsarm, so erhält man das Moment von P', und wenn man l für r und α für φ setzt, so entsteht das Moment

$$M = \tfrac{1}{2}(n^2-1)R^3\left[\alpha \sin\alpha - \tfrac{1}{3}\frac{n^3-1}{n^2-1}(1-\cos\alpha)\right]$$

Nach No. 12, Formel 1 ist

$$Q = \tfrac{1}{2}(n^2-1)R^2\alpha$$

Ferner ist $FL = FN - LN = r[\sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha]$

Nach No. 12, Formel VI,a wie so eben M auch

$$M' = \tfrac{1}{2}(m^2-1)r^3\left[(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\beta) - \tfrac{1}{3}\frac{m^3-1}{m^2-1}[1-\cos(\alpha+\beta)]\right]$$

und

$$M'' = \tfrac{1}{2}(m^2-1)r^3\left[\alpha\sin\alpha - \tfrac{1}{3}\frac{m^3-1}{m^2-1}(1-\cos\alpha)\right]$$

Diese Werthe in den Momentenausdruck I gesetzt, gibt das Moment der Scheitelspannung für das Gleichgewicht und die Sicherheit:

$$0 \times P' \gtrless \tfrac{1}{2}(n^2-1)R^2\left[(R-r)\alpha\sin\alpha + r\alpha\sin(\alpha+\beta) - \tfrac{1}{3}\frac{n^3-1}{n^2-1}R(1-\cos\alpha)\right]$$
$$+ \tfrac{1}{2}(m^2-1)r^3\left[(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\beta) - \alpha\sin\alpha - \tfrac{1}{3}\frac{m^3-1}{m^2-1}[\cos\alpha - \cos(\alpha+\beta)]\right]$$

Nun ist

$$0 = AC - OC = AC - C'N - CC'\cos\alpha$$
$$= nR - r\cos(\alpha+\beta) - (R-r)\cos\alpha$$

Eben so wird weiter verfahren, wenn n drittes, ein viertes .... ein $n$tes Gewölbstück, jedes folgende von kleinerem Halbmesser als das vorhergehende, zu dem halben Korbbogen gehört und die Berechnung bis zum Widerlager erfolgen soll.

29. Beispiel. Es sei Fig. 668, der Halbmesser $BC = R = 100'$, der Halbmesser $C'E = r = 70'$, die Stärke DE des Gewölbes $3'$, $\angle BCE = \alpha = 35°$, $\angle EC'F = \beta = 35°$, so hat man die halbe Spannung

$$FO = CC'\sin\alpha + C'F\sin(\alpha+\beta)$$
$$= 30\cdot\sin 35° + 70\cdot\sin 70° = 82{,}98577$$
$$n = 1{,}03;\quad n^2 = 1{,}0609;\quad n^3 = 1{,}0927$$
$$m = 1{,}043;\quad m^2 = 1{,}0878;\quad m^3 = 1{,}1346$$

Es ist nun

$$10 \times P' = \tfrac{1}{2}\cdot 0{,}0609\cdot 10000\left[30\cdot arc\,35°\cdot\sin 35° + 70\cdot arc\,35°\cdot\sin 70° - \right.$$
$$\left. \tfrac{1}{3}100\cdot\frac{0{,}0927}{0{,}0609}(1-\cos 35°)\right] + \tfrac{1}{2}\cdot 0{,}0878\cdot 343000\left[arc\,70°\cdot\sin 70°\right.$$
$$\left. - arc\,35°\cdot\sin 35° - \tfrac{1}{3}\frac{0{,}1346}{0{,}0878}(\cos 35° - \cos 70°)\right]$$
$$= 304{,}5\,[10{,}51134 + 40{,}18179 - 18{,}35202]$$
$$+ 15057{,}7\,[1{,}14805 - 0{,}35038 - 0{,}48764]$$
$$= 304{,}5 \times 32{,}34111 + 15057{,}7 \times 0{,}31003 = 9847{,}867 + 4668{,}338 = 14516{,}205$$

Nun ist $AO = AC - CC'\cos C'CO - C'F\cos FC'N$
$= 103 - 30\cos 35° - 70\cos 70° = 54{,}48403$

Mithin ist die Scheitelspannung für die Hebelwirkung

$$P' = \frac{14516{,}205}{54{,}484} = 266$$

Es ist aber dieser Werth nicht das Maximum des Horizontalschubes. Um dieses zu finden, hat man aus dem Vortrag (s. 12 Tabelle) dieses Maximum für einzelne Kreisbogen. Die Anwendung dieser Winkel auf Korbbogen, besonders wenn sie aus mehr als 2 verschiedenen Bogen bestehen, ist weitläufig, und es ist besser in jedem einzelnen vorkommenden Fall Proberechnungen anzustellen.

Z. B. I. Man setze zunächst $\beta = 0$, so erhält man die Scheitelspannung für die Fuge DE.

Es ist das Moment derselben

$$(AC - CE\cos\alpha)P' = (103 - 100\cos 35°)P' = 21{,}085 \times P'$$

dem ersten Gliede $(AO \times P')$ der rechten Seite der Gleichung
$= 30450\,(0{,}35038 - 0{,}18352) = 5080{,}8$

woraus $P' = \frac{5080,8}{21,085} = 241$

also kleiner als bei ($\beta = 35°$) für die Fuge *HF*.

II. Setzt man nun $\beta = 36°$, also $\alpha + \beta = 71°$, so hat man den Hebelsarm von $P' = 78,425437 - 22,789774 = 55,635663$

55,.. $P' = 304,5\,(42,760667\ \sin 71° - 7,84068)$
$+ 15057,7\,[arc\ 71°\ \sin 71° - 0,35038 - 1,02201974\ (\cos 35° - \cos 71°)]$
$= 304,5 \times 32,59023 + 15057,7\,(1,17167 - 0,35038 - 0,50454)$
$= 9923,725 + 4769,525 = 14693,25$

und $P' = \frac{14693,25}{55,635663} = 264$

Mithin liegt das Maximum unter einem kleineren Winkel β als 35°.

III. Setzt man $\beta = 34°$ so ist $\alpha + \beta = 69°$, der Hebelsarm von P' ist $= 78,425437 - 25,085753 = 53,339684$ und

53,.. $P' = 304,5\,(42,760567 \cdot \sin 69° - 7,84068) + 15057,7\,(1,12429 - 0,35038 - 0,47093)$
$= 304,5 \times 32,07975 + 15057,7 \times 0,30298 = 9768,283 + 4562,182 = 14330,465$

und $P' = \frac{14330,465}{53,339684} = 268,6$

IV. Setzt man $\beta = 32°$, so ist $\alpha + \beta = 67°$
der Hebelsarm von $P' = 51,07426$
und

51,.. $P' = 304,5 \times 31,52064 + 15057,7 \times 0,28818 = 13937,362$

und $P' = \frac{13937,362}{51,07426} = 272,9$

V. Setzt man $\beta = 5°$, also $\alpha + \beta = 40°$, so erhält man
den Hebelsarm von $P' = 24,80233$

24,8.. $P' = 304,5 \times 19,6453 + 15057,7 \times 0,03348 = 5982 + 504 = 6486$

und $P' = 261$

Es liegt also das Maximum zwischen $\beta = 5°$ und $\beta = 32°$

VI. Für $\beta = 10°$, also $\alpha + \beta = 45°$ ist
der Hebelsarm von $P' = 28,92796$

28.. $P' = 304,5 \times 22,3956 + 15057,7 \times 0,09067 = 6819,45 + 1365,28 = 8184,73$

und $P' = 283$

VII. Für $\beta = 9°$ also $\alpha + \beta = 44°$ ist
der Hebelsarm von $P' = 28,07165$

28... $P' = 304,5 \times 21,8633 + 15057,7 \times 0,08088 = 6657,37 + 1217,86 = 7875,23$

und $P' = 280$

Der Maximalwinkel β ist also gröfser als 9°.

VIII. Setzt man $\beta = 11°$, also $\alpha + \beta = 46°$, so ist
der Hebelsarm von $P' = 29,799349$

29,7... $P' = 304,5 \times 22,9187 + 15057,7 \times 0,09991 = 6978,73 + 1505,77 = 8484,50$

und $P' = 285$

IX. Setzt man $\beta = 15°$, also $\alpha + \beta = 50°$, so ist
der Hebelsarm von $P' = 33,430305$

33.. $P' = 304,5 \times 24,9158 + 15057,7 \times 0,13787 = 7586,85 + 2076 = 9662,85$
$P' = 289$

Der Maximalwinkel β ist also gröfser als 15°.

X. Setzt man $\beta = 20°$, also $\alpha + \beta = 55°$, so ist
der Hebelsarm von $P' = 38,27509$

38.. $P' = 304,5 \times 27,1867 + 15057,7 \times 0,18997 = 8278,34 + 2860,96 = 11139,30$
$P' = 291$

XI. Setzt man $\beta = 25°$, so ist $\alpha + \beta = 60°$
der Hebelsarm von $P' = 43,425437$

43,... $P' = 304,5 \times 29,19227 + 15057,7 \times 0,23243 = 8889,046 + 3499,850 = 12388,896$
$P' = 283$

Es ist mithin der Maximalwinkel β kleiner als 25° und liegt in der Nähe von 20°.

XIII. Setzt man $\beta = 21°$, so ist $\alpha + \beta = 56°$
und der Hebelsarm von $P' = 39{,}281934$
und $39{,}.. P' = 304{,}5 \times 27{,}59943 + 15057{,}7 \times 0{,}19422 = 8404{,}20 + 2924{,}50 = 11328{,}7$
und $P' = 288{,}4$

XIV. Setzt man $\beta = 19°$, so ist $\alpha + \beta = 54°$
und der Hebelsarm von $P' = 37{,}280466$
$37{,}2 \ldots P' = 304{,}5 \times 26{,}75234 + 15057{,}7 \times 0{,}17564 = 8146{,}29 + 2644{,}73 = 10791{,}12$
und $P' = 289{,}5$

Es ist mithin $\beta = 20°$ der Maximalwinkel und das Maximum der Scheitelspannung, die in dem Korbbogen thätig ist, beträgt $P' = 291$.

30. Statik der Kuppelgewölbe.

Das Kuppelgewölbe schliefst sich unmittelbar an das Tonnengewölbe an. Das Kuppelgewölbe ist ein Tonnengewölbe, dessen innere Widerlagerkante einen Kreis (oder überhaupt eine geschlossene Curve) bildet und dessen Scheitellothe in eine einzige Linie fallen.

Die auf dem Widerlager befindliche Kuppel äufsert im Scheitelloth nach allen Richtungen im Kreise herum Horizontalspannungen, also in jedem Punkt der inneren Widerlagskante normal auf dieselbe und bei kreisrundem Widerlager radial und auf gleiche Längen der Kante mit gleicher Gröfse. Die Kuppel hat innerhalb ihres Gewölbekörpers in keiner ihrer horizontalen Schichten waagerechte Spannungen oder Pressungen von Stein auf Stein, im Gegentheil in Folge der überall radial nach aufsen wirkenden Schubkräfte auch überall das Bestreben in ihren Fugen sich zu trennen.

Aus diesem Grunde sind die Untersuchungen für Kuppelgewölbe mit denen für Tonnengewölbe dieselben.

Es würde zu weitläufig sein, die für das Tonnengewölbe vorgenommenen Untersuchungen hier für die Kuppel ebenso auszudehnen und es sollen nur die eintretenden Spannungen erörtert werden, die bei einer Kuppel vorkommen, die eine Kugelschale bildet, so dafs jeder Querschnitt durch das Scheitelloth ein concentrisches Kreisringstück ausmacht, wonach es dann nicht schwierig ist, jede von dieser Form abweichende Kuppel ebenfalls zu untersuchen.

Wenn man sich vorstellt, dafs das Kreisringstück $ABDE$, Fig. 661, pag. 171, um das Scheitelloth AC eine vollständige Umdrehung macht, so entsteht eine kugelförmige Kuppel, deren Widerlager die in E zu denkende waagerechte Kreislinie zur Innenkante hat.

Das Kreisringstück hat den Inhalt

$$\tfrac{1}{2}(n^2-1)\,r^2\,\varphi$$

sein Schwerpunkt G hat vom Scheitelloth den Abstand

$$z = \tfrac{3}{4}\,\frac{\sin^2(\frac{1}{2}\varphi)}{\frac{1}{2}\varphi}\cdot\frac{n^3-1}{n^2-1}\,r$$

sein Weg um die Drehaxe $= 2\pi z$

Mithin nach der Guldinischen Regel der körperliche Inhalt des Gewölbes:

$$K = 2\pi\cdot\tfrac{3}{4}\,\frac{\sin^2(\frac{1}{2}\varphi)}{\frac{1}{2}\varphi}\cdot\frac{n^3-1}{n^2-1}\,r\times\tfrac{1}{2}(n^2-1)\,r^2\varphi$$
$$= \tfrac{3}{4}\pi\,(n^3-1)\,r^3\sin^2(\tfrac{1}{2}\varphi) = \tfrac{3}{4}\pi\,(n^3-1)\,r^3\,(1-\cos\varphi) \qquad (1)$$

Die Länge des Gewölbes ist offenbar die innere Widerlagerkante $2\pi r$. Es kommt also auf die Längeneinheit 1 (Fufs) das Gewicht

$$Q' = \tfrac{1}{4}\,(n^3-1)\,r^2\,(1-\cos\varphi) \qquad (2)$$

Ein Tonnengewölbe vom Centriwinkel φ und der Länge $2\pi r$ hat den Inhalt

$$K = \tfrac{1}{2}(n^2-1)\,r^2\varphi\times 2\pi r = (n^2-1)\,\pi r^3\varphi \qquad (3)$$

und auf die Längeneinheit

$$Q = \tfrac{1}{2}\,(n^2-1)\,r^2\varphi \qquad (4)$$

Es verhält sich also der körperliche Inhalt und das Gewicht eines Tonnengewölbes zu dem eines Kuppelgewölbes

$$Q' : Q = \tfrac{1}{4}(n^3-1)\,r^2(1-\cos\alpha) : \tfrac{1}{2}(n^2-1)\,r^2\varphi$$

oder

$$Q' = \tfrac{3}{4}\cdot\frac{n^3-1}{n^2-1}\cdot\frac{1-\cos\varphi}{\varphi}\,Q \qquad (5)$$

Die Entfernung CJ des Schwerpunkts dieser concentrischen Kugelschale von dem Mittelpunkt C ist $=$

$$\tfrac{3}{4}\,\frac{R^4-r^4}{R^3-r^3}(1+\cos\varphi) = \tfrac{3}{4}\,\frac{n^4-1}{n^3-1}\,r\,(1+\cos\varphi) \qquad (6)$$

In derselben Entfernung von C liegt also auch die Linie GJ, welche durch den Schwerpunkt G eines zwischen zweien durch das Scheitelloth genommenen Querschnitten begrenzten Gewölbesegments waagerecht nach dem Scheitelloth geführt ist.

Theilt man nun das Gewölbe vom Scheitelloth aus in lauter sehr schmale Segmente, so liegt der Schwerpunkt jedes einzelnen Segments in der durch die Linie GJ gelegten waagerechten Ebene und es ist sehr nahe

$$CG = \tfrac{2}{3}\frac{\sin\frac{1}{2}\varphi}{\frac{1}{2}\varphi}\cdot\frac{n^3-1}{n^3-1}r \qquad (7)$$

indem man diese Entfernung = der des Schwerpunkts eines Kreisringstücks vom Mittelpunkt annimmt.

Bezeichnet man $\angle GCA$ mit ψ, so ist

$$CG\cos\psi = CJ$$

und

$$\cos\psi = \frac{\frac{3}{8}\frac{n^4-1}{n^3-1}r(1+\cos\varphi)}{\frac{2}{3}\frac{\sin(\frac{1}{2}\varphi)}{\frac{1}{2}\varphi}\cdot\frac{n^3-1}{n^3-1}r} = \tfrac{9}{16}\frac{(n^4-1)(n^2-1)}{(n^3-1)^2}\cdot\varphi\frac{\cos^2(\frac{1}{2}\varphi)}{\sin(\frac{1}{2}\varphi)} \qquad (8)$$

Hat man ψ berechnet so erhält man

$$z = CG\times\sin\psi \qquad (9)$$

Die Scheitelspannung P' in A des Gewölbes auf die Längeneinheit des Widerlagers ist =

$$\frac{EM-GJ}{AM}Q' = \frac{y-z}{x}Q'$$

Es ist aber

$$y = r\sin\varphi \qquad (10)$$

$$x = (n-\cos\varphi)r \qquad (11)$$

Mithin ist in jedem speciellen Fall eine Aufgabe der vorstehenden Art zu lösen.

31. Beispiel. Es sei der innere Halbmesser der Kuppel = 100 Fufs, die Stärke des Gewölbes 3', so ist

$n = 1{,}03$; $n^2 = 1{,}0609$; $n^3 = 1{,}0927$; $n^4 = 1{,}1255$

Nun ist

$$AM = x = (n-\cos\varphi)r = 103 - 100\cos\varphi$$

$$EM = y = r\sin\varphi = 100\sin\varphi$$

$$z = CG\sin\psi$$

$$CG = \tfrac{2}{3}\frac{\sin(\frac{1}{2}\varphi)}{\frac{1}{2}\varphi}\cdot\frac{n^3-1}{n^2-1}r = 101{,}478\cdot\frac{\sin(\frac{1}{2}\varphi)}{\frac{1}{2}\varphi}$$

$$\cos\psi = \tfrac{9}{16}\cdot\frac{0{,}1255\cdot 0{,}0609}{0{,}0927^2}\cdot\varphi\cdot\frac{\cos^2(\frac{1}{2}\varphi)}{\sin(\frac{1}{2}\varphi)} = 0{,}48833\cdot\frac{\cos^2(\frac{1}{2}\varphi)}{\sin(\frac{1}{2}\varphi)}\varphi$$

$$Q' = \tfrac{1}{2}(n^3-1)r^2(1-\cos\varphi) = 309(1-\cos\varphi)$$

Für $\varphi = 90°$ ist

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\pi;\ \sin\varphi = 1;\ \cos\varphi = 0;$$

hieraus $\psi = 57° 10'$

$\log\cos\psi = 9{,}7343214$

$\log\sin\psi = 9{,}9243412$

$$CG = 101{,}478\times\frac{\sin 45°}{\frac{1}{4}\pi} = 91{,}3624$$

$$z = 91{,}3624\times\sin\psi = 76{,}7554$$

$$y = 100\sin 90° = 100$$

$$x = 103 - 100\cos 90° = 103$$

$$Q' = 309(1-\cos 90°) = 309$$

und

$$P' = \frac{100-76{,}7554}{103}\cdot 309 = 69{,}73$$

Bei diesem Gewölbe als Tonnengewölbe beträgt nach No. 12, Formel VI, a, die Scheitelspannung = 164.

Für $\varphi = 70°$ ist

$$\cos\psi = 0{,}48833\cdot arc\cdot 70°\cdot\frac{\cos^2 35°}{\sin 35°}$$

hieraus

$$\psi = 45° 44' 12''$$

$$CG = 101{,}478\cdot\frac{\sin 35°}{arc\,35°} = 95{,}2835$$

$$z = CG\sin 45° 44' 12'' = 68{,}2363$$

$$y = 100\sin 70° = 93{,}9693$$

$$x = 103 - 100\cos 70° = 68{,}7980$$

$$Q' = 309(1-\cos 70°) = 203{,}3158$$

und

$$P' = \frac{93{,}9693-68{,}2363}{68{,}7980}\times 203{,}3158 = 76{,}05$$

Für $\varphi = 60°$ ist

$$\cos\psi = 0{,}48833\cdot arc\,60°\cdot\frac{\cos^2 30°}{\sin 30°}$$

hieraus $\psi = 39° 54' 34''$

$$CG = 101{,}478\frac{\sin 30°}{arc\,30°} = 96{,}9043$$

$$z = CG\cdot\sin 39° 54' 34'' = 62{,}1715$$

$$x = 103 - 100\cos 60° = 53$$

$$y = 100\cdot\sin 60° = 86{,}6025$$

$$Q' = 309(1-\cos 60°) = 154{,}5$$

$$P' = \frac{86{,}6025-62{,}1715}{53}\times 154{,}5 = 71{,}33$$

Das Maximum der Scheitelspannung liegt also bei einem Winkel zwischen 60° und 90°.

Nimmt man nach einander $\varphi = 69°$ und 71°, so erhält man für $\varphi = 69°$

$$\cos\psi = 0{,}48833\cdot arc\,69°\frac{\cos^2 34° 30'}{\sin 34° 30'}$$

hieraus $\psi = 45° 9' 20''$

$$CG = 101{,}478\cdot\frac{\sin 34° 30'}{arc\,34° 30'} = 95{,}4560$$

$'G \sin 45° 9' 20'' = 67{,}6806$

$03 - 100 \cos 50° = 67{,}1632$

$00 \cdot \sin 69° = 93{,}3580$

$09\,(1 - \cos 69°) = 198{,}2642$

$\frac{-67{,}6806}{1632} \times 198{,}2642 = 75{,}80$

$'1°$

$,48833 \cdot arc\,71° \frac{\cos^2 35° 80'}{\sin 35° 30'}$

$46° 19'$

$.01{,}478 \cdot \frac{\sin 35° 30'}{arc\,35° 30'} = 95{,}1090$

$2G \cdot \sin 46° 19' = 68{,}7796$

$103 - 100 \cos 71° = 70{,}4432$

$100 \cdot \sin 91° = 94{,}5518$

$309\,(1 - \cos 71°) = 204{,}3528$

$\frac{-68{,}7796}{4432} \times 204{,}3528 = 74{,}76$

in die Scheitelspannung für
tung bei dem Centriwinkel
Maximum und die wirkliche
ung für die Längeneinheit
Widerlagerkante = 76.

n Untersuchungen an dem
ie geschehen wie die vor-
Bezug auf den Vortrag über
wölbe.

gleich grofs, von einerlei
hmetisch gleich ist gleich
eometrisch gleich ist gleich
Eine Summe von geraden
ner einzigen geraden Linie
jene zu einer geraden Linie
etzt mit der gegebenen ge-
inerlei Länge hat. Krumme
erschiedener Form sind ein-
wenn sie zu geraden Linien
einerlei Länge haben. Ebene
verschiedener Form und
chen sind einander gleich,
Quadraten verwandelt con-
n. Körperliche Räume sind
ch, wenn sie bei ihrer Ver-
ngruente Würfel liefern.

; (homogen) sind Gröfsen,
einschaftliches Maafs haben,
nder zusammengezählt und
abgezogen werden können;
hen, Körper sind untereinartig. Eine ganze Zahl und
nd der Form nach ungleicherden gleichartig, wenn die
1 einen Bruch mit dem Nengebenen Bruchs verwandelt
so sind Brüche von verschiedern in der Form ungleichnnen erst zusammengezogen und von einander abgezogen werden, wenn man sie in Brüche von einerlei Nenner verwandelt, wenn man ihnen eine gleiche Einheit gibt, sie gleichartig macht.

Münzen, Maafse und Gewichte mit ihren Unterabtheilungen sind der Form nach ungleichartig: als Centner und Pfund, Fufs und Zoll, Thaler und Groschen; sie werden gleichartig wenn die Centner in Pfunden, die Fufse in Zollen, die Thaler in Groschen ausgesprochen werden.

Wurzelgröfsen und Potenzen werden gleichartig genannt, wenn sie einerlei Exponenten haben, obgleich sie nicht zu addiren sind als:

$\sqrt[3]{4} \pm \sqrt[3]{5}$, $4^3 \pm 5^3$. Die Rechnung ist nicht eher auszuführen, als bis wirklich im ersten Fall radicirt, im zweiten potenzirt ist.

Eine algebraische Gleichung heifst gleichartig, wenn sämmtliche Glieder von gleichen Dimensionen sind.

$$y^2 + xy + x^2 + ay + bx + cd = 0$$

ist eine gleichartige Gleichung,

$$ay^2 + x^2 + by + cxy + \ldots = 0$$

ist eine ungleichartige Gleichung.

Gleichartige und ungleichartige Axen der Krystalle, s. den Art: Axen der Krystalle, Bd. I, pag. 25.

Gleicher für Aequator, s. den Art. Aequator der Erde am Schlufs.

Gleichförmig ist der uneigentliche Ausdruck für gleichmäfsig Gleichförmig heifst nämlich dem Wortlaut nach: von gleicher Form, bedeutet aber für jede Aenderung, die mit einer Gröfse vorgenommen wird, oder für die Gröfse selbst, dafs von einer Eigenschaft mit welcher sie behaftet ist, auf jeden gleichen Theil gleich viel kommt, so dafs hier nicht die Form sondern das Maafs zur Sprache kommt.

Eine Bewegung ist gleichförmig, wenn der bewegte Punkt in gleichen Zeiten gleiche Wege zurücklegt und zwar nicht ruckweise, sondern dafs die gedachte Gleichförmigkeit für jede noch so kleine Zeit gilt.

Eine Bewegung ist gleichförmig beschleunigt und verzögert, wenn in gleichen noch so kleinen Zeiten die Gröfsen der Zuwachse und Abnahmen gleich grofs sind.

Eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung ist gleichförmig wachsend oder abnehmend, weil zwischen je zwei aufeinander folgenden Gliedern die Differenz, das Maafs der Aenderung, sich gleich bleibt.

Eine arithmetische Reihe höherer Ordnung ist ungleichförmig wachsend und abnehmend; die aufeinander folgenden Glieder sind mit beschleunigter Zu- oder Abnahme begriffen. Die arithmetische Reihe 2ter Ordnung könnte man, conform mit der Bewegung, gleichförmig beschleunigt wachsend oder abnehmend nennen.

Ein Körper ist von gleichförmiger Dichtigkeit, wenn auf jedes gleiche noch so kleine Volumen gleich viel Masse kommt, wenn also die Masse gleichmäfsig vertheilt ist.

Gleichgewicht ist gleichbleibender Zustand zwischen zusammenwirkenden Kräften. S. Aequilibrium, Bd. I., pag. 36.

Gleichheit ist Uebereinstimmung in der Gröfse.

Gleichheitszeichen, das Zeichen der Gleichheit zweier Gröfsen a und b ist $=$. Man schreibt $a = b$. S. den Art.: Algebraische Zeichen.

Gleichlaufend, parallel sind gerade in einer und derselben Ebene liegende Linien, die noch so weit verlängert sich nicht schneiden. Denkt man sich zwei auf einander liegende sich deckende gerade Linien, die weil sie keine Dicke haben nur eine einzige gerade Linie ausmachen, nimmt die obere von der unteren fort und bewegt sie der Art, dafs jeder Punkt derselben einen gleichen Weg macht, so entstehen 2 Parallellinien. Dieselben haben in allen Punkten einerlei Abstand von einander (vergl. Axiom). Eben so sind Ebenen mit einander gleichlaufend wenn sie sich nirgend schneiden, sie mögen noch so weit nach allen Richtungen verbreitert werden. Die Entstehung derselben kann man auf dieselbe Weise wie bei den gleichlaufenden geraden Linien erklären.

Gleichmacher für Aequator, s. den Art. Aequator am Schlufs.

Gleichnamig ist was einen gleichen Namen hat oder was sich auf einen gleichen Namen bezieht; z. B. zwei Glieder einer Reihe oder einer Gleichung, die beide positiv oder beide negativ sind, heifsen gleichnamig, desgleichen die mit denselben Vorzeichen versehenen Wurzeln einer Gleichung von höherem Grade; die genannten Gröfsen mit verschiedenen Vorzeichen heifsen ungleichnamig untereinander. In einer einfachen und zusammengesetzten Proportion heifsen sämmtliche Vorderglieder und sämmtliche Hinterglieder unter einander gleichnamig, die Vorder mit den Hintergliedern ungleichn

Die gleichliegenden Seiten, Wink Diagonalen in congruenten und ähn Figuren heifsen untereinander gl namig. Eben so hat man in d guren durch gleichnamige Diagona bildete gleichnamige Dreieck Allgemeinen gleichnamige Sti

Gleichschenklig ist ein Dreiec welchem von den 3 Seiten 2 Seiten sind. Diese gleichen Seiten heifs Schenkel, die dritte Seite i Grundlinie, der von den Sch eingeschlossene Winkel heifst der kel an der Spitze, die beiden a gleich grofsen Winkel sind die W an der Grundlinie (s. den Art. eck, No. 7 und 30 mit Fig 577).

Ist Fig. 577, pag. 328 ABC ein schenkliges Dreieck, $BC = a$ die linie, sind also $AB = AC$ die Sch $\angle BAC$ der Winkel an der Spitz die Winkel an der Grundlinie $\angle = \angle ACB = \beta$, so ist

$$\angle \beta = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha$$

$$\angle \alpha = 180^\circ - 2\beta$$

$$\sin \tfrac{1}{2}\alpha = \cos \beta = \tfrac{1}{2}\frac{a}{b}$$

$$\cos \tfrac{1}{2}\alpha = \sin \beta = \frac{\sqrt{(2b+a)(2b-a)}}{2b}$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{2b^2}\sqrt{(2b+a)(2b-a)}$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{a^2}{2b^2}$$

$$\sin \tfrac{1}{2}\beta = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{2b-a}{b}}$$

$$\cos \tfrac{1}{2}\beta = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{2b+a}{b}}$$

Gleichseitig für Figur und Hy s. den Art. Aequilateral, pag. 3 Fig. 37.

Gleichstellige Glieder sind in mengehörigen Reihen die Glieder chen dieselben Stellenzahlen zugel

Gleichung ist die Gleichsetzung Zahlengröfsen von verschiedener Liegen diesen verschiedenen Form eine und dieselbe Gröfse nur arithm Operationen zu Grunde, so ist d eine analytische. Z. B.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

ist eine Gleichung, die durch die sung der Klammern des links steh Products entstanden ist.

$$\frac{a+\sqrt{-b}}{a-\sqrt{-b}} + \frac{a-\sqrt{-b}}{a+\sqrt{-b}} = \frac{2(a^2-b}{a^2+b}$$

In dieser Gleichung ist der rechts stehende einfachere Ausdruck entstanden, dafs beide links stehende Summanden unter einerlei Benennung gebracht worden und hierauf Zähler und Nenner reducirt worden sind. Beide Gleichungen sind analytisch, und sämmtliche analytische Gleichungen haben keinen anderen Zweck als zusammengesetzte algebraische Ausdrücke zu vereinfachen, oder sie sind das Resultat von geschehenen Reductionen zu einer allgemein gebräuchlichen Formel, wie Beispiele in den Art.: „Analytische Formel und analytische Gleichung“ gegeben sind.

Solche analytische Gleichungen oder Formeln kommen natürlich auch mit transcendenten Gröfsen vor. Z. B.

$$log\ A + log\ B = log\ (AB)$$

ist eine analytische Gleichung, nämlich eine logarithmische Formel, welche ausspricht, dafs man um den Logarithmus eines Products zu finden nur nöthig hat die Logarithmen dessen Factoren zu addiren.

Die Art. „Cosinus und Cosecante“ haben eine grofse Menge von analytischen Entwickelungen. Der erste Art. hat pag. 140, Formel 27 und 28 die beiden trigonometrischen Gleichungen oder Formeln:

$$cos\ \alpha + cos\ \beta = 2\ cos\ \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cdot cos\ \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$
$$cos\ \beta - cos\ \alpha = 2\ sin\ \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cdot sin\ \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

Beide Gleichungen durch einander dividirt und dann reducirt gibt die trigonometrischen Formeln 32 und 33.

$$\frac{cos\ \alpha + cos\ \beta}{cos\ \beta - cos\ \alpha} = cot\ \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cdot cot\ \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

und

$$\frac{cos\ \beta - cos\ \alpha}{cos\ \alpha + cos\ \beta} = tg\ \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\cdot tg\ \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

Desgleichen sind die Art. Differenzial und Differenzialrechnung zum grofsen Theil Entwickelungen neuer Formeln und Gleichungen aus gegebenen, die ebenso zu den analytischen Gleichungen gehören.

Bestehen dagegen die gleich gesetzten Werthe in dem algebraisch ausgedrückten Zusammenhang von unbekannten mit bekannten Gröfsen, und sollen diese Unbekannten aus dem gegebenen Zusammenhang ermittelt (entwickelt) werden, so sind die Gleichungen algebraische.

Der Art. algebraische Gleichung erklärt gleich zu Anfang, dafs Gleichungen, in welchen die Unbekannten mit Logarithmen, trigonometrischen Linien, Differenzialen und Integralen verwickelt sind oder als Potenzexponenten vorkommen, keine algebraische sondern transcendente Gleichungen sind; und in der That man hat keine andere Bezeichnung für dieselben, wiewohl nach dem Obigen auch transcendente Gleichungen den Character der analytischen Gleichungen haben.

Der Art. Algebraische Gleichung handelt von den Gleichungen mit einer und mit mehreren Unbekannten, von den Gleichungen des ersten Grades und der höheren Grade.

Transcendente Gleichungen können entweder durch Logarithmen aufgelöst werden oder es mufs durch Probiren geschehen. Viele Gleichungen sind auch nur scheinbar transcendent und können algebraisch entwickelt werden. Z. B.

1. Die Gleichung

$$x^2 + x\ log\ a = log\ b$$

ist keine transcendente Gleichung. Denn es ist

$$x = -\tfrac{1}{2}\ log\ a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(log\ a)^2 + log\ b}$$

algebraisch zu entwickeln und der Werth von x numerisch auszurechnen.

2. Desgleichen die Gleichung

$$x^3 - x\ tg\ \varphi = sin\ (\varphi + \alpha)$$

ist eine algebraische Gleichung weil mit φ und α auch die Tangente und der Sinus bekannte Zahlengröfsen sind.

3. Die Gleichung

$$log\ x + log\ (a + x) = b$$

ist transcendent, sie kann auch nur durch Probiren gelöst werden.

4. Die Gleichung

$$log\ x + log\ (ax) = b$$

dagegen ist algebraisch. Denn es ist

$$log\ (ax) = log\ a + log\ x$$

folglich hat man

$$2\ log\ x + log\ a = b$$

woraus $log\ x = \tfrac{1}{2}(b - log\ a)$

5. Die Gleichung $a^x = b$ ist transcendent, kann aber in eine algebraisch logarithmische Gleichung umgeformt werden, nämlich in

$$x\ log\ a = log\ b$$

woraus $x = \dfrac{log\ b}{log\ a}$

6. Dagegen ist die Gleichung $x^x = b$ transcendent und bleibt auch durch Umformung transcendent, denn man erhält

$$x\ log\ x = log\ b$$

und diese Gleichung ist nur durch Probiren zu lösen.

7. Die Gleichung

$$tg^2x + tg\,x - a = 0$$

ist algebraisch entwickelt

$$tg\,x = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} + a}$$

Wird der rechts stehende Werth numerisch ausgerechnet, so findet man x aus den Tafeln.

8. Dagegen bleiben die Gleichungen

$$x\,tg^2x + tg\,x - a = 0$$

$$tg^2x + tg\,x - ax = 0$$

u. s. w. transcendent.

S. Bd. I. und II. die Art. über Gleichung in dem Inhaltsverzeichnifs und Sachregister, ferner Fouriers Lehre etc. pag. 112.

Gleichung (Astr.) hat die Bedeutung von Ausgleichung, und zwar ist sie die Differenz zwischen dem mittleren Werth und dem wahren Werth einer Gröfse, oder der positive oder negative Betrag, welcher dem mittleren Werth einer Gröfse hinzugefügt werden mufs, um den wahren Werth derselben Gröfse zu erhalten. (S. die folgenden Art.)

Gleichung der Bahn oder **des Mittelpunkts** ist die Gleichung für die Bestimmung des wahren Orts eines Planeten in seiner Bahn mit Benutzung seines bekannten mittleren Orts:

Jeder Planet nämlich durchläuft seine Bahn um die Sonne mit ungleichförmiger Geschwindigkeit; in der Gegend des Aphels ist seine Bewegung am langsamsten, in der Gegend des Perihels am schnellsten (s. den Art. Bahn, No. 4, pag. 171 mit Fig. 165 und 166).

Macht der Planet nun seinen vollständigen Umlauf um die Sonne, also 360° seiner Bahn beispielsweise in 300 Tagen, so ist sein mittlerer Weg pro Tag $\frac{360}{100}$ = 3,6 Grade, und in 10 Tagen sein mittlerer Weg 36 Grad. Nimmt man nun den Anfangspunkt seiner Bewegung im Perihel, so hat er offenbar in den ersten 10 Tagen einen gröfseren Weg als 36° zurückgelegt; es betrage derselbe $(36 + \alpha)$ Grade, so ist sein mittlerer Ort 36°, sein wahrer Ort $(36 + \alpha)°$ vom Perihel entfernt und die Gleichung beträgt $+\alpha$. Wird der Weg vom Aphel ab gerechnet, so hat er in den ersten 10 Tagen weniger als 36°, etwa $(36 - \beta)°$ zurückgelegt und seine Gleichung ist $(-\beta)°$. Gleichung der Bahn heifst die Gleichung, so fern man die Bogen α und β in der Bahn angibt, Gleichung des Mittelpunkts, so fern α und β die Winkel bezeichnen, um welche die Radii-vectoren des Planeten für seine mittleren und seinen wahren Ort von einander abstehen. Der Art. Anomalie, pag. 74 mit Fig. 66 gibt eine anschauliche Vorstellung von der Gleichung der Bahn.

Gleichung der Zeit ist der Unterschied zwischen der wahren und der mittleren Sonnenzeit. S. den Art. Chronologie mit Fig. 295.

Gleichwinklig sind Dreiecke und Vielecke, die lauter gleiche Umfangswinkel haben. Die regulären Figuren sind gleichseitig und gleichwinklig.

Glied ist ein einzelner der abgesonderten Theile, aus welchen ein Ganzes besteht. In der Arithmetik ist es jede zwischen zweien Additions- oder Subtractionszeichen befindliche Gröfse eines Aggregats, also gleichbedeutend oder ein gemeinschaftlicher Name für Summand, Minuend und Subtrahend.

Das Aggregat: $ax + x^2 \pm by \mp cd$ hat 4 Glieder.

Das Aggregat $ax + (b + c - d)y$ hat 2 Glieder, von denen jedes ein Product aus 2 Factoren ist, der erste Factor des zweiten Gliedes ist eine dreigliedrige Gröfse.

Jede auf Null reducirte Gleichung besteht aus mindestens 2 Gliedern; befindet sich in derselben ein Glied, in welchem die Unbekannten nicht vorkommen, so heifst dieses Glied das bekannte Glied oder das absolute Glied. In der Gleichung $x^2 + ax - b = 0$ ist b das absolute Glied.

Jedes Verhältnifs $a : b$; $c - d$, besteht aus zwei Gliedern, dem Vorderglied und dem Hinterglied. Jede Proportion besteht aus 2 gleichen Verhältnissen mit 4 Gliedern, zweien äufseren und zweien inneren Gliedern. Dasjenige Glied in einem Regeldetri-Ansatz, zu welchem das ihm zugehörige Verhältnifsglied gefunden werden soll, heifst Fragegli (s. d.). In einer Reihe (s. arithmetische Reihe, geometrische Reihe) ist das erste von Wichtigkeit für die Auffindung des 3ten, 4ten, $n$ten Gliedes und die Summe sämmtlicher Glieder. Dasjenige mit gemeinen Zeichen ausgedrückte Glied einer speciellen Reihe, mit welchem das Gesetz der Fortschreitung der Reihe gemein gegeben ist, heifst das allgemeine Glied.

In der Reihe $1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 10 \ldots$ ist das allgemeine Glied $u = \frac{1}{2}n(n +$ wo n die Stellenzahl des Gliedes der Reihe bezeichnet, und man hat

für $n=1$ $u=\frac{1}{2}\cdot 1(1+1)=1$
$n=2$ $u=\frac{1}{2}\cdot 2(2+1)=3$
$n=3$ $u=\frac{1}{2}\cdot 3(3+1)=6$
$n=4$ $u=\frac{1}{2}\cdot 4(4+1)=10$
. . . . . .
$n=10$ $u=\frac{1}{2}\cdot 10(10+1)=55$

S. auch den Art. Gleichnamig.

Gnomon (Geometr.) nennt Euklid im zweiten Buch, Satz 6, 7 und 8 den einem Winkelmaafs ähnlichen (*γνωμων* das Winkelmaafs, die Richtschnur) Ueberrest aus einem Quadrat, wenn ein in demselben von einem Eckpunkt aus construirtes Quadrat von dem ganzen fortgenommen wird; also Bd. II., pag. 73, Fig. 412, die aus 2 Rectangeln bestehende Ebene *JGCEH*, also die Ebene, welche übrig bleibt, wenn von dem Quadrat *GH* das Quadrat *CE* fortgenommen ist.

Klügel in seinem mathematischen Wörterbuch erweitert den Begriff dahin, dafs er nicht nur für ein Quadrat, sondern auch für jedes Parallelogramm gilt, wenn, wie es bei dem Quadrat immer der Fall ist, eine Diagonale des kleineren abzuziehenden Parallelogramms mit einer des ganzen in derselben Linie liegt.

Demnach wäre auch Bd II., pag. 73, Fig. 410 die Figur *CGHEBA* (ein schiefes Winkelmaafs) ein Gnomon.

Gnomon (Astr.) bedeutet den Zeiger an einer Sonnenuhr (*γνωμων* Anzeiger). Auch bezeichnet man mit Gnomon eine Vorrichtung, mittelst welcher man den Augenblick des eintretenden wahren Mittags markirt, indem man einen finsteren Raum, auf dessen horizontalen Boden die Mittagslinie verzeichnet ist, mit einer normal auf der Mittagslinie befindlichen Wand schliefst und in einem mit jener Mittagslinie in derselben lothrechten Ebene liegenden Punkt dieser Wand eine sehr kleine Oeffnung bildet, durch welche nun die Sonne einen Strahl in den dunklen Raum wirft, der von dem Morgen bis zu dem Mittage hin der auf dem Boden verzeichneten Mittagslinie immer näher kommt und mit dem augenblicklichen Eintritt des wahren Mittags sie trifft.

Goldene Regel war bei den alten Rechenmeistern die Anweisung, aus 3 gegebenen Gliedern einer Proportion das vierte zu finden, also die Vorschrift für die Ausrechnung eines Regel-de-tri-Exempels.

Goldene Zahlen, s. u. Epakten.

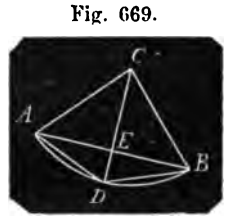
Goniometrie (*γωνια* Winkel, Ecke) wird jetzt ziemlich allgemein derjenige Theil der Geometrie genannt, welcher mit dem Zusammenhang zwischen Winkeln und ihnen zugehörigen geraden Linien sich beschäftigt; und da man eine zweite Abtheilung dieses Theils Cyclometrie (*κυκλος*, Kreis) nennt, so ist die Goniometrie die Wissenschaft, welche Linien aus gegebenen Winkeln und Cyclometrie die Wissenschaft, welche die Winkel (Kreisbogen) aus gegebenen Linien kennen lehrt.

Früher nannte man beide Disciplinen, die G. und die C. allgemein Trigonometrie, und wiewohl dieses Wort Dreiecksmessung heifst (*τριγονον* Dreieck, *μετρειν* messen), so wurden nach der Erklärung der trigonometrischen Linien und den Aufgaben über die Dreiecke auch noch die der Vierecke und der Vielecke aufgelöst, so wie in der Elementar-Geometrie die Lehre von den Dreiecken die Basis aller geometrischen Erkenntnisse ist.

Die Namen Goniometrie und Cyclometrie sind aber entsprechender und bezeichnender, so bald sie die Lehren, abgesehen von deren Anwendung auf Figuren, enthalten; es folgt hiernach dann die Trigonometrie und wenn man will eine Polygonometrie.

2. Der Name Trigonometrie für die Gesammtheit der hierher gehörigen Erkenntnisse wird dadurch gerechtfertigt, dafs das Dreieck so recht geeignet ist, die Unerläfslichkeit dieser neuen Disciplin der Geometrie zu begründen.

Fig. 669.



Denn die Elementargeometrie lehrt den Zusammenhang zwischen Seiten und Winkeln nur in den Fällen, wo Winkel rechte und aliquote Theile von rechten Winkeln sind.

Es sei nämlich $\angle ACD = \angle BCD$
also $\angle ACB = 2\angle BCD$
ferner $CA = CD = CB$
so ist Seite AB nicht $= 2$mal Seite BD.
Denn es ist nach geometrischen Lehren
$AB < DA + DB$
also $AB < 2BD$

Wenn also in 2 gleichschenkligen Dreiecken die beiden Paar Schenkel einander gleich sind, der von ihnen eingeschlossene Winkel in dem einen Dreieck aber doppelt so grofs ist, als der in dem anderen Dreieck, so ist die Grundlinie des ersten Dreiecks nicht doppelt so grofs als die Grundlinie des zweiten Dreiecks.

Eben so ist die Grundlinie des ersten Dreiecks nicht das 3, 4, 5, ... $n$fache der Grundlinie des zweiten Dreiecks, wenn der ihr gegenüberliegende Winkel das 3, 4, 5 ... $n$fache des der einfachen Grundlinie gegenüberliegenden Winkels ist.

3. Wenn in dem Dreieck ABC $\angle C = 2w$, $\angle A = w$
also $\angle BCA = 2 \angle BAC$
so ist zwar $BA > CB$, allein BA nicht $= 2BC$.

Denn halbirt man $\angle BCA$ durch CE
so ist $AE = CE$

Nun ist $\angle BEC = \angle ECA + \angle EAC = 2w$
und $\angle BCE = w$

Folglich liegt in dem $\triangle BCE$ die Seite BC dem doppelten und die Seite BE dem einfachen Winkel gegenüber.

Wäre nun $BA = 2BC$
so wäre aus gleichem Grunde
$BC = 2BE$

Man hätte also $BA = 2BC$
$BC = 2BE$

folglich $BC + BA = 2BC + 2BE$
oder $BC + BE + AE = 2BC + 2BE$
oder $AE = CE = BC + BE$

Mithin wäre in dem $\triangle CBE$ eine Seite gleich der Summe der beiden anderen Seiten, welches unmöglich ist.

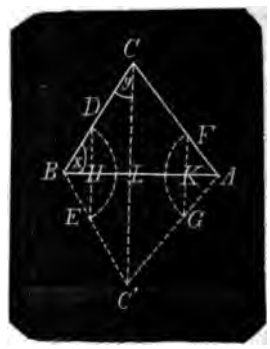
Es ist also unmöglich dafs $AB = 2BC$ ist. Eben so ist AB nicht das 3, 4, 5... $n$fache von BC, wenn $\angle BCA$ das 3, 4, 5... $n$fache von $\angle BAC$ ist.

Man kann also aus dem Verhältnifs der Seiten eines Dreiecks nicht auf das Verhältnifs der Winkel und aus dem Verhältnifs der Winkel eines Dreiecks nicht auf das Verhältnifs der Seiten desselben schliefsen. Ueberhaupt kann man aus den Seiten nicht unmittelbar die Winkel und aus den Winkeln nicht unmittelbar die Seiten finden. Und dennoch ist es von Wichtigkeit diese beiden Aufgaben zu lösen.

Es gehören also zu dem Vergleich zwischen Winkeln und Seiten eines Dreiecks vermittelnde Gröfsen, Gröfsen, die mit den Winkeln und zugleich mit den Seiten verglichen werden können, welche in der Elementargeometrie nicht vorkommen und einer höheren Abtheilung der Geometrie, der Goniometrie der Trigonometrie vorbehalten ben. Es sind dies die goniome schen oder trigonometrischen nien, die jetzt erklärt werden sollen

4. Es seien Fig. 669 die Linien CD, CB als Radien eines Kreises g lang und in den Dreiecken ACD, und ACB haben die Seiten AD, BD AB einerlei Lage in Beziehung auf ihnen gegenüberliegenden Winkel. I man nun diese Sehnen bei einer stimmten Länge des Radius z. B. Längeneinheit = 1 für sämmtliche kel von Secunde zu Secunde berec so wären diese Sehnen mit den keln unmittelbar verglichen; sie sind als Linien auch mit den Seiten Dreiecks zu vergleichen, in welche zu ihnen gehörenden Centriwinkel Umfangswinkel vorkommen, und wäre die Vergleichung zwischen Wi und Seiten eines Dreiecks geschehe

Fig 670.



Beispiel. Es sei in dem Dr ABC die Seite $BC = 40$ gegeben, f der $\angle ABC = 65° 10'$, der $\angle ACB = 54$ so dafs auch der dritte $\angle BAC$ bek $= 180° - (65° 10' + 50° 50') = 60°$ ist. soll die Längen der Seiten AB und finden.

Man zeichne an einer der beider bekannten Seiten z. B. an AB ein gegebenen $\triangle ABC$ congruentes $\triangle$ so dafs $\angle C'BA = \angle CBA$ und $\angle C'$ $\angle CAB$, also $\angle CBC' = 2 \angle CBA = 13$ und $\angle CAC' = 2 \angle CAB = 120°$ ist.

Ferner zeichne man aus A und Kreisbogen FG und DE mit der Lä einheit der Seite BC also mit $AF = B$ ziehe die Sehnen FG und DE, we berechnet und also bekannt sollen,

$BD = BE$, $BC = BC'$
$AF = AG$, $AC = AC'$

nan daher CC' so ist diese mit FG parallel.

daher $BD : BC = DE : CC'$
$1 : 40 = DE : CC'$
$CC' = 40 \cdot DE$

ı auch $AF : FG = AC : CC'$
$1 : FG = AC : CC'$
ch $CC' = AC \cdot FG$
$CC' = AC \cdot FG = 40\ DE$

ihne DE für den Centriwinkel $130° 20'$ ist $= 1{,}815$
ihne FG für den Centriwinkel $120° = 1{,}732$
hat man $AC \times 1{,}732 = 40 \times 1{,}815$
$AC = 41{,}92$

ieselbe Weise würde man die ır Seite AB finden, wenn man n dem $\triangle ABC$ congruentes Dreinet.

nien CC', DE und FG werden Seite AB halbirt. Da nun halbe ie die zugehörigen ganzen Linien alten, so hat man zur Berechr Seite AC nicht nöthig, das ıı zeichnen; man darf nur von ten D, C, F die Lothe DH, CL, AB fällen.

dann $BD : BC = DH : CL$
$AF : AC = FK : CL$

$$CL = \frac{DH}{DB} \times BC = \frac{FK}{AF} \times AC$$

$$\frac{DH}{1} \times 40 = \frac{FK}{1} \cdot AC$$

$H = 0{,}9075$; $FK = 0{,}8660$

$$C = \frac{0{,}9075}{0{,}8660} \cdot 40 = 41{,}92$$

auf diese Weise construirten Sehnen sind nun wirklich ı Winkel von Secunde zu e berechnet und tabellaordnet. Sie haben den Namen missis halb, inscripta die Sehne, inscripta wurde s. ins. abgekürzt en, woraus der Name Sinus entst.)

ı $DB = 1$, so heifst das Loth DH anderen Schenkel BH des Win- Sinus des $\angle DBH$ und man $DH = \sin DBH$ oder $\sin B$.

ı in dem rechtwinkligen Dreieck
$BD : BC = DH : CL$
$1 : BC = \sin B : CL$
$CL = BC \cdot \sin B$

und $$\sin B = \frac{CL}{BC}$$

In jedem rechtwinkligen Dreieck ist also der Sinus eines spitzen Winkels = dem Bruch, in welchem die dem Winkel gegenüberliegende Cathete der Zähler und die Hypotenuse der Nenner ist.

6. Dieser Sinus ist also einmal eine Linie, die in Beziehung auf einen beliebigen Winkel auf einerlei Weise construirt wird; nämlich als die dem Winkel gegenüberliegende Cathete eines rechtwinkligen Dreiecks oder was dasselbe ist, in Beziehung auf den Winkel als Centriwinkel als das Loth von dem Endpunkt des einen Halbmessers auf den anderen, und in seiner Länge in Theilen, entweder der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks oder des Halbmessers des Kreises ausgedrückt. Der Sinus wird also als eine abstracte Zahl angegeben und ist zugleich die wirkliche Länge wenn Hypotenuse oder Halbmesser = 1 gesetzt wird.

Die vielfachen Beziehungen zwischen Seiten und Winkeln in einer Figur machen es fast unmöglich, dafs diese ursprüngliche trigonometrische Linie, der Sinus die einzige Vermittelung zwischen Seiten und Winkeln bleibe: es würden beschwerliche Rechnungen und complicirte Formeln nothwendig werden.

7. Aus der Geometrie ist bekannt, dafs in einem Dreieck ABC (Fig. 670)
$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2AB \cdot BL$

Nun ist aber
$BL = BC \sin BCL = BC \cdot \sin y$
wo y der Complementswinkel von $\angle CBA = x$ ist. Man kann daher die dritte Seite AC eines Dreiecks finden, wenn die beiden anderen Seiten AB, BC und der von ihnen eingeschlossene $\angle x$ gegeben sind, indem man den Sinus des zu x gehörenden Complementswinkels in Rechnung bringt. Um für jeden einzelnen Fall nicht erst den Complementswinkel ausrechnen zu müssen, hat man ebenfalls diese Complements-Sinus (abgekürzt: Cosinus, *cos*) besonders berechnet und tabellarisch geordnet.

Es sei gegeben $BC = 10$, $AB = 12$, $\angle x = 35° 10'$, so hat man
$AC^2 = 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cdot \cos 35° 10'$
$= 244 - 240 \cdot 0{,}81748 = 45{,}8048$
und $AC = \sqrt{45{,}8048} = 6{,}77$

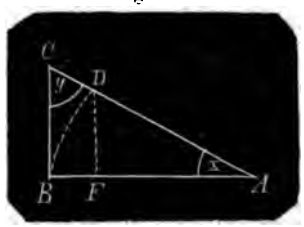
8. Es sei Fig. 671 im rechtwinkligen Dreieck ABC die Cathete $AB = a$ und der ihr anliegende $\angle BAC = x$ gegeben, man soll die Cathete BC finden.

Zeichnet man aus A den Bogen BD, fällt das Loth DF auf AB

so ist $DF = AD \sin x = AB \sin x = a \sin x$,
$AF = AD \cos x = a \cos x$

und man hat

Fig. 671.



$$AF : DF = AB : BC$$

oder $a \cos x : a \sin x = a : BC$

woraus $$BC = a \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$$

Man kann also BC finden, sobald a und x in Zahlen gegeben sind. Um aber nicht die Division von $\cos x$ in $\sin x$ nöthig zu haben hat man den Quotient $\frac{\sin x}{\cos x}$ für alle Winkel von Secunde zu Secunde berechnet und mit den Sinus und Cosinus unter dem Namen Tangente (abgekürzt *tang* oder *tg*) zusammen gestellt, und es ist demnach

$$BC = a \, tg \, x$$

Der Name Tangente für den Quotient ist ganz angemessen, denn der Quotient $\frac{\sin x}{\cos x}$ würde mit der geometrischen Tangente BC an dem Kreisbogen BD und dem $\angle x$ zugehörig gleich grofs sein, wenn $AB = 1$ wäre.

Wäre statt x der Complementswinkel y gegeben, so müfste man, um BC zu finden, erst $\angle x$ ausrechnen und um dies zu vermeiden hat man die Complementstangenten, abgekürzt Cotangenten (*cotg*, *cot*) ebenfalls mitunter tabellarisch zusammengestellt. Man kann sie jedoch entbehren; denn da

$$BC = a \, tg \, x$$

und $$a = BC \, cot \, x$$

so ist $$BC = BC \cdot cot \, x \cdot tg \, x$$

oder $$tg \, x \cdot cot \, x = 1$$

woraus $$cot \, x = \frac{1}{tg \, x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Ist also y gegeben, so hat man $BC = \frac{a}{tg \, y}$

9. Auch die Hypotenuse AC kann man unmittelbar aus der gegebenen a und dem $\angle x$ finden. Denn

$$AF : AD = AB : AC$$

oder $$a \cos x : a = a : AC$$

woraus $$AC = a \cdot \frac{1}{\cos x}$$

Wäre $a = 1$, so hätte man A

und man hat diesen Quotienten mit der Länge AC für den H $AB = 1$ übereinstimmt, Secante weil diese Linie den Kreis durchs

Man schreibt $AC = a \, sec \, x$

Eben so heifst die Secante plementswinkels y von x die C Es ist daher auch

$$AC = a \, cosec \, y$$

10. Die trigonometrischen Li in No. 7, 8, 9 in Beziehung auf berechnung, also rein trigon entwickelt. Sie sind aber in auf ihre allgemeine Anwendung gemein aufzufassen und zwar ziehung auf Figurenberechnung als Vermittelung zwischen Win deren die Längeneinheit bildend keln, also in Beziehung auf Cen und deren Radien.

In dem Art. Construction gonometrische, pag. 80 mit bis 440 sind die genannten tr trischen Linien für einen beliebi kel ACD construirt, und zwar

Fig. 437 für Winkel von 0 bis also im 1ten Quadrant liegend.

Fig. 438 für Winkel von 90° 180°, also im 2ten Quadrant lie

Fig. 439 für Winkel von 180° 270°, also im 3ten Quadrant lie

Fig. 440 für Winkel von 270° 360°, also im 4ten Quadrant lie

No 2, pag. 81 ist gezeigt, das d namigen trigonometrischen Linie Winkel der 4 verschiedenen Qu sobald sie sich auf gleich grofs des ersten Quadrant, nämlich a grofse Ergänzungen zu 2 oder Winkeln zurückführen lassen, Längen gleich und nur in de chen verschieden sind. In No gegeben, wie solche Zurückführu schehen.

Ueber die beiden trigonom Linien Sinus versus und C versus oder Quersinus un cosinus s. den Art. „Cosinus

11. Die trigonometrischen L die ein- und mehrfachen rechte zu bestimmen ist von grofser Wi

n $\angle ACA$ (Fig. 437, pag. 80) = 0 Sinus DE und die Tangente en Punkt A; beide werden = 0. nte CH fällt in CA und wird Sinusversus AE fällt in den und wird = 0. Der Cosinus DF wird = CA = 1. Die Cotangente elben Richtung BH wird ∞, desdie Cosecante CH in der Rich- = ∞ und der Cosinus versus = BC = 1.

n $\angle BCA = 90°$ fällt der Sinus BC und ist = 1, die Tangente derselben Richtung AG ∞, die CG fällt in die Richtung CB und der Sinus versus AE erstreckt A bis C und wird = 1. Der DF fällt in den Punkt B und die Cotangente BH fällt in den und wird = 0, die Cosecante in CB und wird = 1, der Corsus BF fällt in den Punkt B = 0.

n $\angle A'CA$ (wenn man Fig. 438 ts in dem waagerechten Durchiegenden Endpunkt mit A' be- = 180° fällt der Sinus DE in wird = 0, die Tangente $(-AG)$ len Punkt A und wird = 0, die $(-CG)$ fällt in den Halbmesser wird = − 1, der Sinus versus eckt sich von A bis A' und wird Der Cosinus CE erstreckt sich is A' und wird = − 1, die Co- $(-BH)$ wird ∞ also = − ∞, die e + CH fällt in die Richtung wird ∞, der Cosinus versus BF is C und wird = + 1.

n $\angle B'CA$ (Fig. 439) = 270°, wenn der unterste Endpunkt des loth-Durchmessers mit B' bezeichnet man den Sinus DE in $CB' = -1$, ente AG in derselben Richtung Secante − CG in der Richtung so = − ∞, der Sinusversus AE + 1. Der Cosinus − CE in dem = − 0, die Cotangente BH in kt $B = 0$, die Cosecante − CH änge $CB = -1$ und der Cosinus F in der Länge $BB' = 2$.

n $\angle ACA = 360°$ (Fig. 440) wird s $(-DE)$ in dem Punkt A zu Tangente $-AG$ desgleichen in kt A zu − 0, die Secante CG C und wird = 1, der Sinus ververschwindet in dem Punkt A er Cosinus CE wird der Halb- $A = 1$, die Cotangente $-BH$ erselben Richtung ∞ also = − ∞, ante − CH fällt in die entgeste Richtung von CA und wird − ∞, der Cosinus versus BF wird = BC = 1.

Hiernach hat man folgende Zusammenstellung der Werthe.

Für α =	0	90°	180°	270°	360°
Sinus	+0	+1	+0	−1	−0
Tangente	+0	+∞	−0	+∞	−0
Secante	+1	+∞	−1	−∞	+1
Sinus versus	+0	+1	+2	+1	+0
Cosinus	+1	+0	−1	−0	+1
Cotangente	+∞	+0	−∞	+0	−∞
Cosecante	+∞	+1	+∞	−1	−∞
Cosinus versus	+1	+0	+1	+2	+1

12. Die zeichnungsweise Erklärung der trigonometrischen Linien ist durchaus unerläfslich. Eben so sind nur mit Hülfe der Anschauung von Figuren folgende Formeln zu entwickeln:

Es ist Fig. 437:

$$CD^2 = DE^2 + CE^2$$

oder $$1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \quad (1)$$

woraus $$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \quad (2)$$

und $$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} \quad (3)$$

Es ist ferner

$$CG^2 = AC^2 + AG^2$$

oder $$\sec^2\alpha = 1 + tg^2\alpha \quad (4)$$

oder $$\sec\alpha = \sqrt{1 + tg^2\alpha} \quad (5)$$

oder $$tg\,\alpha = \sqrt{\sec^2\alpha - 1} \quad (6)$$

Ferner

$$CH^2 = CB^2 + BH^2$$

oder $$\operatorname{cosec}^2\alpha = 1 + \cot^2\alpha \quad (7)$$

oder $$\operatorname{cosec}\alpha = \sqrt{1 + \cot^2\alpha} \quad (8)$$

oder $$\cot\alpha = \sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha - 1} \quad (9)$$

Ferner

$$CE : ED = CA : AG$$

oder $$\cos\alpha : \sin\alpha = 1 : tg\,\alpha$$

woraus $$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad (10)$$

Man kann noch folgende Proportion ansetzen:

$$CF : DF = BC : BH$$

oder $$\sin\alpha : \cos\alpha = 1 : \cot\alpha$$

woraus $$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad (11)$$

Ferner hat man

$$CE : CA = CD : CG$$

oder $$\cos\alpha : 1 = 1 : \sec\alpha$$

woraus $$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \quad (12)$$

Endlich

$$CF : CB = CD : CH$$

oder $\sin\alpha : 1 = 1 : \operatorname{cosec}\alpha$

woraus $$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \quad (13)$$

13. Die Haupt- oder Grundformeln für alle analytischen Entwickelungen sind die zur Bestimmung des Sinus und des Cosinus einer Summe und einer Differenz zweier Winkel durch die Sinus und Cosinus der einzelnen Winkel. Es sind diese

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta \quad (14)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta \quad (15)$$

Aus diesem Grunde machen diese 4 Formeln aus. Von denselben sind die beiden

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta \quad (16)$$

und

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta \quad (17)$$

in dem Art. Constructionen in No. 14, pag. 89 mit Fig. 454 bis Fig. 463 und die Formeln

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta \quad (18)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \quad (19)$$

in No. 15, pag. 93 mit Fig. 464 bis Fig. 473 in allen nur möglichen Lagen der einzelnen Winkel synthetisch als richtig nachgewiesen.

Die übrigen trigonometrischen Formeln sind gleichfalls synthetisch und mit möglichst euklidischer Strenge in Form von Aufgaben als richtig dargethan; sie sollen darum hier noch analytisch entwickelt werden.

14. Es läfst sich die Tabelle der Werthe aller trigonometrischen Linien No. 11 aus den ad 12 aufgestellten Formeln analytisch ableiten, wenn man nur die Werthe des Sinus und des Cosinus als bekannt annimmt.

Setzt man in Formel 10 für Sinus und Cosinus die Werthe, so erhält man

$$\operatorname{tg} 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\operatorname{tg} 90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\operatorname{tg} 180^\circ = \frac{\sin 180^\circ}{\cos 180^\circ} = \frac{0}{-1} = -0$$

$$\operatorname{tg} 270^\circ = \frac{\sin 270^\circ}{\cos 270^\circ} = \frac{-1}{-0} = \infty$$

$$\operatorname{tg} 360^\circ = \frac{\sin 360^\circ}{\cos 360^\circ} = \frac{-0}{+1} = -0$$

Eben so aus Formel 11.

$$\cot 0 = \frac{\cos 0}{\sin 0} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\cot 90^\circ = \frac{\cos 90^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cot 180^\circ = \frac{\cos 180^\circ}{\sin 180^\circ} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

$$\cot 270^\circ = \frac{\cos 270^\circ}{\sin 270^\circ} = \frac{-0}{-1} = 0$$

$$\cot 360^\circ = \frac{\cos 360^\circ}{\sin 360^\circ} = \frac{+1}{-0} = -\infty$$

Aus Formel 12 hat man

$$\sec 0 = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec 90^\circ = \frac{1}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\sec 180^\circ = \frac{1}{\cos 180^\circ} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\sec 270^\circ = \frac{1}{\cos 270^\circ} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

$$\sec 360^\circ = \frac{1}{\cos 360^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

Aus Formel 13

$$\operatorname{cosec} 0 = \frac{1}{\sin 0} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\operatorname{cosec} 90^\circ = \frac{1}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\operatorname{cosec} 180^\circ = \frac{1}{\sin 180^\circ} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\operatorname{cosec} 270^\circ = \frac{1}{\sin 270^\circ} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\operatorname{cosec} 360^\circ = \frac{1}{\sin 360^\circ} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

Der Sinus versus ist $= 1 -$ Cosinus versus $= 1 - \sin$, beide also für keinen Werth des Winkels negativ.

$$\operatorname{sinv}(0) \text{ ist } = 1 - 1 = 0 \qquad \operatorname{cosv}(0^\circ) = 1 - 0 = 1$$

$$\operatorname{sinv} 90^\circ = 1 - 0 = 1 \qquad \operatorname{cosv} 90^\circ = 1 - 1 = 0$$

$$\operatorname{sinv} 180^\circ = 1 - (-1) = 2 \qquad \operatorname{cosv} 180^\circ = 1 - 0 = 1$$

$$\operatorname{sinv} 270^\circ = 1 - (-0) = 1 \qquad \operatorname{cosv} 270^\circ = 1 - (-1) = 2$$

$$\operatorname{sinv} 360^\circ = 1 - 1 = 0 \qquad \operatorname{cosv} 360^\circ = 1 - 0 = 1$$

15. Setzt man in Formel 16 und 17 hintereinander $\alpha = 90^\circ$, 180° u $\beta = \alpha$, so hat man

$$\sin(90^\circ + \alpha) = 1 \cdot \cos\alpha + 0 \cdot \sin\alpha = \cos\alpha$$

$$\sin(180^\circ + \alpha) = 0 \cdot \cos\alpha + (-1) \cdot \sin\alpha = -\sin\alpha$$

$$\sin(270^\circ+\alpha) = (-1)\cdot\cos\alpha + (-0)\cdot\sin\alpha = -\cos\alpha$$
$$\cos(90^\circ+\alpha) = 0\cdot\cos\alpha - 1\cdot\sin\alpha = -\sin\alpha$$
$$\cos(180^\circ+\alpha) = (-1)\cdot\cos\alpha - 0\cdot\sin\alpha = -\cos\alpha$$
$$\cos(270^\circ+\alpha) = (-0)\cdot\cos\alpha - (-1)\cdot\sin\alpha = \sin\alpha$$

Setzt man in Formel 18 und 19 hintereinander $\alpha = 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$, und α, so erhält man

$$\sin(180^\circ-\alpha) = 0\cdot\cos\alpha - (-1)\cdot\sin\alpha = \sin\alpha$$
$$\sin(270^\circ-\alpha) = (-1)\cdot\cos\alpha - (-0)\cdot\sin\alpha = -\cos\alpha$$
$$\sin(360^\circ-\alpha) = (-0)\cdot\cos\alpha - 1\cdot\sin\alpha = -\sin\alpha$$
$$\cos(180^\circ-\alpha) = (-1)\cdot\cos\alpha + 0\cdot\sin\alpha = -\cos\alpha$$
$$\cos(270^\circ-\alpha) = (-0)\cdot\cos\alpha + (-1)\cdot\sin\alpha = -\sin\alpha$$
$$\cos(360^\circ-\alpha) = 1\cdot\cos\alpha + (-0)\cdot\sin\alpha = \cos\alpha$$

16. Mit Hülfe der Formeln No. 15 hat man nun die Werthe der Tangente, Cotangente, der Secante, Cosecante, des Sinus versus und des Cosinus versus von Winkeln in späteren Quadranten auf Winkel des ersten Quadrant reducirt wie folgt:

$$tg(90^\circ+\alpha) = \frac{\sin(90^\circ+\alpha)}{\cos(90^\circ+\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\cot\alpha$$
$$tg(180^\circ+\alpha) = \frac{\sin(180^\circ+\alpha)}{\cos(180^\circ+\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = tg\,\alpha$$
$$tg(270^\circ+\alpha) = \frac{\sin(270^\circ+\alpha)}{\cos(270^\circ+\alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\cot\alpha$$
$$tg(180^\circ-\alpha) = \frac{\sin(180^\circ-\alpha)}{\cos(180^\circ-\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -tg\,\alpha$$
$$tg(270^\circ-\alpha) = \frac{\sin(270^\circ-\alpha)}{\cos(270^\circ-\alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \cot\alpha$$
$$tg(360^\circ-\alpha) = \frac{\sin(360^\circ-\alpha)}{\cos(360^\circ-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -tg\,\alpha$$
$$\cot(90^\circ+\alpha) = \frac{\cos(90^\circ+\alpha)}{\sin(90^\circ+\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -tg\,\alpha$$
$$\cot(180^\circ+\alpha) = \frac{\cos(180^\circ+\alpha)}{\sin(180^\circ+\alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \cot\alpha$$
$$\cot(270^\circ+\alpha) = \frac{\cos(270^\circ+\alpha)}{\sin(270^\circ+\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -tg\,\alpha$$
$$\cot(180^\circ-\alpha) = \frac{\cos(180^\circ-\alpha)}{\sin(180^\circ-\alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\cot\alpha$$
$$\cot(270^\circ-\alpha) = \frac{\cos(270^\circ-\alpha)}{\sin(270^\circ-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = tg\,\alpha$$
$$\cot(360^\circ-\alpha) = \frac{\cos(360^\circ-\alpha)}{\sin(360^\circ-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\cot\alpha$$
$$\sec(90^\circ+\alpha) = \frac{1}{\cos(90^\circ+\alpha)} = \frac{1}{-\sin\alpha} = -\operatorname{cosec}\alpha$$
$$\sec(180^\circ+\alpha) = \frac{1}{\cos(180^\circ+\alpha)} = \frac{1}{-\cos\alpha} = -\sec\alpha$$
$$\sec(270^\circ+\alpha) = \frac{1}{\cos(270^\circ+\alpha)} = \frac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha$$
$$\sec(180^\circ-\alpha) = \frac{1}{\cos(180^\circ-\alpha)} = \frac{1}{-\cos\alpha} = -\sec\alpha$$
$$\sec(270^\circ-\alpha) = \frac{1}{\cos(270^\circ-\alpha)} = \frac{1}{-\sin\alpha} = -\operatorname{cosec}\alpha$$
$$\sec(360^\circ-\alpha) = \frac{1}{\cos(360^\circ-\alpha)} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ + \alpha) = \frac{1}{\sin(90^\circ + \alpha)} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$$
$$\operatorname{cosec}(180^\circ + \alpha) = \frac{1}{\sin(180^\circ + \alpha)} = \frac{1}{-\sin\alpha} = -\operatorname{cosec}\alpha$$
$$\operatorname{cosec}(270^\circ + \alpha) = \frac{1}{\sin(270^\circ + \alpha)} = \frac{1}{-\cos\alpha} = -\sec\alpha$$
$$\operatorname{cosec}(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha$$
$$\operatorname{cosec}(270^\circ - \alpha) = \frac{1}{\sin(270^\circ - \alpha)} = \frac{1}{-\cos\alpha} = -\sec\alpha$$
$$\operatorname{cosec}(360^\circ - \alpha) = \frac{1}{\sin(360^\circ - \alpha)} = \frac{1}{-\sin\alpha} = -\operatorname{cosec}\alpha$$

Nach No. 14 ist $\operatorname{sinv}\alpha = 1 - \cos\alpha$

$\operatorname{cosv}\alpha = 1 - \sin$

daher
$$\operatorname{sinv}(90^\circ + \alpha) = 1 - \cos(90^\circ + \alpha) = 1 + \sin\alpha = 2 - \operatorname{cosv}\alpha$$
$$\operatorname{sinv}(180^\circ + \alpha) = 1 - \cos(180^\circ + \alpha) = 1 - (-\cos\alpha) = 2 - \operatorname{sinv}\alpha$$
$$\operatorname{sinv}(270^\circ + \alpha) = 1 - \cos(270^\circ + \alpha) = 1 - \sin\alpha = \operatorname{cosv}\alpha$$
$$\operatorname{sinv}(180^\circ - \alpha) = 1 - \cos(180^\circ - \alpha) = 1 - (-\cos\alpha) = 2 - \operatorname{sinv}\alpha$$
$$\operatorname{sinv}(270^\circ - \alpha) = 1 - \cos(270^\circ - \alpha) = 1 - (-\sin\alpha) = 2 - \operatorname{cosv}\alpha$$
$$\operatorname{sinv}(360^\circ - \alpha) = 1 - \cos(360^\circ - \alpha) = 1 - \cos\alpha = \operatorname{sinv}\alpha$$
$$\operatorname{cosv}(90^\circ + \alpha) = 1 - \sin(90^\circ + \alpha) = 1 - \cos\alpha = \operatorname{sinv}\alpha$$
$$\operatorname{cosv}(180^\circ + \alpha) = 1 - \sin(180^\circ + \alpha) = 1 - (-\sin\alpha) = 2 - \operatorname{cosv}\alpha$$
$$\operatorname{cosv}(270^\circ + \alpha) = 1 - \sin(270^\circ + \alpha) = 1 - (-\cos\alpha) = 2 - \operatorname{sinv}\alpha$$
$$\operatorname{cosv}(180^\circ - \alpha) = 1 - \sin(180^\circ - \alpha) = 1 - \sin\alpha = \operatorname{cosv}\alpha$$
$$\operatorname{cosv}(270^\circ - \alpha) = 1 - \sin(270^\circ - \alpha) = 1 - (-\cos\alpha) = 2 - \operatorname{sinv}\alpha$$
$$\operatorname{cosv}(360^\circ - \alpha) = 1 - \sin(360^\circ - \alpha) = 1 - (-\sin\alpha) = 2 - \operatorname{cosv}\alpha$$

17. Die trigonometrischen Linien negativer Winkel kommen im Calcül nicht selten vor und müssen auf positive Winkel reducirt werden. Unter negativen Winkeln versteht man diejenigen, welche (Fig. 437 bis 440) von dem festen Schenkel CA ab nach entgegengesetzter Richtung, also aufeinander folgend durch den 4ten, den 3ten, den 2ten und den 1ten Quadrant gezählt oder gemessen werden. Es ist demnach gleich bedeutend:

der (−1)te Quadrant mit dem (+4)ten Quad.
„ (−2)te „ „ „ (+3)ten „
„ (−3)te „ „ „ (+2)ten „
„ (−4)te „ „ „ (+1)ten „

Und in derselben Uebereinstimmung stehen auch die Vorzeichen der trigonometrischen Linien (s. Tabelle, Bd. II., pag. 81).

Quadranten	+I	+II	+III
Sinus	+	+	−
Cosinus	+	−	−
Tangente	+	−	+
Cotangente	+	−	+
Secante	+	−	−
Cosecante	+	+	−
Sinus versus	+	+	+
Cosinus versus	+	+	+

Quadranten	−IV	−III	−II

Da nun correspondiren:
-0 mit $+360^\circ$
-90° mit $+270^\circ$
-180° mit $+180^\circ$
-270° mit $+90^\circ$
-360° mit $+0^\circ$

so hat man aus der Tabelle No. 11:

Für $\alpha =$	-0	-90°	-180°	-270°	-360°
Sinus	−0	−1	+0	+1	+0
Tangente . .	−0	$+\infty$	−0	$+\infty$	+0
Secante . . .	+1	$-\infty$	−1	$+\infty$	+1
Sinus versus .	+0	+1	+2	+1	+0
Cosinus . . .	+1	−0	−1	+0	+1
Cotangente . .	$-\infty$	+0	$-\infty$	+0	$+\infty$
Cosecante . .	$-\infty$	−1	$+\infty$	+1	$+\infty$
Cosinus versus .	+1	+2	+1	+0	+1

ier correspondiren:

$-\alpha$ mit $+360^\circ - \alpha$

$90^\circ - \alpha$) mit $+270^\circ + \alpha$

$90^\circ + \alpha$) mit $+270^\circ - \alpha$

$80^\circ - \alpha$) mit $+180^\circ + \alpha$

$80^\circ + \alpha$) mit $+180^\circ - \alpha$

$90^\circ - \alpha$) mit $+ 90^\circ + \alpha$

$90^\circ + \alpha$) mit $+ 90^\circ - \alpha$

$50^\circ - \alpha$) mit $+ \alpha$

· ist nach No. 15 und 16

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$tg(-\alpha) = -tg\alpha$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$
$$\sec(-\alpha) = \sec\alpha$$
$$\operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha$$
$$\operatorname{sinv}(-\alpha) = \operatorname{sinv}\alpha$$
$$\operatorname{cosv}(-\alpha) = 2 - \operatorname{cosv}\alpha$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$
$$tg(90^\circ - \alpha) = -\cot\alpha$$
$$\cot(90^\circ - \alpha) = -tg\alpha$$
$$\sec(90^\circ - \alpha) = \operatorname{cosec}\alpha$$
$$\operatorname{cosec}(90^\circ - \alpha) = -\sec\alpha$$
$$\operatorname{sinv}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{cosv}\alpha$$
$$\operatorname{cosv}(90^\circ - \alpha) = 2 - \operatorname{sinv}\alpha$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$tg(90^\circ + \alpha) = \cot\alpha$$
$$\cot(90^\circ + \alpha) = tg\alpha$$
$$\sec(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha$$
$$\operatorname{cosec}(90^\circ + \alpha) = -\sec\alpha$$
$$\operatorname{sinv}(90^\circ + \alpha) = 2 - \operatorname{cosv}\alpha$$
$$\operatorname{cosv}(90^\circ + \alpha) = 2 - \operatorname{sinv}\alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$tg(180^\circ - \alpha) = tg\alpha$$
$$\cot(180^\circ - \alpha) = \cot\alpha$$
$$\sec(180^\circ - \alpha) = -\sec\alpha$$
$$\operatorname{cosec}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha$$
$$\operatorname{sinv}(180^\circ - \alpha) = 2 - \operatorname{sinv}\alpha$$
$$\operatorname{cosv}(180^\circ - \alpha) = 2 - \operatorname{cosv}\alpha$$

$$\sin(180^\circ + \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$tg(180^\circ + \alpha) = -tg\alpha$$
$$\cot(180^\circ + \alpha) = -\cot\alpha$$
$$\sec(180^\circ + \alpha) = -\sec\alpha$$
$$\operatorname{cosec}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{cosec}\alpha$$
$$\operatorname{sinv}(180^\circ + \alpha) = 2 - \operatorname{sinv}\alpha$$
$$\operatorname{cosv}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{cosv}\alpha$$

$$\sin(270^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(270^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$$
$$tg(270^\circ - \alpha) = -\cot\alpha$$
$$\cot(270^\circ - \alpha) = -tg\alpha$$
$$\sec(270^\circ - \alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha$$
$$\operatorname{cosec}(270^\circ - \alpha) = \sec\alpha$$
$$\operatorname{sinv}(270^\circ - \alpha) = 2 - \operatorname{cosv}\alpha$$
$$\operatorname{cosv}(270^\circ - \alpha) = \operatorname{sinv}\alpha$$

$$\sin(270^\circ + \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(270^\circ + \alpha) = \sin\alpha$$
$$tg(270^\circ + \alpha) = \cot\alpha$$
$$\cot(270^\circ + \alpha) = tg\alpha$$
$$\sec(270^\circ + \alpha) = \operatorname{cosec}\alpha$$
$$\operatorname{cosec}(270^\circ + \alpha) = \sec\alpha$$
$$\operatorname{sinv}(270^\circ + \alpha) = \operatorname{cosv}\alpha$$
$$\operatorname{cosv}(270^\circ + \alpha) = \operatorname{sinv}\alpha$$

$$\sin(360^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$
$$tg(360^\circ - \alpha) = tg\alpha$$
$$\cot(360^\circ - \alpha) = \cot\alpha$$
$$\sec(360^\circ - \alpha) = \sec\alpha$$
$$\operatorname{cosec}(360^\circ - \alpha) = \operatorname{cosec}\alpha$$
$$\operatorname{sinv}(360^\circ - \alpha) = \operatorname{sinv}\alpha$$
$$\operatorname{cosv}(360^\circ - \alpha) = \operatorname{cosv}\alpha$$

18. Es sollen nun die ferneren in dem Art. „Constructionen, trigonometrische," synthetisch als richtig erwiesenen Formeln, welche die gebräuchlichsten sind, analytisch abgeleitet werden.

Schreibt man in Formel 16 für β den Werth α, so ist

$$\sin(2\alpha) = \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha \cdot \sin\alpha$$

also (Bd. II., pag. 96, No. 16 V. synthetisch)

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \qquad (20)$$

Schreibt man in Formel 17: $\beta = \alpha$, so ist (No. 17, VI. synthetisch)

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \qquad (21)$$

Schreibt man in Formel 21, nach Formel 1:

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

so erhält man (No. 18, VII. synthetisch)

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha \qquad (22)$$

Schreibt man dagegen in Formel 21

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

so erhält man (No. 19, VIII. synth)

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 \qquad (23)$$

Dividirt man Formel 20 durch Formel 21, so erhält man $\dfrac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$ und wenn man Zähler und Nenner des rechts stehenden Bruchs mit $\cos^2\alpha$ dividirt und $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha$ setzt, so erhält man

(No. 20, IX. synth.)

$$tg(2\alpha) = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha} \qquad (24)$$

Dividirt man 21 durch 20, so ist

$$\frac{cos(2\alpha)}{sin(2\alpha)} = \frac{cos^2\alpha - sin^2\alpha}{2\,sin\,\alpha \cdot cos\,\alpha}$$

und nun Zähler und Nenner des rechts stehenden Bruchs mit $sin^2\alpha$ dividirt ergibt (No. 21, X. synth.)

$$cot(2\alpha) = \frac{cot^2\alpha - 1}{2\,cot\,\alpha}$$

Dividirt man Formel 25, Zäl Nenner rechts, durch $cot\,\alpha$, so erl (No. 22, XI. synth.)

$$cot(2\alpha) = \frac{cot\,\alpha - \frac{1}{cot\,\alpha}}{2} = \frac{cot\,\alpha - t}{2}$$

Es ist nach Formel 4 und 26

$$1 + cot^2(2\alpha) = sec^2(2\alpha) = 1 + \frac{(cot\,\alpha - tg\,\alpha)^2}{4} = \tfrac{1}{4}(4 + cot^2\alpha + tg^2\alpha - 2\,cot\,\alpha \cdot$$
$$= \tfrac{1}{4}(4 + cot^2\alpha + tg^2\alpha - 2) = \tfrac{1}{4}(cot^2\alpha + tg^2\alpha + 2\,cot\,\alpha \cdot tg\,\alpha) = \tfrac{1}{4}(cot$$

woraus (No. 23, XII.), wenn man radicirt

$$cosec(2\alpha) = \frac{cot\,\alpha + tg\,\alpha}{2} \qquad (27)$$

Entwickelt man aus Formel 22: $sin\,\alpha$ und schreibt $\frac{1}{2}\alpha$ für α, so erhält man (No. 24, XIII. synth.)

$$sin(\tfrac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\frac{1 - cos\,\alpha}{2}} \qquad (28)$$

Entwickelt man $cos\,\alpha$ aus Fo schreibt $\frac{1}{2}\alpha$ für α, so erhält man XIV. synth.)

$$cos(\tfrac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\frac{1 + cos\,\alpha}{2}}$$

Schreibt man in Formel 28: für α, so hat man (No. 26, XV.

$$sin\frac{90^\circ - \alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos(90^\circ - \alpha)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - sin\,\alpha}{2}}$$

Schreibt man $(90^\circ - \alpha)$ für α in Formel 29, so erhält man (No. 29, XVII

$$cos\frac{90^\circ - \alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + cos(90^\circ - \alpha)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + sin\,\alpha}{2}}$$

Schreibt man $(90^\circ + \alpha)$ für α in Formel 28, so erhält man (No. 28, XVI

$$sin\frac{90^\circ + \alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos(90^\circ + \alpha)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + sin\,\alpha}{2}}$$

Schreibt man $(90^\circ + \alpha)$ für α in Formel 29, so erhält man (No. 27, XV

$$cos\frac{90^\circ + \alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + cos(90^\circ + \alpha)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - sin\,\alpha}{2}}$$

Dividirt man Formel 30 durch 31, so erhält man (No. 30, XIX. synth.)

$$tg\frac{90^\circ - \alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - sin\,\alpha}{1 + sin\,\alpha}} \qquad (34)$$

Durch die Umkehrung des Bruchs Formel 34 erhält man (No. 32, XXI. synth.)

$$cot\frac{90^\circ - \alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + sin\,\alpha}{1 - sin\,\alpha}} \qquad (35)$$

Dividirt man Formel 32 durch 33, so erhält man

$$tg\frac{90^\circ + \alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + sin\,\alpha}{1 - sin\,\alpha}} \qquad (36)$$

und dividirt man Formel 33 durch 32: (No. 31, XX. synth.)

$$cot\frac{90^\circ + \alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - sin\,\alpha}{1 + sin\,\alpha}} \qquad (37)$$

Multiplicirt man in Formel 34, Zähler und Nenner der Wurzelgröfse mit $(1 - sin\,\alpha)$ und reducirt, so erhält man (No. synth.)

$$tg\frac{90^\circ - \alpha}{2} = \frac{1 - sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$$

Multiplicirt man Zähler und der Wurzelgröfse in Formel 35 mit und reducirt, so erhält man (No. 3 synth.)

$$cot\frac{90^\circ - \alpha}{2} = \frac{1 + sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$$

Multiplicirt man Zähler und N Wurzelgröfse in Formel 36 mit (und reducirt, so erhält man XXV. synth.)

$$tg\frac{90^\circ + \alpha}{2} = \frac{1 + sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$$

Multiplicirt man in Formel 37 und Nenner der Wurzelgröfse mit

nd reducirt, so erhält man (No. 35, XXIV. synth.)

$$\cot\frac{90°+\alpha}{2}=\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad (41)$$

Dividirt man Formel 28 durch Formel 29 und reducirt, so erhält man (No. 40, XXIX. synth.)

$$tg\,(\tfrac{1}{2}\alpha)=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \qquad (42)$$

und multiplicirt man in dieser Formel Zähler und Nenner der Wurzelgröfse mit $(1-\cos\alpha)$ so erhält man (No. 38, XXVII.)

$$tg\,(\tfrac{1}{2}\alpha)=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (43a)$$

Multiplicirt man dagegen mit $(1+\cos\alpha)$, so erhält man (No. 39, XXVIII. synth.)

$$tg\,(\tfrac{1}{2}\alpha)=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \qquad (43b)$$

Addirt man Formel 28 und 29, so hat man

$$\begin{aligned}\sin(\tfrac{1}{2}\alpha)+\cos(\tfrac{1}{2}\alpha)&=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}+\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}+\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\right)^2}\\&=\sqrt{\left[\frac{1-\cos\alpha}{2}+\frac{1+\cos\alpha}{2}+2\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{4}}\right]}\\&=\sqrt{(1+\sqrt{1-\cos^2\alpha})}=\sqrt{1+\sin\alpha}\end{aligned}$$

Man hat demnach (No. 41, XXX. synth.)

$$\sin(\tfrac{1}{2}\alpha)+\cos(\tfrac{1}{2}\alpha)=\sqrt{1+\sin\alpha} \qquad (44)$$

Subtrahirt man Formel 28 von Formel 29, so hat man

$$\cos(\tfrac{1}{2}\alpha)-\sin(\tfrac{1}{2}\alpha)=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

und eben so wie mit der Summe verfahren ergibt (No. 42, XXXI. synth.)

$$\cos(\tfrac{1}{2}\alpha)-\sin(\tfrac{1}{2}\alpha)=\sqrt{1-\sin\alpha} \qquad (45)$$

Subtrahirt man Formel 29 von Formel 28 so erhält man (No. 43, XXXII. synth.)

$$\sin(\tfrac{1}{2}\alpha)-\cos(\tfrac{1}{2}\alpha)=\sqrt{1-\sin\alpha} \qquad (46)$$

Der Grund davon, dafs beide Ausdrücke Formel 45 und 46 dieselben sind und unter welchen Umständen die eine oder die andere gilt, (s. Bd. II., pag. 106 und 107, No. 42 und 43).

Subtrahirt man Formel 45 von Formel 44 und dividirt mit 2, so erhält man

$$\sin(\tfrac{1}{2}\alpha)=\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}\right) \qquad (47)$$

Addirt man die Formeln 44 und 46, so erhält man

$$\sin(\tfrac{1}{2}\alpha)=\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}\right) \qquad (48)$$

und subtrahirt man Formel 46 von 44:

$$\cos(\tfrac{1}{2}\alpha)=\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}\right) \qquad (49)$$

Beide Formeln in eine Formel zusammengezogen steht No. 44, XXXIV.

Addirt man Formel 44 und 45 so erhält man

$$\cos(\tfrac{1}{2}\alpha)=\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}\right) \qquad (50)$$

Beide Formeln in eine zusammengezogen ist No. 44, XXXIII.

Der Grund davon, das beide Paar Formeln 47, 48 und 49, 50 das Entgegengesetzte ausdrücken und welche Formeln in speciellen Fällen genommen werden müssen, s. Bd. II., pag 107, No. 44 mit noch den Formeln XXXV und XXXVI.

Subtrahirt man Formel 17 von 19, so erhält man (No. 48, XL. synth.)

$$\left.\begin{aligned}\sin\beta\cdot\sin\alpha&=\tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]\\ \text{oder }\sin\alpha&=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2\sin\beta}\end{aligned}\right\}(51)$$

Addirt man Formel 17 und 19 so erhält man (No. 47, XXXIX.)

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha\cdot\cos\beta&=\tfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\\ \text{oder }\cos\alpha&=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2\cos\beta}\end{aligned}\right\}(52)$$

Addirt man die beiden Formeln 16 und 18, so hat man (No. 45, XXXVII. synth)

$$\left.\begin{aligned}\sin\alpha\cdot\cos\beta&=\tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]\\ \text{oder }\sin\alpha&=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2\cos\beta}\end{aligned}\right\}(53)$$

Subtrahirt man Formel 18 von Formel 16, so erhält man (No. 46, XXXVIII.)

$$\left.\begin{aligned}\sin\beta\cdot\cos\alpha&=\tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]\\ \text{oder }\cos\alpha&=\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2\sin\beta}\end{aligned}\right\}(54)$$

Schreibt man in den letzten 4 Formeln

$$\begin{aligned}\gamma&=\alpha+\beta\\ \delta&=\alpha-\beta\end{aligned}$$

so ist $$\alpha=\frac{\gamma+\delta}{2}$$

und $$\beta=\frac{\gamma-\delta}{2}$$

also hat man

Für Formel 51:

$$\cos\delta-\cos\gamma=2\sin\frac{\gamma+\delta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma-\delta}{2} \qquad (55)$$

Für Formel 52:

$$\cos\gamma + \cos\delta = 2\cos\frac{\gamma+\delta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma-\delta}{2} \quad (56)$$

Für Formel 53:

$$\sin\gamma + \sin\delta = 2\sin\frac{\gamma+\delta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma-\delta}{2} \quad (57)$$

Für Formel 54:

$$\sin\gamma - \sin\delta = 2\sin\frac{\gamma-\delta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma+\delta}{2} \quad (58)$$

Diese 4 Formeln stehen No. 49 bis 52, XLI. bis XLIV.

Dividirt man Formel 16 durch Formel 17, so erhält man

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

Dividirt man Zähler und Nenner rechts stehenden Bruchs durch $\cos\alpha\cdot\c$ und reducirt, so erhält man (No. 53, XI

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}$$

Dividirt man Formel 18 durch For 19 und verfährt wie für Formel 59, erhält man (No. 54, XLVI.)

$$tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}$$

Dividirt man Formel 17 durch For 16 und verfährt wie für die vorigen l meln, so erhält man (No. 55, XLVII.

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta} = \frac{\cot\alpha\cdot\cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha}$$

oder $$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha\cdot\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta} \quad (61)$$

Dividirt man Formel 19 durch Formel 18 u. s. w., so erhält man (No. 56, XLVIII.)

$$\cot(\alpha-\beta) = \frac{\cot\alpha\cdot\cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha} \quad (62)$$

Schreibt man

$$tg\,\alpha + tg\,\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$

bringt die Brüche rechts auf gleiche Benennung, also

$$= \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\c}$$

so hat man (No. 57, XLIX.)

$$tg\,\alpha + tg\,\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

Eben so erhält man (No. 58, L)

$$tg\,\alpha - tg\,\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

Schreibt man

$$\cot\alpha + \cot\beta = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\cos\alpha\cdot\sin\beta + \sin\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

so erhält man (No. 59, LI.)

$$\cot\alpha + \cot\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

Desgleichen (No. 60, LII.)

$$\cot\beta - \cot\alpha = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\cos\beta\cdot\sin\alpha - \sin\beta\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

$$\cot\beta - \cot\alpha = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

Multiplicirt man Formel 16 mit Formel 18:

$$\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta) = (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)$$
$$= \sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta = \sin^2\alpha[1-\sin^2\beta] - (1-\sin^2\alpha)s$$

Reducirt man und dividirt durch $\sin(\alpha-\beta)$ so entsteht die Formel (No. 61, LIII.)

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin(\alpha-\beta)} \quad (67)$$

Schreibt man für beide Sinusse im Quadrat $1-\cos^2$, so erhält man reducirt (No. 62, LIV.)

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}{\sin(\alpha-\beta)} \quad (68)$$

Multiplicirt man Formel 17 und 19, so erhält man

$$\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)$$
$$= \cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta - \sin^2\alpha\cdot s$$

Die Sinusse fortgeschafft ergibt die re Seite der Gleichung

$$-1 + \cos^2\alpha + \cos^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2$$

hieraus die Formel (No. 63, LV.)

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}{\cos(\alpha-\beta)}$$

Schreibt man in dieser Formel $1-s$

$\sin^2\beta$, $1-\cos^2\alpha$ für $\sin^2\alpha$, so erhält die Formel (No. 64, LVI.)

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}{\cos(\alpha-\beta)} \quad (70)$$

ividirt man Formel 57 durch Formel 0 erhält man (No. 65, LVII.)

$$tg\,\frac{\gamma+\delta}{2}=\frac{\sin\gamma+\sin\delta}{\cos\gamma+\cos\delta} \quad (71)$$

vidirt man Formel 55 durch Formel 0 erhält man (No. 68, LX.)

$$tg\,\frac{\gamma+\delta}{2}=\frac{\cos\delta-\cos\gamma}{\sin\gamma-\sin\delta} \quad (72)$$

vidirt man Formel 58 durch Formel 0 erhält man (No. 66, LVIII.)

$$tg\,\frac{\gamma-\delta}{2}=\frac{\sin\gamma-\sin\delta}{\cos\gamma+\cos\delta} \quad (73)$$

vidirt man Formel 55 durch Formel 0 erhält man (No. 67, LIX.)

$$tg\,\frac{\gamma-\delta}{2}=\frac{\cos\delta-\cos\gamma}{\sin\gamma+\sin\delta} \quad (74)$$

hreibt man in Formel 16: 2α für α α für β, so hat man

$\alpha=\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha+\cos 2\alpha\cdot\sin\alpha$

rmel 20 und 22 angewendet entsteht:

$=2\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha$

$=2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha$

:h (No. 69)

$=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha \quad (75)$

ıreibt man in Formel 17: 2α für α, β, so hat man

$=\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha-\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha$

Anwendung der Formeln 20 und tsteht (No. 70)

$=(2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha-2\sin^2\alpha\cos\alpha$

$=\cos\alpha\,[2\cos^2\alpha-1-2\sin^2\alpha]$

$=\cos\alpha\,[2\cos^2\alpha-1-2(1-\cos^2\alpha)]=$

$=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha \quad (76)$

Mehrere Formeln für die trigonoıchen Linien finden sich in den spe- ı Artikeln über dieselben. Bis jetzt n diesem Wörterbuche gegeben die Sosinus, Cosinus versus, Coente, Cosecante.

ıonometrische Berechnungen von ı Figuren werden desgleichen in ie betreffenden Artikeln abgehan- Es befinden sich in diesem Wörh bereits die Art.: Dreieck, Fünf- Funfzehneck, Gebrochene).

Es erfolgt hier eine geordnete Taderjenigen trigonometrischen Forwelche in dem Art.: Construcn, trigonometrische synthetisch und in dem vorstehenden Art. analytisch hergeleitet worden sind.

Trigonometrische Formeltafel.

1. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$
2. $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$
3. $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$
4. $tg^2\alpha+\sec^2\alpha=1$
5. $\sec\alpha=\sqrt{1+tg^2\alpha}$
6. $tg\,\alpha=\sqrt{\sec^2\alpha-1}$
7. $\operatorname{cosec}^2\alpha-\cot^2\alpha=1$
8. $\operatorname{cosec}\alpha=\sqrt{1+\cot^2\alpha}$
9. $\cot\alpha=\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}$
10. A. $tg\,\alpha\cdot\cot\alpha=1$

    B. $tg\,\alpha=\dfrac{1}{\cot\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
11. $\cot\alpha=\dfrac{1}{tg\,\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
12. A. $\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$

    B. $\sec\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}$
13. A. $\sin\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha=1$

    B. $\operatorname{cosec}\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha}$
14. $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta$
15. $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta$
16. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$
17. $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$
18. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$
19. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$
20. $\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$
21. $\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
22. $\cos(2\alpha)=1-2\sin^2\alpha$
23. $\cos(2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$
24. $tg\,(2\alpha)=\dfrac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}$
25. $\cot(2\alpha)=\dfrac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}$
26. $\cot(2\alpha)=\dfrac{\cot\alpha-tg\,\alpha}{2}$
27. A. $\sec(2\alpha)=\dfrac{1+tg^2\alpha}{1-tg^2\alpha}=\dfrac{\sec^2\alpha}{2-\sec^2\alpha}$

    B. $\operatorname{cosec}(2\alpha)=\dfrac{\cot\alpha+tg\,\alpha}{2}$
28. $\sin\frac{1}{2}\alpha=\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$
29. $\cos\frac{1}{2}\alpha=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

A. Für α von incl. 0 bis incl. 180° ist

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha=+\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

B. Für α von incl. 180° bis incl. 360° ist

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = -\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

30. $$\sin\frac{90°-\alpha}{2} = \sin\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}}$$

A. Für α von incl. 0 bis incl. 90° ist

$$\sin\frac{90°-\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}}$$

B. Für α von incl. 90° bis incl. 360° ist

$$\sin\frac{90°-\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}}$$

31. $$\cos\frac{90°-\alpha}{2} = \cos\frac{\frac{1}{2}\pi-\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{2}}$$

A. Für α von incl. 0 bis incl. 270° ist

$$\cos\frac{90°-\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{2}}$$

B. Für α von incl. 270° bis incl. 360° ist

$$\cos\frac{90°-\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{2}}$$

32. $$\sin\frac{90°+\alpha}{2} = \sin\frac{\frac{1}{2}\pi+\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{2}}$$

A. Für α von incl. 0 bis incl. 270° ist

$$\sin\frac{90°+\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{2}}$$

B. Für α von incl. 270° bis incl. 360° ist

$$\sin\frac{90°+\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{2}}$$

33. $$\cos\frac{90°+\alpha}{2} = \cos\frac{\frac{1}{2}\pi+\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}}$$

A. Für α von incl. 0 bis incl. 90° ist

$$\cos\frac{90°+\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}}$$

B. Für α von incl. 90° bis incl. 360° ist

$$\cos\frac{90°+\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}}$$

34. $$tg\frac{90°-\alpha}{2} = tg\frac{\frac{1}{2}\pi-\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$$

A. Für α von incl. 0° bis incl. 90° und von incl. 270° bis incl. 360° ist

$$tg\frac{90°-\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$$

B. Für α von incl. 90° bis incl. 270° ist

$$tg\frac{90°-\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$$

35. $$cot\frac{90°-\alpha}{2} = cot\frac{\frac{1}{2}\pi-\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$$

A. Für α von incl. 0 bis incl. 90° und von incl. 270° bis incl. 360° ist

$$cot\frac{90°-\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$$

B. Für α von incl. 90° bis incl. 270°

$$cot\frac{90°-\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$$

36. $$tg\frac{90°+\alpha}{2} = tg\frac{\frac{1}{2}\pi+\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+s}{1-s}}$$

A Für α von incl. 0 bis incl. 90° und von incl. 270° bis incl. 360° ist

$$tg\frac{90°+\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$$

B. Für α von incl. 90° bis incl. 270

$$tg\frac{90°+\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$$

37. $$cot\frac{90°+\alpha}{2} = cot\frac{\frac{1}{2}\pi+\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-}{1+}}$$

A. Für α von incl. 0 bis incl. 90° und von incl. 270° bis incl. 360° ist

$$cot\frac{90°+\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$$

B. Für α von incl. 90° bis incl. 270

$$cot\frac{90°+\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$$

38. $$tg\frac{90°-\alpha}{2} = tg\frac{\frac{1}{2}\pi-\alpha}{2} = \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

39. $$cot\frac{90°-\alpha}{2} = cot\frac{\frac{1}{2}\pi-\alpha}{2} = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

40. $$tg\frac{90°+\alpha}{2} = tg\frac{\frac{1}{2}\pi+\alpha}{2} = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

41. $$cot\frac{90°+\alpha}{2} = cot\frac{\frac{1}{2}\pi+\alpha}{2} = \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

42. $$tg\tfrac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

A. Für α von incl. 0 bis incl. 180°

$$tg\tfrac{1}{2}\alpha = +\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

B. Für α von incl. 180° bis incl. 360°

$$tg\tfrac{1}{2}\alpha = -\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

43. A. $$tg\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

B. $$tg\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

44. $$\sin\tfrac{1}{2}\alpha + \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{1+\sin\alpha}$$

A. Für α von incl. 0 bis incl. 270°

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha + \cos\tfrac{1}{2}\alpha = +\sqrt{1+\sin\alpha}$$

B. Für α von incl. 270° bis incl. 360°

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha + \cos\tfrac{1}{2}\alpha = -\sqrt{1+\sin\alpha}$$

45. $$\cos\tfrac{1}{2}\alpha - \sin\tfrac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{1-\sin\alpha}$$

A. Für α von incl. 0 bis incl. 90°

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha - \sin\tfrac{1}{2}\alpha = +\sqrt{1-\sin\alpha}$$

B. Für α von incl. 90° bis incl. 360° ist
$\cos\frac{1}{2}\alpha - \sin\frac{1}{2}\alpha = -\sqrt{1-\sin\alpha}$

46. $\sin\frac{1}{2}\alpha - \cos\frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{1-\sin\alpha}$

A. Für α von incl. 0 bis incl. 90° ist
$\sin\frac{1}{2}\alpha - \cos\frac{1}{2}\alpha = -\sqrt{1-\sin\alpha}$

B. Für α von incl. 90° bis incl. 360° ist
$\sin\frac{1}{2}\alpha - \cos\frac{1}{2}\alpha = +\sqrt{1-\sin\alpha}$

47. $\sin\frac{1}{2}\alpha = \pm\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}\right]$

A. Für α von incl. 0 bis incl. 90° ist
$\sin\frac{1}{2}\alpha = +\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}\right]$

B. Für α von incl. 90° bis incl. 270° ist die Formel nicht anwendbar

C. Für α von incl. 270° bis incl. 360° ist
$\sin\frac{1}{2}\alpha = -\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}\right]$

48. $\sin\frac{1}{2}\alpha = +\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}\right]$

Diese Formel gilt nur für α von incl. 90° bis incl. 270°.

49. $\cos\frac{1}{2}\alpha = +\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\sin\alpha} - \sqrt{1-\sin\alpha}\right]$

Diese Formel gilt nur für α von incl. 90° bis incl. 270°.

50. $\cos\frac{1}{2}\alpha = \pm\left(\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}\right)$

A. Für α von incl. 0 bis incl. 90° ist
$\cos\frac{1}{2}\alpha = +\left(\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}\right)$

B. Für α von incl. 270° bis incl. 360° ist
$\cos\frac{1}{2}\alpha = -\left(\sqrt{1+\sin\alpha} + \sqrt{1-\sin\alpha}\right)$

Für α von incl. 90° bis incl. 270° ist die Formel ungültig.

1. $\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$
2. $\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$
3. $\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$
4. $\cos\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right]$
5. $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{1}{2}(\cos\beta - \cos\alpha)$
6. $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{1}{2}(\cos\alpha + \cos\beta)$
7. $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{1}{2}(\sin\alpha + \sin\beta)$
8. $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{1}{2}(\sin\alpha - \sin\beta)$

59. $tg(\alpha+\beta) = \dfrac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}$

60. $tg(\alpha-\beta) = \dfrac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}$

61. $cot(\alpha+\beta) = \dfrac{cot\,\alpha\cdot cot\,\beta - 1}{cot\,\alpha + cot\,\beta}$

62. $cot(\alpha-\beta) = \dfrac{cot\,\alpha\cdot cot\,\beta + 1}{cot\,\beta - cot\,\alpha}$

63. $tg\,\alpha + tg\,\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$

64. $tg\,\alpha - tg\,\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$

65. $cot\,\alpha + cot\,\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$

66. $cot\,\beta - cot\,\alpha = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$

67. $\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$

68. $\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$

69. $\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}{\cos(\alpha-\beta)}$

70. $\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}{\cos(\alpha-\beta)}$

71. $tg\,\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$

72. $tg\,\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \dfrac{\cos\beta - \cos\alpha}{\sin\alpha - \sin\beta}$

73. $tg\,\dfrac{\alpha-\beta}{2} = \dfrac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$

74. $tg\,\dfrac{\alpha-\beta}{2} = \dfrac{\cos\beta - \cos\alpha}{\sin\beta + \sin\alpha}$

75. $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

76. $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

21. Sind die Winkel $\alpha+\beta+\gamma = 2$ Rechten, so ergeben sich mehrere interessante Gesetze, von denen folgende sechs die vorzüglichsten sind.

1. 2. $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma = \sin\alpha\cdot\cos\alpha + \sin\beta\cdot\cos\beta + \sin\gamma\cdot\cos\gamma$

Analytischer Beweis.

Formel 16 ist $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$

hierzu $\sin\alpha\cdot\sin\beta = \sin\alpha\cdot\sin\beta$

gibt $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\beta) = \sin^2\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta + \sin^2\beta\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$
$= \sin\beta\cdot\cos\beta\,(1-\cos^2\alpha) + \sin\alpha\cdot\cos\alpha\,(1-\cos^2\beta)$
$= \sin\alpha\cdot\cos\alpha + \sin\beta\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\cos\beta\,(\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta)$

und mit Hülfe von Formel 16:
$\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\alpha + \sin\beta\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin(\alpha+\beta)$

hierzu $\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\beta)$

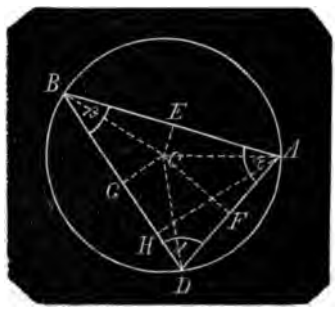
gibt $2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\alpha + \sin\beta\cdot\cos\beta - \sin(\alpha+\beta)\left[\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta\right]$

also nach Formel 18: $= \sin\alpha\cdot\cos\alpha + \sin\beta\cdot\cos\beta - \sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)$

Nun ist wegen $\alpha+\beta=180°-\gamma$; $\sin(\alpha+\beta)=\sin\gamma$ und $\cos(\alpha+\beta)=-\cos\gamma$
daher hat man $2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma=\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin\beta\cdot\cos\beta+\sin\gamma\cdot\cos\gamma$
da $\alpha+\beta+\gamma=180°$, so sind sie die Umfangswinkel eines Dreiecks.

Synthetischer Beweis. Es sei demnach Fig. 672 im $\triangle ABD$ der $\angle A=\alpha$, der $\angle B=\beta$, der $\angle D=\gamma$; beschreibe um dasselbe einen Kreis vom Halbmesser = 1, dessen Mittelpunkt C sei, ziehe die Radien AC, BC und DC von den Ecken des Dreiecks aus, fälle die Lothe CE, CF und CG auf die Seiten des Dreiecks, und fälle auf eine beliebige Seite BD die Höhe AH, so ist

Fig. 672.



$$2\cdot\triangle ABD=BD\cdot CG+AD\cdot CF+AB\cdot CE=BD\cdot AH$$

Nun ist $\angle BCD=2\angle BAD=2\alpha$
und da zugleich $BG=DG$
also auch $\angle BCG=\angle DCG=\frac{1}{2}\angle BCD$
so ist $\angle BCG=\angle DCG=\alpha$

Eben so hat man
$\angle DCF=\angle ACF=\beta$
und $\angle ACE=\angle BCE=\gamma$
folglich
$BD=2\sin\alpha$, $AD=2\sin\beta$ und $AB=2\sin\gamma$
ferner
$CG=\cos\alpha$, $CF=\cos\beta$ und $CE=\cos\gamma$
und da $AH=AD\cdot\sin\gamma=2\sin\beta\cdot\sin\gamma$

so hat man $BD\cdot AH=2\sin\alpha\cdot2\sin\beta\cdot\sin\gamma=4\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$
und $2\triangle ABD=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+2\sin\beta\cdot\cos\beta+2\sin\gamma\cdot\cos\gamma=4\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$
woraus $2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma=\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin\beta\cdot\cos\beta+\sin\gamma\cdot\cos\gamma$

II. $$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$$

Analytischer Beweis.

Es ist $\gamma=180°-(\alpha+\beta)$
daher $\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)$
mithin nach Formel 20

$$\sin\gamma=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Also nach Formel 16 und 18

$$\sin\gamma=2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\right)$$

oder

$$\sin\gamma=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\beta}{2}+2\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}$$
$$-2\sin^2\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$
$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos^2\frac{\beta}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}\right)+2\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

oder

$$\sin\gamma=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\left(2\cos^2\frac{\beta}{2}-1\right)+2\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1\right)$$
$$=4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\beta}{2}+4\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}$$

hierzu $\sin\alpha+\sin\beta=$ $+2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}$

$$+\sin\beta+\sin\gamma=4\left[\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}\right]$$

$$=4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\right)$$

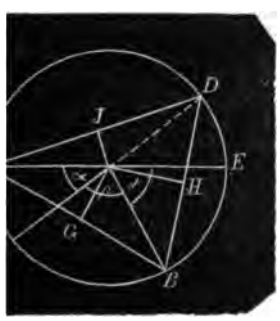
$$=4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

ist $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\left(90^\circ-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\cos\frac{180^\circ-(\alpha+\beta)}{2}=\cos\frac{\gamma}{2}$

man $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$

etischer Beweis. Man zeichne um einen Punkt C die $\angle\alpha = FCB$ und $\gamma = BCE$ neben einiegen die beiden äufseren Schenid EC in einer geraden Linie. nun aus C mit dem Halbl den Kreis $AFBEA$, verlänis in die Peripherie, verbinde D durch Sehnen, so entsteht k ABD; in diesem ist $\angle ADF = \frac{\alpha}{2}$, $\angle BDF = \frac{1}{2}\angle BCF = \frac{1}{2}\beta$,

673.



daher $\angle ADB = \frac{\alpha+\beta}{2}$; eben so ist $\angle BAD = \frac{\alpha+\gamma}{2}$ und $\angle ABD = \frac{\beta+\gamma}{2}$

Fällt man nun die Lothe CJ auf AD, CH auf BD und CG auf AB, so hat man

$2\triangle ABD = AD\cdot CJ + BD\cdot CH + AB\cdot CG$

aber es ist auch $2\triangle ABD = \frac{AD\cdot BD\cdot AB}{2AC}$

daher ist

$$AD\cdot CJ+BD\cdot CH+AB\cdot CG=\frac{AD\cdot BD\cdot AB}{2AC}$$

Nun ist

$$AD = DF\cdot\cos ADF = 2DC\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=2\cos\frac{\alpha}{2}$$

Eben so

$$BD = DF\cdot\cos BDF = 2DC\cdot\cos\frac{\beta}{2}=2\cos\frac{\beta}{2}$$

und

$$AB = AE\cdot\cos BAE = 2AC\cdot\cos\frac{\gamma}{2}=2\cos\frac{\gamma}{2}$$

Ferner ist $CJ = DC\cdot\sin CDJ=\sin\frac{\alpha}{2}$

$$CH = DC\cdot\sin CDH=\sin\frac{\beta}{2}$$

und $CG = AC\cdot\sin CAG=\sin\frac{\gamma}{2}$

daher hat man

$$\sin\frac{\alpha}{2}+2\cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}+2\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos\frac{\beta}{2}\cdot 2\cos\frac{\gamma}{2}}{2}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}+2\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}=4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$$

; Bd. II., pag. 96, No. 16 mit . synthetisch bewiesen, dafs $\sin\alpha = \sin 2\alpha$, daher ist auch $\cos\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha, 2\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}=\sin\beta$

$\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}=\sin\gamma$

, hat man

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$$

III. $tg\,\alpha+tg\,\beta+tg\,\gamma=tg\,\alpha\cdot tg\,\beta\cdot tg\,\gamma$

Analytischer Beweis. Da wieder $\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta)$ so ist $tg\,\gamma=tg\,[180^\circ-(\alpha+\beta)]$; daher nach No. 16 $tg\,\gamma=-tg\,(\alpha+\beta)$ also nach Formel 59 $tg\,\gamma=-\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}$

daher $$tg\alpha + tg\beta + tg\gamma = tg\alpha + tg\beta - \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$$

$$= \frac{tg\alpha + tg\beta - tg\alpha \cdot tg\beta(tg\alpha + tg\beta) - tg\alpha - tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$$

$$= -tg\alpha \cdot tg\beta \cdot \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$$

$$= -tg\alpha \cdot tg\beta \cdot tg(\alpha + \beta)$$

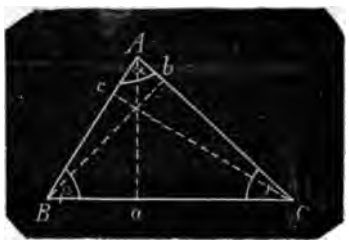
$$= +tg\alpha \cdot tg\beta \cdot tg[180^\circ - (\alpha + \beta)]$$

oder $$tg\alpha + tg\beta + tg\gamma = tg\alpha \cdot tg\beta \cdot tg\gamma$$

Synthetischer Beweis. Es sei Fig. 674 im $\triangle ABC$ der $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ und $\angle C = \gamma$.

Fälle die 3 Höhen Aa, Bb und Cc, die sich nach geometrischen Lehren in einerlei Punkt durchschneiden,

Fig. 674.



so hat man $Bc^2 = Bc(AB - Ac)$

oder $$Bc^2 = Bc \cdot AB - Bc \cdot Ac$$

Nun ist nach geometrischen Lehren
$$AB \cdot Bc = BC \cdot Ba$$

daher auch $$Bc^2 = BC \cdot Ba - Bc \cdot Ac$$

dies von $$BC^2 = BC^2$$

bleibt $$BC^2 - Bc^2 = BC^2 - BC \cdot Ba + Bc$$

oder $$Cc^2 = BC(BC - Ba) + Bc$$

oder I. $$Cc^2 = BC \cdot Ca + Bc \cdot Ac$$

Nun ist
$$\angle BcC = \dot{R} = \angle BaA$$

hierzu $$\angle B = \angle B$$

daher II. $\triangle ABc \sim \triangle BAa$

woher $$Bc : Cc = Ba : Aa$$

mithin $$Aa = Cc \cdot \frac{Ba}{Bc}$$

dies multiplicirt mit
$$Bb = Bb$$

und mit I. $$Cc^2 = BC \cdot Ca + Bc \cdot Ac$$

gibt $$Aa \cdot Bb \cdot Cc^2 = (BC \cdot Ca + Bc \cdot Ac)\, Bb \cdot Cc \cdot \frac{Ba}{Bc}$$

also ist III. $$Aa \cdot Bb \cdot Cc = \frac{BC \cdot Ba \cdot Bb \cdot Ca}{Bc} + Ac \cdot Ba \cdot Bb$$

Aus II. folgt: $$BC : Bc = AB : Ba$$

daher ist $$\frac{BC \cdot Ba}{Bc} = AB = Ac + Bc$$

Man hat also, dies mit III. verbunden:
$$Aa \cdot Bb \cdot Cc = (Ac + Bc)\, Bb \cdot Ca + Ac \cdot Ba \cdot Bb$$

oder IV. $$Aa \cdot Bb \cdot Cc = Ac \cdot Bb \cdot Ca + Bb \cdot Bc \cdot Ca + Ac \cdot Ba \cdot Bb$$

Aus gleichen Gründen wie für II. hat man ferner

$$\triangle ABb \sim \triangle ACc$$

woher $$Ab : Bb = Ac : Cc$$

oder $$Ac \cdot Bb = Ab \cdot Cc$$

mithin ist der 1te Summand in IV.,
$$Ac \cdot Bb \cdot Ca = Ab \cdot Ca \cdot Cc$$

und der 3te Summand in IV.
$$Ac \cdot Ba \cdot Bb = Ab \cdot Ba \cdot Cc$$

Aus der nach II. erhaltenen Pro
$$Bc : Cc = Ba : Aa$$

hat man $$Ba \cdot Cc = Aa \cdot Bc$$

daher entsteht aus dem 3ten Sum
$$Ab \cdot Ba \cdot Cc = Aa \cdot Ab \cdot Bc$$

Diese 2 Werthe in IV. gesetzt,

$$Aa \cdot Bb \cdot Cc = Ab \cdot Ca \cdot Cc + Bb \cdot Bc \cdot Ca + Aa \cdot Ab \cdot Bc$$

Diese Gleichung durch $Ca \cdot Ab \cdot Bc$ dividirt

gibt $$\frac{Aa}{Ca} \cdot \frac{Bb}{Ab} \cdot \frac{Cc}{Bc} = \frac{Cc}{Bc} + \frac{Bb}{Ab} + \frac{Aa}{Ca}$$

oder $$tg\gamma \cdot tg\alpha \cdot tg\beta = tg\beta + tg\alpha + tg\gamma$$

IV. $\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}=\cot\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}\cdot\cot\frac{\gamma}{2}$

Analytischer Beweis.

Es ist $\cot\frac{\gamma}{2}=\cot\frac{180^\circ-(\alpha+\beta)}{2}=\cot\left(90^\circ-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$

also nach Formel 59 $\cot\frac{\gamma}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}$

hierzu $\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}=\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}$

gibt $\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}=\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}$

$$=\frac{\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}$$

Nun ist nach Formel 10: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\alpha}{2}=1=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}$

Daher erhält man nach geschehener Reduction:

$$\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}=\frac{\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}=\frac{\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}}{\left(1-\frac{1}{\cot\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}}\right)}$$

$$=\cot\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}\cdot\frac{\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}}{\cot\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}-1}$$

und nach Formel 61 und 11 $=\frac{\cot\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}}{\cot\frac{\alpha+\beta}{2}}=\cot\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$

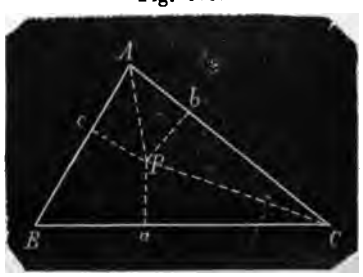
$$=\cot\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}\cdot\cot\left(90^\circ-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$=\cot\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}\cdot\cot\frac{180^\circ-(\alpha+\beta)}{2}$$

oder $\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}$

$$=\cot\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}\cdot\cot\frac{\gamma}{2}$$

Fig. 675.



Synthetischer Beweis. Es sei Fig. 675 im $\triangle ABC$, $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $\angle C=\gamma$, so halbire die Winkel durch die Linien AP, BP und CP, welche nach geometrischen Lehren einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt P haben, und fälle von P aus die Lothe Pc auf AB, Pb auf AC und Pa auf BC, so sind diese 3 Lothe einander gleich.

Nun ist nach geometrischen Lehren

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{4}\sqrt{(AB+AC+BC)(AB+AC-BC)(AB+BC-AC)(AC+BC-}$$

Eben so ist $\triangle ABC = \tfrac{1}{2}AB\cdot cP + \tfrac{1}{2}AC\cdot bP + \tfrac{1}{2}BC\cdot aP = aP\cdot\dfrac{AB+AC+BC}{2}$

Daher hat man

$$aP\cdot\frac{AB+AC+BC}{2} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(AB+AC+BC)(AB+AC-BC)(AB+BC-AC)(AC+BC-}$$

folglich

$$\frac{(aP)^2\cdot(AB+AC+BC)^2}{4} = \tfrac{1}{16}(AB+AC+BC)(AB+AC-BC)(AB+BC-AC)(AC+BC-$$

Diese Gleichung dividirt durch $\dfrac{(aP)^2}{2}(AB+AC+BC)$ gibt

$$\frac{AB+AC+BC}{2aP} = \frac{AB+AC-BC}{2aP}\cdot\frac{AB+BC-AC}{2aP}\cdot\frac{AC+BC-AB}{2aP}$$

Nun ist
$AB = Ac+Bc = Ab+Bc$
$AC = Ab+Cb = Ab+Ca$
$BC = Ca+Ba = Ca+Bc$

daher ist
$$\frac{AB+AC-BC}{2} = Ab$$
$$\frac{AB+BC-AC}{2} = Bc$$
$$\frac{AC+BC-AB}{2} = Ca$$

und $\dfrac{AB+AC+BC}{2} = Ab+Bc+$

Daher hat man diese Werthe in letzte Gleichung gesetzt

$$\frac{Ab+Bc+Ca}{aP} = \frac{Ab}{aP}\cdot\frac{Bc}{aP}\cdot\frac{Ca}{aP}$$

oder $$\frac{Ab}{bP}+\frac{Bc}{cP}+\frac{Ca}{aP} = \frac{Ab}{bP}\cdot\frac{Bc}{cP}\cdot\frac{Ca}{aP}$$

also mit Hülfe der Figur $\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2} = \cot\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}\cdot\cot\frac{\gamma}{2}$

V. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = 1$

Analytischer Beweis.

Es ist $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg}\frac{180^\circ-(\alpha+\beta)}{2} = \operatorname{tg}\left(90^\circ-\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \cot\frac{\alpha+\beta}{2}$

also nach Formel 61 $$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\cot\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}-1}{\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}}$$

daher ist

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)\cdot\frac{\cot\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}-1}{\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}}$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}-\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right.}{\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}}$$

und da nun wieder $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\alpha}{2} = 1 = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}$

$$= \frac{\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\alpha}{2}-\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)}{\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}} = 1-\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}}$$

daher

$$tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\beta}{2}+tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\gamma}{2}+tg\frac{\beta}{2}\cdot tg\frac{\gamma}{2}=1+tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\beta}{2}-\frac{tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}}{cot\frac{\alpha}{2}+cot\frac{\beta}{2}}$$

$$=1+\frac{tg\frac{\alpha}{2}\cdot cot\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\beta}{2}+tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\beta}{2}\cdot cot\frac{\beta}{2}-\left(tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}\right)}{cot\frac{\alpha}{2}+cot\frac{\beta}{2}}$$

$$=1+\frac{tg\frac{\beta}{2}+tg\frac{\alpha}{2}-\left(tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}\right)}{cot\frac{\alpha}{2}+cot\frac{\beta}{2}}=1$$

oder $tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\beta}{2}+tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\gamma}{2}+tg\frac{\beta}{2}\cdot tg\frac{\gamma}{2}=1$

Synthetischer Beweis. Für Fig. 675 hat man nach dem vorigen Satz

$\frac{(aP)^2}{4}(AB+AC+BC)^2=\frac{1}{16}(AB+AC+BC)(AB+AC-BC)(AB+BC-AC)(AC+BC-AB)$

mithin $4(aP)^2(AB+AC+BC)=(AB+AC-BC)(AB+BC-AC)(AC+BC-AB)$

und $4(aP)^2\cdot\frac{AB+AC+BC}{(AB+AC-BC)(AB+BC-AC)(AC+BC-AB)}=1$

Nun ist $AB+AC+BC=2AB-AB+2AC-AC+2BC-BC$

$=(AB+AC-BC)+(AB+BC-AC)+(AC+BC-AB)$

daher ist $4aP^2\cdot\frac{(AB+AC-BC)+(AB+BC-AC)+(AC+BC-AB)}{(AB+AC-BC)\cdot(AB+BC-AC)\cdot(AC+BC-AB)}=1$

Nun ist nach IV. ebenfalls $\frac{AB+AC-BC}{2}=Ab$, daher $AB+AC-BC=2Ab$

eben so $AB+BC-AC=2Bc$, und $AC+BC-AC=2Ca$

daher ist $4aP^2\cdot\frac{2Ab+2BC+2CA}{2Ab\cdot 2Bc\cdot 2Ca}=1$

oder $aP^2\cdot\frac{Ab+Bc+Ca}{Ab\cdot Bc\cdot Ca}=1$

oder $aP^2\cdot\frac{Ab}{Ab\cdot Bc\cdot Ca}+aP^2\cdot\frac{Bc}{Ab\cdot Bc\cdot Ca}+aP^2\cdot\frac{Ca}{Ab\cdot Bc\cdot Ca}=1$

oder $\frac{aP^2}{Bc\cdot Ca}+\frac{aP^2}{Ab\cdot Ca}+\frac{aP^2}{Ab\cdot Bc}=1$

Nun ist $aP=bP=cP$, $Bc=Ba$, $Ca=Cb$, $Ab=Ac$

daher hat man $\frac{aP}{Ba}\cdot\frac{aP}{Ca}+\frac{bP}{Ab}\cdot\frac{bP}{Cb}+\frac{cP}{Ac}\cdot\frac{cP}{Bc}=1$

oder mit Hülfe der Figur $tg\frac{\beta}{2}\cdot tg\frac{\gamma}{2}+tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\gamma}{2}+tg\frac{\alpha}{2}\cdot tg\frac{\beta}{2}=1$

VI. $cot\alpha\cdot cot\beta+cot\alpha\cdot cot\gamma+cot\beta\cdot cot\gamma=1$

Analytischer Beweis. Es ist $cot\gamma=cot[180^\circ-(\alpha+\beta)]=-cot(\alpha+\beta)$

also nach Formel 61 $cot\gamma=-\frac{cot\alpha\cdot cot\beta-1}{cot\alpha+cot\beta}=\frac{1-cot\alpha\cdot cot\beta}{cot\alpha+cot\beta}$

daher ist $cot\alpha\cdot cot\gamma+cot\beta\cdot cot\gamma=(cot\alpha+cot\beta)\cdot\frac{1-cot\alpha\cdot cot\beta}{cot\alpha+cot\beta}=1-cot\alpha\cdot cot\beta$

folglich $cot\alpha\cdot cot\beta+cot\alpha\cdot cot\gamma+cot\beta\cdot cot\gamma=1$

Synthetischer Beweis. Für Fig. 674 hat man

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot Ac$$

woraus $$Ac=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB}$$

Nun ist $Cc^2 = AC^2 - Ac^2$ also $= AC^2 - \left(\frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB}\right)^2$

daher $4AB^2 \cdot Cc^2 = 4AB^2 \cdot AC^2 - (AB^2 + AC^2 - BC^2)^2$

Ferner ist $\triangle ABC = \frac{AB \cdot Cc}{2}$

daher $(\triangle ABC)^2 = \frac{AB^2 \cdot Cc^2}{4}$

und $(4\triangle ABC)^2 = 4AB^2 \cdot Cc^2$

folglich ist $(4\triangle ABC) = 4AB^2 \cdot AC^2 - (AB^2 + AC^2 - BC^2)^2$

$= 2AB^2 \cdot AC^2 + 2AB^2 \cdot BC^2 + 2AC^2 \cdot BC^2 - AB^4 - AC^4 - BC^4$

oder $(4\triangle ABC)^2 = AB^4 + AC^4 + BC^4 + (-AB^4 - AC^4 + 2AB^2 \cdot AC^2)$

$+ (-AB^4 - BC^4 + 2AB^2 \cdot BC^2) + (-AC^4 - BC^4 + 2AC \cdot BC)$

$= AB^4 - (AC^2 - BC^2)^2 + AC^4 - (AB^2 - BC^2)^2 + BC^4 - (AB^2 - AC^2)^2$

oder I. $(4\triangle ABC)^2 = (AB^2 + AC^2 - BC^2) \cdot (AB^2 + BC^2 - AC^2)$

$+ (AC^2 + AB^2 - BC^2) \cdot (AC^2 + BC^2 - AB^2) + (BC^2 + AB^2 - AC^2) \cdot (BC^2 + AC^2 - AB^2)$

Nun war $Ac = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB}$

Eben so ist $Bc = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB}$

daher $\frac{(AB^2 + AB^2 - BC^2) \cdot (AB^2 + BC^2 - AC^2)}{4AB^2} = Ac \cdot Bc$

oder $(AB^2 + AC^2 - BC^2) \cdot (AB^2 + BC^2 - AC^2) = 4AB^2 \cdot Ac \cdot Bc$

Nun war $(4\triangle ABC)^2 = 4AB^2 \cdot Cc^2$

hieraus $4AB^2 = \frac{(4\triangle ABC)^2}{Cc^2}$

Daher ist $(AB^2 + AC^2 - BC^2) \cdot (AB^2 + BC^2 - AC^2) = (4\triangle ABC)^2 \cdot \frac{Ac \cdot Bc}{Cc \cdot Cc}$

ebenso ist $(AC^2 + AB^2 - BC^2) \cdot (AC^2 + BC^2 - AB^2) = (4\triangle ABC)^2 \cdot \frac{Ab \cdot Cb}{Bb \cdot Bb}$

und $(BC^2 + AB^2 - AC^2) \cdot (BC^2 + AC^2 - AB^2) = (4\triangle ABC)^2 \cdot \frac{Ba \cdot Ca}{Aa \cdot Aa}$

Daher durch Addition und mit Hülfe von I.

$$(4\triangle ABC)^2 \cdot \left(\frac{Ac}{Cc} \cdot \frac{Bc}{Cc} + \frac{Ab}{Bb} \cdot \frac{Cb}{Bb} + \frac{Ba}{Aa} \cdot \frac{Ca}{Aa}\right) = (4\triangle ABC)^2$$

oder $$\frac{Ac}{Cc} \cdot \frac{Bc}{Cc} + \frac{Ab \cdot Cb}{Bb \cdot Bb} + \frac{Ba}{Aa} \cdot \frac{Ca}{Aa} = 1$$

oder mit Hülfe der Figur

$$\cot\alpha \cdot \cot\beta + \cot\alpha \cdot \cot\gamma + \cot\beta \cdot \cot\gamma = 1$$

Goniometrische Functionen oder **trigonometrische Functionen** sind die trigonometrischen Linien, Sinus, Cosinus u. s. w.

Grad von dem lateinischen Wort gradus (Schritt, Stufe, Ehrenstelle), welches übrigens arabischen Ursprungs ist. Wie der Schritt der Theil eines Weges ist, so ist der Grad der Theil eines Kreisumfangs, bei den Thermometern, den Aräometern ein Theil ihres Fundamentalabstandes Als Rangordnung bezeichnet Grad auch in der Mathematik die höhere oder niedere Ordnung, nämlich von Gleichungen, je nachdem die Unbekannte in einer höheren oder niederen Potenz erscheint; von Reihen, je nachdem die Anzahl der Differenzenreihen ist, welche das Fortschreiten der Glieder bestimmt.

Der Kreisumfang wird in 360 gleich grofse Theile getheilt, welche Grade heifsen. Zweckmäfsiger wäre eine Centesimaltheilung, so dafs die Untertheile in Decimalen ausgedrückt werden können. Allein die Zahl 360 für die Anzahl der

uralt und rührt von den Astro-
r, welche damals das Jahr zu
n rechneten und somit die
n 360 Theile theilten, von wel-
jeder Theil einen Tag bezeich-

nzosen, welche seit ihrer ersten
n alles decimiren, haben es auch
Kreise gethan, und zwar mit
rant, den sie in 100 Grade theil-
ad wurde = 100 Minuten, 1 Mi-
00 Secunden u. s. w. gesetzt.
ɔt der grofsen Zweckmäfsigkeit
cimaltheilung hat sie sich nicht
alten.

ler 360 Grade (360°) wird in 60
'60'), jede Minute in 60 Secun-
, diese in 60 Terzien (60''') ge-

ch hat der Kreisumfang
360 Grade; $log = 2{,}556\,3025$
600 Minuten; $log = 4{,}334\,4538$
00 Secunden; $log = 6{,}112\,6050$
albmesser eines Kreises hat an

,29578 Grade; $log = 1{,}758\,1226$
'468 Minuten; $log = 3{,}536\,2739$
4,8 Secunden; $log = 5{,}314\,4251$
gleichen Kreisbogen auch gleiche
ikel gehören, so wird mit der
ng des Kreisumfangs in 360
der zu ihm gehörende Centri-
n einer Gröfse von 4 rechten
in ebenfalls 360 Grade getheilt,
Quadrant in 90 Grade. Der Um-
Bogengrade, Bogenminuten, Bo-
den; der Centriwinkel hat Win-
Winkelminuten, Winkelsecun-

) zu gleichen Centriwinkeln ge-
Kreisbogen in Länge wie die
ser des Kreises sich verhalten,
n die Längen der Bogen für den
ser = 1 als abstracte Zahlen an-
eben so die zu den Bogen ge-
trigonometrischen Linien. Nur
n Logarithmen wird ein Halb-
von 10000 000000 (10 tausend
) zu Grunde gelegt, um die ihnen
kommende subtractive Characte-
vermeiden, welche stillschwei-
- 10 festgesetzt ist.

reisumfang $= 2\pi$ correspondirt
(Winkelgrad)
albkreis $= \pi$ mit 180°
uadrant $= \frac{1}{2}\pi$ mit 90°
ngrad $= \frac{1}{180}\pi$ mit 1°
iptischen Umfänge werden gleich-

falls in 360° getheilt, und zwar von dem Mittelpunkt aus in 360 gleiche Winkelgrade, so dafs die Bogengrade ungleiche Längen erhalten.

Alle Parallelkreise der Erdoberfläche vom Aequator bis zu den Polen, alle Meridiane werden in 360 Grade getheilt. Erstere geben die Längengrade, letztere die Breitengrade (s. d.)

Gradbogen ist ein in Graden angegebener Kreisbogen, dessen Länge bei Vermessungen und Berechnungen in Theilen des Halbmessers ausgedrückt werden mufs. Bezeichnet man diesen in Winkelgraden gegebenen Bogen mit α, so hat man die Länge x des Bogens aus der Proportion:

$$360° : 2\pi r = \alpha° : x$$

woraus $x = 2\pi r \frac{\alpha°}{360°} = \pi r \frac{\alpha°}{180°}$

und in Logarithmen

$$log\, x = log\left(\frac{\pi}{180} \cdot r\alpha\right)$$

Es ist $log\, \pi = 0{,}497\,1499$

$log\, 180 = 2{,}255\,2725$

mithin $log \frac{\pi}{180} = 0{,}241\,8474 - 2$

und $log\, x = 0{,}2418474 - 2 + log\,(r\alpha)$

Tabellen der Längen der Gradbogen von 1° bis 360°, von 1′ bis 60′ und von 1″ bis 60″ finden sich in den gröfseren logarithmischen Tafeln; u. a. in den Werken: Sammlung mathematischer Tafeln... von Georg Freiherrn von Vega, herausgegeben von Dr. J. A. Hülsse, Leipzig 1849 und in: Georgs Freih. v. Vega Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch, bearbeitet von Dr. C. Bremiker, Berlin 1859.

Gradeintheilung. Diese (s. den Art. Grad) betrifft die Eintheilung der Vollkreise von Winkelmefsinstrumenten, und man hat es in der Technik für die Anfertigung correcter Theilmaschinen zu einer sehr bedeutenden Höhe gebracht. Früher, wo dies noch nicht der Fall war, hatte man neben der üblichen Eintheilung in 360°, oder vielmehr bei Eintheilung von Quadranten in 90°, zur Correction noch eine Eintheilung in 96°, weil man den Quadrant mit der Länge des Halbmessers als Sehne genau in 3 gleiche Theile theilen konnte und aufserdem, da die Zahl 96 durch wiederholte geometrisch auszuführende Halbirungen in kleinere Theile zu bringen ist, vorausgesetzt, dafs diese Theile correcter ausfallen als die der Zahl 90: Mit einer Correctionstabelle wurden die neunziger

und die sechsundneunziger Grade auf einander reducirt und man hatte durch die zweifachen Zahlen bei derselben Vermessung eine Prüfung für den Grad der Genauigkeit.

Gradlängen. Diese sind nur auf der Kugeloberfläche in den verschiedenen Parallelkreisen verschieden; so auf unserer Erdoberfläche die Längengrade in den verschiedenen geographischen Breiten. In dem Aequator enthielt jeder Grad 15 geographische Meilen. In einem Parallelkreise von φ Grad nördlicher oder südlicher geographischer Breite verhält sich der Halbmesser und also auch die Länge eines Grades zu dem des Aequators wie $\cos\varphi : 1$. Unter der Voraussetzung also, dafs die Meridiane richtige Kreislinien sind, hat man den Längengrad unter φ Grad Breite $= 15 \cdot \cos\varphi$ geogr. Meilen, den Umfang des Parallelkreises $= 5400 \cos\varphi$ geogr Ml.

Einen interessanten Vergleich zwischen Breiten- und Längengraden gibt Muncke für einerlei geographiche Breite.

Breite.	Grade im Meridian. Geogr. Meilen.	Grade im Parallelkreis. Geogr. Meilen.
0°	14,8999	15,0000
10°	14,9044	14,7736
20°	14,9174	14,1009
30°	14,9373	13,0012
40°	14,9617	11,5065
45°	14,9748	10,6243
50°	14,9878	9,6608
60°	15,0125	7,5188
70°	15,0326	5,1455
80°	15,0457	2,6132
90°	15,0468	0,0000

Gradmessung. Hierunter versteht man die Ermittelung der Länge eines Kreisbogens unserer Erdoberfläche, dessen Endpunkte mit dem Erdmittelpunkt den Winkel von einem Grade bilden. Man mifst Längengrade und Breitengrade. Multiplicirt man die für einen Grad gefundene Länge mit 360, so hat man bei gemessenem Breitengrade die Länge des Erdumfangs in der Meridianebene, welche beide Erdpole durchschneidet, und bei gemessenem Längengrade die Umfangslänge eines Parallelkreises oder des Aequators, in welchem man gemessen hat.

Die wirkliche Vermessung durch Maafsstäbe und Winkelinstrumente erfordert für Längen- und Breitengrad-Vermessungen dieselben Operationen, und bei keiner von beiden finden mehr oder weniger Schwierigkeiten statt.

Dagegen ist die Ermittelung centriwinkels aus der wirklich nen Länge für Linien in den kreisen sehr schwierig oder viel sicher, während sie bei den Mer gen möglichst correct geschieht.

Es liegt dies darin, dafs bei d ten gegebenen Meridianbogen messung der Winkel, welche d in den Endpunkten des vermess gens mit Fixsternen bilden, den triwinkel zwischen denselben End eben so genau ergeben, als die messung selbst geschehen ist; d bei der Längengradvermessung differenz es ist, welche bei der tion von Fixsternen in dem e dem anderen Endpunkt sich erg der der Erdcentriwinkel allein ist, und die nur mit Hülfe eine stimmt werden kann. Nun d Erde sich in 24 Stunden einm ständig um, im Aequator repri also 24 Stunden genau 5400 ge len, daher repräsentirt eine Zei 0,0625 geogr. Meilen = 123,13 Ruthen; bei einem Bogen v Grade würde daher eine Unri von nur einer viertel Secunde i obachtung schon eine Unrichtig 34 Ruthen geben, um welche gengrad zu grofs oder zu klein wird.

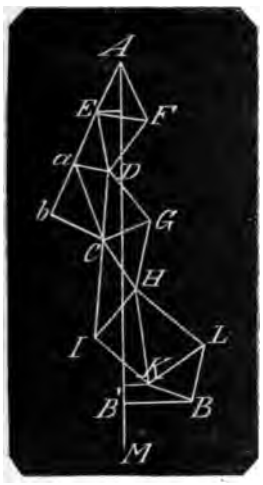
Aus diesem Grunde sind a wenige Längengradvermessunge nommen worden und sie sind a und weniger unzuverlässig.

Die Vermessung geschieht nu der Art.

Es sei A ein durch Natur od ausgezeichneter Punkt, z. B. e Berg, auf den ein Signal zu erri oder eine Sternwarte; B ein zwe gezeichneter Punkt, mehrere Gr fernt von A und in der Nähe ridians AM von A gelegen. A möglichst ebenen, mit keinen nissen als Bäume, Häuser, Bä sehenen Terrain messe man mit keit eine lange gerade Linie ab, einen oder mehrere feste Punkte, a und b aus zugleich gesehen z. B. die Punkte C und D, m Winkel Cab, Cba, Dab, Dba, trigonometrisch die Dreiecksse bC, aD, bD. Suche nun eine Punkt E, der von a und von D gesehen wird, messe die Wink EDa, berechne trigonometrisch eckseiten aE, DE; suche eine F, der von E und D zugleich

d, messe die Winkel an *D* und *E*, chne die Seiten *EF*, *DF*. Gesetzt Endpunkt *A* der Vermessung würde E und von *F* aus gesehen, so sind ch die Vermessung der Winkel bei und *F* auch die Seiten *EA* und *FA* eben, und da nun sämmtliche Punkte , *D*, *E*, *F*, *A* fest liegen, so ist auch gerade Linie *DC* zu bestimmen.

Fig. 676.



Ein ähnliches Dreiecksnetz sei von *ab* mit dem zweiten Endpunkt *B* verden, so sind die Lagen der Punkte und *B* mit den Zwischenpunkten vollmen bestimmt und durch rechtwink- Ordinaten von *E*, *F*, *a*, *D*, *C*, *G*, *H*, *K* und *B* auf *AM* ergeben sich die jectionen der Linien *AF*, *AE*, *ED*, ,... bis *LB* auf den Meridian und mit die Länge *AB'* des Meridian-Abades der Endpunkte *A* und *B* in dem ades-Längenmaafs. Auf astronomische ise kann aber die Länge dieses Meribogens genau gefunden werden, wenn in *A* und *B* Winkelinstrumente stellt, Fixsterne während ihrer Culmiion beobachtet und den Winkel mifst, der Stern mit dem Bleiloth bildet. ie Hauptlinie *ab*, die Basis der Versung, mufs möglichst lang sein, da die beim Trianguliren nie ganz zu meidenden kleinen Fehler auf grofse gen sich vertheilen. Die bei der von mbre und Mechain ausgeführten franchen Gradmessung betrug die eine Perpignan gemessene Basis 6006 Toi- also etwa 1,6 preufsische Meilen; eine zweite am Nordende der Linie vermessene Basis bei Melun 6076 Toisen, gegen 2 Meilen lang. Eben so werden aus demselben Grunde die Seiten der Hauptdreiecke 5 Meilen und darüber, so weit das Auge nämlich reicht, genommen. Bei den Terrainschwierigkeiten, welche man selbst in den ebensten Gegenden findet, kann man selten eine Basis über eine **Meile lang zu erhalten erwarten.**

Die **Hauptaufgabe ist die Vermessung** der **Basis, und da diese äufserst genau geschehen mufs, so werden dazu metallene** und **genau eingetheilte Maafsstäbe** genommen, **die für eine mittlere aber ganz bestimmte Temperatur geaicht sind. Während der Vermessung von Morgens** bis Abends **wird in bestimmten Zeitintervallen die Lufttemperatur am Thermometer beobachtet und registrirt, so dafs** nach beendeter Vermessung **alle stattgehabten** Temperaturen durch Rechnung auf eine stattgehabte mittlere reducirt und mit Hülfe des bekannten Wärmeausdehnungs-Coefficient die durch Messung gefundene Länge bei der stattgehabten mittleren Temperatur auf die der Normaltemperatur zugehörige Länge berechnet wird.

Zu der oben gedachten französischen Gradmessung wurden Maafsstäbe aus einer Mischung von Kupfer und Platin angewendet. Beim Anlegen eines Maafsstabs bei Fortsetzung der Vermessung liefs man um einen Rückstofs gegen den ersten Maafsstab zu vermeiden, einen kleinen Spielraum zwischen beiden Stäben, der mit einem kleinen mit feiner Theilung versehenen Maafsstab besonders vermessen und notirt wurde.

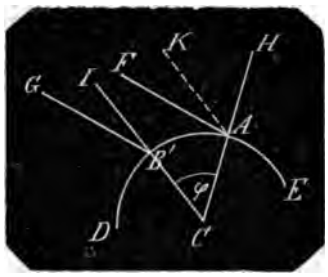
Die Vermessung der Winkel geschah bei der französischen Vermessung mit dem Bordaschen Kreis, s. d. Jetzt würde man den seitdem erfundenen Theodoliten anwenden.

Wie nun nach beendeter Vermessung und Berechnung der wirklichen Länge *AB'*, nämlich der Breitendifferenz zwischen den Punkten *A* und *B*, ermittelt wird, welchen Theil des Meridianumfanges der Bogen *AB'* beträgt, erhellt aus Fig. 677.

Es sei *C* der Mittelpunkt der Erde, *A*, *B'* seien die beiden Endpunkte des in dem Meridian *EAB'D* vermessenen Bogens, *AH* und *B'J* die in den Punkten *A* und *B'* durch ein Bleiloth bezeichneten nach dem Mittelpunkt *C* der Erde gerichteten Lothe. Ein Fixstern, welcher in dem Augenblick seiner Culmination in *A* beobachtet wird, stehe in der Richtung *AF*, derselbe Fixstern bei seiner

Culmination in B' beobachtet, stehe in der Richtung $B'G$, so sind mit dem Instrument die Winkel HAF und $JB'G$ gemessen. Da nun der Fixstern unermeſslich weit von der Erde entfernt ist, so sind die Linien AF und $B'G$ parallel.

Fig. 677.



Nun ist, wenn man durch A mit $B'J$ die Parallele AK zieht

$\angle JB'G = \angle KAF$

$\angle KAH = \angle JCH = \angle \varphi$

$\angle HAF = \angle KAH + \angle KAF = \angle \varphi + \angle JB'G$

hieraus $\angle \varphi = \angle HAF - \angle JB'G$

Man hat also in der Differenz der beiden in A und B' mit demselben Fixstern gemessenen Winkel, welche die Zenithdistanzen des Fixsterns sind, den Erdcentriwinkel φ gefunden.

Bezeichnet nun b die gemessene Bogenlänge AB', r den Halbmesser der Erde, φ den gefundenen Centriwinkel, so hat man

$$b : 2\pi r = \varphi^\circ : 360^\circ$$

woraus der Halbmesser der Erde

$$r = \frac{b}{2\pi} \cdot \frac{360^\circ}{\varphi^\circ}$$

und die Länge eines Meridiangrades

$$= \frac{2\pi r}{360^\circ} = \frac{b}{\varphi^\circ}$$

Gradzeichen ist eine kleine Null oben rechts an der Zahl als Anzahl der Grade: 20° heiſst 20 Grad.

Granatoeder (Kryst.) s. Dodekaeder, Bd. II., pag. 319.

Gravitation oder Schwere ist gleichbedeutend mit Attraction und ist in diesem Art. abgehandelt. Eine Anwendung der Lehre von den Gravitationsgesetzen ist der Art. Abplattung der Erde. In Beziehung auf die Bewegung der Planeten und Kometen um die Sonne, der Monde um die Planeten gibt der Art. „Bahn“ die mit bildlichen Darstellungen unterstützte Erklärung von den Gesetzen der Bewegung einer Masse, die durch 2 Kräfte, nämlich durch die Kraft der Gravitation, die Centralkraft und die Centrifugalkraft, getrieben wird und in Fig. 166 sämmtliche Thätigkeiten und deren Wirkungen zu einem vollständigen Umlauf eines Weltkörpers um einen anderen.

Ferner in dem Art.: „Bahn einer Masse, welche durch die allein thätige Schwerkraft eines Weltkörpers bewegt wird,“ die Bewegung einer Masse unabhängig von einer Seitenkraft mit einem Beispiel über die Zeit, in welcher der Mond auf die Erde fallen würde und dessen pendulirende Bewegung, wenn er durch die Erde hindurch fallen könnte. Hierauf folgt der Art.: „Bahn der Weltkörper“ in allgemeiner Untersuchung und „Bahn der Weltkörper, Ellipse“ mit der als Beispiel berechneten Jupiterbahn. Auch die Art. „Centralbewegung“ und „Centralkräfte“ sind Beiträge zur Kenntniſs des Sonnensystems.

Gravitationspunkt, Centralpunkt, Mittelpunkt des anziehenden Weltkörpers, der als der Schwerpunkt des Körpers auch als der Sammelpunkt, als der Sitz des gesammten Gravitationsvermögens angesehen werden kann.

Grenze ist das Aeuſsere einer Gröſse, so daſs die Grenze zu der Gröſse selbst nicht gehört, daſs sie keinen Theil der Gröſse ausmacht. Von einer Linie sind deren Endpunkte die Grenzen; eine geschlossene Linie, ein Kreis, eine Ellipse kann als 2 Linien betrachtet werden, die mit ihren Grenzen zusammentreffen und sich decken, so daſs diese verschwinden. Von einer Fläche ist die Grenze deren Umfang. Eine geschlossene Fläche z. B. eine Kugeloberfläche kann als 2 Flächen betrachtet werden, deren Umfänge zusammenfallen und dadurch verschwinden. Von einem Körper ist dessen Oberfläche die Grenze.

Jede geometrische oder Raumgröſse hat die Grenze zu ihrem Merkmal, zu ihrem Character; Raumgröſsen ohne Grenzen gibt es nicht, sie sind unbegrenzte Räume, die nach einer, nach 2 und nach allen 3 Richtungen unbegrenzt sein können.

Zahlen sind Gedankengröſsen und haben ihre Grenze in sich selbst, in ihrer Quantität, in der Anzahl der Einheiten, welche die Zahl begreift.

Bei einer veränderlichen Gröſse ist Grenze dasjenige Aeuſsere der Gröſse bis zu welchem sie sich ausdehnen oder

ich einschränken, bis zu welchem sie ntweder wachsen oder abnehmen kann: in in einen Kreis beschriebenes regelläfsiges Vieleck wird mit der Vermehung der Seitenzahl an Inhalt und Umng immer gröfser, dagegen bildet der mfang des Kreises die Grenze des Wachsbums, die Gröfsen der Kreislinie und der reisfläche sind die Grenzwerthe für en Umfang und den Inhalt des mögch gröfsten Vielecks.

Ein um einen Kreis beschriebenes reelmäfsiges Vieleck wird mit der Verehrung der Seitenanzahl an Umfang nd Inhalt immer geringer, dagegen bilet die Kreislinie die Grenze der Abahme und die Gröfsen der Kreislinie nd der Kreisebene sind die Grenzwerthe für den Umfang und den Inhalt es möglich kleinsten Vielecks.

Bei einer zunehmenden arithmetischen der geometrischen Reihe ist die Grenze las unendlich grofse Glied, der Grenzwerth des letzten Gliedes und der Summe ler Reihe ist ∞.

Bei einer abnehmenden arithmetischen Reihe ist die Grenze das negativ unendlich grofse Glied, bei einer abnehmenden geometrischen Reihe ist die Grenze 0. Der Grenzwerth des letzten Gliedes $=0$, der der Summe der Reihe eine bestimmte in einer Formel gegebene Zahl (s. geometrische Reihe).

Grenze eines Verhältnisses, Grenzverhältnifs zweier veränderlichen Gröfsen ist dasjenige Verhältnifs, dem sich mit dem Wachsthum oder der Abnahme der Gröfsen deren Verhältnifs immer mehr nähert. Es ist dies jedesmal das Differenzialverhältnifs, der Differenzialquotient. Z. B. Es sei

$$ay - bx = c$$

so ist $a\,\partial y - b\,\partial x = 0$

woraus $$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{b}{a}$$

Man erhält dies elementar, wenn man die Gleichung durch ax dividirt, dann entsteht

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a} + \frac{c}{ax}$$

Man kann also mit beliebigem Wachsthum von x und in dem durch die Gleichung gegebenen Verhältnifs von y den Quotient $\frac{y}{x}$ oder das Verhältnifs von $y:x$ dem Verhältnifs $b:a$ beliebig nahe bringen und demnach ist $\frac{b}{a}$ das Grenzverhältnifs von $y:x$.

Grenzverhältnifs, s. u. Grenze und Analysis.

Grenzwerth, s. u. Grenze und Analysis.

Grenzwinkel (Dioptr.) s. Ablenkung des Lichtstrahls 1, am Schlufs.

Gröfse wird vielfach erklärt als Dasjenige, welches sich vermehren und vermindern läfst. Gröfse ist also ein Vielfaches, das aus mehreren Theilen zusammengesetzt ist. Man unterscheidet Gröfse als Quantum und Gröfse als Quantitas. Quantum ist Gröfse an sich, Quantitas ist die Gröfse des Quantums, die Menge der Theile, aus denen das Quantum zusammengesetzt ist.

Man unterscheidet ferner zwei Hauptklassen von Gröfsen: 1, die zusammenhangenden, stetigen, fliefsenden, continuirlichen Gröfsen, die Gröfsen im Raum, deren einzelne Theile ununterbrochen zusammenhangen, in einander fliefsen und 2, die nicht zusammenhangenden, unterbrochenen, discreten, collectiven Gröfsen, die zählbaren Gröfsen, die Vielheiten in gegebener Anzahl bestimmter Einheiten.

Die ersteren sind die geometrischen Gröfsen, die letzteren die arithmetischen Gröfsen.

Mit diesen Gröfsen nun beschäftigt sich die Mathematik, die arithmetischen Gröfsen vergleicht sie in der Anzahl ihrer Einheiten, die geometrischen in ihrer Ausdehnung, Form und Lage.

Was mit einander verglichen werden soll mufs gleichartig sein, d. h. es mufs zu einem Ganzen zusammengefafst, addirt werden können, Linien sind mit Flächen nicht zu vergleichen. Aus diesem Grunde mufs jede Gröfse aus lauter gleichartigen Theilen zusammengesetzt sein. Gleichartige arithmetische Gröfsen heifsen commensurabel (s. d.) ungleichartige incommensurabel. Letztere haben keine gemeinschaftliche Einheit, von welcher beide Vielheiten sind, z. B. 3 und $\sqrt{2}$. Brüche von ungleichen Nennern sind incommensurabel, weil sie nicht mit einander zu einem einzigen Bruch addirt werden können, sie werden aber commensurabel dadurch, dafs man ihnen einen gemeinschaftlichen Nenner verschafft. Brüche mit ungleichen Nennern sind also nur der Form nach incommensurabel. Die Zahlen 4 und $\sqrt{2}$ sind incommensurabel, denn wenngleich $4 = \sqrt{16} = \sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$ und beide Zahlen die gleiche Einheit $\sqrt{2}$ haben, so sind doch in der Summe $4+\sqrt{2}$

$= (\sqrt{8}+1)\sqrt{2}$ die Zahlen des ersten Factors nicht zu addiren.

Geometrische Gröfsen werden behufs des Calcüls oft als discrete Gröfsen behandelt, dann sind die Hypotenuse und die Catheten eines rechtwinkligen und zugleich gleichschenkligen Dreiecks incommensurabel. Denn ist die Cathete $= a$, so ist die Hypotenuse $= a\sqrt{2}$.

Arithmetische Gröfsen, welche weder die Eins noch einen aliquoten Theil von Eins zur Einheit haben, heifsen irrationale Gröfsen im Gegensatz zu den rationalen, welche bestimmte Vielfache der Eins oder eines aliquoten Theils der Eins sind.

Gröfsen, welche ermittelt werden sollen, heifsen unbekannte Gröfsen; Gröfsen, die gegeben werden, um unbekannte Gröfsen zu finden, heifsen bekannte Gröfsen.

Gröfsen, die eine bestimmte Anzahl von gleichartigen Theilen ausmachen, heifsen endliche Gröfsen; Gröfsen, bei denen die Anzahl gleichartiger Theile in ihr durch keine noch so grofse Zahl angegeben werden kann, heifsen unendliche Gröfsen.

Eine der merkwürdigsten Beziehungen, in welchen gleichartige Gröfsen mit einander stehen, ist die Entgegengesetztheit. S. darüber den Art.: Entgegengesetzte Gröfsen.

Eine der merkwürdigsten und interessantesten Gröfsen ist die Winkelgröfse, welche in der Neigung oder Abweichung zweier in einem Punkt zusammentreffenden geraden Linien besteht, und die auch als Gröfse nur dadurch zur Erscheinung kommt, dafs der Winkel durch einen von dem Scheitelpunkt als Mittelpunkt aus zwischen beide Schenkel gezeichneten Kreisbogen in seinem Verhältnifs zum Kreisumfang gemessen wird.

Endlich ist noch der Zeitgröfse als einer ganz eigenthümlichen Gröfse Erwähnung zu thun. Sie ist eine continuirliche Gröfse, eine unsichtbare Linie, die auf einer Seite ohne Ende, nämlich in der Vergangenheit ohne Anfang ist, die in jedem Augenblick einen ganz bestimmten Endpunkt, die Gegenwart hat und ohne Mitwirkung einer Gröfse anderer Art über diesen Endpunkt hinaus sich stetig verlängert.

Gröfsenlehre, die Lehre von den Gröfsen, die Mathematik.

Gröfstes und Kleinstes oder gröfster und kleinster Werth einer Function ist an sich klar; und um den einen oder den andern zu finden lehrt die „Differenzialrechnung“, III., pag. 298, den dafür entsprechenden Werth der Veränderlichen bestimmen, von welcher die Function abhängig ist. Es gibt aber Functionen, die in verschiedenen Intervallen für die Werthe der Urveränderlichen (x) auch verschiedene gröfste und kleinste Werthe der Function (X) geben, und daher wird in dem eben angeführten Art. der Begriff von Gröfstem und Kleinstem dahin einschränkend definirt, dafs diese gröfsten und kleinsten Werthe innerhalb bestimmter Grenzen für die Werthe von x nur gelten, weil aufserhalb dieser Grenzen wiederum andere gröfste und kleinste Werthe der Function statt finden können.

Es sei

$$X = x^3 - 5x^2 - x + 5$$

Setzt man $X = 0$ so hat man die Wurzeln der Gleichung $-1, +1, +5$; demnach hat man für $x = -1$; $x = +1$ und $x = +5$ die Function $X = 0$ und zwischen diesen 3 Grenzen müssen andere Werthe mit einem gröfsten oder einem kleinsten Werth jedesmal statt finden.

Setzt man x negativ gröfser als -1, so entstehen negative Werthe von X, die mit dem negativen x auch negativ wachsen, und für $x = -\infty$ wird auch $X = -\infty$, so dafs von diesem absoluten Minimum $X = -\infty$ bis zu $X = 0$ für $x = -1$ weder ein gröfster noch ein kleinster Werth von X existirt. Dasselbe entgegengesetzt findet für Werthe von $x > 5$ statt und für $x = +\infty$ wird auch $X = \infty$ und zu einem absoluten Maximum.

Zwischen $x = -1$ und $x = +1$ für welche beide Werthe $X = 0$ wird, ist ein Werth $x = -0{,}1$ für welchen $X = +5{,}051$ als gröfster Werth entsteht.

Es ist mithin, da

für $x = -1$	für $x = -0{,}1$	für $x = +1$
$X = 0$	$X = +5{,}051$	$X = 0$

X für $x = -0{,}1$ ein Maximum zwischen den Grenzen $x = -1$ und $x = +1$, oder vielmehr, da von $x = -0{,}1$ auch X bis für $x = -\infty$ fortwährend abnimmt, das $X = +5{,}051$ ein Maximum zwischen den Grenzen von $x = -\infty$ bis zu $x = +1$.

Zwischen den Werthen $x = +1$ und $x = +5$ ist ein Werth $x = 3{,}43$ bei welchem X ein Minimum ist.

Für $x =$	$+1$	$+3{,}4$	$+3{,}43$	$+3{,}5$	$+5$
ist $X =$	0	$-16{,}896$	$-16{,}901$	$-16{,}875$	0

Es ist also dieses Minimum für das Intervall $x = +1$ und $x = +5$. Die Function hat also 2 Minima und 2 Maxima.

Minimum und 1 Maximum

lie berechneten Werthe der chung auf (s. Construction ier Gleichung mit Fig. 502 ieht man, dafs wenn man luten Gröfsten $+\infty$ und , die bei jedem Aggregat otenzen der Unbekannten ur ein Gröfstes und ein irt und dafs hier eine Ein- rch Grenzen für die Ab- itt findet.

Fig. 678.

nction von x

$x^3 - 10x^2 - 10$

sein von Gröfsten und h dem Art. Differenzial- No. 4, 5, pag. 300, nebst ersucht: gibt

$-9x^2 - 10x = 0$

n für $x = 0$ die Function weder ein Maximum oder

∂X durch x, so hat man

$10 = 0$

$5 = 0$

$\sqrt{401} = \begin{cases} -3{,}628 \\ +1{,}378 \end{cases}$

Werthe von x, für welche

ren, welches $\mathfrak{M}$ für jeden ob ein Gröfstes oder ein ɜht, setze die 3 gefunde-

$' + 18x - 10$

$\partial^2 X = -10$

$\frac{1}{3},628$; $\partial^2 X = +6{,}07$

$,378$; $\partial^2 X = +15{,}311$

ıstеht also ein Maximum und für die beiden anderen Werthe jedesmal ein Minimum.

Man findet durch Rechnung als Probe für dies gefundene Resultat:

Für $x = +0{,}1$;	$X = -10{,}0969$
$x = 0$;	$X = -10{,}0000$
$x = -0{,}1$;	$X = -10{,}1029$

Ferner

Für $x = -3$;	$X = -100$
$x = -3{,}628$;	$X = -111{,}6347$
$x = -4$;	$X = -106$

Endlich

Für $x = +1{,}36$;	$X = -16{,}529$
$x = +1{,}378$;	$X = -17{,}586$
$x = +1{,}40$;	$X = -17{,}526$

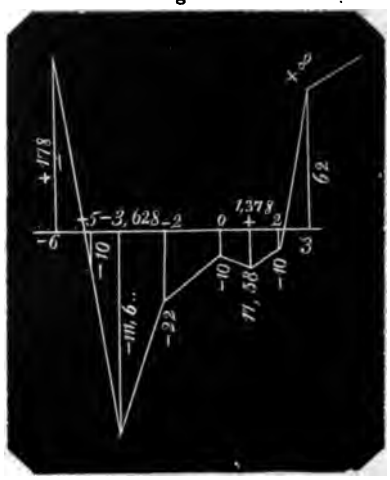
Aufserdem findet man

Für $x = +\infty$;	$X = +\infty$
$x = +4$;	$X = +378$
$x = +3$;	$X = +62$
$x = +2$;	$X = -10$
$x = +1$;	$X = -16$
$x = 0$;	$X = -10$
$x = -2$;	$X = -22$
$X = -5$;	$X = -10$
$X = -6$;	$X = +178$

Es liegt also eine Wurzel der Function $X = 0$ für x zwischen $+2$ und $+3$ und für x zwischen -5 und -6.

Trägt man die Gleichung auf, so ersieht man zugleich, dafs bei $x = 0$ die Abscisse nicht geschnitten wird, die Curve aber dort einen Wendepunkt hat, woher dort 2 imaginaire Wurzeln sich befinden, welche $X = 0$ machen.

Fig. 679.



Die Differenzialrechnung gibt nun eine ganz allgemein geltende Auflösung für die Auffindung des Gröfsten und Kleinsten von Functionen; sie ist aber auch oft durch einfache Betrachtung oder durch arithmetische und geometrische Operation zu erhalten.

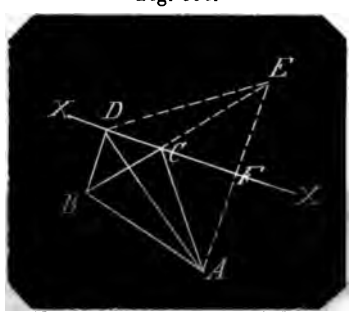
Z. B. 1. die Verbindung zweier Punkte durch eine gerade Linie ist die kürzeste. D. h. Die gerade Linie ist unter allen zwischen zwei Punkten möglichen Linien das Minimum, welches ein Lehrsatz in der Elementargeometrie ist.

2. Unter allen geraden Verbindungslinien zwischen einem Punkt und einer geraden Linie oder einer Ebene ist die Normale die kürzeste. (Das Minimum). Dieser Satz ist ein Lehrsatz der Elementargeometrie.

3. Unter allen Sehnen eines Kreises ist der Durchmesser der gröfste. (Desgl. Elem.-Geom.)

4. Es sei die Linie AB als Grundlinie von Dreiecken gegeben, deren Spitzen in die gleichfalls gegebene mit AB in derselben Ebene liegende grade Linie XX fallen sollen, so hat dasjenige aller Dreiecke den kleinsten Umfang, dessen Schenkel AC, BC mit der Linie XX gleiche Winkel bilden.

Fig. 680.



Denn zeichnet man ein beliebiges anderes $\triangle ABD$, fällt die Normale AF auf XX, verlängert dieselbe bis in die Verlängerung CE von BC, zieht DE so ist

$$AC = CE$$

also $AC + BC = BE$

eben so $AD = DE$

also $AD + DB = DE + DB$

Nun ist aber

$$DE + DB > BE$$

also $AD + DB > AC + BC$

Da dies nun von jedem beliebigen Dreieck gilt, dessen Spitze D i anderen Punkt als C von XX l sind die Schenkel $AC + BC$ in die kürzesten und der Umfang de ist ein Minimum.

5. Denkt man sich die Linien X so hat man den Satz, dafs unt Dreiecken von einerlei Grundli gleicher Höhe, also von gleichem I inhalt das gleichschenklige Drei kleinsten Umfang hat.

Hieraus folgt:

6. Unter allen Dreiecken von d Grundlinie und gleichem Umfa das gleichschenklige die gröfste E folglich auch den gröfsten Flächi Denn da unter allen Dreiecken von Grundlinie und Höhe das gleic lige Dreieck den kleinsten Umf so haben alle nicht gleichschenklig ecke von gleichem Umfange a gleichschenkligen bei einerlei Gr auch kleinere Höhen als das gleic lige.

Ferner folgt:

7. Unter allen Dreiecken von Umfang ist das gleichseitige das Denn denkt man sich das gleic lige Dreieck ad 6 über einer Gr von der Länge eines Schenkels, der Satz unmittelbar.

Endlich:

8. Unter allen Dreiecken von Inhalt hat das gleichseitige den Umfang.

Beschreibt man mit dem Schei gleichschenkligen Dreiecks No. Kreis, trägt die Grundlinie $n$mal a ein, so hat man das $n$eck im dem $n$fachen Dreieck. Da nun, dem einen Dreieck gilt auch n Dreiecken in Summa gilt, so noch folgende Sätze:

9. Unter allen gleich vielseitig ecken von gleichem Flächen-In das regelmäfsige den kleinsten U

10. Unter allen gleichvielseitig ecken von gleichem Umfang hat da seitige den gröfsten Inhalt.

11. Unter allen in einen Kreis benen Dreiecken ist das glei Dreieck das gröfste. Denn unt über einer Sehne in den Kreis benen Dreiecken ist das gleichsc das gröfste, weil es die gröfste H Beschreibt man nun über ein Schenkel ein gleichschenkliges so ist dieses wieder das gröfste al dem Schenkel in den Kreis bes nen Dreiecken, und wird jedenfa

fser als das erste Dreieck, wenn die Grundlinie dieses ersten Dreiecks nicht mit dem Schenkel einerlei Länge hat, d. h. wenn es nicht das gleichseitige Dreieck ist. S. die Beispiele Bd. II., pag. 304 No. 9 bis zum Schlufs. Ein Mehreres in dem Art. Maximum.

Grofs ist das Merkmal der Gröfse. Grofs ist alles was kleiner sein kann, ohne dafs es zu sein aufhört; oder von dem noch was übrig bleibt, wenn was hinfort genommen wird.

Grofse Axe ist die gröfsere von 2 oder mehreren Axen einer geometrischen Gröfse, wie bei der Ellipse. Es ist nicht recht, wenn man die, beide Scheitel zweier zusammen gehörenden Hyperbeln verbindende Linie die grofse Axe nennt, denn sie kann kleiner werden als die zweite auf dieser normale Axe. Die erstere Axe soll Hauptaxe, die zweite Nebenaxe heifsen.

Grofses Einmaleins. Die Einmaleinstabelle in der Fortsetzung von 11 ab, s. „Einmaleins", pag. 16.

Grundfläche, Grundebene, s. „Basis, geometrische und Basis der Krystalle.

Grundf[illegible] oder **Kernform**, s. „Formen der Krystalle", pag. 111 mit Fig. 645.

Grundformeln sind die in einer Lehre aus den ersten Anschauungen unmittelbar hervorgehenden Formeln, aus welchen dann alle übrigen analytisch abgeleitet werden können. Z. B. in dem Art. Goniometrie die Formeln 1. 4. 7. 10. 11. 12. 13 und die Formeln 16 bis 19 die alle unmittelbar aus dem Begriff der trigonometrischen Linien und mit Hülfe der Figur aus der Anschauung unmittelbar sich ergeben und aus welchen nun alle übrigen noch nothwendigen oder nützlichen Formeln durch Umformung abgeleitet werden.

Grundkanten sind von einem Prisma und einer Pyramide die an der Grundfläche befindlichen Kanten.

Grundlinie, s. „Basis, geometrische".

Grundsatz, s. „Axiom".

Grundzahl ist die Zahl in einem System, auf welcher das ganze System beruht. Die Grundzahl des dekadischen Zahlensystems ist die Zahl 10, s. Dekade. Diese Zahl ist die Grundzahl, Basis des Systems der Briggschen Logarithmen. Die Grundzahl der natürlichen Logarithmen ist $e = 2{,}71828\ldots$ (s. „Basis, Grundzahl eines Logarithmensystems). Die Grundzahl einer Polygonalzahlenreihe ist die Anzahl der Ecken des Polygons von der die Zahlenreihe den Namen führt, desgleichen die Grundzahl einer Polyedralzahlenreihe die Anzahl der Ecken des betreffenden Polyeders.

Guerickesche Leere ist die Luftleere, welche mit Hülfe einer Luftpumpe erzeugt wird (von Otto Guericke, dem Erfinder der Luftpumpe). Die Leere ist unvollkommen, weil mit jedem Kolbenzuge nur gleichmäfsige Verdünnung hervorgebracht wird, die nicht bis ins Unendliche oder bis zur absoluten Leere, wie die torricellische (durch Füllung und Leerung von Gefäfsen) getrieben werden kann.

Guldins Regel: 1. Eine Umwälzungsfläche ist = dem Product der sich umwälzenden, die Fläche erzeugenden Linie mit der Kreislinie als dem Wege, den der Schwerpunkt der Linie um die feste Axe zurück legt.

2. Ein Umwälzungskörper ist = dem Product der sich umwälzenden den Körper erzeugenden Ebene mit der Kreislinie als dem Wege, den der Schwerpunkt der Ebene um die feste Axe zurücklegt.

Guldin hat die Regel nicht bewiesen, sie läfst sich übrigens auch nur statisch beweisen, weil der hier mitwirkende Schwerpunkt ein statisches Element ist. Die beiden die Guldinsche Regel begründenden statischen Sätze lauten:

1. Wenn mehrere Kräfte (Gewichte) p, p', $p''\ldots$ von einer geraden Linie XX als Drehaxe in den Abständen a, a', $a''\ldots$ sich befinden, so ist die Summe der Producte aus jeder Kraft mit ihrem Abstande = dem Product aus der Summe sämmtlicher Kräfte mit dem Abstand deren Mittelkraft von der Linie. D. h. Das statische Moment der Mittelkraft ist = der Summe der statischen Momente aller Seitenkräfte. Der Ort der Mittelkraft ist der Schwerpunkt sämmtlicher Kräfte und die Mittelkraft ist = der Summe sämmtlicher einzelnen Kräfte.

2. Wenn ein System von Kräften im Gleichgewicht der Bewegung um eine Axe sich befindet, so ist die Summe der Producte jeder einzelnen Kraft mit ihrer Geschwindigkeit = dem Product deren Mittelkraft mit ihrer Geschwindigkeit. D. h. Das mechanische Moment der Mittelkraft ist = der Summe der mechanischen Momente aller Seitenkräfte.

Man denke sich eine gerade schwere

Linie AC von der Länge l. Hat jedes Element derselben das Gewicht p, so ist das Gewicht der Linie $= lp$. Nennt man allgemein λ den Abstand irgend eines Elements p von dem Endpunkt C der Linie, so ist die Summe der Abstände aller Elemente von $C = \Sigma\lambda$ und die Summe der statischen Momente aller Elemente in Beziehung auf den Punkt C ist $= p \cdot \Sigma\lambda$.

Diese Momentensumme ist nun = dem statischen Moment der Mittelkraft lp und da der Abstand des Schwerpunkts der Linie, des Orts der Mittelkraft $= \frac{1}{2}l$ ist, das statische Moment der Mittelkraft $= \frac{1}{2}l^2p$. Mithin hat man

$$p \cdot \Sigma\lambda = \tfrac{1}{2}l^2p$$

Denkt man sich nun die Linie AC in einer Ebene um den Endpunkt vollständig umgedreht, so beschreibt die Linie eine Kreisebene. Das beliebige Element p in dem Abstand λ von C beschreibt die Kreislinie $2\pi\lambda$ und die Summe sämmtlicher von sämmtlichen Elementen der Linie AC beschriebenen Kreislinien ist $2\pi\Sigma\lambda$.

Da nun die Elemente unendlich nahe an einander liegend gedacht werden müssen, so liegen auch die von diesen Elementen beschriebenen Kreislinien unendlich nahe aneinander und deren Summe kann als der Flächenraum des von AC beschriebenen Kreises betrachtet werden. Nun ist Geschwindigkeit nichts anderes als Weg in einer bestimmten Zeit; und da sämmtliche Elemente p ihre Kreislinien gleichzeitig beschrieben haben, so machen sämmtliche von ihnen beschriebenen Kreislinien $2\pi\Sigma\lambda$ die Summe ihrer Geschwindigkeiten aus und es ist $2\pi p \cdot \Sigma\lambda$ die Summe der mechanischen Momente sämmtlicher in Bewegung befindlich gewesener Kräfte.

Die Mittelkraft $= lp$ hat aber die Kreislinie mit dem Halbmesser $\frac{1}{2}l$ beschrieben, deren mechanisches Moment ist also $=$

$$2\pi \cdot lp \cdot \tfrac{1}{2}l = \pi l^2 p$$

Mithin ist $2\pi p\Sigma\lambda = \pi l^2 p$

oder $2\pi\Sigma\lambda = \pi l^2$

d. h. die Kreisfläche hat den Inhalt πl^2.

Eben so wird der Beweis für den Inhalt der Umdrehungskörper geführt.

Da die Bestimmung des Schwerpunkts oft sehr schwierig ist, und oft in complicirten Ausdrücken erscheint, so ist die Guldinsche Regel nur in einfachen Fällen zu Bestimmung von Umdrehungsgröfsen anzuwenden. Dagegen kann sie für Flächen und Körper, deren Gröfsen bekannt sind dazu dienen, die Lage der Schwerpunkte leichter zu finden als es nach statischen Regeln geschehen kann, wobei zu bemerken, dafs eine vollständige Umdrehung nicht erforderlich ist.

Z. B. Der Inhalt der Kugel ist bekannt $= \frac{4}{3}\pi r^3$

Der Inhalt des Halbkreises desgl. $\frac{1}{2}\pi r^3$

Bezeichnet man nun den Abstand des Schwerpunkts im Halbkreise von dem Mittelpunkt mit x, so ist die mit x beschriebene Kreislinie $= 2\pi x$ daher

$$2\pi x \times \tfrac{1}{2}\pi r^2 = \tfrac{1}{3}\pi r^3$$

woraus $$x = \frac{4}{3\pi} r$$

H.

rchenanziehung, s. unter dem ıäsion", pag. 30 und „Capil- pag. 9.

:hner (Kryst.), s. u. „Formen, Diese sind zweierlei Art: pa- chig und geneigtflächig. ɔtzteren verschwinden gänzlich len Flächen der zurückbleiben- alle mit dem Wachsthum der ıden Flächen, so dafs nur ge- chen ihnen übrig bleiben; bei en bleiben auch parallele Flä- :k.

ersteren, den parallelflächigen ɐ Hemitetrakishexaeder und die ishexaeder. Zu den geneigt- ɟehören das Hemioctaeder, die etraeder, die Hemitriakisoctae- ie Hemihexakisoctaeder.

tflächner, (Kryst.) Hemiocta- ›rflächner, ist das regelmä- eder. Es hat 4 Flächen, welche ɟe Dreiecke sind, 6 gleiche Kan- 4 dreiflächige gleiche Ecken. aedrische Axen verbinden die te zweier gegenüberliegenden ie 4 hexaedrischen Axen ver- Mittelpunkte der Flächen mit gegenüberliegenden Ecken.

tmalsechsflächner, s. Hemi- exaeder.

malachtflächner, der deutsche Deltoiddodekaeder (s. d. 57).

ı heifst: in 2 gleiche Theile ie Elementargeometrie hat zu Aufgaben: Eine gerade Linie n und: einen Winkel zu hal- dem Art. „Constructionen, he" ist pag. 51, No. 8 die erste nd No. 11 die 2te Aufgabe gelöst. Mit beiden Auflösungen ist zugleich die Aufgabe gelöst: Einen Kreisbogen zu halbiren. Denn für die erste Auflösung darf man nur annehmen, dafs AB die Sehne des Kreisbogens ist, so wird der Bogen AB zugleich mit der Sehne AB durch die Linie DE halbirt; und für die 2te Auflösung denke man den $\angle ACB$ als den zu dem Bogen gehörenden Centriwinkel.

Halbkreis. Hierunter versteht man entweder die halbe Kreislinie oder die halbe Kreisfläche.

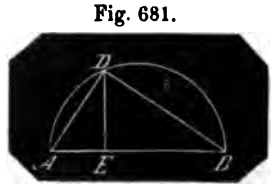
Ueber den Halbkreis hat man mehrere Sätze.

1. Die Aufgabe: den Halbkreisbogen aus einer Kreislinie zu bestimmen, oder eine Kreislinie zu halbiren, ohne dafs man einen Durchmesser zieht, wird gelöst, indem man von einem Punkt der Peripherie ab 3 mal hintereinander mit dem Zirkel den Halbmesser als Sehne absteckt, weil die Seite des regelmäfsigen Sechsecks im Kreise dem Halbmesser gleich ist.

2. Da der Centriwinkel des Halbkreises = zweien rechten Winkeln ist, so ist jeder in einem Halbkreis liegende Peripheriewinkel = einem rechten Winkel. Der Halbkreisbogen ist also der geometrische Ort für alle möglichen rechtwinkligen Dreiecke über derselben Hypotenuse.

3. Zieht man in dem Halbkreise das

Fig. 681.



beliebige Dreieck ADB und fällt die Normale DE auf den Durchmesser, so sind die 3 Dreiecke rechtwinklig und einander ähnlich, und zwar in der Ordnung der homologen Ecken geschrieben

$$\triangle DAE \sim \triangle BDE \sim \triangle BAD$$

Hieraus hat man die Proportionen

$$AE:DE=DE:BE \quad (1)$$

$$AE:AD=AD:AB \quad (2)$$

oder $$DE^2=AE\times BE \quad (3)$$

und $$AD^2=AE\times AB \quad (4)$$

also auch $$BD^2=BE\times AB \quad (5)$$

Schreibt man die Proportionen:

$$AE:DE=AD:BD$$

$$DE:BE=AD:BD$$

und multiplicirt beide mit einander, so erhält man

$$AE:BE=AD^2:BD^2$$

4. Zeichnet man (Fig. 682) eine dem Durchmesser parallele Sehne, bezeichnet deren zugehörigen Centriwinkel ECF mit φ, so ist der Kreisabschnitt $ECF=\frac{\varphi}{360^\circ}\pi r^2$

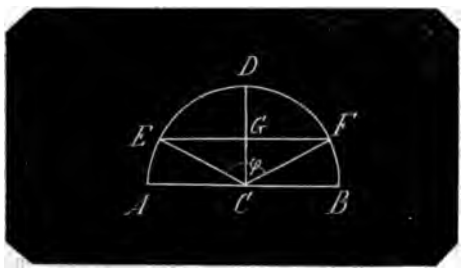
$$\triangle ECF = 2\triangle CFG = 2\cdot\frac{CG\cdot FG}{2} = r^2 \sin\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2} = \tfrac{1}{2}r^2\sin\varphi$$

Mithin der Abschnitt

$$DEF=\frac{\varphi}{360^\circ}\pi r^2 - \tfrac{1}{2}r^2\sin\varphi = \tfrac{1}{2}r^2\left(\frac{\varphi}{180^\circ}\pi - \sin\varphi\right)$$

Man erhält hiernach den $\angle\varphi$ für die Sehne EF, welche den Halbkreis halbirt, aus der Gleichung

Fig. 682.



$$\tfrac{1}{2}r^2\left(\frac{\varphi}{180^\circ}\pi - \sin\varphi\right) = \tfrac{1}{2}r^2\pi$$

und reducirt: $\frac{\varphi}{180^\circ}(\pi-1)-\sin\varphi=0$

wonach durch Probiren gefunden wird

$$\varphi = 132^\circ\ 20'\ 47{,}14''$$

5. Die halbe Kreislinie ist $=\pi r$

Die halbe Kreisfläche $=\tfrac{1}{2}\pi r^2$

Halbkugel ist sowohl die halbe Kugeloberfläche als der halbe Körper. Ist r der Halbmesser der Kugel, so ist

die Halbkugelfläche $=2\pi r^2$ (1)

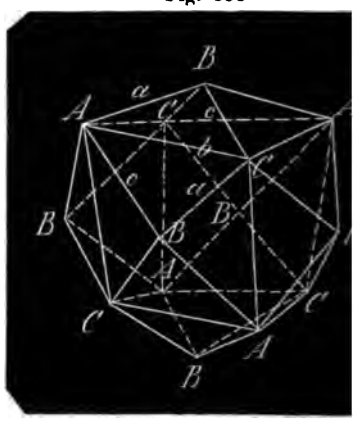
der körperliche Inhalt $=\tfrac{2}{3}\pi r^3$ (2)

Halbmesser ist der halbe Durchmesser, (s. d.) wo ein solcher sich vorfindet. Die Halbmesser der Kreise heißen auch Radien. Alle Halbmesser eines Kreises sind einander gleich.

Halbsechsmalachtflächner (Kry[illegible] mihexakisoctaeder. Diese Kry[illegible] haben 24 Flächen, 36 Kanten [illegible] Ecken. Die Flächen sind ung[illegible] seitige Dreiecke. Die Kanten dreierlei: sie sind 12 schärfere kürzere a, 12 stumpfere und gere b und 12 stumpfe und c. Die Ecken sind ebenfalls erlei: 4 sechsflächige symmet Ecken A, die eine gleiche haben, 6 vierflächige symmet B und von gleicher Lage u sechsflächige symmetrische C.

Die Hemihexakisoctaeder e hen aus den Hexakisoctaedern, die um die abwechselnden Hex ecken liegenden Flächen so wachsen, daſs die anderen gar drängt werden.

Fig. 683.



malsechsflächner, Hemiteraeder, Pentagondodekaese Krystalle haben 12 Flächen rischen Fünfecken, 30 Kanten kan. Die Fünfecke sind sehr mlich, 4 Seiten *b* sind einh, nur die 5te *a* ist verschiedieser Seite gegenüberliegende ist von eigener Gröfse; *B*, *B* und *C*, *C* unter sich sind einh.

Fig. 684.

nten sind zweierlei: 6 Kanten anten) *a* werden von den gleien *a* und 24 Kanten *b* von den eiten *b* gebildet.

en sind sämmtlich dreiflächig: iden Enden der Grundkanten 12 Ecken *B* sind irregulär. e wie *B'* wird von einem einer e gegenüberliegenden $\angle CB'D$ n an einer Grundkante liegenteln *CB'B* und *BB'D* eingeDie übrigen 8 dreiflächigen *D* sind reguläre, die sie einlen Winkel sind die mittleren Winkel *C*.

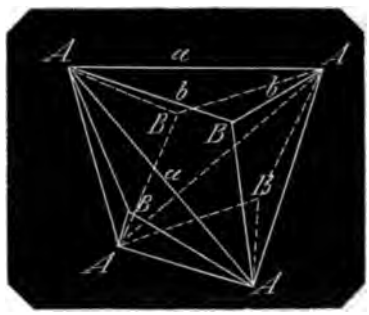
nander gegenüberliegende Flächen parallel, die 3 octaedrischen finden die Mittelpunkte zweier liegenden Grundkanten *a*, die dachen Axen verbinden je 2 ecken wie *D*.

rundzwanzigflächner, Hemiraeder, Pyramidentetraese Krystalle haben 12 Flächen chenkligen Dreiecken, 18 Kan- Ecken (Fig. 685) Die Kanschärfere und längere *a*, die he Lage haben und von den n der Flächen gebildet werden; n 12 Kanten *b* sind stumpfer r und werden von den Schen-Flächen gebildet.

Von den Ecken sind 4 sechsflächig symmetrisch *A*, die übrigen 4 sind dreiflächig und gleichkantig (*B*).

Die 3 octaedrischen Axen verbinden die Mittelpunkte zweier gegenüberliegen-

Fig. 685.



den längeren Kanten, die 4 hexaedrischen Axen verbinden die sechsflächigen Ecken mit den ihnen gegenüberliegenden dreiflächigen Ecken.

Halbzirkel, s. v. w. Halbkreis.

Halbzweimalzwölfflächner, Hemidodekaeder, Skalenoeder, Dreiunddreikantner, s. d.

Hallströms Tabelle für Ausdehnung des Wassers bei verschiedenen Temperaturen mit Hülfe von Differenzen berechnet, s. Bd. II., pag. 255.

Hapsologarithmus, s. u. Antilogarithmus, 1.

Harmonikalen, s. Harmonische Theilung am Schlufs.

Harmonische Proportion ist eine Proportion zwischen 4 Gröfsen der Art, dafs die Differenz zwischen der ersten und zweiten zur Differenz zwischen der dritten und vierten sich verhält wie die erste zur vierten als:

$$a - b : c - d = a : d \qquad (1)$$

Für $b = c$ entsteht die stetige harmonische Proportion

$$a - b : b - d = a : d \qquad (2)$$

und aus dieser die contra-harmonische Proportion (s. d.)

$$a - b : b - d = d : a \qquad (3)$$

Aus der ersten findet man bei 3 gegebenen Gröfsen die 4te, wenn man schreibt

$$ad - bd = ac - ad$$

woraus $$a = \frac{bd}{2d - c}$$

$$b = \frac{a(2d-c)}{d}$$

$$c = \frac{(2a-b)d}{a}$$

und $$d = \frac{ac}{2a-b}$$

Aus der stetigen harmonischen Proportion hat man

$$ad - bd = ab - ad$$

also das Seitenglied $a = \frac{bd}{2d-b}$

„ „ $d = \frac{ab}{2a-b}$

und das Mittelglied $b = \frac{2ad}{a+d}$

Zwischen den beiden Zahlen a und d ist
das arithmetische Mittel $= \frac{1}{2}(a+d)$
das geometrische Mittel $= \sqrt{ad}$

Da nun $\frac{1}{2}(a+d) : \sqrt{ad} = \sqrt{ad} : \frac{2ad}{a+d}$

so verhält sich das arithmetische Mittel zweier Zahlen zu dem geometrischen Mittel wie das geometrische Mittel zu dem harmonischen Mittel. Oder es ist das geometrische Mittel zweier Zahlen zugleich das geometrische Mittel zwischen dem arithmetischen und dem harmonischen Mittel derselben Zahlen.

Harmonische Reihe, harmonische Progression ist eine Reihenfolge von Zahlen, von welchen je 3 aufeinander folgende Glieder in stetiger harmonischer Proportion stehen. Sind die Zahlen a, b gegeben, so bilden dieselben mit den Zahlen c, d, e ... eine harmonische Reihe wenn $c = \frac{ab}{2a-b}$; $d = \frac{bc}{2b-c}$; $e = \frac{cd}{2c-d}$ u. s. w.

Harmonische Theilung einer Linie AB, Fig. 686, geschieht durch 3 Theile, die in stetiger harmonischer Proportion mit einander stehen. Als:

$$AB - AD : AD - AC = AB : AC$$

Schreibt man BD für $AB - AD$ und CD für $AD - AC$, so hat man

$$BD : CD = AB : AC$$

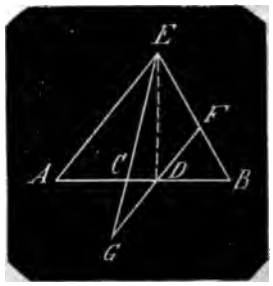
oder $$AB : AC = BD : CD$$

oder $$AB : BD = AC : CD$$

Die Linie wird also harmonisch getheilt wenn die ganze Linie zu einem der äußeren Theile sich verhält wie der andere äußere Theil zum mittleren Theil.

Es ist nun leicht, eine gerade Linie harmonisch zu theilen. Man nehme außerhalb der Linie AB einen beliebigen Punkt E, ziehe AE, BE: von einem beliebigen Punkt D der Linie AB ziehe man $\neq AE$, verlängere FD bis G, so

Fig. 686.



$DG = DF$, ziehe GE, so ist die Linie durch die Punkte C, D harmonisch theilt.

Denn es ist

$AB : BD = AE : DF = AE : DG = AC : C$

Die Linien AE, BE, CE, DE he die Harmonikalen.

Harriots Lehrsatz. Dieser heißt: W eine Function von x, nämlich $fx = 0$ vollständige Gleichung von bel vielen Wurzeln gegeben ist, so ha Gleichung nicht mehr positive Wu als Zeichenwechsel und nicht mehr gative Wurzeln als Zeichenfolgen i Gleichung vorkommen. Hat die chung lauter reelle Wurzeln, so is Anzahl der positiven Wurzeln gleic Anzahl der Wechsel und die Anzah negativen Wurzeln gleich der Anzah Folgen.

Hat eine Gleichung nur positive zeln α, β, γ ..., ist also

$$X = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots = 0$$

so hat sie die Formen

$$x - A = 0$$
$$x^2 - Ax + B = 0$$
$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$$

u. s. w.

Die Gleichungen haben alle keine chenfolgen, sondern nur Zeichenwec und eben so viele Wechsel als Wu vorhanden sind.

Hat eine Gleichung nur negative zeln a, b, c..., ist also

$$X = (x+a)(x+b)(x+c)\ldots = 0$$

so hat sie die Formen:

$$x + A = 0$$
$$x^2 + Ax + B = 0$$
$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

u. s. w.

leichung hat Zeichenwech-
ur Folgen.

ı eine Gleichung eine posi-
negative Wurzel, so ist

$+a)=x^2\mp(\alpha-a)\,x-a\alpha=0$

ı $\alpha >$ oder $< a$, ist das Mit-
r $+$; in beiden Fällen fin-
henfolge und ein Zeichen-

ıe Gleichung eine positive
re Wurzeln, ist also

$+a)(x+b)=(x-\alpha)(x^2+Ax+B)$

$x)\,x^2\pm(B-\alpha A)\,x-\alpha B=0$

ıreihen sind folgender Art

\- + −
\- − −
\- + −
\- − −

n, zweiten und vierten Form
hung nur einen Wechsel,
Form dagegen 3 Wechsel;
lemnach in der Gleichung

ı

$-Ax^2+Bx-C=0$

rzeln möglich sein; und da
3 zu Grunde liegenden Fac-
$x+a)(x-b)$ ergeben, nicht
so hat die Gleichung offen-
selle (s. Fourier No 8) und
itive Wurzel.

ıns bei 3 positiven reellen
3te Zeichenfolge nicht ein-
geht aus folgendem hervor:
n 3 Factoren hervorgehende
rde sein

$x^3+[ab-\alpha(a+b)]x-\alpha ab=0$

also sein:

$+b$

$(a+b)$

in No. 2 für α den kleine-
$+b$ aus 1, so hat man
$a+b)^2$
glich ist.

Gleichung 2 positive und
Wurzel, ist also

$-\beta)(x+a)$

$-a)\,x^2\pm[\alpha\beta-a(\alpha+\beta)]\,\alpha+\alpha\beta a$

$\pm Bx+C$

wieder der Form nach fol-
henreihen möglich:

\- + +
\- − +
\- + +
\- − +

Die dritte Zeichenfolge ist wieder der Natur der obigen Gleichungsbildung entgegengesetzt, sie kann auch niemals existiren. Denn es würde sein:

$$\alpha > a+\beta$$
$$\alpha\beta > a(\alpha+\beta)$$

woraus $\alpha\beta > (\alpha+\beta)^2$

welches unmöglich ist.

Die übrigen möglichen 3 Zeichenfolgen haben jede 2 Zeichenwechsel und eine Zeichenfolge für 2 positive und eine negative Wurzel, wie es der Lehrsatz ausspricht.

5. Kann man nun beweisen, dafs wenn eine Gleichung m positive und $n-m$ negative, also überhaupt n Wurzeln hat, eine hinzukommende positive Wurzel einen Zeichenwechsel und eine hinzukommende negative Wurzel eine Zeichenfolge mehr gibt, so ist mit Hülfe der voranstehenden Sätze der Harriotsche Lehrsatz erwiesen.

Jede vollständige Gleichung hat ein Glied mehr als die Anzahl ihrer Wurzeln beträgt. Die gegebene Gleichung von n Wurzeln hat also $n+1$ Glieder und durch eine neu hinzukommende positive oder negative Wurzel erhält sie $n+2$ Glieder.

Um die Aenderung der Vorzeichen durch das Hinzukommen eines neuen Factors $(x \pm a)$ zu erfahren, hat man in der gegebenen Gleichung nur 2 auf einander folgende Glieder zu betrachten.

1. Das Hinzutreten einer negativen Wurzel.

1. Es seien die beiden letzten Glieder der gegebenen Gleichung mit einer Zeichenfolge

$$\pm Mx \pm N$$

Diese multiplicirt mit dem Factor $(x+a)$ für eine negative Wurzel entsteht

$$\pm Mx^2 \pm (Ma+N)x \pm aN$$

Aus einer Zeichenfolge entsteht demnach durch Hinzutritt einer negativen Wurzel niemals ein Wechsel, so viele Folgen also den beiden letzten Gliedern voranstehen, so viele Folgen sind geblieben. Aus der letzten Folge der beiden letzten Glieder werden zwei Folgen.

2. Die beiden letzten Glieder enthalten einen Wechsel

$$\pm Mx \mp N$$

so entsteht mit dem Factor $(x+a)$

$$\pm Mx^2 \pm (Ma-N)x \mp aN$$

Also entweder

$$+Mx^2+(Ma-N)x-aN$$

Jedes der beiden Vorzeichen des Mit-

telgliedes gibt eine Folge und einen Wechsel, folglich eine Folge mehr

oder $-Mx^2-(Ma-N)x+aN$

Auch hier gibt jedes der beiden mittleren Vorzeichen eine Folge und einen Wechsel, Ma mag $>$ oder $<$ sein als N.

Es geht also hervor, dafs wenn in der gegebenen Gleichung 2 nebeneinander stehende Glieder durch einen Zeichenwechsel verbunden sind, der Wechsel verbleibt und dem Wechsel der letzten beiden Glieder wird eine Folge hinzugefügt.

2. Das Hinzutreten einer positiven Wurzel.

Die beiden letzten Glieder der Gleichung mit einer Zeichenfolge seien wieder

$$\pm Mx\pm N$$

Diese multiplicirt mit $(x-a)$ ergeben:

$$\pm Mx^2\pm(N-aM)x\mp aN$$

also entweder $+Mx^2\pm Px-aN$

oder $-Mx^2\pm Px+aN$

Beide Zeichen des Mittelgliedes ergeben in beiden Fällen eine Folge und einen Wechsel.

Haben also 2 nebeneinander befindliche Glieder der Gleichung eine Zeichenfolge, so wird diese durch den Hinzutritt einer positiven Wurzel nicht in einen Wechsel geändert, die Folge verbleibt und dem letzten Gliede tritt ein Wechsel hinzu.

Haben die beiden letzten Glieder der Gleichung einen Zeichenwechsel, sind sie demnach

$$\pm Mx\mp N$$

so entsteht durch den Factor $x-a$:

$$\pm Mx^2\mp(aM+N)x\pm aN$$

wo die oberen und die unteren Zeichen einzeln zusammen gehören. Es entstehen in beiden Fällen 2 Wechsel, also ein Wechsel mehr als in der Gleichung.

Da also, wenn für m positive und n negative Wurzeln in einer Gleichung m Zeichenwechsel und n Zeichenfolgen vorkommen, auch für $m+1$ positive und für $n+1$ negative Wurzeln das Gesetz richtig ist, nämlich da $m+1$ Wechsel und $n+1$ Folgen vorkommen, so gilt das Gesetz allgemein, weil es bei einer und bei zweien positiven und negativen Wurzeln in einer Gleichung, also auch für 3, für 4 u. s w. Wurzeln gilt.

6. Ist eine Gleichung unvollständig, so kann sie nicht mehr positive Wurzeln haben, als Zeichenwechsel, z. B.

$$x^5+Ax^4-Cx^2+E=0$$

Diese hat 2 Zeichenwechsel, also höchstens 2 positive Wurzeln; um die negativen zu erfahren mufs man die Gleichung durch die fehlenden Glieder mit dem Coefficient ± 0 ergänzen, so entsteht:

$$x^5+Ax^4\pm 0\cdot x^3-Cx^2\pm 0\cdot x+E=0$$

Man ersieht, dafs sowohl für die oberen als für die unteren Vorzeichen 3 Folgen und 2 Wechsel entstehen, dafs also die Gleichung 3 negative und 2 positive Wurzeln hat.

Die Gleichung $x^5-Ax^4-Cx^2+E=0$ hat wegen des einen Zeichenwechsels höchstens nur eine positive Wurzel. Ergänzt man durch Nullglieder, so hat man

$$+x^5-Ax^4\pm 0\cdot x^3-Cx^2\pm 0\cdot x+E=0$$

Für die oberen Vorzeichen hat die Gleichung 4 Wechsel und eine Folge, für die unteren 2 Wechsel und 3 Folgen; beides zugleich ist nicht möglich, also hat die Gleichung unmögliche Wurzeln.

Hauptaxe der Hyperbel ist die gerade Verbindungslinie beider Scheitel zweier zusammen gehörenden Hyperbeln.

Hauptaxe (Kryst.) s. Axensysteme der Krystalle, No. 2, pag. 260.

Hauptdodekaeder, s. u. „Hexagondodekaeder."

Hauptfunctionen in der Trigonometrie sind die Functionen Sinus, Tangente, Secante, Sinusversus, im Gegensatz zu den Cofunctionen: Cosinus u. s. w.

Hauptgegenden, s. v. w. Cardinalpunkte (s. d.) in irgend einem Ort der Erdoberfläche: Ost, Süd, West, Nord.

Haupthexagondodekaeder, s. u. „Hexagondodekaeder."

Hauptkreise der Kugel heifsen auch die gröfsten Kreise derselben.

Hauptparameter nennt man auch bei den Kegelschnitten den Parameter der Axe des Kegelschnitts.

Hauptpunkt in der Perspective, s. v. w. Augenpunkt (s. d)

Hauptpunkte (Geogr.), s. v. w. Cardinalpunkte eines Orts. (Astr.) In der Ekliptik die Nachtgleichen- und Wendepunkte.

Hebel ist als mathematischer Hebel eine gerade Linie, als physischer Hebel ein stabförmiger Körper, auf welchen Kräfte der Art wirken, dafs ein Bestreben zur Drehung um irgend einen Punkt der Linie oder um irgend einen Querschnitt des Stabes oder auch wirkliche Drehung erfolgt.

ı Art. „Centralbewegung“ 3, die um einen gemeinschaft- :hwerpunkt erfolgende Drehung und des Mondes erklärt; der ınkt beider Weltkörper liegt in len Verbindungslinie deren Mit- und es ist dieses System der rischen Erde und Mond ein He- e Kräfte, Erde und Mond mit rer Verbindungslinie und Dreh- ideeller Hebel im freien Raum.

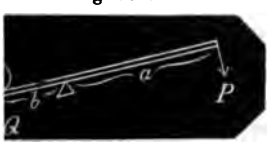
esem Grunde vielleicht, weil von Hebel hier nicht die Rede ist, neuere Mathematiker auch den tischen Hebel „materiellen indem sie der geraden Linie ilegen, und nähern sich dadurch dem physischen Hebel, der bei ı Mathematikern die erste der 5 ıen oder mechanischen Po- war.

ehpunkt in der schweren Linie ls wird durch Unterstützung fest- dacht und heifst deshalb auch ützungspunkt, Hypomoch-

terschied und unterscheidet noch ierlei Art:

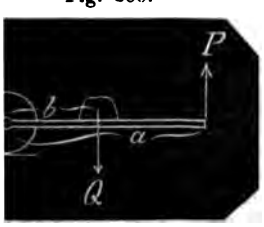
erster Art ist derjenige, bei der Unterstützungspunkt zwi- ı Angriffspunkten der bewegen- t (*P*) und der Last (*Q*) liegt ı.

Fig. 687.



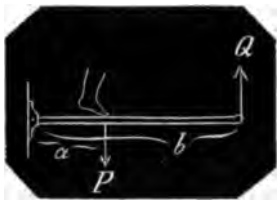
zweiter Art ist derjenige, bei der Drehpunkt der eine End- : schweren Linie und deren an- dpunkt der Angriffspunkt der t, während die zu gewältigende rischen beiden Endpunkten sich Fig. 688).

Fig. 688.



Hebel dritter Art ist derjenige wie der der zweiten Art, wenn Kraft und Last ihre Orte vertauschen (Fig. 689).

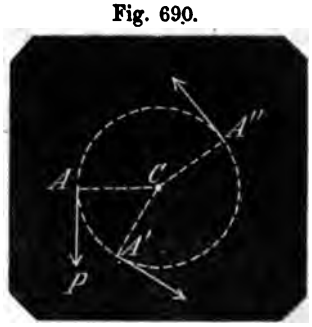
Fig. 689.



Statik des Hebels.

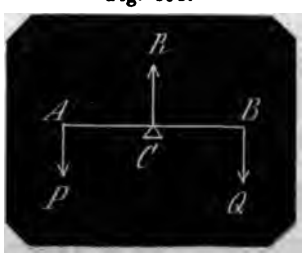
1. In der Linie *AC*, Fig. 690, sei der eine Endpunkt *C* befestigt, auf den anderen Endpunkt *A* wirkt eine Kraft *P*, so will diese den Punkt *A* senkrecht abwärts fortbewegen; der feste Punkt *C* verhindert dies und es geschieht nur Drehung um den Punkt *C* der Art, dafs die Kraft *P* die Linie *AC* im Kreise herum führt und immer wie in *A'*, *A''* tangential und auf einerlei Weise wirksam bleibt.

Fig. 690.



Denkt man sich die *AC* bis *B* verlängert (Fig. 691), so dafs *AC* = *BC*, und bringt man in *B* eine Kraft *Q* an, welche die entgegengesetzt gerichtete Drehung um *C* beabsichtigt, so ist klar, dafs die

Fig. 691.



Drehung nach der Richtung erfolgt, nach welcher die gröfsere Kraft wirkt. Sind P und Q gleich grofs, so erfolgt nach keiner Richtung eine Drehung und der Hebel befindet sich im statischen Gleichgewicht.

2. Die beiden mit einander ∔ wirkenden Kräfte P und Q haben das Bestreben, die Linie AB lothrecht abwärts fortzubewegen. Der feste Punkt C hindert dies und die Kräfte P und Q äufsern auf die Unterlage bei C einen Druck $P + Q$. Nimmt man nun die Unterstützung fort und bringt dafür in C eine entgegengesetzt gerichtete Kraft $R = P + Q$ an, so bleibt das System in demselben Zustande des Gleichgewichts für die fortschreitende Bewegung.

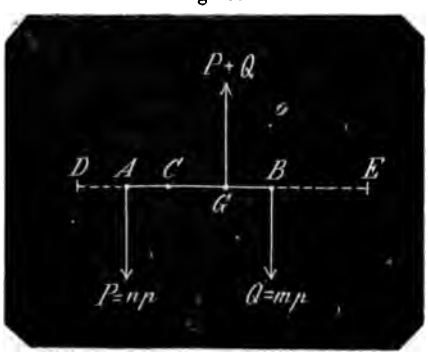
Sind P und Q = grofs und eben so $AC = BC$, so ist auf die Drehung nach links eben so viel Grund als zur Drehung nach rechts und es ist auch Gleichgewicht für die drehende Bewegung vorhanden.

3. Sind bei gleichen Abständen AC und BC die Kräfte P und Q ungleich, so erfolgt Drehung nach der Richtung der gröfseren Kraft. Es fragt sich daher, wo der Unterstützungspunkt in AB angebracht werden müsse, damit Gleichgewicht für die Drehung statt finde.

Die gemeinschaftliche Krafteinheit für P und Q sei p, es sei $Q = mp$; $P = np$, so theile man den Abstand AB, Fig. 692, in $\frac{n+m}{2}$ gleiche Theile, verlängere AB zu beiden Seiten über A hinaus bis D um $\frac{n}{2}$, über B hinaus bis E um $\frac{m}{2}$ Theile, und es sei $AC = AD = \frac{1}{2}n$ und $BC = BE = \frac{1}{2}m$.

Bringt man nun zwischen je 2 der

Fig. 692.



$n + m$ Theilpunkte eine Krafteinheit p an, so ist die Wirkung der von D bis C gleich vertheilten n Einheiten p = der Wirkung deren Summe $P = np$ in deren Mitte, und man kann die Kraft P hinfort nehmen und dafür die n einzelnen Kräfte p wirken lassen. Desgleichen können statt der Kraft Q die m einzelnen Kräfte p zum Angriff gebracht werden. Da nun zwischen D und E in gleichen Abständen von einander $n + m$ gleich grofse Kräfte wirken, so ist gegen die Drehung um irgend einen Punkt der Linie AB Gleichgewicht, wenn man in der Mitte G von DE senkrecht aufwärts eine Kraft $(n + m)p = P + Q$ anbringt, denn alsdann ist bei der links und rechts von G gleichmäfsigen Vertheilung gleich vieler — nämlich $\frac{m+n}{2}$ gleichen Kräfte p so viel Grund zur Drehung links als zur Drehung rechts, weshalb keine Drehung weder links noch rechts erfolgt.

Nun ist $AB = DG = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}m$

$$AD = \frac{1}{2}n$$

folglich $$AG = \frac{1}{2}m$$

und $$BG = \frac{1}{2}n$$

mithin $AG : BG = \frac{1}{2}m : \frac{1}{2}n = mp : np = Q : P$

D. h. Wenn ein Hebel für Drehung im Gleichgewicht sein soll, so müssen die Abstände des Drehpunkts von den beiden auf ihn wirkenden Kräften umgekehrt wie diese Kräfte sich verhalten.

4. Der Abstand AG der Kraft P sei $= a$, der Abstand BG von Q sei $= b$, so ist für's Gleichgewicht

$$a : b = Q : P$$

woraus $$aP = bQ$$

D. h. Fürs Gleichgewicht müssen die Producte jeder der beiden Kräfte in ihren Abständen vom Drehpunkt einander gleich sein.

5. Gesetzt es sollte für die Kraft P in dem Abstand a von G auf der anderen Seite von G in der Entfernung $GE = c$ eine Kraft x angebracht werden um das Gleichgewicht herzustellen, so hat man nach No. 4

$$aP = cx$$

woraus $$x = \frac{a}{c} P$$

Hiernach kann man eine Kraft Q, die in einem bestimmten Abstande b vom Drehpunkt wirkt, durch eine andere Kraft ersetzen, wenn für diese der Abstand c vom Drehpunkt festgestellt wird; denn es ist

$$bQ = cx$$
$$x = \frac{b}{c} Q$$

nennt dies Verfahren: Kräfte
ren.

ın Punkten C, A, D auf einer
m Drehpunkt wirken verschiedene
in C mit dem Abstand $CG = A'$
ft P', in A mit dem Abstand
" die Kraft P'', in D mit dem
$DG = a'''$ die Kraft P'''. Es soll
dem Punkt B in dem Abstand
eine Kraft (Q) den 3 Kräften P',
das Gleichgewicht halten, so hat

Kraft P' : $a' \cdot P' = b \cdot Q'$
„ P'' : $a'' \cdot P'' = b \cdot Q''$
„ P''' : $a''' \cdot P''' = b \cdot Q'''$

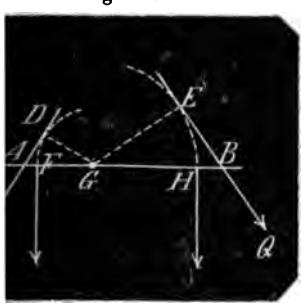
$$P' + a''' P''' = b(Q' + Q'' + Q''') = b \cdot Q$$
$$= \frac{1}{b}(a' P' + a'' P'' + a''' P''')$$

man statt der drei Kräfte P', P',
einzige in dem Abstande a von
nde (P) anbringen, die mit jenen
Wirkung hat, so ist

$$a' P' + a'' P'' + a''' P''' = aP$$
$$P = \frac{1}{a}(a' P' + a'' P'' + a''' P'')$$

irken in den Endpunkten A und
Linie mit dem Drehpunkt G 2
P und Q unter schiefen Winkeln,
e Wirkung derselben, wie No 1
690 es angibt; man hat näm-
G aus auf die Richtungen der

Fig. 693.



Normalen zu fällen, aus G mit
ls Radien Kreise zu zeichnen, so
en deren Durchschnittspunkte mit
ie diejenigen Punkte derselben,
en die Angriffe der Linie durch
te normal zu denken ist:
Wirkung der Kraft P nach der
Richtung DA in A ist auf die Linie AB dieselbe mit ihrer normalen Wirkung in F, und die der Kraft Q nach der Richtung EB dieselbe mit ihrer normalen Wirkung in H. Wenn also beide Kräfte P und Q im Gleichgewicht sein sollen, so mufs sein

$$P \times DG = Q \times EG$$

der Abstand des Drehpunkts von der Richtungslinie einer Kraft wie GD von P heifst der Hebelsarm der Kraft und das Product der Kraft in ihren Hebelsarm wie $DG \times P$ das statische Moment der Kraft.

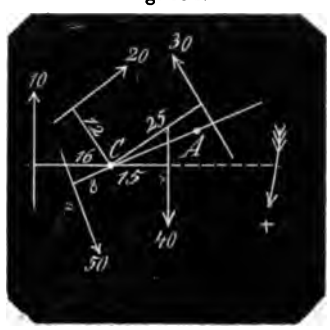
8. Demnach sagt man: Ein Hebel ist im Gleichgewicht, wenn (bei 2 einwirkenden Kräften) das statische Moment der Kraft zur linken Seite des Drehpunkts dem statischen Moment der rechts vom Drehpunkt befindlichen Kraft gleich ist.

Wirken rechts und links vom Drehpunkt mehrere Kräfte, so ist Gleichgewicht, wenn die Summe der Momente auf beiden Seiten des Drehpunkts einander gleich sind.

Bringt man sämmtliche Momente auf eine Seite der Gleichung, so ist Gleichgewicht, wenn die algebraische Summe der Momente sämmtlicher Kräfte = 0 ist.

Beispiel 1. Die an den Pfeilen stehenden Zahlen bedeuten die Gröfsen der Kräfte in Pfunden, C ist der Drehpunkt, und die neben den Abstandslinien stehenden Zahlen bedeuten die Abstände der Kräfte von diesem Drehpunkt in Fufsen.

Fig. 694.



Die Richtung des rechts befindlichen Pfeils soll die positive Richtung der Bewegung sein:

Man findet die Summe der Momente:

$$40 \times 15 - 30 \times 25 + 20 \times 12 + 10 \times 16 - 50 \times 8$$
$$= 600 - 750 + 240 + 160 - 400 = -250$$

Es geschieht also um C eine Drehung

dem Pfeil entgegen mit einem statischen Moment von 250.

Ist nun in dem Punkt A, in der Entfernung $AC = 20$ Fuſs eine Kraft anzubringen um dem System Gleichgewicht zu geben, so ist die daselbst erforderliche

Kraft $= \frac{250}{20} = 12\frac{1}{2}$ Pfund.

2. In Figur 687 ist eine Wuchte vorgestellt: Ist Q eine Last von 2000 Pfund, ist die möglich gröſste Kraft P eines Menschen mit dem Gewicht seines Körpers 120 Pfund und ist die Länge $(a+b)$ des Hebels 12 Fuſs, so ist zwischen Kraft und Last Gleichgewicht wenn $b \times Q = a \times P$

also wenn $2000\,b = 120(12 - b)$

woraus $b = 0{,}68$ Fuſs $= 8\frac{1}{2}$ Zoll.

3. Fig. 688 ist eine Karre. Der Mittelpunkt des Rades ist der Drehpunkt, die Last Q mit dem Hebelsarm b sei 400 Pfund, die Tragkraft P des Menschen mit dem Hebelsarm $a = 6$ Fuſs sei 100 Pfund, so ist Gleichgewicht wenn

$$400 \cdot b = 100 \cdot a,$$

woraus $b = 1\frac{1}{2}$ Fuſs.

Kann man eine Last Q bis zu einem Fuſse Abstand vom Drehpunkt legen, so kann diese sein.

$$Q = \frac{600}{1} = 600 \text{ Pfund}.$$

4. Fig. 689 zeigt ein System, nach welchem mittelst eines Trittschemels ein Spinnrad bewegt wird. P ist die Kraft des tretenden Fuſses, Q die Last, welche die Kurbel am Rade dem Fuſs entgegen setzt, links am Ende des Hebels ist der Drehpunkt. Es ist hier ebenfalls

$$P \cdot a = Q \cdot b$$

Der Hebel erster Art, Fig. 687, wird auch zweiarmiger, doppelarmiger Hebel genannt. Ein Beispiel hierüber gibt noch der Art.: Balancier. Die Hebel zweiter und dritter Art heiſsen auch einarmige Hebel.

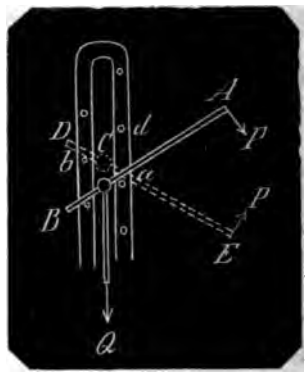
Hebelsarm, s. Hebel No. 7.

Heben der Brüche, s. Abbreviren und Aufheben der Brüche.

Hebelade ist eine Hebemaschine, welche zur Hebung von schweren Lasten angewendet wird, die in einerlei geraden Linie verbleiben müssen, z. B. zu allmählicher Erhebung von Schützen in Schleusenthoren.

Der senkrecht mit runden Löchern versehene Bügel bildet die Hebelade, er ist von breitem Eisen zusammengeschmiedet und möglichst unverrückt mit Verschraubungen an ein Schleusenthor befestigt. Das Schütz, dessen lothrecht abwärts wirkende Last mit Q bezeichnet ist, befindet sich unten im Wasser an der Stange CQ; diese Stange reicht zwischen den beiden Wangen der Hebelade senkrecht

Fig. 695.



in die Höhe, hat oben eine Oese und wird mit der in dem Hebel AB befindlichen Oese durch einen Bolzen in C vereinigt. Die augenblickliche Thätigkeit, welche gezeichnet ist, besteht darin, daſs in das Loch a der Hebelade ein Bolzen gesteckt ist, der Schleusenarbeiter drückt mit der Kraft P in A senkrecht auf den Hebel und um den Bolzen a herab, bis er in die punktirte Lage kommt, wo dann der Bolzen c mit der Schützstange um eine kleine Höhe gehoben wird. Der Hebel AB ist nun in die Lage DE gekommen, die kurze Seite CB des Hebels in die Lage CD über dem Loch b. Nun wird ein Bolzen in b gesteckt, und der Hebel in E mit der Kraft P senkrecht aufwärts gedreht, wobei der Hebel auf dem Bolzen b seine Unterstützung findet, und der mittlere Bolzen C mit der Schützstange wird abermals um eine kleine Höhe gehoben. Hierbei ist der Hebel über das Loch d getreten, der Bolzen wird aus a herausgezogen durch d gesteckt und die fernere Drehung geschieht über dem Auflager d wie vorher über c u. s. f.

Bezeichnet man die von dem Schütz herrührende senkrechte Last mit Q, die Kraft des Schleusenarbeiters mit P, ist $Ca = Cb = Cd = r$, $AC = R$, so ist bei der Bewegung um a:

$$r \cdot Q = (R - r)\,P$$

bei der Bewegung um b

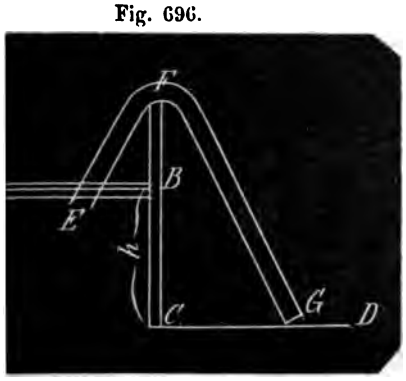
$$r \cdot Q = (R + r)\,P$$

ist ein hydraulischer Apparat in
er zu 2 Armen gebogenen Röhre,
her man aus einem Behälter
m See in einen tiefer stehenden
oder in ein tiefer liegendes Ter-
3. in einen Graben Wasser ab-
nn beide Räume durch eine über
serspiegel des ersten Raums er-
and von einander getrennt sind,
las Wasser erst auf diese Höhe
nufs.

AB der höher liegende unver-
e Wasserspiegel des links befind-
ehälters, aus welchem Wasser
ohre *CD* abgelassen werden soll,
der Heber in lothrechter Ebene
h, die lothrechte Entfernung zwi-
E und *CD* sei = *h*; der Heber
Wasser angefüllt, so finden fol-
Erkungen statt.

tmosphärische Luft drückt auf
serspiegel *AB* und durch diesen
t auf die Einflufsöffnung *E* des
wie auf die Ausflufsöffnung *G*
mit dem Gewicht einer Was-
von 32 Fufs Höhe. Diesem Druck
wirkt in dem Schenkel *EF* das
findliche Wasser mit der Höhe
em Schenkel *FG* der Röhre das
findliche Wasser mit der Höhe
mnach ist die Druckhöhe des
in $EF = 32' - BF$ und in *FG*
F. Folglich ist die für den Aus-
G nach der Richtung *EFG* wir-
draulische Geschwindigkeitshöhe
$BF) - (32' - CF) = CF - BF = h$
it nach dem Art: „Ausfluſs
ssers" u. s. w. pag. 217 die
eschwindigkeit $c = \alpha \sqrt{h}$
n α der Querschnitt der Röhre
usfliefsende Wassermenge
nde $= \alpha a \sqrt{h}$
öhren ist nach Eytelwein der
ontraccoefficient $\alpha = 6{,}42$

Fig. 696.



Und nach du Buat die Widerstandshöhe für die Reibungen des Wassers an den Röhrenwänden

$$h' = \frac{c^2 \cdot l}{2006 \cdot d}$$

wo c die Geschwindigkeit des Wassers, l die Länge und d den Durchmesser der Röhre bedeuten.

Demnach hat man

$$c = 6{,}42 \sqrt{h - \frac{c^2 l}{2006 \cdot d}}$$

woraus c durch Probiren gefunden wird.

Der Heber ist so lange wirksam als die Höhe *BF* weniger beträgt als 32 Fuss.

Heifse Zone der Erdoberfläche ist die Zone zwischen den beiden Wendekreisen, wegen der dort herrschenden höchsten Temperatur gegen die der anderen Zonen so genannt. Die Oberfläche der heifsen Zone beträgt (bei $23\frac{1}{2}° =$ der Schiefe der Ekliptik) $= 4\pi r^2 \sin 23\frac{1}{2}°$ die Erdoberfläche $= 4\pi r^2$, also beträgt die heifse Zone $\sin 23\frac{1}{2}° \times = 0{,}39875 \times$ oder beinahe $\frac{2}{5} \times$ der Erdoberfläche.

Helikoide, s. v. w. „Spirallinie".

Heliocentrisch ist was auf die Sonne sich bezieht im Gegensatz zu geocentrisch, was auf die Erde Bezug hat.

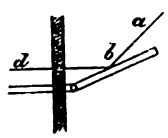
Heliocentrische Breite eines Planeten s. u. „Breite, astronomische".

Heliostat (*Ἥλιος* die Sonne, *στατος* gestellt) zu deutsch: Sonnensteller, ein Apparat, der die Sonne oder vielmehr den Sonnenstrahl zum Stillstand bringt.

Bei vielen optischen Versuchen und wissenschaftlichen Untersuchungen über das Licht, über seine Brechung, Farbenzerstreuung, Interferenz, [mit diesem Namen (von inter, zwischen, und ferre, tragen, hervorbringen) bezeichnete Young zuerst die Veränderungen, welche bei 2 oder mehreren unter sehr geringen Winkeln zusammentreffenden Lichtstrahlen zwischen denselben hervorgebracht werden] über Licht- und Wärmevertheilung in den verschiedenen Strahlen des prismatischen Farben-Spectrums bedarf man des Sonnenlichts, welches durch seine grofse Intensität und Weifse alle die Mittel, durch welche man dasselbe in vielen Fällen zu ersetzen bemüht ist, bedeutend übertrifft. Gewöhnlich stellt man derartige Versuche in einem verfinsterten Zimmer an,

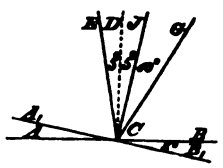
und läſst die Sonnenstrahlen durch eine kleine runde Oeffnung in der Fensterlade, als ein beschränktes cylindrisches Strahlenbündel in das Zimmer fallen. Dies Strahlenbündel soll dabei wo möglich eine horizontale und feststehende Richtung erhalten, eine Anforderung, welche besondere Hülfsmittel deswegen in Anspruch nimmt, weil nur selten ein Zimmer die günstigste Lage hat und die Sonne in ihrer scheinbaren täglichen Bewegung in jedem Augenblick ihre Stelle ändert. Die einfachste Vorrichtung, um den eintretenden Strahlen die erforderliche Richtung zu geben, besteht in einem Spiegel, dem man durch Schrauben-Bewegungen innerhalb des Zimmers dicht vor der Laden-Oeffnung leicht jede Stellung geben kann, so, daſs der seine Fläche treffende Sonnenstrahl *ab* horizontal in *bd* durch die Oeffnung ins Zimmer hinein reflectirt werde.

Fig. 697.



Mangelhaft bleibt diese Vorrichtung deshalb, weil man der fortrückenden Sonne wegen nicht aufhören darf, die Spiegelstellung zu corrigiren. Die bisherigen selbstthätigen Heliostaten waren von complicirter Einrichtung und kosteten in genauer Ausführung jedesmal einige Hundert Thaler; ein wesentlicher Theil des Instruments bestand in einem Uhrwerk, welches die den Spiegel tragende Axe drehen und zugleich die Neigung dieser Axe in jedem Augenblick den Erfordernissen der richtigen constanten Reflections-Richtung entsprechend einstellen muſste. Durch August wurde späterhin nachgewiesen, daſs ein Spiegel *a*, dessen Fläche parallel mit einer Axe liegt, die sich innerhalb 48 Stunden 1 Mal um sich selbst dreht, in dem Fall einen constanten reflectirten Sonnenstrahl liefert, wenn diese Drehungs-Axe *bc* mit der Welt-Axe parallel ist. Denn es sei *AB* ein Spiegel, *DC* das Einfallsloth, die Sonne stehe in der Richtung *CF*, $\angle DCF = 5°$, so wird der Strahl *FC* nach *CE* reflectirt, so daſs $\angle DCE$ ebenfalls 5° beträgt. Soll nun der reflectirte Strahl *CE* fixirt bleiben, und hat die Sonne nach 40 Minuten die Richtung *CG* erhalten, so daſs also $\angle FCG = 10°$ beträgt, indem der Kreis,

Fig. 698.

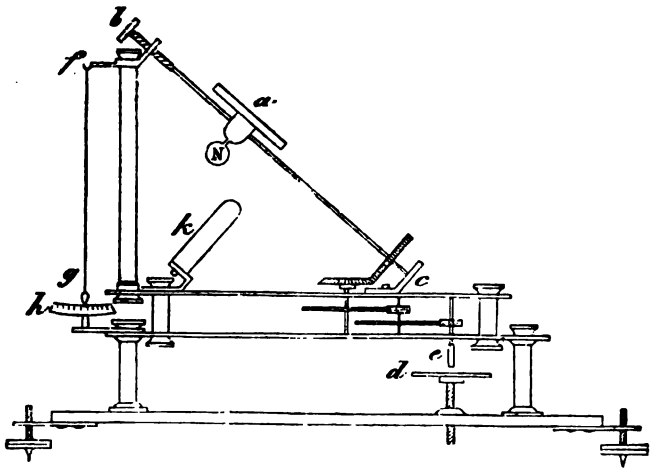


den die Sonne scheinbar alle 24 durchläuft, in 360° eingetheilt muſs bis dahin der Spiegel in *A'B'* gekommen sein, wobei $\angle$ beträgt; denn alsdann ist das loth *DC* ebenfalls um 5° nach rückt, der Strahl *GC* trifft de unter dem $\angle GCF = 10°$ und demselben Strahl *CE*, der mit $\angle ECF = 10°$ bildet, reflectirt.

Die Drehungs-Axe muſs als schattenwerfende Stift einer Sc parallel der Welt- oder Erd-Ax der an derselben befestigte Sp sich in einem Tage nur ein h umwenden, d. h. er folgt dem Sonne, jedoch nur mit der hal kel-Geschwindigkeit als jene d selbst. Diese Bedingung wir Grüel'schen Heliostat durch ein Räderwerk erfüllt, welches mitt gewöhnlichen Taschen-Uhr in gesetzt werden kann, indem man Uhrschlüssel ähnliches Stück Axe des Minutenzeigers der Uhr aufsteckt, während letztere beliebig höher oder tiefer zu Support *d* unter jenem Stück

Das Instrument kostet 28 R nur den zehnten Theil der frühe ten Heliostaten. Die gänzliche des Apparats von einem Uh scheint deshalb gerechtfertigt, damit fest verbundenen Uhrw längerer Unthätigkeit und Aufb nicht immer ihren Dienst leist sie später einmal gebraucht w len. Eine gehende Taschen-U gegen überall zur Hand. Diese als Triebwerk zum Heliostat be nicht; sie wird in ihrem Ga nicht verzögert, da sie eine nu geringe Kraftanstrengung zu üb hat. Das Werk geht fast ohne bungswiderstände und die Uhr an einer Stelle, wo die hervor und mit der Minutenzeiger-Axe Bewegung relativ schnell ersche die Bewegung des 48 Mal langs drehenden Spiegels. Es ist abe einfachsten mechanischen Princ

Fig. 699.



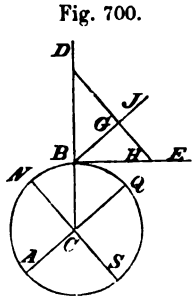
die Kraft, welche von der Uhr-Axe
ht, gerade 48 Mal verstärkt auf die
el-Axe wirken muſs, letztere ist
in balancirt, sie ist nämlich auf
Seiten des Umfangs in den gegen-
egenden Punkten mit gleich viel
, deshalb auch der Spiegel *a* mit
Gegengewicht versehen, und folg-
ine freie Axe Daher rührt es, daſs
einste Uhr gebraucht, ja sogar die
el-Axe versuchsweise beschwert wer-
tann. Zur Orientirung ist das In-
ent mit einem Pendel *fg* und Grad-
k für die Polhöhe, sodann mit
Aequinoctial-Sonnen-Uhr *k* verse-
Auf die Declinations-Aenderung
halb der Beobachtungszeit ist nicht
icht genommen, da die hierdurch
bende Differenz verschwindend klein

genauerer Erkennung der letztge-
n Orientirung des gedachten In-
ents füge ich noch folgende Erläu-
gen hinzu:

beistehende Kreis bedeute den
schnitt unserer Erde durch irgend
Wohnort, z. B. Berlin, und durch
Pole. *B* bedeute den Ort Berlins,
Nordpol, *S* den Südpol; dann ist
inie *NS* die Erdaxe und zugleich
heil der Welt-Axe, mit dieser pa-
soll die oben gedachte Drehungs-
e gelegt werden, und dies geschieht
einfach wie folgende Betrachtung

t man durch den Mittelpunkt *C*
cht auf *NS* die Linie *AQ*, so ist
diese Linie *AQ* der Durchschnitt des Aequators. Berlin liegt, wie jede Charte von Deutschland besagt, unter 52° 31′ nördlicher Breite, d. h der Winkel *BCQ* oder der Bogen *BQ* beträgt 52° 31′. Dieser Winkel oder Bogen heiſst die Aequatorhöhe des Ortes *B*, so wie der Winkel *BCN* oder der Bogen *BN* = 37° 29′ die Polhöhe desselben Ortes. Eine Tangente *BE* in *B* an dem Kreis ist die Horizontale, die Verlängerung *BD* von *CB* das Loth für Berlin.

Fig. 700.



Zieht man nun *BF* parallel *AQ* und fällt von einem Punkt *D* das Loth *DG* auf *BF*, so ist *DG* mit der Verlängerung *GH*, oder *DH* parallel der Welt-Axe *NS*, $\angle BDH = \angle BCN = 37° 29'$ und $\angle DHB = BCQ = 52° 31'$ = der Aequatorhöhe.

Die Axe *bc* des Apparats muſs nun mit der Linie *DH* übereinstimmen; für den Gebrauch in Berlin also muſs *bc* mit der Horizontale *cg* den $\angle bcg = 52° 31'$

bilden, für eine andere Stadt unter einem anderen Breitengrade belegen, diesen anderen Breitenwinkel, und zu dieser Einstellung dient der Gradbogen *k*, der so eingetheilt und so mit Zahlen versehen ist, dafs wenn mittelst der Fufs-Schrauben der Apparat nach vorn oder hinten gehoben oder gesenkt wird bis das Loth *fg* in die Zahl des Orts Breitengrades weist, die Axe *bc* mit dem Horizont denselben Breitenwinkel bildet.

Nachdem auf diese Weise die Neigung der Axe *bc* gegen den Horizont des Ortes richtig eingestellt ist, ist noch deren Horizontaldrehung erforderlich, um die Parallelität derselben mit der Welt-Axe herzustellen, und dies geschieht einfach und schnell mit Hülfe der Aequinoctial-Sonnen Uhr *k*, zu der die Axe *bc* den Zeiger bildet. Diese Uhr *k*, ein Zifferblatt mit derselben gleichmäfsigen Eintheilung wie bei jeder andern Uhr, zeigt, wenn sie senkrecht auf die Welt-Axe gerichtet ist, die Zeit mit der gröfsten Sicherheit; wenn man daher nach der auf *d* liegenden richtig gehenden Taschen-Uhr dieselbe Zeit durch die Axe *bc* auf *k* einstellt, so ist diese Axe mit der Welt-Axe parallel.

Helischer oder **Heliacischer Aufgang und Untergang** der Gestirne s. u. „Aufgang und Untergang der Gestirne, poetischer“ pag. 179.

Hemicyklisch, s. v. w. „halbkreisförmig“.

Hemididodekaeder, s. v. w. „Dreiunddreikantner“.

Hemiedrische Formen, s. u. „Formen der Krystalle“.

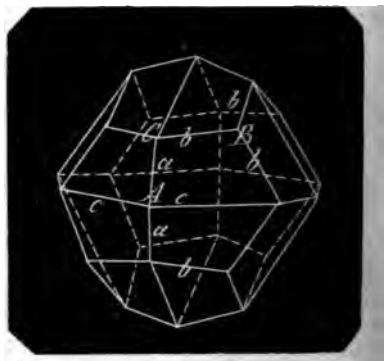
Hemihexakisoctaeder, s. v w. „Halbsechsmalachtflächner“ (s. d.)

Hemiicositetraeder, s. v. w. „Halbvierundzwanzigflächner“ (s. d.)

Hemioctaeder, s. v. w. „Halbachtflächner“ (s. d.)

Hemioctakishexaeder, „Halbachtmalsechsflächner“. Diese Krystalle haben 24 Flächen, 48 Kanten und 26 Ecken. Die Flächen sind unregelmäfsige Vierecke mit 2 nebeneinanderliegenden gleichen Seiten. Die Kanten sind dreierlei Art: 12 Kanten *a* in ähnlicher Lage mit den Grundkanten der Hemitetrakishexaeder, 24 Kanten *b* in ähnlicher Lage mit den Kanten *b* der Halbviermalsechsflächner, Fig. 684, und 12 Kanten *c* in ähnlicher Lage wie in Fig. 684 die Normale von der Ecke *A* auf die Grundkante *a*.

Fig. 701.



Von den Ecken sind 6 vierflächig und symmetrisch (*A*); sie liegen zwischen 2 Kanten *a* und 2 Kanten *c* und wie die Ecken des Octaeders; 8 sind 3flächig und regulär (*B*); sie werden von den neben einander liegenden gleichen Flächenseiten *b* gebildet und liegen wie die Ecken des Hexaeders, und 12 Kanten sind 4flächig irregulär (*C*), sie haben die Lage wie die Kanten *B*, *B'* an den Grundkanten Fig. 684.

Hemiorthotypes Krystallisationssystem ist gleichbedeutend mit „Einundeinaxiges System“.

Hemiprismatisches Krystallisationssystem ist der Name des 5ten Systems, des zwei- und eingliedrigen Systems, wie ihn Mohs eingeführt hat. Es befinden sich in demselben 3 ungleichartige Axen, von denen eine mit den anderen beiden rechtwinklig, die anderen beiden aber schiefwinklig mit einander liegen.

Hemisphäre, s. v. w. „Halbkugel, besonders die hohle scheinbare Himmelshalbkugel“.

Hemitetrakishexaeder, s. v. w. „Halbviermalsechsflächner“.

Hemitriakisoctaeder, s. v. w. „Deltoiddodekaeder“.

Hemmung bei Chronometern, s. „Chronometer“, pag. 31.

Herbst, die Jahreszeit von dem scheinbaren Eintritt der Sonne in den Herbstnachtgleichenpunkt bis zum Eintritt derselben in den Winterwendepunkt, oder von dem wirklichen Eintritt der Erde in den Frühlingspunkt bis zum Eintritt derselben in den Sommerwendepunkt. Er dauert vom 23ten September bis zum 21 bis 22ten December. Vergl. „astro-

Jahreszeiten und Früh-

...tgleiche, s. u. „Ekliptik".

...kt, s. v. w. „Herbstnacht-
Herbstnachtgleichen-
...gleiche Frühlingspunkt".

..., ungleichartig, das Ent-
... von homogen, gleich-
)

..., **Einschattige**, (von ἕτερος
...ία Schatten) die Bewohner
...ten Zone, weil die Sonne
...en das ganze Jahr über nur
...ite wirft; sie heiſsen auch
Gegenschattige, weil die
...r nördlich gemäſsigten Zone
...en nach Norden, die der süd-
...ach Süden zu haben.

...es Zahlensystem, Hexadik,
die Werthe der Zahlenstel-
... Rechten zur Linken nach
...n von 6 steigen. Es gibt
...rn 1 bis 5; die Zahl 6 wird
...hl 12 wird 20 geschrieben.
...disches Zahlensystem".

... ist ein von 6 Vierecken be-
...lyeder, das regelmäſsige ist

..., (Kryst) gehört zu dem re-
...tem (s. „Axen der Kry-
...t Fig. 135 bis 137).

...cken, (Kryst.) s. „Dode-
...g. 319.

...che Axen, s. „Axen, hexa-

... s. v. w. „Sechseck".

...le Säule, (Kryst.) sechssei-
...e ist ein gerades Prisma mit
...g sechseckigen parallelen End-
... 6 rectangulären Seitenflächen,
...ligen gleichen Randkanten und
... Seitenkanten. Die Hauptaxe
...de Verbindungslinie zwischen
...nkten der beiden Endflächen,
...naxen verbinden die Mittel-
... gegenüberliegender Seiten-

...ales Krystallisationssystem
...deutend mit dem dreiundein-
...em (s. „Axensysteme der
..." pag. 260).

...l-Dodekaeder, Hexagondode-
...n punktirten Linien, Fig. 147,
...d. I. abgebildet. Es gehört
...i und einaxigen System. Es
...hschenklige gleiche Dreiecke

zu Flächen; 18 Kanten, von welchen 12 gleiche stumpfe Scheitelkanten *AD*, *BD*, ... und 6 gleiche in einer Ebene liegende Randkanten *DH*, *HG*..., 8 Ecken, von diesen sind 2 sechskantige Scheitelecken *A*, *B* und 6 vierflächige symmetrische Randecken.

Hexagonalsystem, s. v. w. „Hexagonales Krystallisationssystem".

Hexagonalzahlen, sechseckige Zahlen sind die Reihe von Zahlen, deren Bildung das Sechseck zu Grunde liegt (vergl. „Dekagonalzahlen, Dodekagonalzahlen"). Die Zahlenreihe ist

$$1 \cdot 6 \cdot 15 \cdot 28 \cdot 45 \ldots . n(2n-1)$$

1. Differenzenreihe

$$5 \quad 9 \quad 13 \quad 17 \ldots .$$

2. Differenzenreihe

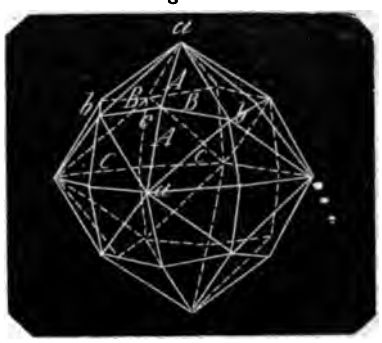
$$4 \quad 4 \quad 4 \ldots .$$

die Summe der ersten n Hexagonalzahlen ist

$$= \frac{n(n+1)(4n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Hexakisoctaeder, (Kryst.), Sechsmalachtflächner. Er hat 48 Flächen in ungleichseitigen Dreiecken, von denen immer 6 um jede der 8 Octaederecken sich gruppiren, 72 Kanten und 26 Ecken.

Fig. 702.



Die Kanten sind dreierlei: 24 wie *A*, von denen je 2 immer 2 Octaederaxen oder Octaederecken mit einander verbinden; 24 wie *B*, von denen je 2 immer 2 Hexaederecken mit einander verbinden und 24 wie *C*, welche die Octaederecken mit den Hexaederecken verbinden.

Von den Ecken sind 6 wie *a* achtflächig symmetrisch und liegen wie die Octaederecken; 8 Ecken wie *b*, sechsflächig symmetrisch, liegen wie die Hexaederecken und 12 Ecken wie *c* vierflächig symmetrisch.

Man hat von den Hexakisoctaedern 5

Arten oder Abänderungen in der Form, so dafs bald die Hexaederecken, bald die Octaederecken mehr hervortreten.

Hexakistetraeder (Kryst) hat 24 Flächen in ungleichseitigen Dreiecken, 36 Kanten, von denen die 3 zu einer Fläche gehörenden ungleich sind und 14 Ecken. Von diesen sind 4 Ecken sechskantig spitz, 4 Ecken sechskantig stumpf, und 6 Ecken sind vierkantig.

Hexangulär, s. v. w. „sechseckig".

Himmel, der gestirnte Himmel ist der Inbegriff aller in dem über unsrem Haupt befindlichen unermefslichen Raum sich bewegenden Gestirne.

Himmelsaequator, s. „Aequator".

Himmelserscheinungen sind die am Himmel unerwarteten Vorkommnisse, als die Erscheinung eines noch nicht dagewesenen Kometen, von Nebensonnen, von Nordlichtern. Ferner die zwar vorherzubestimmenden aber in Folge verschiedener Constellationen zwischen Sonne, Erde und Mond zu verschiedenen Zeiten und verschiedengradig eintretenden Sonnen- und Mondfinsternisse, ferner die zwar regelmäfsigen aber in weniger oder mehr grofsen Zeitabständen wiederkehrenden Himmelskörper als bekannte Kometen und auffallend glänzende Gestirne wie der Jupiter und die Venus als Morgen- oder Abendstern zu Zeiten in besonderem Glanze.

Himmelsgegenden sind die den Cardinalpunkten (s. d.), dem Ost-, West-, Süd- und Nordpunkte am Horizont nahe gelegenen Punkte und werden desgleichen mit denselben Namen Osten, Westen, Süden und Norden bezeichnet. Diese Punkte werden allein durch die Drehung der Erde um ihre Axe bestimmt, und für jeden Ort der Erde ist der Punkt in dem Horizont des Meridians, in welchem die Sonne culminirt, der Südpunkt, der ihm diametral gegenüberliegende der Nordpunkt, der dem Südpunkt links rechtwinklig liegende Punkt der Ostpunkt und der diesem diametral gegenüberliegende, also rechts rechtwinklig vom Südpunkt liegende Punkt der Westpunkt.

Für alle Orte der Erde befinden sich sämmtliche Ost- und Westpunkte in der bis ins Unendliche erweitert zu denkenden Erdaequatorebene. Die Süd- und Nordpunkte jedes Orts liegen in dessen Meridianebene.

Der Nordpol und der Südpol der Erde haben keine Himmelsgegenden, jeder Punkt des Horizonts daselbst Sonnenaufgang noch Sonne noch Culmination.

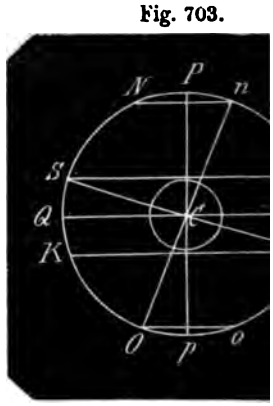
Ebenso hat der gestirnte Hi Himmelsgegenden, weil sich nur auf die Erde beziehen.

Himmelskörper ist jedes G

Himmelskreise sind die E kreise der Himmelskugel.

Himmelskugel, die schei Kugeloberfläche des gestirnte Um die scheinbare Bewegung verfolgen zu können und Be setze abzuleiten, hat man sch esten Alterthum die Himmels Linien und Kreise, den sic wegungen der Gestirne entspr getheilt.

Fig. 703.



Zwei Punkte am Himmel scheinen für ewige Zeiten stil und wenn man *P* mit *p* dur rade Linie verbindet, so schei liche Gestirne um diese gera welche mitten durch die Er parallelen und lothrecht auf lichen Kreisen sich herumzud diesem Grunde nennt man *Pp* die Weltaxe, Himmel deren Endpunkte *P*, *p* die Pc pole, Himmelspole.

Die auf *Pp* normalen Krei *Nn*, die mit einander parallel bewegen, heifsen Parallelk da deren vollständige Umdrel halb 24 Stunden erfolgt, Ta Von diesen Kreisen heifst durch den Mittelpunkt *C* de (und der Erde) liegende Kr Aequator (s. d.) der Weltmelsaequator.

ɔt *Sk* den Kreis, in welchem
ɔ ihren jährlichen Umlauf um
ɪu machen scheint, die Eklip-
ɔeträgt deren Winkel *SCQ* mit
ıator sehr nahe 23½ Grad, und
ı in dessen vom Aequator ent-
Punkten *S* und *k* die Paral-
ɪs, *Kk* zieht, so begrenzen diese
der Sonne. Wenn die Sonne
ch *S* aufgestiegen ist, so steigt
: wieder herab, und wenn sie
ıabgestiegen ist, so steigt sie
ıs wieder hinauf. Die Sonne
diesen Punkten, oder vielmehr
ɐisen *Ss* und *Kk* sich zu wen-
deshalb werden diese beiden
Wendekreise genannt. Fer-
ıt es, als wolle die Sonne in
ɐisen stehen bleiben, weil man
ırung des Aufsteigens in das
in *Ss* und das Entgegenge-
Kk nicht sobald wahrnimmt,
: heifsen die Punkte der Son-
ı nicht nur Wendepunkte,
auch Sonnenstillstands-
Solstitialpunkte.
ıralten Astronomen, von denen
leutende astronomische Kennt-
kommen haben, auf der nörd-
bkugel der Erde wohnten, so
ich auch alle Jahreszeiten und
zusammenhangenden Bezeich-
f die nördliche Halbkugel. Nun
ı Sommeranfang (in der südli-
ɪeranfang) wenn die Sonne in
ɐpunkt *S* tritt, daher heifst der
Wendepunkt der Sommer-
ınkt, das Sommersolsti-
d der Kreis *Ss* der Sommer-
ɐeis. Ferner ist bei uns Win-
(in der südlichen Halbkugel
fang) wenn die Sonne in den
Wendekreis *Kk* tritt, und des-
ıier die Winterwende, das
olstitium.
t man im Weltmittelpunkt *C*
ɪlpunkt der Erde) auf der Ebene
ɪkliptik einen normalen Durch-
), so sind die ∠ *PCn*, ∠ *pCO*
SCQ = 23½ Grad; die Linie *nO*
xe der Ekliptik. Zieht man
Endpunkte *n*, *O* dieser Axe
ɪlkreise *nN*, *Oo*, so heifsen diese
·kreise.
inkel *SCQ* zwischen Ekliptik
ator heifst die Schiefe der
:

skunde ist Beschreibung des
eine Astrographie oder Astro-
d).

smechanik ist die Summe aller Sätze und Gesetze über die Bewegung der Gestirne; sie gründen sich sämmtlich auf das von Newton entdeckte Gravitationsprincip.

Himmelsmeridiane sind die durch beide Weltpole *P*, *p* gelegten gröfsten Kreise der hohlen Himmelskugel, sie stehen sämmtlich auf dem Aequator und den Parallelkreisen senkrecht. S. „Astronomischer Meridian, astronomischer Horizont“ mit Fig. 92.

Himmelspole, s. u. „Himmelskugel“.

Hinterglieder einer Proportion sind das 3te und 4te Glied.

Höhe ist die dritte Dimension eines körperlichen Raums; auch für geschlossene ebene Räume wird Höhe statt Breite, als zweite Dimension genannt. Besonders geschieht dies bei geradlinigen Figuren, für welche man eine Seite als Grundlinie feststellt (vergl. „Basis, geometrische“). Es ist dann die Höhe der Figur der Abstand des von der Grundlinie entferntesten Punktes des Umfangs der Figur von der Grundlinie oder der Abstand zwischen der Grundlinie und der dieser parallelen Seite der Figur; ersteres wie bei Dreiecken, letzteres wie bei Parallelogrammen und Trapezen. Bei prismatischen Körpern ist die Höhe die Entfernung zwischen beiden parallelen Endflächen, bei pyramidalen Körpern der Abstand der Spitze von der Grundebene.

Höhe des Falls, Fallhöhe ist die Länge, um welche ein Körper in einer bestimmten Zeit in der Richtung der wirkenden Schwerkraft fällt. Beim freien Fall ist die Fallhöhe mit seiner wirklichen Bewegung dieselbe, beim Fall auf schiefer Ebene ist sie die lothrechte Projection seiner wirklichen Bewegung; desgleichen beim Fall in einer Curve, beim Pendel.

Höhe eines Gestirns über einen Ort der Erdoberfläche ist der in dem Scheitelkreis des Gestirns befindliche zwischen diesem und dem Horizont begriffene Bogen. Höhe und Scheitelabstand eines Gestirns in Beziehung auf denselben Ort ergänzen einander zu 90 Grad.

Höhe eines Orts der Erde ist die lothrecht zu denkende Entfernung seines Terrains von einer Normal-Horizontalebene, zu welcher in der Regel der nächst gelegene Meeresspiegel genommen wird. Ueber die Ermittelung dieser Höhen s. den Art. „Barometermessungen“.

Höhe des Pols, Polhöhe eines Orts ist der in dem Scheitelkreis des Pols also in dem Meridian des Orts gemessene Bo-

gen zwischen seinem Horizont und dem Pol (s. Höhe eines Gestirns); die Polhöhe eines Orts ist gleich dessen geographischer Breite.

Höhen, correspondirende, s. „correspondirende Höhen".

Höhenkreis, Almucantharatskreis ist der durch irgend ein Gestirn mit dem Horizont eines Orts ∓ gezogene Kreis (s. „Almucantharat").

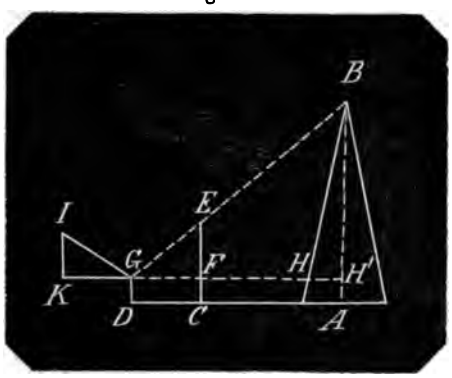
Höhenmesser, s. „Altimeter".

Höhenmessung. Höhen werden am einfachsten direct gemessen, indem man von dem obersten Punkt eine beschwerte Schnur herabläfst oder Maafsstäbe anlegt. In den seltensten Fällen ist dies jedoch nur möglich und dann kann die Messung nur indirect geschehen. Die Methoden der Vermessung hangen von Lokalverhältnissen ab und sind entweder mathematisch, nämlich mit Hülfe von Längenvermessungen auf dem horizontalen oder geneigtem Terrain in der Nähe der zu messenden Höhe, durch Nivelliren, durch Winkelmessungen und trigonometrische Berechnungen oder sie sind physikalisch, mit Hülfe des Barometers.

1. Ist die Höhe zugänglich, so kann man, wenn es auf grofse Genauigkeit nicht ankommt, ein einfaches Verfahren mit Hülfe gerader Stäbe anwenden.

Es sei AB ein zugänglicher Thurm, so mifst man von dem unter C lothrecht befindlichen Punkt A ab eine gerade Linie AC. Ist AC nicht horizontal, sondern schräg oder uneben, so bestimmt

Fig. 704.



man die Horizontalprojection AC zwischen den Punkten A und C. Man steckt in C einen Stab CE lothrecht ein, geht mit einem zweiten Stabe DG in der Richtu AC so weit zurück, bis man durch E schlagen die Oberkante G mit den Pu ten E und B in eine gerade Linie br gen kann. Hierauf nivellirt man von aus die Punkte F und H, desgleich den Punkt H nach H' in der lothrech AB, mifst GF, FE, so hat man

$$GF : FE = GF + AC : BH'$$

woraus $$BH' = \frac{FE}{FG} \times (GF + AC)$$

und $$AB = BH' + H'A.$$

2. Eben so kann man eine lange ge gemessene Stange CE mittelst eines B loths in senkrechten Stand bringen, hellem Sonnenschein die Länge des der Sonne hinter ihn geworfenen Sc tens und zugleich den Schattenpunkt Thurmspitze markiren. Wird der le Punkt gegen den Standpunkt A Thurms nivellirt, so erhält man die H AB des Thurms durch dieselbe Pro tion, wie für Fig. 704.

Beide Methoden, besonders die letz sind nicht zuverlässig genau.

3. Eine mit beiden ähnliche Met ist mathematisch-physikalisch; die sung geschieht nämlich mit Hülfe Eigenschaft des Lichtstrahls, dafs er ter gleichen Winkeln reflectirt wird: lege in die Nähe von G genau horiz einen Spiegel, in K errichte loth einen breiten Stab mit Schlitz und längs desselben eine Scheibe mit kleiner Oeffnung so weit in die H bis man durch diese Oeffnung in e Punkt G das Bild der Thurmspitze blickt. Alsdann ist

$$\angle BGH = \angle JGK$$

und man hat:

$$GK : KJ = GH' : H'B$$

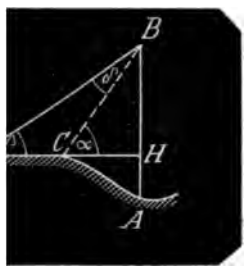
Eben so gut kann man einen in Ruhe befindlichen Wasserspi benutzen, wenn der Einfallsp G des Lichtstrahls genau zu kiren ist.

4. Hat man ein Winkelinstru zur Hand, so dafs die $\angle BCH$ ACH, Fig. 705, bis zu einer M Schärfe gemessen werden kö so fertige man sich eine Tange tabelle, je nach der Genaui welche man an die Vermessun ansprucht. Als:

Für $\angle BCH$	$= 11°19'$	ist $BH = 0,2$
	$= 16°42'$	$= 0,3$
	$= 21°48'$	$= 0,4$
	$= 26°34'$	$= 0,5$
	$= 30°58'$	$= 0,6$
	$= 35°\ 0'$	$= 0,7$

$= 38°40'$ ist $BH = 0{,}8 \times CH$
$= 45°$ $= 1{,}0 \times CH$

Fig. 705.



lle, sowohl auf den Eleva
CH, als auf den Depressions-
angewendet gibt die Höhe
otem Theil der Entfernung
gemessen werden mufs.
derselben Bedingung, näm-
er horizontale Abstand AD
sen oder durch Seitenver-
erechnet werden kann, wird

die Aufgabe trigonometrisch gelöst, wenn man (Fig. 704) $\angle BGH = \alpha$ mifst. Denn es ist

$$BH' = GH' \cdot tg\,\alpha$$

also $$AB = AH' + GH' \cdot tg\,\alpha$$

Je näher man den $\angle \alpha$ an 45° nimmt, desto geringer wird der Fehler in Folge der Ungenauigkeit des Winkelinstruments.

Denn es ist $tg\,45° = 1{,}000\,0000$
$tg\,45°\,1' = 1{,}000\,5819$

Nimmt man nun $GH' = 1000$ Fufs, so erhält man

für $\alpha = 45°$ die Höhe $BH' = 1000$ Fufs
für $\alpha = 45°\,1'$ $BH' = 1000{,}5819$

Bei einem Fehler in dem Winkel um eine Minute würde man also bei einer Höhe von 1000 Fufs einen Fehler von 0,5819 Fufs erhalten. Nimmt man dagegen α nur 10°, so hat man

$tg\,10° = 0{,}176\,3270$
$tg\,10°\,1' = 0{,}176\,6269$

Es ist also $tg\,10°\,1' = tg\,10° + 0{,}0003$

Bei einer Höhe $BH' = 1000'$ würde für einen $\angle BGH' = 10°$ der Abstand $GH' = 5671{,}2818$ Fufs sein müssen, und es ist

$18 \times tg\,10° = H'B = 1000$ Fufs
$18 \times tg\,10°\,1'$ ist also $1000 + 5671{,}2818 \times 0{,}0003 = 1000 + 1{,}70138$

ler in der Höhe von 1000
1,70138 Fufs, wenn man
n Elevationswinkel 10° um
vermifst, also das dreifache
der bei einem Winkel von

ndet statt, wenn man grö-
mifst als 45°.
nt man die Länge $GH' = 500$
hört hierzu ein $\angle \alpha$, dafs
000 ist, also $tg\,\alpha = 2$ und
'.
an hätte sich auch hier um
vermessen, so erhält man
$tg\,63°\,27'\,6'' = 2{,}0014599$
$0 \times 2{,}001\,4599 = 1000{,}73$ Fufs
m ein gröfserer Fehler als

an in einer mit BH in der-
liegenden Linie HD (Fig. 705) die ganze Länge von H ab nicht messen, sondern nur ein Stück $CD = a$ derselben, so mifst man die Winkel α und β.

Bezeichnet man $\angle CBD = \alpha - \beta$ mit δ so hat man

1. $CD : BC = \sin\delta : \sin\beta$
2. $BC : BH = 1 : \sin\alpha$

hieraus $$CD : BH = \sin\delta : \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

und $$BH = a \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$$

Die Höhe HA wird dann direct gemessen.

Da aus 1. $$BC = a \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\delta}$$

und $$CH = BC \cos\alpha$$

so hat man zugleich den horizontalen Abstand

$$CH = a \cdot \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)} \cos\alpha$$

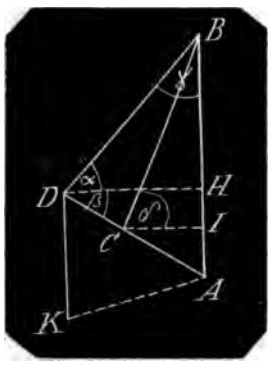
$$a\left(1 + \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}\cos\alpha\right) = a \cdot \frac{\sin(\alpha-\beta) + \sin\beta \cdot \cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)} = a \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$$

m letzten Ausdruck kommt man auch, wenn man setzt

$$DH = BH \times \cot\beta = a \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)} \cdot \cot\beta = a \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$$

7. Ist von dem Fufspunkt A der Höhe AB nur eine schräge Standlinie $AD = a$ zu messen, und man mifst den Elevationswinkel α, den Depressionswinkel β, so hat man den $\angle ABD = \gamma = 90° - \alpha$ und es ist

Fig. 706.



$$AD : AB = \sin\gamma : \sin(\alpha + \beta)$$

oder $$a : AB = \cos\alpha : \sin(\alpha + \beta)$$

woraus $$AB = a \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha}$$

Die Höhe BH, nämlich die vom P B über dem Horizont von D, erhält aus

$$AH = AD \sin\beta = a \sin\beta$$

woraus

$$BH = AB - AH = a\left(\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha} - \sin\right.$$

$$= a\frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha}$$

Dieses Resultat erhält man auch, man die Horizontale DH drückt, nämlich

$$DH = BH \cdot tg\,\gamma = DA \cdot \cos\beta$$

also $$BH = a \cdot \frac{\cos\beta}{\cot\alpha} = a \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \cos}{\cos\alpha}$$

8. Ist von der schrägen Standlinie nur ein Stück $CD = b$ zu messen, mifst man noch den Elevationswinkel $BCJ = \delta$, und es ist $\angle JCA = \beta$, $\angle$ $= \delta - \alpha$, $\angle BAC = 90° - \beta$.

Nun hat man

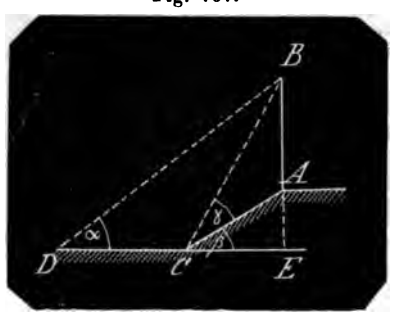
$$CD : BC = \sin DBC : \sin BDA = \sin(\delta - \alpha) : \sin(\alpha + \beta)$$
$$BC : AB = \sin BAC : \sin BCA = \sin(90° - \beta) : \sin(\beta + \delta)$$

Also $$CD : AB = \sin(\delta - \alpha) \cdot \cos\beta : \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\beta + \delta)$$

woraus $$AB = b \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)\sin(\beta + \delta)}{\sin(\delta - \alpha)\cos\beta}$$

9. Um die Höhe AB zu messen, ist die in derselben Ebene mit AB belegene Horizontale $CD = a$ gegeben, die $\angle BDC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$, $\angle ACE = \beta$ sind gemessen. Bezeichnet man $\angle DBC = \gamma + \beta - \alpha$ mit δ, so hat man

Fig. 707.



$$BC : AB = \sin BAC \quad \sin BCA$$

Nun ist

$$\angle BAC = \angle AEC + \angle ACE = 90° + \beta$$

also

$$\sin BAC = \sin(90° + \beta) = \cos\beta$$

daher

$$BC : AB = \cos\beta : \sin\gamma$$

ferner ist

$$CD : BC = \sin CBD : \sin BDC = \sin\delta :$$

Hieraus

$$CD : AB = \cos\beta \cdot \sin\delta : \sin\gamma \cdot \sin\alpha$$

folglich

$$AB = a \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\gamma}{\sin\delta \cdot \cos\beta}$$

10. Um die Höhe AB zu finden, ist schräg ansteigende Standlinie $DA =$ messen, desgleichen sind es die Elevat winkel $BDE = \alpha$, $ADE = \beta$, BCF nun ist $\angle DBE = 90° - \alpha$ und man

$$AD : AB = \sin DBE : \sin ADB$$

oder $$a : AB = \cos\alpha : \sin(\alpha - \beta)$$

woraus $$AB = a\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha}$$

Die relative Höhe BE, nämlich Erhöhung des Punkts B über dem zont in D hat man

$$BE = AB + AE = a\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha} + a\sin$$

$$= a \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha}$$

Man erhält diese Formel auch aus

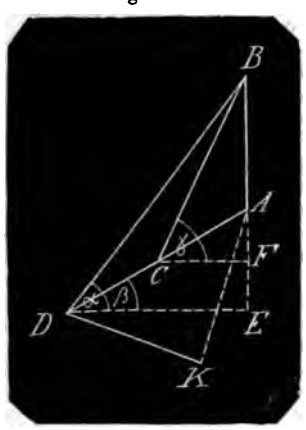
$$BE = DE \cdot tg\,\alpha = AD \cdot \cos\beta \cdot tg\,\alpha = \alpha\,\frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha}$$

11. Ist von dieser Standlinie nur ein Stück $DC = b$ gegeben, so mifst man noch den Elevationswinkel $BCF = \gamma$. Dann hat man

$$BC : DC = \sin BDC : \sin DBC = \sin(\alpha - \beta) : \sin(\gamma - \alpha)$$
$$AB : BC = \sin BCA : \sin BAC = \sin(\gamma - \beta) : \sin(90^\circ + \beta)$$

hieraus
$$AB : DC = \sin(\alpha - \beta)\sin(\gamma - \beta) : \sin(\gamma - \alpha) : \cos\beta$$

Fig. 708.



also $$AB = b\,\frac{\sin(\alpha - \beta)\sin(\gamma - \beta)}{\sin(\gamma - \alpha)\cos\beta}$$

12. Es sei zu Vermessung einer Höhe AB keine Standlinie möglich, welche mit der Höhe AB in einerlei Vertikalebene fällt, und nur eine Seitenstandlinie DK zu nehmen, welche horizontal oder schräg sein möge, die jedoch so gewählt werden mufs und immer so gewählt werden kann, dafs von beiden Endpunkten D und K die Endpunkte A und B der Höhe zu visiren sind. Fig. 706 gilt für den Fall, dafs der Fufspunkt A der Höhe unter den Horizonten, Fig. 708 für den Fall, dafs er über den Horizonten der Endpunkte D und K der schrägen Standlinie liegt.

Man mifst die Linie DK, die Winkel ADK und AKD, so läfst sich das schief liegende ebene Dreieck ADK berechnen, folglich auch eine Seite AD oder AK. Nimmt man nun eine derselben als neue Standlinie an, so hat man diese in derselben Vertikalebene mit AB und man kann die Formeln No. 7 und No. 10 anwenden um die Höhe AB zu finden.

Die Höhenmessungen mittelst des Barometers s. u. „Barometermessungen".

Höhenparallaxe. Parallaxe oder parallaktischer Winkel (παραλλαξις, die Verwechselung, der Unterschied) ist der Winkel, den die aus zweien Standpunkten nach einem in demselben Ort verbleibenden sehr entfernten Gegenstände genommenen Visirlinien mit einander bilden, wodurch es geschieht, dafs der Gegenstand, wenn er von einem der beiden Standpunkte aus beobachtet wird, einen anderen scheinbaren Ort in Beziehung auf hinter ihm befindliche feste Punkte zu haben scheint, als wenn er von dem andern Standpunkt aus beobachtet wird, und dafs diese beiden scheinbaren Orte mit einander verwechselt werden können.

Die astronomische Parallaxe bezieht sich auf den Winkel, den die nach einem Gestirn genommenen Visirlinien mit einander bilden, wenn die eine Visirlinie von einem Ort der Erdoberfläche aus genommen und die andere von dem Erdmittelpunkt aus gedacht wird.

Es bedeute der kleine Kreis einen Erddurchschnitt, C dessen Mittelpunkt, O einen Ort der Erdoberfläche. Ist nun S ein Gestirn von mefsbarer Entfernung CS, entweder die Sonne oder der Mond oder ein Planet unsres Sonnensystems, so wird S in O nach der Richtung OS, von C aus in der Richtung CS gesehen. Da nun diese mefsbare Entfernung wegen ihrer Gröfse von den unmefsbaren Entfernungen der Fixsterne mit dem Auge nicht unterschieden werden kann, so versetzt man das Gestirn S von dem Beobachtungsort O aus nach der Richtung OS in unermefsliche Ferne OA, während sein Ort in Beziehung auf die Erde, also in Beziehung auf deren Mittelpunkt in der Richtung CS, also anderswo (in B) zwischen den Fixsternen oder auf der gestirnten Himmelskugel sich befindet. Den Unterschied beider Orte, des beobachteten und des wahren Orts bestimmt nun der Winkel CSO und dieser Winkel ist die Parallaxe des Gestirns S.

In der geraden Linie CO liegt unendlich weit entfernt das Zenith (der Scheitelpunkt) des Ortes O; steht das Gestirn S in dem Punkt Z, also in der Schei-

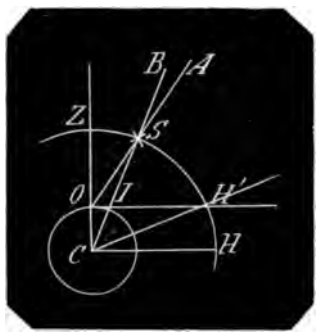
tellinie OZ des Orts O, so wird der Winkel $OSC = 0$; die Parallaxe wird also mit der Höhe des Gestirns immer kleiner und im Zenith des Ortes verschwindet sie.

Steht S in dem Punkt H', d. h. in dem Horizont des Ortes O, so ist die Parallaxe $\angle OH'C$ am gröfsten.

Denn in dem $\triangle SOC$ ist

$$OC : CS = \sin OSC : \sin SOC = \sin OSC : \sin (SOH' + 90°) = \sin OSC : \cos SOH'$$

Fig. 709.



Nun ist OC der Halbmesser r der Erde, CS der Halbmesser R der Bahn des Gestirns S, $\angle OSC$ die Parallaxe p' für die Höhe SH' des Gestirns, $\angle SOH'$ diese Höhe h' des Gestirns für den Halbmesser $= 1$ mithin

$$r : R = \sin p' : \cos h'$$

woraus $$\sin p' = \frac{r}{R} \cos h' \qquad (1)$$

Die Parallaxe p' ist also am gröfsten für $h' = 0$, d. h. wenn S in H steht.

Schreibt man für $\angle SOH'$ den $\angle (ZOH' - ZOS) = 90° - ZOS$

so ist $$r : R = \sin p' : \sin ZOS$$

$\angle ZOS = z'$ ist aber die Zenithdistanz ZS des Gestirns S, mithin hat man

$$r : R = \sin p' : \sin z'$$

und $$\sin p' = \frac{r}{R} \sin z' \qquad (2)$$

Die Sinusse der Parallaxen eines Gestirns verhalten sich also wie die Sinusse der Zenithdistanzen d. h. wie die Sinusse der Abstände des Gestirns vom Scheitel des Beobachtungsorts.

Für $z' = 0$ wird auch $p' = 0$. D. h. ein Gestirn im Scheitel Z eines Beobachtungsorts O hat keine Parallaxe, der beobachtete Ort desselben am Himmel ist auch der wirkliche Ort.

Ist $Z = 90°$, d. h. steht das Gestirn S im Horizont H' des Beobachtungsorts O, so ist p' das Maximum nämlich

$$\sin p' = \frac{r}{R} \qquad (3)$$

Die Parallaxe eines Gestirns, wenn es im Horizont des Beobachtungsorts sich befindet, heifst die Horizontal-Parallaxe des Gestirns, jede andere P., wenn also das Gestirn über dem Horizont des Beobachtungsorts steht, heifst Höhenparallaxe. Bezeichnet man die Horizontalparallaxe mit p, eine beliebige Höhenparallaxe mit p', so hat man aus 2 und 3

$$\sin p' = \sin p \cdot \sin z \qquad (4)$$

Die Horizontalparallaxe eines Gestirns ist bekannt, wenn man dessen Entfernung $CH = R$ kennt. Man findet daher jede beliebige Höhenparallaxe des Gestirns, wenn man dessen Zenithdistanz $ZOS = z'$ mifst.

Der wahre Horizont des Orts O ist CH. Wie nun $\angle SCH$ die wirkliche Höhe, $\angle SOH'$ die beobachtete scheinbare Höhe des Gestirns über dem Horizont von O ist, so ist auch $\angle SCZ$ die wahre und $\angle SOZ$ die beobachtete scheinbare Zenithdistanz des Gestirns für den Ort O. Zur Berechnung der Höhenparallaxe ist, wie oben gezeigt, die scheinbare Höhe oder die scheinbare Zenithdistanz erforderlich. Hat man nun die Parallaxe $\angle OSC$ gefunden, so hat man die wirkliche Höhe h des Gestirns

$$\angle SCH = \angle SJH' = \angle SOH' + \angle OSJ$$

oder $$h = h' + p' \qquad (5)$$

D. h. die wirkliche Höhe eines Gestirns ist = der beobachteten scheinbaren Höhe + der Parallaxe des Gestirns.

Die Horizontalparallaxe eines Gestirns ist

$$p = arc \sin \frac{r}{R} \qquad (6)$$

Je gröfser R ist, desto kleiner ist also die Parallaxe; die P. des Mondes, der nur etwa 50000 Meilen von uns entfernt ist, ist daher bedeutend gröfser als die der Sonne in Entfernung von etwa 20 Millionen Meilen Die Horizontalparallaxe des Mondes in seiner gröfsten Nähe zur Erde ist 61′ 29″, in seiner gröfsten Ferne = 53′ 30″. Die Horizontalparallaxe der Sonne ist 8,5 bis 8,6 Secunden. Für Fixsterne ist die Entfernung R unmefsbar, R ist ∞, mithin die Parallaxe der Fixsterne = 0.

Der Halbmesser r der Erde ist am

m gröſsten, von hier nimmt
ı Meridian ab bis zu den Po-
der Erd-Abplattung wegen am
ıt (s. „Abplattung“). Die
eines Gestirns sind also in
en Breiten der Erdoberfläche
, im Aequator am gröſsten,
olen am kleinsten; man hat
edes Gestirn eine Aequato-
.llaxe und eine Lokalpa-
(Vergl. „Breite, geogra-
pag. 408, No. 5 mit Fig. 243,
›real-Horizontalparal-

ıalysis, s. u. „Analysis“.

enennung bei benannten Zah-
Name der Gröſse, welche ein-
rd; gegen niedere Benen-
r Name des Theils: Beim
Thaler die höhere, Groschen
Benennung.

liptischer Bogen ist ein ellip-
en, der die kleine Axe oder
Parallelen zur Grundlinie hat.

eine Eigenschaft, welche nur
n zukommt. In eigentlicher
ist hohl eine der beiden nur
Arten von Krümmungen, wel-
ım nur Eigenschaften von Be-
, also nur von Linien und
n sein können.
mmung, welche hohl genannt
i Linien diejenige Form, welche
raden Verbindungslinie zweier
Punkte der krummen Linie
henraum einschlieſst, bei Flä-
ıige, welche mit jeder beliebig
ten Ebene einen körperlichen
chlieſst.
te Art der Krümmung ist die
K., das Entgegengesetzte des
Eine Zusammenstellung der
ten hohl und erhaben und
iffsbestimmungen gibt der Art.:
und concav“.
uneigentliche Bedeutung von
der Begriff: leer, welche bei
ı Anwendung gebracht wird:
l-Kugel ist eine volle Ku-
elcher um denselben Mittel-
leere Kugel sich befindet;
ıohle Halbkugel. Hohl-
ein von festen Wänden um-
leerer körperlicher Raum von
oder dem Inhalt eines be-
Körpermaafses.

ſläche ist die hohle Seite einer
Fläche.

er, s. „Concavgläser“.

Hohlkugel, s. u. „Hohl“, 2. Ist der Halbmesser der äuſseren Kugel $= R$, der der inneren $= r$, so ist der Inhalt der Hohlkugel $= \frac{4}{3}\pi (R^3 - r^3)$.

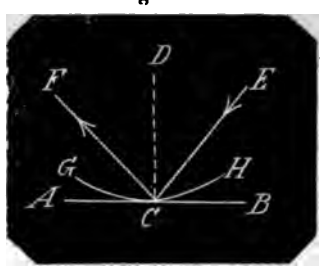
Hohlmaafs, s. u. „Hohl“, 2.

Hohlspiegel, ein Spiegel mit hohler Spiegelfläche, hat immer zum Zweck, von einem Gegenstande kleinere oder gröſsere Bilder und zwar nach vorher bestimmtem Gesetz hervorzubringen, und aus diesem Grunde sind die Formen der hohlen Spiegelflächen nach Krümmungen zu bilden, deren Gesetze in Beziehung auf die Reflexion des Lichtstrahls bekannt sind.

Das einzige Naturgesetz, welches die Construction der Spiegel zu Grunde liegt, ist folgendes:

Wenn ein Lichtstrahl *EC* eine ebene Spiegelfläche *AB* in dem Punkt *C* trifft, so wird er nach einer Richtung *CF* zurückgeworfen, welche mit dem einfallenden Strahl *EC* und dem in *C* auf der Ebene *AB* errichteten Loth *CD* in derselben Vertikalebene und mit dem einfallenden Strahl gegen das Loth oder gegen die Spiegelebene unter gleichen Winkeln liegt. Dasselbe findet statt,

Fig. 710.



wenn die Curve *GCH* der Durchschnitt einer hohlen Spiegelfläche und *AB* die Tangente an derselben ist. Wenn also ein Lichtstrahl eine krumme Spiegelfläche trifft, so wird er eben so reflectirt, als wenn er den Berührungspunkt der Tangentialebene getroffen hätte, nämlich unter gleichen Winkeln und in derselben Ebene mit der Normalen.

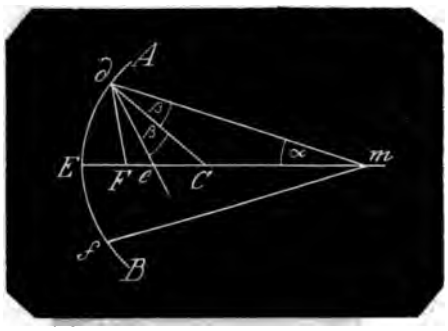
Ist die Spiegelfläche parabolisch, so werden alle parallel mit der Axe einfallenden Strahlen nach dem Brennpunkt reflectirt, und ein in dem Brennpunkt befindliches Licht, welches die ganze Spiegelfläche erleuchtet, wird von jedem einzelnen Punkt derselben ∔ der Axe fortgeleitet und zu einer kreisrunden Lichtfläche umgeschaffen.

Ist die Spiegelfläche elliptisch, so wird das in einen der beiden Brennpunkte gestellte Licht die ganze Spiegelfläche erleuchten, jeder dieser Strahlen wird aber von jedem Punkt der Spiegelfläche nach dem zweiten Brennpunkt geworfen.

Parabolische und elliptische Spiegel werden zu Hervorbringung von Bildern bei Mefsinstrumenten nicht angewendet und nur die sphärischen Hohlspiegel sind in Gebrauch, nämlich die Spiegel von der Form einer hohlen Kugelfläche.

2. Um die Wirkung eines sphärischen Hohlspiegels zu erkennen, ist zuerst zu bemerken, dafs da jeder Halbmesser auf der Kugeloberfläche normal steht, auch

Fig. 711.



der Halbmesser für jeden beliebigen auf die Spiegelfläche fallenden Strahl das Einfallsloth ausmacht.

Es sei AB der Durchschnitt eines sphärischen Hohlspiegels, c sein Mittelpunkt, m sei ein leuchtender Punkt, so wirft dieser auf alle Punkte von AB Strahlen. Es sei md einer dieser Strahlen, so bildet dieser mit dem Halbmesser dc den $\angle mdc$; macht man daher $\angle edc = \angle mdc$, so ist de der von md reflectirte Strahl.

Zieht man durch m und c die gerade Linie mE und denkt den Strahl md um mE als Axe sich herumgedreht, so wird ein Strahlenkegel eingeschlossen, von welchem die Ebene $mdEf$ der Durchschnitt ist, und alle Strahlen in dem Mantel mdf, die den Spiegel in der Kreislinie df treffen, werden in Strahlen reflectirt, welche in dem Punkt e sich schneiden.

Setzt man $mE = a$, $cE = r$, $ce = b$, $\angle dmc = \alpha$, $\angle mdc = \beta$
so hat man in dem $\triangle cdm$

$$\sin\beta : \sin\alpha = cm : cd = a - r : r$$

hieraus $$\sin\beta = \frac{a-r}{r}\sin\alpha$$

Ferner in dem $\triangle cde$

$$ce : cd = \sin\angle cde : \sin\angle ced = \sin\beta : \sin\angle dEc$$

oder $$ce : cd = b : r = \sin\beta : \sin(2\beta + \alpha)$$

hieraus $$b = \frac{\sin\beta}{\sin(2\beta+\alpha)}\,r$$

3. Es sei md ein Strahl aus einem sehr fernen leuchtenden Punkt, c der Mittelpunkt, cE die Axe des Spiegels, $md \mathrel{+} cE$, so wird md nach de reflectirt, wenn $\angle mdc = \angle edc = \beta$ ist.

Alsdann hat man in dem $\triangle cde$

$$dc : ec = \sin dec : \sin\beta$$

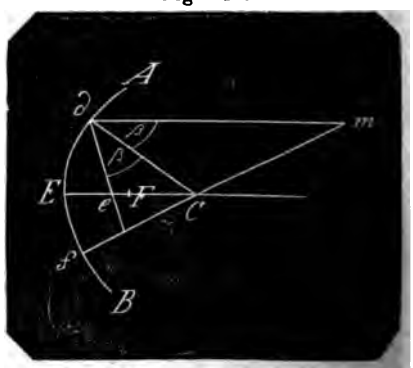
oder $$r : b = \sin(2\beta) : \sin\beta$$

also

$$b = \frac{\sin\beta}{\sin(2\beta)}\cdot r = \frac{\sin\beta}{2\sin\beta\cdot\cos\beta}\,r = \tfrac{1}{2}r\cdot\sec\beta$$

Je kleiner β wird, d. h. je gröfser der Halbmesser des Spiegels ist, oder je näher der Axe Ec die Strahlen einfallen, desto näher kommt $ce = b$ = dem halben Spiegelhalbmesser $= \frac{1}{2}r$. Ist beides vereinigt, ist der Hohlspiegel möglichst flach und von geringem Umfange, so ist $ce = b$ für sämmtliche parallel einfallende Strahlen $= \frac{1}{2}r$ zu setzen. In jedem Falle heifsen diejenigen parallelen Strahlen, deren Focus e sehr nahe um $\frac{1}{2}r$ vom Mittelpunkt c entfernt ist, centrale Strahlen, und deren Vereinigungspunkt e im Abstande $\frac{1}{2}r$ von c heifst der Hauptbrennpunkt oder Hauptfocus und soll mit F bezeichnet werden.

Fig. 712.



Jeder andere Brennpunkt anderer mit der Axe einfallender Strahlen, also solcher, deren Winkel β wegen ihrer Gröfsen den Quotient $\frac{\sin\beta}{\sin(2\beta)} = \frac{1}{2}r\cdot\sec\beta$ merklich gröfser als $\frac{1}{2}r$ machen, liegt dem

l näher als der Hauptfocus *F*. Der eil, dafs sämmtliche parallel auf Spiegel fallende Strahlen nicht ı in einem Punkte vereinigt wer- önnen, heifst die sphärische ation.

diese Aberration für wissenschaft- Zwecke möglichst geringfügig zu ı, nimmt man nur Spiegel von ge- Ausdehnung, von 6 bis höchstens mittleren Kreisbogen, so dafs die ın Rand fallenden Strahlen den ın Entfernung $\frac{1}{2}r \cdot sec\, 4^\circ = 0{,}50048 \times r$

e näher der leuchtende Punkt *m* '11) dem Mittelpunkt *c* kommt, rröfser wird der $\angle \alpha$, desto kleiner ıd desto näher rückt der Focus *e*

Kommt *m* in *c* selbst, so wird und der Strahl *cd* reflectirt nach ck. Bewegt sich der leuchtende von *c* weiter über *e* nach *E*, so die Strahlen über *dc* hinaus, wie rahl *ed* nach *dm*, reflectirt.

bei parallel der Axe einfallenden ın (Fig. 712) der Hauptfocus *F* von ınderen Vereinigungspunkten wie Mittelpunkt *c* am nächsten liegt, t *F*, wenn ein leuchtender Punkt Axe *Em* (Fig. 711) sich befindet, en anderen ad 2 gedachten Ver- ıgspunkten wie *e* am entferntesten; nur von centralen Strahlen die ıo wird jeder Strahl wie *Fd*, wenn ı der leuchtende Punkt über *e* bis sich bewegt, nach lauter mit der ı parallelen Linien reflectirt, wie . 712.

t man endlich den leuchtenden r noch weiter über *F* hinaus nach ıgel zu, so hat man, für die con- Punkte *c*, *F* und *e* den beliebi- ıkt *d* im Spiegel genommen, $\angle cdf = \alpha$ gesetzt, die durch *d* mit der Axe parallele Linie *dk*, als den Strahl gezogen, in welchem ein Strahl *Fd* reflectiren würde, $\angle kdc = \angle cdF = \angle dce = \alpha$.

Der von dem leuchtenden Punkt *e* nach *d* geworfene Strahl reflectirt nach *dk*, wenn $\angle kdc = \angle edc$, oder wenn $\angle kdh = \angle edF = \beta$.

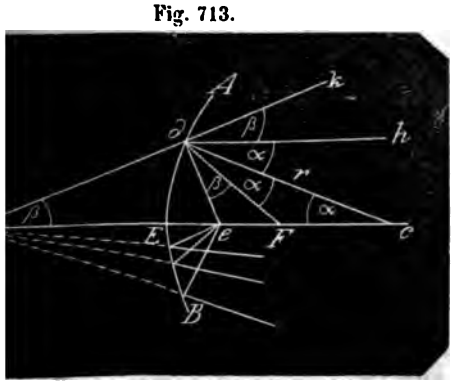
Verlängert man nun *kd* rückwärts bis *g* in die Axe *cg*, so ist auch $\angle kgc = \beta$. Fällt man von *c* auf *gk* ein Loth, so ist dieses sowohl $= gc \times sin\, kgc$, als auch $dc \times sin\, kdc$ oder $gc\, sin\, \beta = r\, sin\, (\alpha + \beta)$.

Und diese Gleichung gilt für jedes Loth aus *c* auf irgend eine von *g* aus durch einen anderen Punkt als *d* in *AB* gezogene gerade Linie, wofern die Strahlen aus *F* dahin als reflectirte Strahlen centraler Strahlen wie *kd* betrachtet werden. Der Punkt *g* ist also näherungsweise constant und bildet den hinter dem Spiegel liegenden Punkt, in welchem die divergirenden reflectirten Strahlen wie *dk* sich vereinigen oder schneiden.

5. Was von leuchtenden Punkten gilt, die in der Axe des Spiegels liegen, gilt auch, in Beziehung auf deren Reflexion, von Punkten aufserhalb der Spiegelaxe: Gesetzt *Ec* seien die Spiegelaxen, Fig. 711 und 712 Wenn nun Fig. 712 *m* ein leuchtender Punkt aufserhalb dieser Axe ist, so ziehe man den Strahl *mf* durch den Mittelpunkt *c*, und der um *mf* als Axe sich bildende Strahlenkegel wird sich so verhalten, wie der um *mE*, welcher Fig. 711 betrachtet worden ist, und die von dem Kegel um *mf* reflectirten Strahlen werden sich in einem Punkt schneiden, der in *mf* eben so gelegen ist, wie der Punkt *e* in der Axe *cE*.

6. Wie durch einen Hohlspiegel Bilder erzeugt werden, ist aus Fig. 714 zu entnehmen.

Fig. 713.

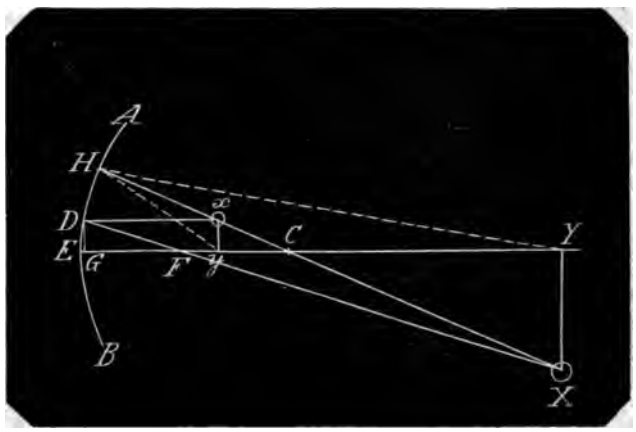


Es sei *AEB* ein sphärischer Hohlspiegel, *C* sein Mittelpunkt, *EY* dessen Axe, *F* dessen Hauptfocus, also $EF = CF = \frac{1}{2}r$.

Ein Gegenstand *xy* (zur Hälfte über der Axe dargestellt) sei zwischen dem Mittelpunkt *C* und dem Hauptfocus *F* aufgestellt.

Der Punkt *y* in der Axe wirft einen Strahl *yE* nach dem Scheitel, welcher in derselben Axe *EY* zurückgeworfen wird. Alle übrigen von *y* aus nach dem Spiegel geworfenen Strahlen, wie der Strahl *yH*, reflectiren nach

Fig. 714.



Linien HY, so dafs jedesmal yH und YH mit der Normale CH gleiche $\angle yHC$ und YHC bilden; und für Punkte sehr nahe der Axe treffen diese reflectirten Strahlen sehr nahe in dem Punkt Y zusammen, so dafs Y das Bild des Punkts y ist.

Der Endpunkt x des Gegenstandes wirft ebenfalls auf alle Punkte des Spiegels Strahlen. Von diesen reflectirt der Strahl xH nach der Richtung der Normale in sich zurück, also in die Richtung HX. Der Strahl, welchen x nach D ∓ mit der Axe wirft, reflectirt nach dem Hauptfocus F und geht in gerader Linie fort, bis er sich mit dem reflectirten Strahl HX in dem Punkt X vereinigt. In X werden auch die aus x nach den übrigen Punkten des Spiegels gehenden und dort zurückgeworfenen Strahlen gesammelt. Wie mit den Endpunkten x und y ist es mit allen zwischenliegenden Punkten und XY ist das gröfsere Bild des kleineren Gegenstandes xy.

Wenn also der Gegenstand vor den Spiegel zwischen dem Mittelpunkt und dem Hauptfocus, d. h. in einer Entfernung von gröfser als $\frac{1}{2}r$ und kleiner als r gestellt wird, so entsteht ein vergröfsertes verkehrtes Bild.

Wenn man dagegen den gröfseren Gegenstand YX aufstellt, so geschehen die Abspiegelungen, dessen Punkte und die Zurückwerfungen der Strahlen auf die entgegengesetzte Weise und es entsteht das Luftbild xy.

Wenn also der Gegenstand vor den Spiegel in gröfserer Entfernung als dessen Mittelpunkt gestellt wird, so wird zwischen dem Mittelpunkt und dem Hauptfocus ein verkehrtes verkleinertes Bild durch den Hohlspiegel erzeugt.

Wenngleich eine grofse Menge reflectirter Strahlen nicht genau in der Ebene YX, im zweiten Fall in der Ebene yx sich schneiden und dadurch das Bild zum Theil verwischen und undeutlich machen, so ist dennoch die Anzahl der in diesen Ebenen genau sich vereinigenden Strahlen, diejenigen nämlich, welche sehr nahe der Axe den Spiegel treffen, grofs genug, um von dem Gegenstande ein hinreichend correctes Bild zu geben.

Die Vergröfserung und die Verkleinerung des Gegenstandes ergibt sich aus folgender geometrischen Betrachtung:

Fällt man aus D das Loth DG auf die Axe, so hat man in den Dreiecken DGF und XYF

$$DG : XY = FG : FY$$

oder

$$xy : XY = FG : FY \qquad (1)$$

und in den Dreiecken cxy und cXY

$$xy : XY = Cy : CY \qquad (2)$$

Hieraus

$$FG : FY = Cy : CY \qquad (3)$$

Da nun die Bilder nur für sehr nahe an den Axenpunkt E auf den Spiegel fallende Strahlen in ihren Ebenen bestehen, so kann man FE für FG setzen, und dann ist

$$FG = \tfrac{1}{2}FC = \tfrac{1}{2}r$$

$$FY = \tfrac{1}{2}r + CY = \tfrac{1}{2}r + b$$

$$Cy = a \text{ gesetzt:}$$

mithin aus 3

$$\tfrac{1}{2}r : \tfrac{1}{2}r + b = a : b \qquad (4)$$

woraus

$$b = \frac{ar}{r - 2a} = \frac{r}{\frac{r}{a} - 2} \qquad (5)$$

$$a = \frac{br}{r+2b} = \frac{r}{\frac{r}{b}+2} \qquad (6)$$

us Gl. 2 ist

$$xy : XY = a : b \qquad (7)$$

e Formeln 5 und 6 zu Hülfe gibt

$$XY = \frac{r}{r-2a}\,xy \qquad (8)$$

$$xy = \frac{r}{r+2b}\,XY \qquad (9)$$

rmel 5 und 6 bestimmt die gegen- e Entfernung der Bilder von dem lpunkt des Spiegels, Formel 8 und n Grad deren Vergrößerung und Verkleinerung.

s Formel 5 erhellt, daſs bei einerlei o bei demselben Spiegel a immer r sein muſs als $\frac{1}{2}r$, wenn eine Stelle is Bild XY von einem Gegenstand öglich sein soll. Für $a = 0$ wird $b = 0$; d. h. ein im Mittelpunkt C stellter Gegenstand fällt mit seinem zusammen.

ner sieht man, daſs für $a = \frac{1}{2}r$, $= \infty$ wird. D. h. wenn ein Ge- and in dem Hauptfocus aufgestellt , so entsteht in unendlicher Entfer- ernt das Bild, und dieses wird nach ebenfalls unendlich groſs. Wird r, d. h. stellt man den Gegenstand en den Hauptfocus und den Spie- lso innerhalb der Linie EF, so ist ativ, es erscheint links vom Mittel- C (s. No. 7).

s 6 geht die Stelle des verkleiner- ildes xy hervor, wenn die Stelle größeren Gegenstandes XY gege- st.

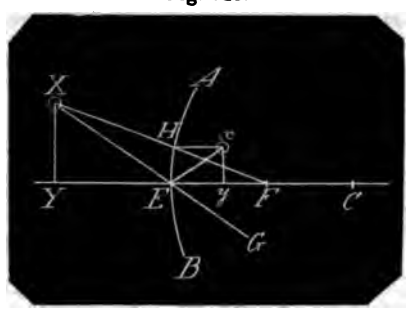
$b = 0$, d. h. wenn XY in dem Mit- kt C aufgestellt ist, wird a eben- $= 0$, Gegenstand und Bild fallen in ammen. Für $b = r$ wird $a = \frac{1}{3}r$, d. n der Gegenstand in dem doppel- bstand CE aufgestellt wird, ent- das Bild von C ab links in Ent- g $\frac{1}{3}CE$. Für $b = \infty$ wird $a = \frac{1}{2}r$, das Bild xy entsteht in F.

mel 8 gibt den Grad der Vergrö- g, Formel 9 den Grad der Verklei- g des Gegenstandes durch das Bild. $= 0$ und für $b = 0$ ist das Bild dem stande gleich, für $a = \frac{1}{2}r$ wird die ößerung unendlich. Von $a = 0$ bis wächst also das Bild fortdauernd.

Wenn man den Gegenstand xy zwi- den Hauptfocus F und den Schei- s Spiegels stellt, entsteht hinter dem Spiegel ein Bild, und zwar ein aufrechtes Bild.

Denn von den Strahlen, welche Fig. 715 der Punkt x auf den Spiegel wirft, reflectirt der Strahl xE nach EG, wenn

Fig. 715.



$\angle xEF = \angle GEF$; der mit der Axe parallele Strahl xH reflectirt durch den Focus F; da wo beide reflectirten Strahlen HF und EG sich schneiden, bildet sich das Bild des Punkts x, also hinter dem Spiegel in X, und XY ist das Bild xy. Es entsteht also ein Bild hinter dem Hohlspiegel wie beim Planspiegel, nur daſs jenes vergrößert erscheint. Ein gebräuchlicher Hohlspiegel für diese Wirkung ist der Rasirspiegel.

Die Größe der Entfernung des Bildes und den Grad dessen Vergrößerung findet man aus den Formeln No. 6, wenn man darin $a > \frac{1}{2}r$ setzt.

Homocentrisch, s. v. w. „concentrisch“.

Homogen, s. v. w. „gleichartig“.

Homolog, (ὁμόλογος, einstimmig) sind Größen, wenn sie in Beziehung auf Stellung oder Lage übereinstimmen, als die gleichnamigen Glieder einer Proportion, die gleichen Seiten in congruenten, die gleichliegenden Seiten und Diagonalen in ähnlichen Figuren.

Horizont, s. „astronomischer Horizont“ mit Fig. 92, pag. 146. In diesem Artikel ist die normal auf der Scheitellinie OZ eines Ortes O der Erdoberfläche durch den Ort O gelegte Ebene AM als der scheinbare Horizont, die mit dieser Ebene durch den Mittelpunkt C der Erde ∥ gelegte Ebene $A'M'$ als wahrer oder astronomischer Horizont erklärt worden, und beide Horizonte beziehen sich auf die Gestirne und deren Bewegungen.

Für die Feldmefskunst dagegen, wo man von Ort zu Ort mifst, woraus Landkarten und Erdgloben hervorgehen, hat man die terrestrischen Horizonte aller Orte vor Augen zu nehmen, und es ist, wenn man die Erde als einen regelmäfsigen Körper, als eine Kugel oder als ein Sphäroid betrachtet, der wahre Horizont aller Orte die in sich abgeschlossene Erdoberfläche selbst.

Hat man Fig. 716 nur mit einem Ort D zu thun, so kann man die durch D normal auf den Erdhalbmesser CD gelegte Ebene AB nicht die durch den Erdmittelpunkt C gelegte Ebene GJ als wahren Horizont ansehen und es geschieht dies auch. Hat man dagegen zwei Orte D und E in geometrische oder geographische Beziehung zu bringen, so ist der Kreisbogen DE der wahre Horizont von D und E, die Tangenten BF und GF sind die scheinbaren Horizonte von D und von E. Der Ort E liegt unter dem scheinbaren Horizont von D und der Ort D unter dem scheinbaren Horizont von E, weil D von E aus und E von D aus nicht gesehen werden kann.

Theoretisch betrachtet kann ein in H befindliches Auge gar nicht um sich sehen. Nimmt man die Augenhöhe FH eines Menschen 5 Fufs an, so sieht man rund herum nur auf die Länge der Tangente FD; die jenseits D liegenden Punkte bleiben unter dem Augenhorizont.

Setzt man den $\angle DCF = \alpha$, den Halbmesser CD der Erde $= r$, so ist

$$DF = r \operatorname{tg} \alpha$$

und
$$\alpha = arc\ sec\left(\frac{CF}{CD}\right) = arc\ sec\left(\frac{r+5'}{r}\right) = arc\ cos\left(\frac{r}{r+5'}\right)$$

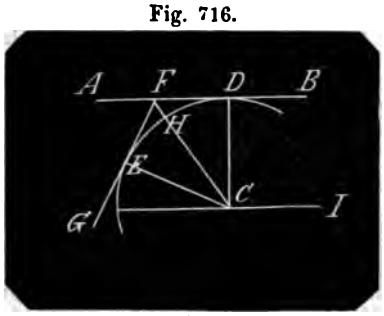
Nun ist $r = 860$ geogr. Meilen zu 23642 preufs. Fufs, mithin

$$\log \cos \alpha = \log \frac{20332120}{20332125} = 9{,}999\,99989 - 10$$

woraus $\alpha = 0^\circ\ 2'\ 50''$
und $\log \operatorname{tg} 2'\ 50'' = 6{,}9160239 - 10$
hierzu $\log r = 7{,}3081827$
gibt $\log DF = 4{,}2242166$
woraus $DF = 16758$ preufs. Fufs.

Es ist $arc\ 2'\ 50'' = 0{,}000824183\ldots$
mithin $\log \alpha = 0{,}9160238 - 4$
hierzu $\log r = 7{,}3081827$
gibt $\log$ Bogen $DH = 4{,}2242065$
hieraus $DH = 16757$

Fig. 716.



Demnach ist für Strecken von 16 bis 17000 Fufs der Bogen = der Tangente, d. h. die wahre Horizontale = der scheinbaren zu setzen.

Horizontal ist was sich auf den Horizont bezieht und was innerhalb der Horizontalebene eines Orts der Erde oder parallel mit derselben gelegen ist: Ein ruhender Wasserspiegel ist horizontal, die Turbine ist ein horizontales Wasserrad, weil es sich um eine lothrechte Welle herumdreht.

Horizontalebene eine Ebene die horizontal ist.

Horizontallinie eine gerade Linie die horizontal ist.

Horizontalparallaxe, s. u. „Höhenparallaxe".

Horizontalprojection. Hierunter versteht man das auf eine horizontale Ebene geworfene Bild einer aufserhalb dieser Ebene befindlichen geometrischen Gröfse, indem man von sämmtlichen Punkten der Gröfse Lothe auf die Ebene fällt, welche mit ihren Standpunkten daselbst das Bild markiren.

Die Horizontalprojection eines Punkts ist der Endpunkt des Loths von diesem Punkt auf die Horizontalebene, desgleichen von einer lothrechten Linie der Punkt, welcher durch die Verlängerung dieser Linie auf die Ebene trifft. Fig. 585 pag. 3 ist C die Horizontalprojection des Punkts A auf der Ebene PQ, desgleichen die H.-P. der lothrechten Linie AC. Von einer mit der Ebene PQ (Fig. 586) parallelen also horizontalen Linie

entsteht die ihr gleich grofse Hori-
ılprojection, wenn man von deren
unkten *A*, *E* Lothe *AC*, *EF* auf die
ıe fällt und deren Endpunkte *C*, *F*
h eine gerade Linie *CF* verbindet.
einer schräg gegen die Ebene lie-
len **geraden Linie, wie** *AL*, Fig. 584,
lt **man gleichfalls die Projection** durch
Lothe *AC* **und** *LM* **aus** deren End-
rten **in der geraden Linie** *CM*, welche
er **ist als die gegebene Linie** *AL* und
so **kürzer, je schräger** *AL* **ist.**

ın **einer Curve ist die P. auf der**
ıe **nur dann eine gerade Linie**, wenn
Curve **in einer senkrechten** Ebene
, **und man hat dann nur** nöthig, de-
Endpunkte zu projiciren. Liegt die
e **in einer der Ebene parallelen** Ebene,
ıt **die Projection genau** gleich der
benen **Curve; liegt sie in einer** schrä-
Ebene und man fällt von möglichst
n Punkten der Curve Lothe auf die
e, so entsteht durch Zusammenzie-
der Endpunkte eine Curve von zu-
ıengedrängter, von verkürzter
ı auf der Ebene.

radlinige Figuren werden auf eine
e projicirt, indem man aus deren
unkten auf die Ebene Lothe fällt
die Endpunkte derselben durch ge-
Linien verbindet. Krummlinige Fi-
ı werden wie Curven projicirt. Ein
er wird auf eine Ebene projicirt, in-
man längs dessen Grenzen lothrechte
enten fällt, deren Endpunkte auf
Ebene durch Linien zusammengezo-
werden.

der Feldmefskunst werden schräge
ın durch Rechnung auf die Horizon-
projicirt; jede Projection einer schrä-
geraden Linie ist = dieser Linie mal
Cosinus des Elevations- oder De-
ionswinkels.

r Nivellements ist zu beachten, dafs
ıdem Stationspunkte durch die Li-
das wirkliche Loth, also auch die
ı Horizontale markirt wird, so dafs
sehr weiten Strecken die Summe
Horizontalen eine Kreislinie ist.

rizontalwinkel ist ein Winkel, des-
chenkel in einer horizontalen Ebene
n.

b (Mech.) ist die in gerader Linie
ssene Länge, in welcher eine hin-
ıergehende Bewegung geschieht. Bei
doppelt wirkenden Dampfmaschine
ır Hub die Länge, um welche der
ıfkolben jedesmal auf- und jedesmal
ısteigt; desgleichen bei einem Säge-
r die Länge, um welche es mit der
Säge zur Vollführung des Schnitts ab-
wärts bewegt wird. Bei Maschinen, wel-
che während des Hingangs dieselbe Kraft
äufsern, wie während des Hergangs heifst
ein Hin- und Hergang ein Doppelhub.
Bei Sägen findet solcher nicht statt, weil
die Säge beim Aufgang leer geht.

Hubverlust ist der Theil des Hubes,
bei welchem keine Wirkung der Maschine
erfolgt. Ein Grund für einen möglichen
Hubverlust liegt in der mangelhaften Con-
struction der zur Bewegung gehörenden
Maschinentheile, indem sie nicht genau
und unverrückt mit einander schliefsen,
sondern lose und wackelig sind, so dafs
am Anfange des Hubes die Bewegung
leer geschieht, bevor der zum Effect
wirksame Maschinentheil (der Dampfkol-
ben, die Säge) zu seiner Bewegung in
Angriff genommen wird.

Ein zweiter Grund ist die unsichere
Lagerung oder Aufstellung der Körper,
welche durch die Maschine in Angriff
genommen werden sollen, wenn z. B. der
zu zersägende Block auf Unterlagen ruht,
die beim Angriff der Säge sich biegen
und der Block auf einen Theil des Sä-
genhubes ausweicht ohne zerschnitten zu
werden.

Es gibt aber auch natürliche nicht zu
umgehende Hubverluste, z. B. bei Pum-
pen in der Zeit, welche ein geöffnetes
Ventil nöthig hat sich zu schliefsen, wäh-
rend welcher nun ein Theil des in den
Pumpenkörper zur Weiterförderung ein-
gesogenen Wassers entweicht und wäh-
rend welcher der Pumpenkolben einen
Theil seines Hubes also nutzlos voll-
bringt.

Hülfslinien sind Linien, welche man
für Figuren zu Hülfe nimmt, um den
Beweis der Richtigkeit eines geometri-
schen Satzes zu führen. So sind pag.
324, Fig. 570 die geraden Linien *BF*,
CE, *EF* Hülfslinien, um zu beweisen,
dafs in ähnlichen Dreiecken die homolo-
gen Seiten mit einander in Proportion
stehen.

Huf, Hufabschnitt, Hufflächе, s. „Cy-
lindrischer Hufabschnitt".

Hydraulik, ist derjenige Theil der an-
gewandten Mathematik (s. d.), welcher
sich mit der Kraft und der Wirkung des
bewegten Wassers beschäftigt. Die Haupt-
theile dieser Wissenschaft bestehen:

1. In der Bestimmung der Geschwin-
digkeit und der Wassermenge beim
Ausflufs des Wassers aus Oeffnungen je
nach der Druckhöhe, der Gröfse, Form

und Lage der Ausflufsöffnung. Dieser äufserst wichtige Theil der Hydraulik ist in den beiden Art.: „Ausfluſs tropfbarer Flüssigkeiten“ und „Ausfluſs des Wassers“ u. s. w. Bd. I., pag. 215 bis pag. 230 abgehandelt. Ferner sind die Art. „Contraction des Wasserstrahls“ und „Contractionscoefficient“, Bd. II., pag. 125 mit zu Hülfe zu nehmen.

Zu dieser Hauptabtheilung gehört noch die Bestimmung der Zeit bei Füllung von Gefäfsen mit Wasser und bei Ausleerung derselben durch Oeffnungen von verschiedener Form und Lage und während fortdauernden Zuflusses, wiewohl diese Untersuchungen auch zu einer zweiten Hauptabtheilung der Hydraulik gemacht werden. Das Nothwendigste hiervon mit Zahlenbeispielen findet der Leser in dem oben erwähnten Aufsatz, Bd. I., pag. 221, No. 17, „Ausfluſs des Wassers aus Oeffnungen bei veränderlicher Druckhöhe.“

2. In den Gesetzen bei der Bewegung des Wassers in Flufsbetten, Kanälen, Röhrenleitungen.

3. In der Bestimmung der Kraft des Wassers zum Betrieb von Wasserrädern, Wassersäulenmaschinen u. s. w.

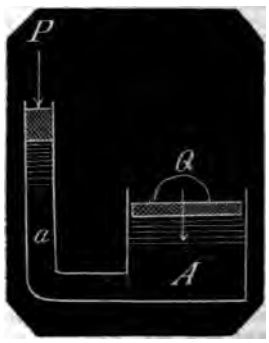
Ferner wird noch eine Hauptabtheilung für die Hydraulik: „die Lehre von den Wasserhebungsmaschinen“ angenommen. Bei diesen aber ist das Wasser nicht thätig, wie bei den vorgenannten Abtheilungen, sondern ganz leidend, weshalb die Wasserhebungsmaschinen zur Maschinenlehre zu rechnen sind.

Hydraulische Maschinen. Hierunter werden sowohl die Wasserhebungsmaschinen begriffen als auch diejenigen Maschinen, bei welchen das Wasser die bewegende Kraft ist. Zu den ersten gehören die Pumpen, Wasserschnecken, Springbrunnen u. s. w., zu den letzten die Wasserräder, die Reactionsräder, Säulenmaschinen.

Hydraulische Presse. Der gebräuchliche aber uneigentliche Name für hydrostatische Presse, weil deren Princip auf einem hydrostatischen Gesetze beruht, nämlich auf dem Gesetz, dafs in zweien mit einander communicirenden Röhren von gleichem und von ungleichem Querschnitt, Wasser mit beiden Spiegeln in der Waage steht, ein Gesetz, welches in dem Art: „Druck, hydrostatischer“, Bd. II., pag. 332, näher erörtert ist.

Nebenstehend sind 2 mit einander communicirende Röhren vor den ungleiQuerschnitten A und a. Wenn Wahineingegossen wird, so stellt es sich

Fig. 717.



beiden Röhren in die Waage, die gröWassermenge in A ist mit der kleinin a im Gleichgewicht. Bedeckt den Wasserspiegel in A mit einer Pl und beschwert dieselbe, gieſst in die kRöhre so viel Wasser hinzu, dafs es die Höhe h ansteigt, so würde in Röhre vom Querschnitt A ebenfalFufs Wasser eingegossen werden mü um dem Wasser in der kleinen R das Gleichgewicht zu halten. Ist γ P das Gewicht einer Cubikeinheit Wasind also in der kleinen Röhre $ah\gamma$ PWasser, so halten in dem grofsen fäfs $Ah\gamma$ Pfund Wasser jenem Wadas Gleichgewicht. Folglich hat man Platte über A mit dem Gewicht Pfund zu beschweren, wenn der Waspiegel über a in Ruhe bleiben soll. selbe statische Gleichgewicht findet wenn man anstatt h Fufs Wasser zu gieſsen den Wasserspiegel über einer Platte bedeckt und diese mit Gewicht $ah\gamma$ beschwert.

Beide sich Gleichgewicht haltende wichte $ah\gamma$ und $Ah\gamma$ verhalten sich die Röhrenquerschnitte a und A. kann demnach bei einer Wasserunter mit einer auf die über a befindliche Pwirkenden Kraft P auf den über findlichen Wasserspiegel und mit diesem auf die darauf gelegte Platte

unten nach oben einen Druck $Q =$

ausüben.

Dieses Princip bildet die hydrauli Presse: Man construirt die Röhre eine vereinigte Saug- und Druckpu in der waagerechten Verbindungs

schen a und A befindet sich ein nach l hin bewegliches Ventil, die Röhre a t nach unten verlängert, reicht in ein ɔefäfs mit Wasser und ist am untersten Ende mit einem Saugventil versehen. Beim Aufzug des Kolbens in a entsteht n der Röhre ein leerer Raum, der auf den Spiegel des Wassers im Kasten wirkende atmosphärische Luftdruck öffnet las Ventil, treibt das Wasser hinein und füllt den leeren Raum. Beim Niederdruck es Kolben wird das Saugventil geschlossen, das zwischen a und A befindliche ruckventil geöffnet, in A Wasser gehoben, welches nun mit dem $\frac{A}{a}$ fachen ır Kraft P einen Druck von unten nach ven ausübt.

Hydrodynamik, s. v. w. „Hydraulik".

Hydrometer, s. v. w. „Araeometer", ch das Araeometer zur Prüfung des assers.

Hydrostatik ist derjenige Theil der anwandten Mathematik, welcher sich mit m Gleichgewicht tropfbar flüssiger Kör- r unter sich und mit festen Körpern schäftigt.

Die Haupttheile dieser Wissenschaft nhesen:

1. Die Bestimmung des Normaldrucks n Wasser gegen feste Wände.
2. Die Bedingungen für das Gleichgewicht des Wassers mit eingesenkten Körpern.
3. Die Bedingungen für das Gleichgewicht verschiedener Flüssigkeiten unter sich.

Die wichtigsten hydrostatischen Gesetze sind in dem Art. „Druck, hydrostatischer" zusammengefafst.

Hydrostatischer Druck, s. „Druck, hydrostatischer".

Hydrostatische Waage, s. v. w. „Aräometer".

Hyperbel (Vergleiche den Art. „Ellipse") ist eine Linie der zweiten Ordnung oder eine Curve der ersten Classe, indem sie einer Gleichung vom 2ten Grade zugehört; ferner ist sie eine Kegelschnittslinie. Aus beiden Gesichtspunkten, dem analytischen und dem synthetischen oder dem arithmetischen und dem geometrischen ist sie bereits in diesem Wörterbuch behandelt.

In dem Art. „Curven", III Abtheilung, pag. 172, ist die der ganzen Klasse von Curven zu Grunde liegende allgemeine Gleichung (1) aufgestellt:

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0 \quad (1)$$

Nachdem zuerst die Bedeutung und der Einfluſs der einzelnen Coefficienten gezeigt worden, ist unter der Bedingung beliebig grofser Abscissen (x) der Gleichung die Form gegeben (Gl. 9):

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2a}\left[-\left(b + \frac{d}{x}\right) \pm \sqrt{(b^2 - 4ac) + \frac{2(bd - 2ae)}{x} + \frac{d^2 - 4af}{x^2}}\right] \quad (2)$$

d die beliebige Gröfse der Abscisse x s zur Unendlichkeit ausgedehnt, wo an die Glieder, welche x im Nenner ben, als Null fortfallen und die Gleiung die allgemeine Form annimmt l. 10).

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2a}(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}) \quad (3)$$

Hierauf sind für sämmtliche Curven selben Klasse 3 mögliche Fälle gezeigt:

1. $b^2 > 4ac$
2. $b^2 < 4ac$
3. $b^2 = 4ac$

oraus nun 3 mögliche Formen von Curn nachgewiesen worden, welche durch gende 3 Gleichungen (19, 20, 21 pag. 5) ausgesprochen werden:

1. $y^2 = Ax + Bx^2$
2. $y^2 = Ax - Bx^2$
3. $y^2 = Ax$

Für die erste und die 3te Gleichung sind bei unendlichen Abscissen auch unendliche Ordinaten vorhanden, für die zweite Gleichung sind für unendliche Abscissen Ordinaten unmöglich. Die erste Gleichung gehört der Hyperbel, die zweite der Ellipse, die dritte der Parabel an.

Die allgemeine Gleichung der Hyperbel, wenn deren Axe die Abscissenlinie und der Scheitel der Anfangspunkt der Abscissen ist, hat man also:

$$y^2 = Ax + Bx^2 \quad (4)$$

2. In No. 15, pag. 176 ist, um auf den Character der Kegelschnitte specieller zu kommen, Bezug genommen auf den Art.: „Brennpunkte der Kegelschnitte", Bd. I., pag. 420 mit Fig. 257. Hier werden die Constructionen der Kegelschnitte aus dem Kegel bildlich dargestellt und die Hauptformeln für dieselben abgeleitet, wobei die Axen als die Abscissenlinien

mit dem Scheitel F als Anfangspunkt gelten. Die Abtheilung C handelt speciell von der Hyperbel.

Mit Bezug auf die Bezeichnung, Fig. 257 ist die rechtwinklige Coordinatengleichung entwickelt (pag. 422, Gl. 1)

$$y^2 = k\frac{\sin\beta''}{\cos\frac{1}{2}\alpha}x + \frac{\sin(\alpha-\beta'')\sin\beta''}{\cos^2(\frac{1}{2}\alpha)}x^2 \quad (5)$$

Hier ist k der Durchmesser EF des Kegels in dem Scheitel F der Hyperbel, α der $\angle EAF$ des Axenquerschnitts an der Kegelspitze und β'' der $\angle DFJ''$, den die Hyperbelaxe FJ'' mit der zu dem Scheitel F gehörenden Kegelseite AD bildet.

Oder den Coefficient des ersten Gliedes durch p ausgedrückt (pag. 422, Gl. 2):

$$y^2 = px + \frac{\sin(\alpha-\beta'')}{\cos\frac{1}{2}\alpha}\cdot\frac{p}{k}x^2 \quad (6)$$

An diese Gleichung knüpft sich der Grund für den Namen Hyperbel (Ueberschufslinie), weil das Quadrat der Ordinate (y) gröfser ist, als das Rectangel zwischen dem Parameter (p) und der Abscisse (x).

3. Ferner ist nachgewiesen, dafs die durch Rückwärts-Verlängerung der Axe und der Hyperbelebene in dem entgegengesetzten Kegel eine zweite Hyperbel entsteht, welche der ersten ≅ ist. Denn setzt man für diese Hyperbel β_1 für β'', so erhält man für diese zweite Hyperbel die Gleichung wie 5:

$$y_1^2 = k_1\frac{\sin\beta_1}{\cos\frac{1}{2}\alpha}x + \frac{\sin(\alpha-\beta_1)\sin\beta_1}{\cos^2(\frac{1}{2}\alpha)}x^2 \quad (7)$$

Nun wird gefunden:

$$\beta_1 = \alpha - \beta'' \quad (8)$$

$$k_1 = \frac{\sin\beta''}{\sin(\alpha-\beta')}k \quad (9)$$

Diese Werthe in Gl. 6 gesetzt ergibt dieselbe Gleichung mit 5

$$y_1^2 = k\frac{\sin\beta''}{\cos\frac{1}{2}\alpha}x + \frac{\sin(\alpha-\beta'')\sin\beta''}{\cos^2(\frac{1}{2}\alpha)}x^2 \quad (10)$$

woraus die Congruenz beider Hyperbeln hervorgeht.

4. Die Hauptaxe (Fig. 257) beider Hyperbeln wird No. 3 gefunden

$$FN = \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{\sin(\alpha-\beta')}k \quad (11)$$

Diese Axe mit $2a$ bezeichnet, erhält man

$$k = 2\cdot\frac{\sin(\alpha-\beta')}{\cos\frac{1}{2}\alpha}a \quad (12)$$

und wenn man diesen Werth von k in Gleichung 6 einführt, so erhält man die rechtwinklige Coordinatengleichung der Hyperbel durch den Parameter p und die Hauptaxe a als gegebene Constanten ausgedrückt:

$$y^2 = px + \frac{p}{2a}x^2 \quad (13)$$

Ferner erhält man die Coordinatengleichung durch 2 Axen ausgedrückt, wenn man wie bei der Ellipse eine Nebenaxe c sich denkt, für welche ist:

$$2a : 2c = 2c : p$$

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(2ax + x^2) \quad (14)$$

Und wenn man die Mitte der grofsen Axe als Anfangspunkt der Abscissen nimmt und die Abscissen mit u bezeichnet,

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(u^2 - a^2) \quad (15)$$

Aus dieser Formel geht wie aus Formel 9 hervor, dafs beide entgegen gesetzt liegende Hyperbeln congruent sind, weil für $+u$ und $-u$ dieselbe Ordinate y entsteht.

Vergleicht man Formel 4 mit Formel 14, also

$$y^2 = Ax + Bx^2$$

mit $$y^2 = \frac{2c^2}{a}x + \frac{c^2}{a^2}x^2$$

so erhält man wie bei der Ellipse

die Hauptaxe $$2a = \frac{A}{B} \quad (16)$$

und die Nebenaxe $$2c = \frac{A}{\sqrt{B}} \quad (17)$$

Desgleichen mit Anwendung von Formel 5 und 6.

$$2a = \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{\sin(\alpha-\beta')}k = \frac{\cos^2(\frac{1}{2}\alpha)}{\sin(\alpha-\beta'')\sin\beta''}p \quad (18)$$

$$2c = k\sqrt{\frac{\sin\beta''}{\sin(\alpha-\beta')}} = \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{\sqrt{\sin\beta''\cdot\sin(\alpha-\beta')}}p \quad (19)$$

Die beiden Axen $2a$ und $2c$ verhalten sich also wie $\frac{1}{B} : \frac{1}{\sqrt{B}}$

oder $2a : 2c = 1 : \sqrt{B} = \cos\frac{1}{2}\alpha : \sqrt{\sin\beta''\cdot\sin(\alpha-\beta'')}$

Je nachdem das dritte Glied gröfser ler kleiner ist als das 4te, ist die Haupt- te gröfser oder kleiner als die Nebenaxe; r die Gleichheit beider Glieder wird die yperbel gleichseitig.

5. Die Gleichungen 4 bis 6 für die yperbel haben die Beschränkung, dafs e Abscissenlinie die Axe mit dem Schei- l als Anfangspunkt ist und dafs die rdinaten rechtwinklig sind. Eine all- meine Gleichung für die Hyperbel ist er eine solche, die eine gegen die Axe nz beliebig liegende Abscissenlinie, nen beliebigen Anfangspunkt hat und ssen Ordinaten einen beliebigen Win- l mit der Abscissenlinie bilden. Nur egt das ganze Coordinatensystem mit r Hyperbel in einerlei Ebene.

Eben so wie für die Ellipse (s. „Ellipse“, No. 3 und 4, pag. 39) und mit denselben dort angegebenen Hülfsmitteln sollen nun hier die der Hyperbel angehörenden allgemeinen Gleichungen geordnet und auf Fig. 608, pag. 40 bezogen zusammengestellt, auch noch einige andere Fälle hinzugefügt werden.

A und B bedeuten die Parameter der allgemeinen Gleichung 4

$$y^2 = Ax + Bx^2$$

AC ist die Axe, A der Scheitel, $EF = u$ die Abscisse, $FD = s$ die Ordinate. Die allgemeine Gleichung für den Hyperbelpunkt D (Art. „Curven“, pag. 177, II. Formel 30)

$$\text{I. } [\sin^2(\beta+\delta) - B\cos^2(\beta+\delta)]\,s^2 - 2[\sin(\beta+\delta)\sin\beta + B\cos(\beta+\delta)\cos\beta]\,su + (\sin^2\beta - B\cos^2\beta)\,u^2 - [2g\sin(\beta+\delta)\sin\beta + A\cos(\beta+\delta) + 2B\cos(\beta+\delta)(p - g\cos\beta)]\,s + [2g\sin^2\beta + A\cos\beta + 2B\cos\beta(p - g\cos\beta)]\,u + g^2\sin^2\beta - A(p - g\cos\beta) - B(p - g\cos\beta)^2 = 0$$

Dreht man die Abscissenlinie CF um C in die Axe AC, so kommt F in F', E in E', der Anfangspunkt E' der Abscissen ist um die Länge $p - g$ vom Scheitel A entfernt. Ist dann $\angle D'F'C = \delta$, $E'F' = u$, $D'F' = s$, so hat man für den Hyperbelpunkt D' die Gleichung (pag. 177, II, Formel 34)

$$\text{II. } (\sin^2\delta - B\cos^2\delta)\,s^2 - 2B\cos\delta \cdot su - Bu^2 - [A + 2B(p-g)]\cos\delta \cdot s + [A + 2B(p-g)]\,u - A(p-g) - B(p-g)^2 = 0$$

Setzt man in diese Gleichung $p - g = 0$; $u = -u$, so erhält man die Gleichung für die in der Axe liegende Abscissenlinie, für den Scheitel A als Anfangspunkt der Abscissen und den Coordinatenwinkel δ.

$$\text{III. } (\sin^2\delta - B\cos^2\delta)\,s^2 + 2B\cos\delta \cdot su - Bu^2 - A\cos\delta \cdot s - Au = 0$$

Nimmt man in der beliebigen Entfernung $E'L = h$ eine der Axe parallele GJ, verlängert $D'F'$ bis G, setzt $GD' = s'$, so ist für Gleichung II. $D'F' = s = s' - F'G = s' - h\,\mathrm{cosec}\,\delta$.

Setzt man daher in Gl. II. $s - h\,\mathrm{cosec}\,\delta$ für s, so erhält man die Gleichung wenn die Abscissenlinie in dem Abstand h mit der Axe $\mp$ läuft, der Art, dafs die Axe zwischen Curve und Abscissenlinie liegt. Bezeichnet man die Länge $AE' = p - g$ mit s, zieht von E' eine gerade Linie $E'H$ unter dem Coordinatenwinkel $E'HJ = \delta$, so ist H der Anfangspunkt der Abscissen, für den Hyperbelpunkt D' ist dann $HG = u$ und die Gleichung ist:

$$\text{IV. } (\sin^2\delta - B\cos^2\delta)\,s^2 - 2B\cos\delta \cdot su - Bu^2 - [(A + 2Bs - 2Bh\cot\delta)\cos\delta + 2h\sin\delta]\,s + [A + 2B(s + h\cot\delta)]\,u + (1 - B\cot^2\delta)\,h^2 + (A + 2Bs)\,h\cot\delta - As - Bs^2 = 0$$

Setzt man in diese Gleichung $s = 0$, $u = -u$, so erhält man die Gleichung der Hyperbel für dieselbe Abscissenlinie GJ, für denselben Coordinatenwinkel δ und mit dem unter dem Scheitelpunkt A belegenen Anfangspunkt M der Abscissen:

$$\text{V. } (\sin^2\delta - B\cos^2\delta)\,s^2 + 2B\cos\delta \cdot su - Bu^2 - [(A - 2Bh\cot\delta)\cos\delta + 2h\sin\delta]\,s - (A + 2Bh\cot\delta)\,u + (1 - B\cot^2\delta)\,h^2 + Ah\cot\delta = 0$$

Setzt man in diese Gleichung $h = 0$, so erhält man Gleichung III.

Setzt man in Gleichung IV. für h den Werth $-h$, so erhält man die Gleichung unter denselben Bedingungen mit IV., nur dafs die Abscissenlinie in dem Abstand h von der Axe entgegengesetzt, nämlich nach der Curvenhälfte zu liegt.

VI. $(\sin^2\delta - B\cos^2\delta)\,s^2 - 2B\cos\delta\cdot su - Bu^2 - [(A + 2Bs + 2Bh\cot\delta)\cos\delta - 2h\sin\delta]\,s + [A + 2B(s - h\cot\delta)]\,u + (1 - B\cot^2\delta)\,h^2 - (A + 2Bs)\,h\cot\delta - As - Bs^2 = 0$

Setzt man in diese Gleichung $h\sin\delta$ für h, so erhält man die Gleichung, Bd. II., pag. 177, Formel 38.

Setzt man in den vorstehenden Gleichungen I. bis VI. den Coordinatenwinkel, in I. $\angle(\beta + \delta) = 90°$, in II. bis VI. $\angle\delta = 90°$, so erhält man Gleichungen unter denselben Voraussetzungen, nur daſs die Ordinaten mit der Axe normal sind.

Aus Gleichung I. entsteht:

VII. $s^2 - 2\sin\beta\cdot su + (\sin^2\beta - B\cos^2\beta)\,u^2 - 2g\sin\beta\cdot s + [2g\sin^2\beta + A\cos\beta + 2B\cos\beta(p - g\cos\beta)]\,u + g^2\sin^2\beta - A(p - g\cos\beta) - B(p - g\cos\beta)^2 = 0$

Aus Gleichung II. entsteht

VIII. $s^2 - Bu^2 + [A + 2B(p - g)]\,u - A(p - g) - B(p - g)^2 = 0$

Aus Gleichung III. entsteht

IX. $s^2 - Bu^2 - Au = 0$

Aus Gleichung IV. entsteht

X. $s^2 - Bu^2 - 2hs + (A + 2Bs)\,u + h^2 - As - Bs^2 = 0$

Aus Gleichung V. entsteht

XI. $s^2 - Bu^2 - 2hs - Au + h^2 = 0$

Aus Gleichung VI. entsteht

XII. $s^2 - Bu^2 + 2hs + (A + 2Bs)\,u + h^2 - As - Bs^2 = 0$

6. Band II., pag. 178, No. 23 von I. bis VI. sind für alle Kegelschnitte die Werthe der in der allgemeinen Gleichung (1) vorkommenden Coefficienten erwiesen und angegeben. Es sollen diese Werthe für die Hyperbel allein hier zusammengestellt werden und zwar in Beziehung auf No. 5 mit Fig. 608 für die Gleichung

$$as^2 + bsu + cu^2 + ds + eu + f = 0$$

I. Der Coefficient a ist = 1, wenn $\angle DKC = (\delta + \beta)$, d. h. der Winkel, den die Ordinate mit der Axe bildet, ein Rechter ist. Dividirt man daher eine mit as^2 gegebene allgemeine Gleichung für die Hyperbel mit a, so verwandelt man dieselbe in eine Gleichung, für welche die Ordinaten mit der Hyperbelaxe normal sind.

Da diese einfache Operation überall auszuführen ist und die übrigen Coefficienten vereinfacht, so sollen die Gleichungen I. bis VI. für die Untersuchung der Coefficienten aufser Betracht bleiben. Die letzten 6 Gleichungen gehören also der allgemeinen Gleichung an

$$s^2 + bsu + cu^2 + ds + eu + f = 0$$

II. Der Coefficient b von su ist = dem doppelten negativen Sinus des Winkels (β) zwischen der Abscissenlinie und der Axe (Gl. VII). Wo die Abscissenlinie in der Axe oder mit derselben ∓ liegt, ist $\beta = 0$ und das Glied mit su fällt fort (Gl. VIII. bis XII.).

III. Der Coefficient c von u^2 ist ebenfalls nur von demselben Winkel β abhängig und = $\sin^2\beta - B\cos^2\beta$.

Wo die Abscissenlinie in der Axe oder derselben ∓ liegt, wird $c = -B$. Dieser Coefficient kann nie = 0 werden und das Glied mit u^2 kann nie ausfallen.

IV. Der Coefficient d von s ist = der doppelten Entfernung des Anfangspunkts der Abscissen von der Axe; negativ, wenn die Axe zwischen der Hyperbelhälfte und der Abscissenlinie liegt (Gl. VII., X., XI.), positiv, wenn die Abscissenlinie zwischen der Axe und der Hyperbelhälfte liegt (Gl. XII.). Ist die Axe die Abscissenlinie, so fällt das Glied mit s fort.

V. Der Coefficient e von u hängt von 3 Elementen ab. 1. Von dem $\angle\beta$ zwischen der Abscissenlinie und der Axe. 2. Von der Entfernung $E'A$ des Anfangspunks E' oder des auf die Axe projicirten Anfangspunkts E von dem Scheitelpunkt A der Hyperbel und 3. von den Parametern A und B.

Ist die Abscissenlinie die Axe, der Scheitel der Anfangspunkt der Abscissen (Gl. IX.), oder läuft die Abscissenlinie mit der Axe ∓ und ist die Projection des Anfangspunkts auf die Axe der Scheitel A (Gl. XI.), so ist $e = -A$.

ıscissenlinie die Axe und die
les Anfangspunkts vom Schei-
: s (Gl. VIII.), oder läuft die
ie mit der Axe ∓ und ist die
les Anfangspunkts auf die
› Länge s vom Scheitel ent-
., XII.), so ist $e = A + 2Bs$.

ıung VII. ist $p - g\cos\beta = s$,
B stehen deren auf die Axe
n Projectionen $A\cos\beta$,
›rzu kommt das Glied
nd es ist:

$^2\beta + A\cos\beta + 2Bs\cos\beta$

Coefficient f, das be-
d wird = 0, wenn der
kt der Abscissen ein
Hyperbel ist (Gl. IX).

› Abscissenlinie ∓ der
illt die Projection des
kts auf die Axe in
l (Gl. XI.), so ist $f =$
t des Abstandes h bei-
en; $f = h^2$.

› Abscissenlinie in der
nfangspunkt der Abscis-
Entfernung $p - g = s$
el (Gl. VIII.), so ist

$= -As - Bs^2$.

› Abscissenlinie in der
h ∓ der Axe und ist
on des Anfangspunkts
› um s von dem Schei-
(Gl. X., XII.), so ist

$h^2 - As - Bs^2$

n $h^2 - As - Bs^2 = 0$, so
dasjenige s bei gege-
der dasjenige h bei ge-
, für welches der Anfangs-
Abscissen in einem Hyperbel-

n in der allgemeinsten Glei-
die Entfernung $g\sin\beta$ des
ıkts von der Axe = h,; die
$p - g\cos\beta$ der Projection des
ıkts vom Scheitel = s, so hat
ıllgemein:

$= h_1^2 - As - Bs^2$

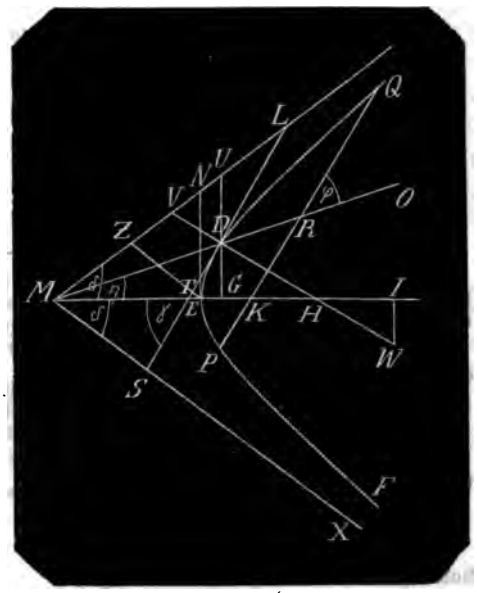
II., pag. 180, No. 25 mit Fig.
lie geometrische Construction
›ter A und B bei gegebenem
igt.

ıt pag. 181 ein Beispiel, wie
gegebenen allgemeinen Glei-
Zahlencoefficienten die zuge-
›erbel gefunden und geome-
ıruirt wird.

un speciellere Untersuchungen
yperbel anzustellen ist an die
bis No. 4 aufgestellten Glei-
chungen 1 bis 19 anzuknüpfen und fortzufahren:

In Fig. 718 ist $QDEF$ eine Hyperbel, E deren Scheitel, MJ deren Axe, $ME = a$ = der halben Hauptaxe, also M der Mittelpunkt zwischen der Hyperbel $QDEF$ und der links ihr entgegengesetzt liegenden Hyperbel. Für den Hyperbelpunkt D ist also $EG = x$, $MG = u$, $GD = y$.

Fig. 718.



Berührt LS die Hyperbel in D und ist DW normal auf LS, so ist DT die Tangente, DH die Normale, TG die Subtangente und HG die Subnormale.

Bd. II., pag. 185 sind die allgemeinen Formeln für die genannten 4 Linien angegeben.

Nun hat man aus Gl. 14:

$$f'x = \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{a + x}{y}$$

$$f''x = \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = -\frac{c^4}{a^2 y^3}$$

Also die trigonometrische Tangente des $\angle DTG =$

$$tg\,\alpha = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{a + x}{y} \qquad (20)$$

Subtangente $TG =$

$$\frac{y}{\delta y} = \frac{fx}{f'x} = \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{y^2}{a + x} \qquad (21)$$

$$\text{Tangente } DT = \frac{fx}{f'x}\cdot\sqrt{1+(f'x)^2} = \frac{y}{a+x}\sqrt{\left(\frac{a^2}{c^2}y\right)^2+(a+x)^2} = \frac{ay}{c^2(a+x)}\sqrt{c^4+(a^2+c^2)y^2}$$

$$\text{Subnormale } GH = fx\cdot f'x = \frac{c^2}{a^2}(a+x)$$

$$\text{Normale } DH = fx\sqrt{1+(f'x)^2} = \frac{1}{a}\sqrt{c^4+(a^2+c^2)y^2}$$

Ist DW der Krümmungshalbmesser r für D, so hat man nach Bd. 188, Gl. 9 bis 11, nämlich nach Gl. 9:

$$r = -\frac{[1+(f'x)^2]^{\frac{3}{2}}}{f''x} = +\frac{[a^4y^2+c^4(a+x)^2]^{\frac{3}{2}}}{c^4a^4}$$

Nach Gl. 10, die Abscisse

$$EJ = \alpha = x - \frac{1+(f'x)^2}{f''x}\cdot f'x = x+(a+x)\frac{(a^2+c^2)y^2+c^4}{a^2c^2}$$

Nach Gl. 11 die Ordinate

$$WJ = \beta = y + \frac{1+(f'x)^2}{f''x} = -\frac{a^2+c^2}{c^4}y^3$$

Nimmt man die Abscissen vom Mittelpunkt M der Hyperbel als Anfangspunkt, so hat man

$$EG = MG - ME$$

oder $$x = u - a$$

Gleichung 15 ist

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(u^2-a^2)$$

und es ist nun statt Formel 20 bis 27:

$$tg\,\alpha = \frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{u}{y} \quad (28)$$

$$\text{Subtangente } TG = \frac{u^2-a^2}{u} \quad (29)$$

$$\text{Tangente } DT = \frac{y}{cu}\sqrt{(a^2+c^2)u^2-a^4} \quad (30)$$

$$\text{Subnormale } GH = \frac{c^2}{a^2}u \quad (31)$$

$$\text{Normale } DH = \frac{c}{a^2}\sqrt{(a^2+c^2)u^2-a^4} \quad (32)$$

$$r = DW = \frac{(a^4y^2+c^4u^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4c^4} \quad (33)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{die Abscisse } EJ = \dfrac{a^2+c^2}{a^4}u^2 - a\\ \text{also die Abscisse } MJ = \dfrac{a^2+c^2}{a^4}u^2\end{array}\right\} \quad (34)$$

Die Ordinate WJ bleibt wie Formel 27.

7. In dem Art. „Asymptote“ mit Fig. 100 sind die Bedingungen erwiesen, unter welchen eine Curve eine Asymptote hat; diese sind:

1. daſs die Curve eine unendlich groſse Abscisse zuläſst und

2. daſs die Differenz zwischen tangente und der Abscisse eine Länge ist; die Hyperbel ist als genommen und nachgewiesen, eine Asymptote zukommt und für die der Hyperbel zu Grunde Gleichung $y^2 = a'x + b'x^2$ constr ist ohne Hülfe der Differenzial gefunden

Subtange — Abscisse $= 2\frac{a'x+$

$= \frac{a'}{\frac{a'}{x}+2$

woraus für $x = \infty$ diese Differenz

Ist (Fig. 718) ML die Asymp ist E der Anfangspunkt der M der Anfangspunkt der Asympt

$$\text{Subtg.} - x = ME = \frac{a'}{2b'}$$

Soll die Gleichung $y^2 = a'x +$ die Form von Gl. 14 gebracht so ist zu setzen

für a' der Werth $\frac{c^2}{a^2}\cdot 2a = 2$

für b' der Werth $\frac{c^2}{a^2}$

Es ist demnach

$$ME = \frac{2\frac{c^2}{a}}{2\frac{c^2}{a^2}} = a$$

folglich ist der Anfangspunkt der tote der Mittelpunkt beider Hyp

Der $\angle LME = \delta$ der Asymptote mit der Axe ist in dem Aufsatz gefunden (pag. 159) aus der allgemein geltenden Gleichung

Subtangente $(TG) \times tg\,\gamma\,(DTG) = y$

hierein die Werthe gesetzt und entwickelt:

$$tg\,\gamma = \frac{\frac{a'}{x} + 2b'}{2\sqrt{\frac{a'}{x} + b'}}$$

Für $x = \infty$ entsteht

$$tg\,\gamma = \frac{2b'}{2\sqrt{b'}} = \sqrt{b'}$$

also nach der Bezeichnung von Gl. 14

$$tg\,\delta = \frac{c}{a} \qquad (36)$$

Errichtet man also in E auf der Axe eine Normale EN = der halben Nebenaxe $= \sqrt{\frac{1}{2}ap} = \frac{1}{2}k\sqrt{\frac{\sin\beta''}{\sin(\alpha-\beta'')}}$, so hat man in der durch MN gezogenen geraden Linie die Asymptote ML.

8. Man findet die Lage der Asymptote auch aus den Gleichungen 29 und 28. Nach Gl. 29 ist

$$\text{Subtangente } GT = \frac{u^2 - a^2}{u} = u - \frac{a^2}{u}$$

daher Subtg. $- u = -\frac{a^2}{u}$

für $u = \infty$ ist also Subtg. $- u = 0$

oder Subtg. $= u$ (37)

Es hat mithin die Asymptote ihren Anfangspunkt in M.

Nach Gl. 28 ist $tg\,\alpha = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{u}{y} = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{u}{\frac{c}{a}\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{c}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{u^2}}}$

Für $u = \infty$ wird α zu δ und es ist also (wie Formel 36) $tg\,\delta = \frac{c}{a}$

9. Desgleichen findet man die Lage der Asymptote aus Gl. 21 und 20. Nach Gl. 21 ist

$$\text{Subtg.} - \text{Abscisse} = \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{y^2}{a+x} - x = \frac{a^2 y^2 - (ac^2 x + c^2 x^2)}{c^2(a+x)}$$
$$= \frac{c^2(2ax + x^2) - (ac^2 x + c^2 x^2)}{c^2(a+x)} = \frac{ax}{a+x} = \frac{a}{\frac{a}{x} + 1}$$

Für $x = \infty$ ist also die Differenz zwischen der Subtangente und der Abscisse $s = a = ME$.

Nach Gl. 20 ist

$$tg\,\alpha = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{a+x}{y} = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{a+x}{\frac{c}{a}\sqrt{2ax + x^2}} = \frac{c}{a} \cdot \frac{\frac{a}{x} + 1}{\sqrt{\frac{2a}{x} + 1}}$$

also für $x = \infty$ ist $tg\,\delta = \frac{c}{a}$.

10. Jede aus dem Mittelpunkt M durch einen Hyperbelpunkt wie D gezogene gerade Linie MO ist ein Durchmesser der Hyperbel (s. „Durchmesser“ mit Fig. 582 und 583), d. h. diese Linie zur Abscissenlinie genommen, existiren Ordinaten PQ unter einem constanten $\angle\varphi$, die alle von der Abscissenlinie MO halbirt werden. Die Ordinaten sind sämmtlich $\parallel$ der Tangente LS für den Durchschnittspunkt des Durchmessers mit der Hyperbel, und wenn ML und MX die beiden Asymptoten der Hyperbel sind, so ist die zwischen beiden belegene Tangente LS der zu MD coordinirte oder conjugirte Durchmesser und wird in dem Punkt D halbirt.

Dafs diese Halbirung statt findet, dafs also $DL = DS$ erweist sich folgender Art.

Bei der Bezeichnung Fig. 718 hat man

$$MD : DS = \sin MSD : \sin DMS = \sin(\gamma + \delta) : \sin(\delta + \eta)$$
$$MD : DL = \sin MLD : \sin LMD = \sin(\gamma - \delta) : \sin(\delta - \gamma)$$

also $$DS : DL = \frac{\sin(\delta + \eta)}{\sin(\gamma + \delta)} : \frac{\sin(\delta - \eta)}{\sin(\gamma - \delta)}$$

Es ist also zu beweisen, dafs die beiden letzten Glieder der Proportion einander gleich sind, oder mit anderen Worten: zu untersuchen, in welchem Verhältnifs die Winkel γ und η zu δ stehen müssen, damit beide Quotienten einander gleich werden:

Man hat demnach zu untersuchen das Verhältnifs

$$\sin(\delta+\eta)\cdot\sin(\gamma-\delta) : \sin(\delta-\eta)\cdot\sin(\gamma+\delta)$$

Die Klammern aufgelöst und gehoben, erhält man

$$\sin^2\delta\cdot\cos\gamma\cdot\cos\eta : \cos^2\delta\cdot\sin\gamma\cdot\sin\eta$$

oder $$tg^2\delta \quad : tg\gamma\cdot tg\eta$$

Nun ist Formel 36: $tg\,\delta = \frac{c}{a}$

Aus Formel 28 der $\angle\gamma$, wenn er derjenige Winkel ist, den die Tangente an D, für $DG = y$ und $MG = u$ mit der Axe bildet $= \frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{u}{y}$

Mithin hat man für die Gleichheit von LD und SD

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{u}{y}\cdot tg\,\eta$$

woraus $$tg\,\eta = \frac{y}{u} = \frac{DG}{MG}$$

Es ist mithin $LD = SD$.

11. Um nachzuweisen, dafs jede der Tangente in D parallele Ordinate QP durch den Durchmesser MO h wird, dafs also $RQ = RP$, kann ma die rechtwinklige Coordinatengleic 15 zurückgehen: Denkt man sich die l QQ' und PP' auf die Axe MJ gefäll ist nach Gl. 15

$$(QQ')^2 = \frac{c^2}{a^2}[(MQ')^2 - a^2]$$

und $$(PP')^2 = \frac{c^2}{a^2}[(MP')^2 - a^2]$$

Bezeichnet man die Abscisse MR u, die Ordinaten RQ und RP mit y, y_1 so hat man

$$QQ' = QR\sin\gamma + MR\sin\eta = y,\sin\gamma + u,\sin\eta$$
$$PP' = PR\sin\gamma - MR\sin\eta = y_1\sin\gamma - u,\sin\eta$$
$$MQ' = MR\cos\eta + QR\cos\gamma = u,\cos\eta + y,\cos\gamma$$
$$MP' = MR\cos\eta - PR\cos\gamma = u,\cos\eta - y_1\cos\gamma$$

Demnach hat man die Uebereinstimmung der beiden Gleichungen zu erwei

$$(y,\sin\gamma + u,\sin\eta)^2 = \frac{c^2}{a^2}[(u,\cos\eta + y,\cos\gamma)^2 - a^2]$$

$$(y_1\sin\gamma - u,\sin\eta)^2 = \frac{c^2}{a^2}[(u,\cos\eta - y^2\cos\gamma)^2 - a^2]$$

Oder zu ermitteln, unter welchem Verhältnifs zwischen den Winkeln γ u indem man $y, = y_1$ setzt, folgende Gleichung besteht

$$(y\sin\gamma \pm u\sin\eta)^2 = \frac{c^2}{a^2}[(u\cos\eta \pm y\cos\gamma)^2 - a^2]$$

oder geordnet:

$$(a^2\sin^2\gamma - c\cos^2\gamma)\,y^2 \pm 2(a^2\sin\eta\cdot\sin\gamma - c^2\cos\eta\cdot\cos\gamma)\,yu + (a^2\sin^2\eta - c^2\cos^2\eta)\,u^2 + a^2c^2 = 0$$

Diese Gleichung kann aber nur bestehen, wenn das mit 2 Vorzeichen versehene Glied verschwindet, wenn also

$$a^2\sin\eta\sin\gamma - c^2\cos\eta\cos\gamma = 0$$

oder wenn $$\frac{c^2}{a^2} = tg\,\eta\cdot tg\,\gamma \qquad (39)$$

Nun ist $$tg\,\eta = \frac{DG}{MG} = \frac{y}{u}$$

folglich ist für die Gleichheit von RP und RQ

$$tg\,\gamma = \frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{u}{y} \qquad (40)$$

Es ist also (nach Formel 28) γ Winkel, den die Tangente in D mit Axe bildet.

Setzt man den Coordinatenwinkel $= \varphi$, so ist $\varphi = \gamma - \eta$.

Man erhält also φ durch η ausgedr wenn man in die Gleichung $\frac{c^2}{a^2} = tg\,\eta$ den Werth von φ einführt.

Dann ist $$\frac{c^2}{a^2} = tg\,\eta\cdot tg\,(\varphi+\eta)$$

woraus $$tg\,\varphi = \frac{c^2 - a^2\,tg^2\eta}{(a^2+c^2)\,tg\,\eta} = \frac{c^2\cos^2\eta - a^2\sin^2\eta}{(a^2+c^2)\sin\eta\cdot\cos\eta}$$

)urch Umformung erhält man noch Formel für den Coordinatenwinkel

$$\sin^2\varphi = \frac{(c^2\cos^2\eta - a^2\sin^2\eta)^2}{a^4\sin^2\eta + c^4\cos^2\eta} \qquad (42)$$

2. Um eine schiefwinklige Coordinaleichung zwischen $QR = y$, und MR herzustellen hat man aus Gleichung 39

$$tg\,\gamma = \frac{c^2}{a^2}\cot\eta$$

aus durch Umformungen

$$\left(tg^2\gamma = \frac{\sin^2\gamma}{\cos^2\gamma}\right)$$

$$\sin^2\gamma = \frac{c^4\cdot\cos^2\eta}{a^4\sin^2\eta + c^4\cos^2\eta} \qquad (43)$$

$$\cos^2\gamma = \frac{a^4\cdot\sin^2\eta}{a^4\sin^2\eta + c^4\cos^2\eta} \qquad (44)$$

Setzt man diese Werthe in die Coordinatengleichung No. 11 mit fortgelassenem Gliede $\pm(a^2\sin\eta\sin\gamma - c^2\cos\eta\cos\gamma)\,y_1$, so erhält man reducirt und geordnet:

$$y_1^2 = \frac{a^4\sin^2\eta + c^4\cos^2\eta}{a^2c^2}u_1^2 - \frac{a^4\sin^2\eta + c^4\cos^2\eta}{c^2\cos^2\eta - a^2\sin^2\eta} \qquad (45)$$

n dieser Gleichung ist also $MR = u_1$; $= RP = y$, $ME = a$, $EN = c$.

etzt man in diese Gleichung $y_1 = 0$, rhält man für $MR = u_1$, den Durchser $MD = a_1$

$$MD^2 = a_1^2 = \frac{a^2c^2}{c^2\cos^2\eta - a^2\sin^2\eta} \qquad (46)$$

12. Um den conjugirten (halben) Durchmesser $DL = c_1$ gleichfalls wie a_1 durch die Axen a, c und den $\angle\eta$ auszudrücken hat man No. 10:

$$DM : DL = a_1 : c_1 = \sin(\gamma - \delta) : \sin(\delta - \eta)$$

aus

$$c_1 = \frac{\sin(\delta-\eta)}{\sin(\gamma-\delta)}a_1 = \frac{\cos\eta\cdot tg\,\delta - \sin\eta}{\sin\gamma - \cos\gamma\cdot tg\,\delta}a_1$$

Nach Formel 36 ist $tg\,\delta = \frac{c}{a}$, daher ist

$$c_1 = \frac{c\cos\eta - a\sin\eta}{a\sin\gamma - c\cos\gamma}a_1 = \frac{c\cos\eta - a\sin\eta}{a\,tg\,\gamma - c}\sec\gamma\cdot a_1$$

Nach Formel 39 ist $tg\,\gamma = \frac{c^2}{a^2}\cot\eta = \frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{\cos\eta}{\sin\eta}$, mithin

$$c_1 = \frac{c\cos\eta - a\sin\eta}{\frac{c^2}{a}\cdot\frac{\cos\eta}{\sin\eta} - c}\sec\gamma\,a_1 = \frac{a}{c}a_1\cdot\sin\eta\sec\gamma \qquad (47)$$

Setzt man für a_1 seinen Werth aus Formel 46 und aus Formel 39:

$$\sec\gamma = \sqrt{\left(\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{\cos\eta}{\sin\eta}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{a^4\sin^2\eta + c^4\cos^2\eta}}{a^2\sin\eta}$$

rhält man

$$c_1^2 = \frac{a^2}{c^2}\sin^2\eta\cdot\frac{a^2c^2}{c^2\cos^2\eta - a^2\sin^2\eta}\cdot\frac{a^4\sin^2\eta + c^4\cos^2\eta}{a^4\sin^2\eta}$$

l reducirt

$$c_1^2 = \frac{a^4\sin^2\eta + c^4\cos^2\eta}{c^2\cos^2\eta - a^2\sin^2\eta} \qquad (48)$$

3. Man bemerkt, dafs der Werth von = ist dem letzten Gliede der Gleichung Dividirt man c_1^2 durch a_1^2 (Formel durch Formel 46), so erhält man den fficienten des ersten Gliedes derselGleichung. Man hat demnach aus 45.

$$y_1^2 = \frac{c_1^2}{a_1^2}\cdot u_1^2 - c_1^2$$

r

$$y_1^2 = \frac{c_1^2}{a_1^2}\cdot(u_1^2 - a_1^2) \qquad (49)$$

welche mit Gl. 15, wenn statt der Durchmesser a_1; c_1 die Axen a; c gegeben sind, übereinstimmt.

Ebenso entsteht mit Gleichung 14 übereinstimmend, wenn man $DR = x_1$ setzt:

$$y_1^2 = \frac{c_1^2}{a_1^2}\cdot(2a_1x_1 + x_1^2) \qquad (50)$$

14. Verbindet man Formel 46 und 48 durch Multiplication, so erhält man

$$a_1^2\cdot c_1^2 = a^2c^2\cdot\frac{a^4\sin^2\eta + c^4\cos^2\eta}{(c^2\cos^2\eta - a^2\sin^2\eta)^2}$$

Der letzte Bruchfactor ist nach Formel

$$42 = \frac{1}{\sin^2\varphi}$$

hieraus $a_1^2 e_1^2 \sin^2\varphi = a^2 c^2$

oder $$a_1 e_1 \sin\varphi = ac \qquad (51)$$

D. h. das Product zweier coordinirter Halbmesser in den Sinus des von ihnen gebildeten Winkels ist constant, also gleich dem Product der beiden halben coordinirten Axen.

Nun ist $MD = a_1$; $LS = 2c$, $\angle MDS = \varphi$ folglich $a_1 \cdot c_1 \cdot \sin\varphi = \triangle MLS$

Es ist also jedes $\triangle$ wie MLS zwischen den beiden Asymptoten und einer Tangente constant = dem Axendreieck $2 \times MEN$, oder wenn man NE bis N' in MX verlängert denkt = dem $\triangle MNN'$.

15. Aus Formel 46 und 48 erhält man

$$a_1^2 - c_1^2 = \frac{a^2 c^2 - a^4 \sin^2\eta - c^4 \cos^2\eta}{c^2 \cos^2\eta - a^2 \sin^2\eta} \qquad (52)$$

Schreibt man für $a^2 c^2$ den Werth $a^2 c^2 \sin^2\eta + a^2 c^2 \cos^2\eta$, addirt und reducirt, so erhält man:

$$a_1^2 - c_1^2 = a^2 - c^2 \qquad (53)$$

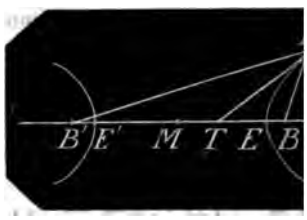
D. h. die Differenz der Quadrate je zweier coordinirten Halbmesser ist constant und = der Differenz der Quadrate beider halben Axen.

16. Die Hyperbel ist eine Kegel linie und es kommt auch dieser, Parabel und der Ellipse ein Bre oder vielmehr: es kommen den zusammengehörenden Hyperbeln zusammengehörige Brennpunkte ser Gegenstand ist in dem W schon behandelt in den Art. „ punkt der Hyperbel, Brenn der Kegelschnitte". In die ten Aufsatz: die Brennpunkte perbel in No. 3, pag. 423 bis No 425, mit Fig. 258 und 259.

Das Wesentlichste hiervon m auf Fig. 719 zusammengestellt gendes:

E, E' sind die Scheitel beide

Fig 719.



mengehörigen Hyperbeln, M d telpunkt, $ME = ME' = a$. Zur mung der Brennpunkte B, B'

$$MB = MB' = \sqrt{ME^2 + NE^2} = \sqrt{a^2 + c^2} = e = MN$$

(ME, NE, MN s. Fig. 718).

$MB = MB' = MN = e$ heifst die Excentricität der Hyperbel.

Zwei gerade Linien von beiden Brennpunkten nach irgend einem Hyperbelpunkt D, nämlich BD und $B'D$ heifsen zusammengehörige Brennstrahlen, und es ist jedesmal deren Differenz

$$B'D - BD = EE' = 2a \qquad (54)$$

Ist DT die Tangente in D, so ist

$$\angle BDT = \angle B'DT \qquad (56)$$

Ist u die Abscisse für den Punkt D (MG Fig. 718) so ist

$$B'D = \frac{eu}{a} + a \qquad (57)$$

$$BD = \frac{eu}{a} - a \qquad (58)$$

17. Verlängert man eine Ordinate bis zur Asymptote, wie GD bis U, so ist überall

$$GU^2 - GD^2 \text{ constant} = EN^2 = c^2 \qquad (59)$$

Denn es ist $ME : EN = MG : GU$

oder $a : c = u : GU$

woraus $$GU = \frac{c}{a} u$$

also $$(GU)^2 = \frac{c^2}{a^2} u^2$$

Es ist aber $GD^2 = y^2 = \frac{c^2}{a^2}(u^2 -$

daher $$GU^2 - y^2 = \frac{c^2}{a^2} a^2 =$$

18. Zieht man aus einem P punkt D eine grade Linie DV nächsten Asymptote $\neq$ mit der Asymptote MX, so ist $MV \times$ stant und zwar wenn EZ ebenfall

$$MV \times DV = MZ \times EZ = \frac{1}{4}$$

Um zuerst zu beweisen, dafs $= \frac{1}{4}e^2$ hat man

da $EZ \neq MX$

$$\angle ZME = \angle ZEM$$

daher $MZ = EZ$

und

$$MZ \times EZ = MZ^2 = (\tfrac{1}{2} MN)^2 = \tfrac{1}{4}(a^2 -$$

t man DV mit v, MV mit s
$UDV \infty \triangle NEZ$
$EZ = NZ$
$DV = UV$
$MU = MV + UV = s + v$

Nun ist $UG = MU \sin\delta = (s+v)\sin\delta$ und wenn man von V auf DU eine Normale sich denkt,

$$UD = 2UV \sin\delta = 2v \sin\delta$$

mithin $DG = UG - UD = (s-v)\sin\delta$

$$UG^2 - DG^2 = [(s+v)^2 - (s-v)^2]\sin^2\delta = 4sv\sin^2\delta$$

'ormel 59 $c^2 = 4sv\sin^2\delta = 4sv \cdot \frac{EN^2}{MN^2} = 4sv \cdot \frac{c^2}{e^2}$

$v = \frac{1}{4}e^2$

$V = s \cdot v = \frac{1}{4}e^2$ (60)

ıt $\frac{1}{4}e^2$ die Potenz der Hy- l die Gleichung $s \cdot v = \frac{1}{4}e^2$ die r der Hyperbel zwischen mptoten.

ıffication der Hyperbel. ıe Rectificationsformel, Bd. II.

$$\lambda = \int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\partial x + C$$

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(2ax + x^2)$$

$$\frac{y}{x} = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{a+x}{y}$$

und $$\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \sqrt{1 + \frac{c^4}{a^4} \cdot \left(\frac{a+x}{y}\right)^2}$$

Setzt man (Fig. 718) $EG = x$, $DG = y$, so ist Bogen $ED = \lambda$ und Bogen ED

$$= \lambda = \int \sqrt{1 + \frac{c^4}{a^4} \cdot \left(\frac{a+x}{y}\right)^2}\,\partial x$$

$$= \int \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{(a+x)^2}{2ax + x^2}}\,\partial x$$

Diese Formel ist nicht zu integriren. Nimmt man dagegen Formel 15

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(u^2 - a^2)$$

so hat man $$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{u}{y}$$

$$\sqrt{\frac{c^4}{a^4} \cdot \frac{u^2}{y^2}} = \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{u^2}{u^2 - a^2}} = \sqrt{\frac{(a^2+c^2)u^2 - a^4}{a^2(u^2 - a^2)}} = \frac{\sqrt{u^2 - \frac{a^4}{a^2+c^2}}}{\sqrt{\frac{a^2}{a^2+c^2}} \times \sqrt{u^2 - a^2}}$$

Formel ist nur zu integriren, wenn man die Wurzel im Zähler in eine st. Setzt man zur Vereinfachung $\frac{a^2}{a^2+c^2} = n^2$ so ist

$$\lambda = \int \frac{\sqrt{u^2 - n^2a^2}}{n\sqrt{u^2 - a^2}}$$

ıtwickelt die Reihe aus dem Zähler durch directe successive Wurzel- und erhält

$$= u - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{n^2a^2}{u} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{n^4a^4}{u^3} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{n^6a^6}{u^5} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{n^8a^8}{u^7} - \ldots$$

ıt demnach

$$\int \frac{\partial u}{\sqrt{u^2 - a^2}} - \frac{na^2}{2}\int \frac{\partial u}{u\sqrt{u^2 - a^2}} - \frac{n^2a^4}{8}\int \frac{\partial u}{u^3\sqrt{u^2 - a^2}} - \frac{n^3a^6}{16}\int \frac{\partial u}{u^5\sqrt{u^2 - a^2}} - \ldots$$

t

$$\int \frac{\partial u}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \sqrt{u^2 - a^2}$$

$$\int \frac{\partial u}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\,arc\,sec\,\frac{u}{a}$$

$$\int \frac{\partial u}{u^3\sqrt{u^2 - a^2}} = \tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a^2u^2} + \frac{1}{2a^3}\,arc\,sec\,\frac{u}{a}$$

$$\int \frac{\partial u}{u^5\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a^2u^4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a^4u^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot a^5}\,arc\,sec\,\frac{u}{a}$$

$$\int \frac{\partial u}{u^7\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{6}\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a^2u^6} + \frac{1\cdot 5}{4\cdot 6}\cdot\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a^4u^4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a^6u^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot a^7}\,arc\,sec\,\frac{u}{a}$$

u. s. w.

Da der Bogen vom Scheitel anfängt, so ist er = 0 für $u = a$. Da nun die Integrale entweder den Factor $\sqrt{u^2-a^2}$ oder den Factor $sec\,\frac{u}{a}$ haben, so wird jedes Integral = 0 für $u = a$ und die Constante fällt fort.

Die Werthe sämmtlicher Integrale zusammengestellt ergeben den Bogen

$$\lambda = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}\left[1 - \frac{n^4}{16}\cdot\frac{a^2}{u^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}n^6\left(\frac{a^4}{u^4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{u^2}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{16}\frac{1}{2}n^8\left(\frac{a^6}{u^6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{a^4}{u^4} + \frac{15}{8}\cdot\frac{a^2}{u^2}\right) - \ldots\ldots\right]$$
$$-\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{16}n^2 + \frac{1}{16}\frac{3}{8}n^4 + \frac{25}{8\cdot 16^2}n^6 + \ldots.\right] na\cdot arc\,sec\,\frac{u}{a}$$

20. Quadratur der Hyperbel. Die allgemeine Quadraturformel für rechtwinklige Coordinaten steht Bd. II., pag. 192

$$F = \int y\cdot\partial x + C$$

Nun ist $y^2 = \frac{c^2}{a^2}(2ax + x^2)$

Mithin ist die Ebene $EDG = \int \frac{c}{a}\cdot\sqrt{(2ax + x^2)}$

Nach der allgemeinen Integralformel

$$\int\sqrt{bx+cx^2} = \frac{b+2cx}{4c}\sqrt{bx+cx^2} - \frac{b^2}{8c\sqrt{c}}\cdot ln\left(\frac{b+2cx}{2\sqrt{c}} + \sqrt{bx+cx^2}\right)$$

hat man

$$F = \frac{c}{a}\left[\frac{a+x}{2}\sqrt{2ax+x^2} - \frac{1}{2}a^2\,ln\,(a+x+\sqrt{2ax+x^2}) + C\right]$$

Für $x = 0$ wird $F = 0$, man hat also zur Bestimmung der Constante

$$0 = -\frac{1}{2}a^2\cdot ln\,a + C$$

woraus $C = +\frac{1}{2}a^2\cdot ln\,a$

und vollständig

$$F = \frac{c}{a}\left[\frac{a+x}{2}\sqrt{2ax+x^2} - \frac{1}{2}a^2\cdot ln\left(a+x+\frac{\sqrt{2ax+x^2}}{a}\right)\right] \quad (61)$$

Setzt man $x = u - a$ so erhält man

$$F = \frac{c}{2a}\left[u\sqrt{u^2-a^2} - a^2\,ln\,\frac{u+\sqrt{u^2-a^2}}{a}\right] \quad (62)$$

21. Es ist $\triangle DMG = \frac{1}{2}(a+x)\,y = \frac{1}{2}uy$

$$= \frac{c}{2a}(a+x)\sqrt{2ax+x^2} = \frac{c}{2a}u\sqrt{u^2-a^2}$$

Zieht man hiervon ab die Ebene $F = EDG$ (Formel 61 – 62), so erhält man die zwischen den geraden ME, MD und dem Bogen ED liegende Fläche

$$MDE = \frac{1}{2}ac\cdot logn\,\frac{a+x+\sqrt{2ax+x^2}}{a} = \frac{1}{2}ac\cdot logn\,\frac{u+\sqrt{u^2-a^2}}{a} \quad (63)$$

22. Setzt man (wie No. 11, Formel 46) den Durchmesser $MD = a$, so ist $MG = (a+x) = a\cos\eta$; und da zugleich $\sqrt{2ax+x^2} = \frac{a}{c}y = \frac{a}{c}a\sin\eta$, so hat man nach Formel 63

$$\text{Ebene } MDE = \frac{1}{2}ac\,logn\,\frac{a}{a}\cdot\frac{a\sin\eta + c\cos\eta}{c} \quad (64)$$

oder $$\text{Ebene } MDE = \frac{1}{2}ac\,logn\,\frac{ay + c(a+x)}{ac} \quad (65)$$

ltiplicirt man Zähler und Nen-

$\frac{c(a+x)}{ac}$ mit $-ay+c(a+x)$

ht

$+x)^2-a^2y^2$

$(a+x)-ay]$

t man für $(a+x)^2$ den Werth
t man den Zähler

$y^2=c^2u^2-a^2\cdot\frac{c^2}{a^2}(u^2-a^2)=a^2c^2$

hat man den *log* in 65

$\frac{a^2c^2}{(a+x)-ay]}=log\frac{ac}{c(a+x)-ay}$

$DE=\frac{1}{2}ac\,ln\frac{ac}{c(a+x)-ay}$ (66)

(Fig. 719) B der Brennpunkt,
$=e$, und denkt man sich zu D
ate DG und die Linie DM wie

DB – Sect. MDE = Ebene EDB

$$\left.\begin{aligned}B&=\tfrac{1}{2}ey-\tfrac{1}{2}ac\,ln\frac{ay+c(a+x)}{ac}\\&=\tfrac{1}{2}ey-\tfrac{1}{2}ac\,ln\frac{ac}{c(a+x)-ay}\end{aligned}\right\}(67)$$

s No. 18 hat man

$DV\times MV=EZ\times MZ$

ı in den beiden Dreiecken MDV
ł die Winkel bei V und Z ein-
ıich, sind so ist

$V:\triangle MEZ=DV\times MV=EZ\times MZ$

$\triangle MDV=\triangle MEZ$ (68)

n Ebene $MEDV=MEDV$

ene MDE = Ebene $DEZV$ (69)

ıse Ebene $DEZV$ läfst sich auch
e Linien $DV=v$ und $MV=s$
ıl 60) ausdrücken:

nämlich

$GU:GM=EN:EM$

$GU:a+x=c:a$

$$GU=\frac{c}{a}(a+x)$$

t

$-y=\frac{c}{a}(a+x)-y=\frac{c(a+x)-ay}{a}$

ı zugleich

$DU:DV=EN:EZ$

$DU:v=c:\frac{1}{2}e$

$DU=\frac{2vc}{e}=\frac{c(a+x)-ay}{a}$

t Formel 66 verbunden gibt

$DE=\frac{1}{2}ac\,log\cdot\frac{e}{2v}$

Folglich nach Formel 69

Ebene $DEZV=\frac{1}{2}ac\,log\cdot\frac{e}{2v}$ (70)

Setzt man in Formel 70 für v den Werth aus Formel 60 $=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^2}{s}$ so hat man noch

Ebene $DEZV=\frac{1}{2}ac\,log\cdot\frac{2s}{e}$ (71)

27. Es ist $a=e\cos\delta$

$c=e\sin\delta$ (s. No. 16)

hieraus $\frac{1}{2}ac=\frac{1}{4}e^2\sin\delta\cdot\cos\delta=\frac{1}{4}e^2\sin 2\delta$

Mithin

Ebene $DEZV=\frac{1}{4}e^2\sin 2\delta\cdot log\frac{2s}{e}$ (72)

Bei der gleichseitigen Hyperbel ist $\delta=45^\circ$.

Man hat demnach für diese

Ebene $DEZV=\frac{1}{4}e^2\,log\frac{2s}{e}$ (73)

Diese Eigenschaft der gleichseitigen Hyperbel, dafs die Ebenen zwischen der Asymptote und der hyperbolischen Linie nur durch den natürlichen Logarithmus der Abscissen und die Excentricität der Hyperbel als Constante bestimmt werden ist der Grund, dafs die natürlichen Logarithmen auch hyperbolische Logarithmen genannt werden.

28. Es sei Z die eine, s eine zweite von M aus auf die Asymptote genommene Abscisse, so ist der Flächenraum

für die erste $=\frac{1}{4}e^2\,ln\frac{2Z}{e}$

für die zweite $=e^2\,ln\frac{2s}{e}$

der Unterschied ist

$$=\tfrac{1}{4}e^2\left(ln\frac{2Z}{e}-ln\frac{2s}{e}\right)=\tfrac{1}{4}e^2\,ln\frac{Z}{s}\quad(74)$$

Ist demnach das Verhältnifs $Z:s$ als eine constante Gröfse gegeben, so ist auch $ln\frac{Z}{s}$ constant und die Unterschiede je zweier Flächenräume für dasselbe Verhältnifs zweier beliebiger Abscissen sind einander gleich.

29. Bestimmung der Umdrehungsflächen.

Bd. II., pag. 194 steht die allgemeine Formel für rechtwinklige Coordinaten

$$F=2\pi\int y\sqrt{1+\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2}+C$$

Legt man Formel 15 zu Grunde

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(u^2 - a^2)$$

so ist $$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{u}{y}$$

Nun ist die Oberfläche, wel
steht, wenn der hyperbolische B
um die Axe sich dreht:

$$Fu = 2\pi \int y \sqrt{1 + \frac{c^4}{a^4} \cdot \left(\frac{u}{y}\right)^2}\, \partial u = 2\pi \int \sqrt{y^2 + \frac{c^4}{a^4} u^2}\, \partial u$$

$$= 2\pi \int \sqrt{\frac{c^2}{a^2}(u^2 - a)^2 + \frac{c^4}{a^4} u^2}\, \partial u = 2\pi \frac{c}{a^2} \int \sqrt{e^2 u^2 - a^4}\, \partial u$$

Nun ist $$\int \sqrt{e^2 u^2 - a^4}\, \partial u = \frac{u}{2} \sqrt{e^2 u^2 - a^4} - \frac{a^4}{2e} ln\left(eu + \sqrt{e^2 u^2 - a^4}\right) +$$

Für $u = a$ wird $F = 0$ mithin hat man das $\int$ für $u = a$

$$0 = \tfrac{1}{2} a \sqrt{e^2 a^2 - a^4} - \frac{a^4}{2e} ln\left[ea + \sqrt{e^2 a^2 - a^4}\right] + C$$

woraus $$C = -\frac{ac}{2} + \frac{a^4}{2e} ln\,(e + c)\,a$$

und das vollständige Integral

$$F = \pi c \left[\frac{u}{a^2} \sqrt{e^2 u^2 - a^4} - c - \frac{a^2}{e} ln \frac{eu + \sqrt{e^2 u^2 - a^4}}{a\,(e + c)}\right]$$

30. Für die Umdrehung des Bogens ED um eine in M auf der Ax
liche Normale ist

$$F = 2\pi \int u \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}\, \partial y$$

$$= 2\pi \int u \sqrt{1 + \frac{a^4}{c^4} \cdot \frac{y^2}{u^2}}\, \partial y = \frac{2\pi a}{c^2} \int \sqrt{e^2 y^2 + c^4}\, \partial y$$

woraus $$F = \frac{2\pi a}{c^2} \cdot \left[\frac{y\sqrt{e^2 y^2 + c^4}}{2} + \frac{c^4}{2e} ln\left(ey + \sqrt{e^2 y^2 + c^4}\right) + C\right]$$

Für $y = 0$ wird $F = 0$ mithin

$$0 = 2\pi a \cdot \frac{c^4}{2e} ln\, c^2 + C$$

mithin vollständig und reducirt

$$F = \pi a \left[\frac{y\sqrt{e^2 y^2 + c^4}}{c^2} + \frac{c^2}{e} ln \frac{ey + \sqrt{e^2 y^2 + c^4}}{c^2}\right]$$

31. Für die Umdrehung des Bogens
ED um die Asymptote ML ist die Ab-
scisse $= MV$, die Ordinate $= VD$; beide
bilden schiefwinklige Coordinaten.
Die zur rechtwinkligen Coordinaten-
gleichung gehörende Abscisse
$MV + DV\cos(2\delta)$, die zugehöri
winklige Ordinate $= DV \sin 2\delta$.
net man nun MV mit x, DV n
hat man nach No. 30 die Quadrat

$$F = 2\pi \int y \sin(2\delta) \sqrt{1 + \frac{[\partial(y \sin 2\delta)]^2}{[\partial(x + y\cos 2\delta)]^2}}\, \partial(x + y\cos 2\delta)$$

$$= 2\pi \int y \sin(2\delta) \sqrt{[\partial(y \sin 2\delta)]^2 + [\partial(x + y\cos 2\delta)]^2}$$

und die Klammern aufgelöst

$$F = 2\pi \int y \sin(2\delta) \sqrt{(\partial y)^2 + (\partial x)^2 + 2\partial x \cdot \partial y \cos(2\delta)}$$

$$= 2\pi \int y \sin(2\delta) \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 1 + 2\frac{\partial y}{\partial x}\cos(2\delta)}\, \partial x$$

Nun ist $x \cdot y = \frac{1}{4}e^2$, also $y = \frac{e^2}{4x}$

und $$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{e^2}{4x^2}$$

$$\sin 2\delta = 2 \sin \delta \cdot \cos \delta = 2 \cdot \frac{NE}{NM} \cdot \frac{ME}{NM} = 2 \frac{c}{e} \cdot \frac{a}{e} = 2 \frac{ac}{e^2}$$

$$\cos 2\delta = \cos^2 \delta - \sin^2 \delta = \left(\frac{ME}{MN}\right)^2 - \left(\frac{NE}{MN}\right)^2 = \frac{a^2 - c^2}{e^2}$$

Diese Werthe in die Formel für F gesetzt gibt

$$F = 2\pi \int \frac{ac}{2x} \sqrt{\frac{e^4}{16x^4} + 1 + 2 \cdot \left(-\frac{e^2}{4x^2}\right) \cdot \frac{a^2 - c^2}{e^2}}\, \partial x$$

$$= \pi \frac{ac}{4} \int \frac{1}{x^3} \sqrt{e^4 - 8(a^2 - c^2)x^2 + 16x^4}\, \partial x$$

Um diese Formel integriren zu können, setze $x^2 = z$
1 ist $2x\, \partial x = \partial z$

aus $\partial x = \frac{\partial z}{2x}$ und

$$F = \pi \frac{ac}{8} \int \frac{1}{z^2} \sqrt{e^4 - 8(a^2 - c^2)z + 16z^2} \cdot \partial z \qquad (1)$$

Es kann hierfür folgende Reductionsformel angewendet werden:

$$\int \frac{1}{x^m} (a + bx + cx^2)^n\, \partial x = -\frac{(a + bx + cx^2)^{n+1}}{(m-1)ax^{m-1}} + \frac{b(n + 2 - m)}{a(m-1)} \times$$

$$\int \frac{1}{x^{m-1}} (a + bx + cx^2)^n\, \partial x + \frac{c(2n + 3 - m)}{a(m-1)} \int \frac{1}{x^{m-2}} (a + bx + cx^2)^n\, \partial x$$

Hier ist $a = e^4$; $b = -8(a^2 - c^2)$; $c = 16$; $n = \frac{1}{2}$; $m = 2$, $x = z$.

Setzt man zur Abkürzung die Wurzelgröfse $= W$, also

$$F = \pi \frac{ac}{8} \int \frac{1}{z^2} \sqrt{W}$$

so hat man $$F = \pi \frac{ac}{8} \left[-\frac{W^{\frac{1}{2}}}{e^4 z} - \frac{4(a^2 - c^2)}{e^4} \int \frac{1}{z} \sqrt{W}\, \partial z + \frac{32}{e^4} \int \sqrt{W}\, \partial z \right] \qquad (2)$$

Nun ist das erste Integral in Formel 2:

$$\int \frac{1}{z} \sqrt{W}\, \partial z = \sqrt{W} + e^4 \int \frac{\partial z}{z\sqrt{W}} - 4(a^2 - c^2) \int \frac{\partial z}{\sqrt{W}} \qquad (3)$$

Das zweite Integral in Formel 2

$$\int \sqrt{W}\, \partial z = \frac{-a^2 + c^2 + 4z}{8} \sqrt{W} + \frac{e^4 - (a^2 - c^2)^2}{2} \int \frac{\partial z}{\sqrt{W}} \qquad (4)$$

Werden die Werthe aus 3 und 4 in 2 substituirt, und für $W^{\frac{1}{2}}$ der Werth W/W geschrieben, so erhält man

$$F = \pi \frac{ac}{8e^4} \left[-\frac{e^4 \sqrt{W}}{z} - 4(a^2 - c^2) e^4 \int \frac{\partial z}{z\sqrt{W}} + 16e^4 \int \frac{\partial z}{\sqrt{W}} \right]$$

Nun ist $$\int \frac{\partial z}{z\sqrt{W}} = -\frac{1}{e^2} ln \frac{2e^4 - 8(a^2 - c^2)z + 2e^2\sqrt{W}}{z}$$

und $$\int \frac{\partial z}{\sqrt{W}} = \frac{1}{2} ln \left[-(a^2 - c^2) + 4z + \sqrt{W} \right]$$

Mithin, wenn man den Zähler im ersten Integral mit 2 dividirt und log 2 mit zur Constante rechnet:

$$F = \frac{\pi ac}{8e^2} \left[-\frac{e^2}{z} \sqrt{W} + 4(a^2 - c^2) ln \frac{e^4 - 4(a^2 - c^2)z + e^2\sqrt{W}}{z} \right]$$
$$+ 4e^2 ln \left[-(a^2 - c^2) + 4z + \sqrt{W} \right] + C$$

Zur Bestimmung der Constante hat man $F = 0$,
wenn $x = MZ = \frac{1}{2}e$ ist.

$y = EZ = \frac{1}{2}e$ also $z = \frac{1}{2}e^2$

und $$W = c^4 - 8(a^2 - c^2) \cdot \tfrac{1}{2}e^2 + 16\left(\frac{e^2}{4}\right)^2 = 2e^4 - 2a^2e^2 + 2c^2e^2 = 4c^2e^2$$

Mithin ist

$$0=\frac{\pi ac}{8e^2}[-8ce+4(a^2-c^2)ln[8c(c+e)]-4e^2ln[2c(c+e)]+C$$

Also vollständig und durch x ausgedrückt:

$$F=\frac{\pi ac}{8e^2}\left[\frac{e}{x^2}8cx^2-e\sqrt{W})+4(a^2-c^2)ln\frac{e^4-4(a^2-c^2)x^2+e^2\sqrt{W}}{8c(c+e)x^2}\right.$$
$$\left.+4e^2ln\frac{4x^2-(a^2-c^2)+\sqrt{W}}{2c(c+e)}\right]$$

W bedeutet $e^4-8(a^2-c^2)x^2+16x^4$

Für die gleichseitige Hyperbel ist $a=c$, $e=a\sqrt{2}$, demnach

$$F=\frac{\pi}{4}a^2\left[2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{a^4+4x^4}}{x^2}+2ln\frac{2x^2+\sqrt{a^4+4x^4}}{a^2(1+\sqrt{2})}\right]$$

32. Cubatur der Hyperbel.

Der hyperbolische Körper, welcher durch die Umdrehung der Ebene *DEG* die Axe entsteht, ist nach der Bd. II, pag. 195 aufgestellten allgemeinen Cu turformel

$$K=\pi\int y^2\,\delta x$$
$$=\pi\int\frac{c^2}{a^2}(2ax+x^2)\,\delta x=\pi\frac{c^2}{a^2}[\int 2ax\,\delta x+\int x^2\,\delta x]$$
$$=\pi\frac{c^2}{a^2}(ax^2+\tfrac{1}{3}x^3)+C$$

wo die Constante fortfällt.

mithin $K\cdot\frac{1}{3}\pi\frac{c^2}{a^2}x^2(3a+x)$

33. Die Ebene *VMED* drehe sich um die Asymptote *ML*; dann ist, w *MV*$=x$, *DV*$=y$ genommen wird:

$$K=\pi\int[y\,sin\,(2\delta)]^2\,\delta x$$

Nach No. 31 ist $sin\,(2\delta)=2\frac{ac}{e^2}$

$$y=\tfrac{1}{4}\frac{e^2}{x}$$

mithin $K=\pi\int\frac{a^2c^2}{e^4}\cdot\frac{1}{16}\frac{e^4}{x^2}\delta x=\frac{\pi}{4}a^2c^2\int\frac{\delta x}{x^2}=-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{a^2c^2}{x}+C$

Für $x=MZ=\frac{1}{2}e$ wird $K=0$, mithin vollständig

$$K=-\frac{\pi a^2c^2}{4x}+\frac{\pi a^2c^2}{2e}=\pi\frac{a^2c^2}{4e}\cdot\frac{2x-e}{x}$$

oder wenn man $x=\frac{e^2}{4y}$ schreibt:

$$K=\pi\frac{a^2c^2}{2e^2}(e-2y) \qquad (80)$$

Für $y=0$ ist $x=\infty$, also für ein unendliches x ist als Maximalgrenze

$$K=\pi\cdot\frac{a^2c^2}{2e} \qquad (81)$$

Hyperbeln höherer Art.

Aus der Gleichung für die gemeine Hyperbel (Hyp. erster Art)

$$y^2=\frac{c^2}{a^2}(2ax+x^2)$$

kann die allgemeine Form abgeleitet werden:

$$ay^2=bx(c+x)$$

Eine Hyperbel höherer Art ist diejenige, welcher die Gleichung entspricht:

$$ay^{m+n}=bx^m(c+x)^n$$

Vergleiche den Art. „Curven, Linien dritter und höherer Ordnungen“ u. s. w., pag. 184.

Die Hyperbel erster Art heißt s Unterschiede von den anderen Apol nische Hyperbel (Vergl. „Apol nische Parabel“).

Wenn bei der gemeinen Hyperbel Asymptote Abscisse ist, so ist (s. „H perbel No. 18, Formel 60) die Coo natengleichung $xy=\frac{1}{4}e^2$

In dieser Beziehung hat man höh Hyperbeln von den Gleichungsformen

$$x^my^n=a^mb^n$$

Es ist $xy^2=ab^2$ eine Hyperbel 2ter A

} sind Hyperbeln 3ter Art,

ist eine Hyperbel 4ter Art.

ei diesen sind ebenfalls die die Abscissenlinien.

ch ist was sich auf die Hyt, als: Hyperbolisches lches der in dem Art. „Hy-32 berechnete Umdrehungs-

ches Cylindroid ist der Kördurch die Umdrehung eines n Bogens mit seinen rechtdinaten um eine durch den uf der Hauptaxe senkrechsteht. Die Oberfläche desrechnet in dem Art. „Hy-30.

ches Konoid, s. „Hyper-

che Logarithmen werden türlichen Logarithmen gesach davon s. u. „Hyperpag. 273.

l, s. v. w. „Hyperboli-id.

etrische Reihe ist eine Reihleren Glieder mit den Gliethmetischen Reihe den Zuhaben, dafs ein $n$tes Glied m Product der ersten n Glieaetischen Reihe ist.

m Art. „Facultät“ geht jedes Glied der Reihe mit Facultät gleichbedeutend le gegebene arithmetische Form:

$b,\ a+3b,\ \ldots\ldots\ a+(n-1)b$

hervorgehende hypergeohe und die hieraus hervorultäten sind

$\cdot b)$

$\cdot b)(a+2b)$

$\cdot b)(a+2b)(a+3b)$

gebene arithmetische Reihe

$\cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \ldots.$

ergeometrische Reihe

$1\cdot2\cdot3\cdot4;\ 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5$ u. s. w.

$\cdot\ 24\ \cdot\ 125\ \ldots.$

der hier zum Beispiel gehe sind diejenigen Faculmit (1), (2), (3), (4) ... oder .. bezeichnet werden.

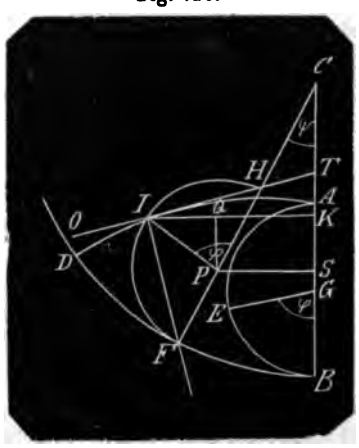
Hypocycloide. Diese unterscheidet sich von der Epicycloide dadurch, dafs der erzeugende Kreis auf einer Kreisperipherie innerhalb derselben sich abwälzt, während die Epicycloide durch die Wälzung des Kreises aufserhalb auf einer Kreisperipherie entsteht.

Ist (Fig. 720) C der Mittelpunkt des Kreises BFD vom Halbmesser $BC = R$, in welchem der Kreis AEB vom Halbmesser $BG = r$ sich abwälzt und die Hypocycloide AJD beschreibt, so ist der Kreis BFD der Grundkreis, der Kreis AEB der erzeugende Kreis und wenn von dem Punkt A aus die Beschreibung der Hypocycloide geschehen soll, A der beschreibende Punkt. Es sei, während dieser Abwälzung von B aus, der Punkt E des Kreises AEB in F gekommen und der Punkt A habe den Hypocycloidenbogen AJ durchlaufen. Dann ist also der Bogen BE des erzeugenden Kreises AEB = dem Bogen BF des Grundkreises.

Von dem Kreise AEB befindet sich jetzt der Punkt A in J, der Mittelpunkt G in P, und zwar mit F und C in einer geraden Linie. Zeichnet man nun aus P den Halbkreis FJH, so ist FJ das Stück, welches dem Bogen BE zum Halbkreise fehlt, also = dem Bogen AE und folglich Bogen HJ = dem Bogen BE. Ist der ganze Halbkreis AEB abgewälzt, so befindet sich A in D, AJD ist die halbe Hypocycloide, die andere ihr congruente Hälfte hat man sich rechts von BC zu denken.

Nimmt man nun CB zur Abscissenlinie mit dem Anfangspunkt A, die Ordi-

Fig. 720.



naten rechtwinklig auf CB, so ist für den Curvenpunkt J die Abscisse $AK = x$, die Ordinate $KJ = y$, der Winkel BCF sei ψ, der zu J gehörende Wälzungswinkel $BGE = HPJ = \varphi$ so hat man

$$AK = CS - KS - CA$$
$$= CP\cos\psi - JP\cos JPQ -$$

oder $$x = (R-r)\cos\psi - r\cos(\varphi-\psi) - (R-2r)$$

ferner $$JK = JQ + PS$$

oder $$y = r\sin(\varphi-\psi) + (R-r)\sin\psi$$

und wenn man unter φ und ψ die Bogen für den Halbmesser = 1 versteht: für Bogen BF = Bogen BE

$$R\psi = r\varphi$$

Den Werth $\psi = \frac{r}{R}\varphi$ aus Gleichung 3 in die ersten beiden Gleichungen stituirt gibt

$$x = (R-r)\cos\left(\frac{r}{R}\varphi\right) - r\cos\left(\frac{R-r}{R}\varphi\right) - (R-2r)$$

$$y = r\sin\left(\frac{R-r}{R}\varphi\right) + (R-r)\sin\left(\frac{r}{R}\varphi\right)$$

3. Um nun von diesen Gleichungen auf die Untersuchung der Curve Anwendung zu machen hat man

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = r\cdot\frac{R-r}{R}\left[\sin\left(\frac{R-r}{R}\varphi\right) - \sin\left(\frac{r}{R}\varphi\right)\right]$$

$$\frac{\partial y}{\partial\varphi} = r\cdot\frac{R-r}{R}\left[\cos\left(\frac{R-r}{r}\varphi\right) + \cos\left(\frac{r}{R}\varphi\right)\right]$$

Hieraus

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\cos\left(\frac{R-r}{R}\varphi\right) + \cos\left(\frac{r}{R}\varphi\right)}{\sin\left(\frac{R-r}{R}\varphi\right) - \sin\left(\frac{r}{R}\varphi\right)} = \cot\tfrac{1}{2}\left[\frac{R-r}{R}\varphi - \frac{r}{\varphi}\varphi\right] = \cot\frac{R-2r}{2R}\varphi$$

Um das zweite Differenzial von y zu finden hat man

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

Nun ist aus Gl. 8

$$\frac{\partial\frac{\partial y}{\partial x}}{\partial\varphi} = -\frac{R-2r}{2R}\operatorname{cosec}^2\left(\frac{R-2r}{2R}\varphi\right)$$

und aus 6

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{r\cdot\frac{R-r}{R}\left[\sin\left(\frac{R-r}{R}\varphi\right) - \sin\left(\frac{r}{R}\varphi\right)\right]}$$

Mithin

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{(R-2r)\operatorname{cosec}^2\left(\frac{R-2r}{2R}\varphi\right)}{2r(R-r)\cdot 2\cos\left(\frac{R-r}{R}+\frac{r}{R}\right)\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\left(\frac{R-r}{R}-\frac{r}{R}\right)\frac{\varphi}{2}}$$

$$= -\frac{R-2r}{4r(R-r)\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\sin^2\left(\frac{R-2r}{2R}\varphi\right)}$$

4. Zeichnet man die Sehne JH mit Verlängerung bis T in BC, so ist

$$\angle PJH = \angle PHJ = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi = \angle CHT$$

mithin $$\angle HTA = \angle CHT + \psi = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi + \psi = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi + \frac{r}{R}\varphi = 90^\circ - \frac{R-2r}{2R}\varphi$$

Nun ist, wenn man die Tangente OJ an der Hypocycloide bis zur Abscissenlinie BC verlängert, der Winkel α, den sie mit CB bildet, nach Bd. II., pag. 185 durch die Gleichung bestimmt

$$tg\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$$

für die Hypocycloide also nach Gleichung 8

$$tg\,\alpha = cot\,\frac{R-2r}{2R}\,\varphi$$

oder $cot\,(90^\circ - \alpha) = cot\,\frac{R-2r}{2R}\,\varphi$

woraus $$\alpha = 90^\circ - \frac{R-2r}{2R}\,\varphi \qquad (10)$$

Es ist also α derselbe Winkel JTA, den die verlängerte Sehne JH mit der Abscissenlinie bildet, und die an J gezogene Sehne JH ist die Tangente in J.

5. Die Subtangente KT ist nach Bd. II., pag. 185, Formel 1:

$$\frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} = y \cdot tg\left(\frac{R-2r}{2R}\,\varphi\right) \qquad (11)$$

Die Subnormale, nämlich die Projection KL der bis zur Abscissenlinie CB verlängerten Sehne JF, wenn sie mit CB in L zusammentrifft: (Bd. II., pag. 185, Formel 4)

$$y \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = y\,cot\left(\frac{R-2r}{2R}\,\varphi\right) \qquad (12)$$

Die Tangente JT nach Bd. II., p. 185, Formel 3:

$$\frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} \cdot \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = y\,tg\left(\frac{R-2r}{2R}\,\varphi\right) \cdot \sqrt{1+cot^2\left(\frac{R-2r}{2R}\,\varphi\right)} = y\,sec\left(\frac{R-2r}{2R}\,\varphi\right) \qquad (13)$$

Die Normale JL (Bd. II., pag. 185, Formel 5)

$$y\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = y\,cosec\left(\frac{R-2r}{2R}\,\varphi\right) \qquad (14)$$

Der in der Richtung JF befindliche Krümmungshalbmesser nach Bd. II., pag. 188, Formel 9

$$r = -\frac{\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)} = \left[1+cot^2\left(\frac{R-2r}{2R}\,\varphi\right)\right]^{\frac{3}{2}} \times \frac{4r\,(R-r)\,cos\,\frac{\varphi}{2} \cdot sin^3\left(\frac{R-2r}{2R}\,\varphi\right)}{R-2r}$$

$$= \frac{4r\,(R-r)\,cos\,\frac{\varphi}{2}}{R-2r} \qquad (15)$$

Die Abscisse für den Krümmungsmittelpunkt (Bd. II., pag. 188, Formel 10)

$$a = x - \frac{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = x + \frac{4r\,(R-r)\,cos\,\frac{\varphi}{2}\,sin^3\left(\frac{R-2r}{2R}\,\varphi\right)}{(R-2r)\,sin^2\left(\frac{R-2r}{2R}\,\varphi\right)} \cdot cot\left(\frac{R-2r}{2R}\,\varphi\right)$$

$$= x + \frac{4r\,(R-r)}{R-2r} \cdot cos\,\frac{\varphi}{2} \cdot cos\left(\frac{R-2r}{2R}\,\varphi\right) \qquad (16)$$

Die Ordinate für den Krümmungsmittelpunkt (Bd. II., pag. 188, Formel 11)

$$b = y + \frac{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)} = y - \frac{4r\,(R-r)}{R-2r} \cdot cos\,\frac{\varphi}{2} \cdot sin\left(\frac{R-2r}{2R}\,\varphi\right) \qquad (17)$$

6. Rectification der Hypocycloide. Nach der allgemeinen Rectificationsformel, Bd. II., pag. 191.

$$\lambda = \int \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\partial x$$

erhält man den Bogen

$$AJ = \int cosec\left(\frac{R-2r}{2R}\,\varphi\right)\partial x = \int cosec\left(\frac{R-2r}{2R}\,\varphi\right) \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi}\,\partial \varphi$$

also [illegible]

$$AJ = \int cosec\left(\frac{R-2r}{2R}\varphi\right) \cdot r\frac{R-r}{R}\left[sin\frac{R-r}{R}\varphi - sin\left(\frac{r}{R}\varphi\right)\right]\vartheta\varphi$$

$$= 2r \cdot \frac{R-r}{R}\int cosec\left(\frac{R-2r}{2R}\varphi\right) \cdot cos\frac{\varphi}{2} \cdot sin\left(\frac{R-2r}{2R}\varphi\right)\vartheta\varphi$$

$$= 2r \cdot \frac{R-r}{R}\int cos\frac{\varphi}{2} \cdot 2 \cdot \vartheta\frac{\varphi}{2} = 4\frac{r(R-r)}{R}\int cos\frac{\varphi}{2} \cdot \vartheta\frac{\varphi}{2}$$

$$= \frac{4r(R-r)}{R} sin\frac{\varphi}{2} \qquad (18)$$

Für $\varphi = \pi$ wird der Halbkreis abgewälzt und es ist die halbe Hypocycloide

$$AJD = \frac{4r(R-r)}{R} \qquad (19)$$

Hieraus der

$$\text{Bogen } DJ = \frac{4r(R-r)}{R} \cdot \left(1 - sin\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{8r(R-r)}{R} sin^2\frac{\pi-\varphi}{4} \qquad (20)$$

7. Setzt man in Gl. 4 und 5 $R = 2r$, so entsteht

$$x = r\,cos\frac{\varphi}{2} - r\,cos\frac{\varphi}{2} - 0 = 0$$

$$y = r\,sin\frac{\varphi}{2} + r\,sin\frac{\varphi}{2} = 2r\,sin\frac{\varphi}{2} = 2r\,sin\,\psi$$

In dem Fall also, dafs $R = 2r$ ist, dafs also der Punkt C auf A fällt, wird die Hypocycloide eine auf CB in A normale gerade Linie, die Ordinate y fällt mit derselben zusammen und wird mit Abwälzung des Halbkreises $= R$, $A = 90°$.

Hypotenuse (*υπο* über, *τεινω* spannen) ist die in einem rechtwinkligen Dreieck dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite.

Hypothese (*υπο*, über, vor, *θεσις* Satz). In der Mathematik die Voraussetzung, die Bedingung unter welcher ein Lehrsatz (thesis) wahr ist; also der Vordersatz. In dem Lehrsatz: In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich, ist:

Die Gleichheit zweier Seiten eines Dreiecks die Hypothesis, die Gleichheit der beiden Seiten anliegenden Winkel die Thesis.

Hypothese in den Naturwissenschaften ist eine Annahme über die physische Beschaffenheit eines Stoffs oder über die Wirkungsgesetze einer Kraft; in letzter Beziehung hat sie Wichtigkeit für die angewandte Mathematik. Eine Hypothese wird jederzeit aufgestellt als das Product der Erfahrung bei Beobachtung einer Menge von Erscheinungen einerlei Ursprungs; sie ist die Grundlage einer oft sehr umfangreichen Theorie und gilt so lange als richtig, bis aus neueren Erfahrungen oder Forschungen entweder die Unrichtigkeit derselben erwiesen oder eine wahrscheinlichere Annahme gegen die vorherige sich Bahn macht.

Eine der vortrefflichsten Hypothesen der Neuzeit über die physische Beschaffenheit des Stoffs, ein Product des menschlichen Forschergeistes ist die Atomentheorie (s. „Atom, Atomgewicht, Atomvolum“).

In dem Art.: „Festigkeit“ ist pag. 82 von 3 verschiedenen Hypothesen über den Vorgang beim Bruch starrer Körper die Rede, auf welche die Theorie der relativen Festigkeit gegründet ist.

Die uralte Hypothese, dafs die Sonne und alle Gestirne um die Erde sich drehen, welche der Augenschein hervorbrachte, hat Jahrtausende hindurch gegolten, bis Copernicus deren Unrichtigkeit nachwies. Die von Newton aufgestellte Hypothese über die Attractionsgesetze, das Ergebnifs von Beobachtungen, Berechnungen und Vergleichungen, wird sich auf ewige Zeiten bewähren.

I.

t das Zeichen für Flächen- und rinhalt; früher war I statt $\int$ das ın für Integral. i ist das allgeZeichen für $\sqrt{-1}$ s. „Imaginäre ıen".

atisch ist Ein und dasselbe, wenn ahrere Male entweder da ist, oder ht werden soll. In der Arithmetik antisch was in der Geometrie conıt ist, also gleich und gleichartig gleich grofs und von gleicher Form. rundsatz: Jede Gröfse ist sich selbst ı, gibt den einfachsten identischen oder die einfachste identische Gleiz: $A = A$, welche oft in der Eleıngeometrie zu einem Beweise erlich ist. Z. B. in dem Art.: „Axiom", 363 zu Fig. 152 heifst es: Es ist

Voraussetzung	$AC = AB$
Construction	$AF = AG$
nöge Grundsatz	$\angle A = \angle A$
ich	$\triangle ACF \cong \triangle ABG$

ofse Gleichheit gibt keine Identität.

Die Gleichung $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ ist keine identische Gleichung; sie kann aber wie jede andere analytische Gleichung zu einer identischen Gl. umgeformt werden.

Ikosaeder ist einer der 5 vieleckigen regulären Körper oder Polyeder, welche zur Untersuchung ihrer Eigenschaften einen Artikel in diesem Wörterbuch erhalten sollen.

Das Ikosaeder wird von 20 regelmäfsigen Dreiecksflächen eingeschlossen, es hat 30 gleich grofse Kanten und 12 fünfflächige Ecken mit 60 ebenen Winkeln.

Bedeuten m, n, N, α, k, r und R dasselbe wie in dem Art.: „Dodekaeder", so ist hier

$$m = 5;\ n = 3;\ N = 20$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\frac{180^\circ}{m}}{\sin\frac{180^\circ}{n}} = \frac{\cos 36^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$$

$$\alpha = 138^\circ\ 11'\ 23''$$

$$R = \tfrac{1}{4}k\, tg\frac{\alpha}{2} \cdot tg\, 36^\circ = \tfrac{1}{4}k\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 0{,}951\,0565 \times k$$

$$r = \tfrac{1}{4}k\, tg\frac{\alpha}{2} \cdot cot\, 60^\circ = \tfrac{1}{12}(3+\sqrt{5})\, k\sqrt{3} = 0{,}755\,7613 \times k$$

$$R = r\frac{tg\, 36^\circ}{cot\, 60^\circ} = r\sqrt{3(5-2\sqrt{5})} = 1{,}258\,4087 \times r$$

$$r = R\frac{cot\, 60^\circ}{tg\, 36^\circ} = R\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}} = 0{,}794\,6435 \times R$$

$$k = 2R\, cot\frac{\alpha}{2} \cdot cot\, 36^\circ = R\sqrt{2(1-\tfrac{1}{5}\sqrt{5})} = 1{,}051\,4620 \times R$$

$$k = 2r\, cot\frac{\alpha}{2} \cdot tg\, 60^\circ = (3-\sqrt{5})\, r\sqrt{3} = 1{,}323\,1691 \times r$$

$$J^2 = \tfrac{1}{4} n k^2 \cot 60^\circ = \tfrac{1}{4} k^2 \sqrt{3} = 0{,}433\,0127 \times k^2$$

$$= n R^2 \cot^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cot 60^\circ \cdot \cot^2 36^\circ = \tfrac{1}{16}(5 - \sqrt{5})\, R^2 \sqrt{3} = 0{,}478\,7270 \times R^2$$

$$= n r^2 \cot \frac{\alpha}{2} \cdot tg\, 60^\circ = \tfrac{1}{2}(7 - 3\sqrt{5})\, r^2 \sqrt{3} = 0{,}758\,1084 \times r^2$$

$$J^3 = \tfrac{1}{12} n N \cdot k^3\, tg \frac{\alpha}{2} \cdot \cot^2 60^\circ = \tfrac{1}{12}(3 + \sqrt{5})\, k^3 = 2{,}181\,6950 \times k^3$$

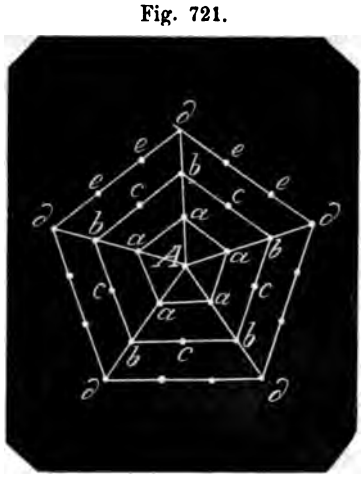
$$= \tfrac{1}{8} n N \cdot R^3 \cot^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cot^2 60^\circ \cdot \cot^3 36^\circ = \tfrac{1}{8} R^3 \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = 2{,}536\,1509 \times R^3$$

$$= \tfrac{1}{8} n N \cdot r^3 \cot^2 \frac{\alpha}{2} \cdot tg\, 60^\circ = 10(7 - 3\sqrt{5}) r^3 \sqrt{3} = 0{,}505\,4056 \times r^3$$

Ikosaedralzahlen sind diejenigen der 5 Polyedralzahlen, deren zu Grunde liegendes Polyeder das Ikosaeder ist. Der Zusammenhang der Zahlen mit dem Ikosaeder ist derselbe wie der zwischen den Dodekaedralzahlen (s. d.) und dem Dodekaeder:

Die erste I. ist = 1; das Ikosaeder hat 12 fünfflächige Ecken, die zweite Zahl ist also = 12. Verlängert man je 5 zu einer Ecke gehörige Dreieckskanten (wie Fig. 565, pag. 320) *Aa* um die gleiche Länge *ab* und bildet das neue Ikosaeder, so erhält man zu den schon vorhandenen 12 Eckpunkten noch 11 neue Eckpunkte *b*, *b*, weil der 12te *A* schon gezählt ist. Von den 30 Kanten hat schon die 5 Kanten *Ab* den Mittelpunkt *a*, die übrigen 25 neue Kanten erhalten die 25 Mittelpunkte *c*, es sind also 11 Eckpunkte und 25 Kantenpunkte zusammen 36 Punkte und die dritte Zahl ist 12 + 36 = 48.

Fig. 721.



Verlängert man wieder jede der 5 ten *Ab* um die Länge *bd* = *Aa*, so hat das neue Ikosaeder, so kommen wieder 11 neue Eckpunkte hinzu, die 5 Kanten *Ad* haben bereits die 2 Mittelpunkte, die übrigen 25 Kanten erhalten je einen mittlere Punkte *e*, *e*, es kommen also hinzu 50 Kantenpunkte. Die 5 Dreieckflächen *Add* haben bereits jede den Mittelpunkt *c*, die übrigen 15 Dreieckflächen erhalten also jede einen Punkt, zusammen 15 Flächenpunkte; mithin kommen hinzu 11 Eckpunkte, 50 Kantenpunkte, 15 Flächenpunkte, zusammen 76 Punkte und die vierte Zahl ist 124.

Wird wieder verlängert so kommen hinzu 11 Eckpunkte, + 3 × 25 Kantenpunkte + 3 × 15 Flächenpunkte, zusammen 131 Punkte und die 5te Zahl ist

Bei abermaliger Verlängerung kommen hinzu 11 Eckpunkte + 4 × 25 Kantenpunkte + 6 × 15 Flächenpunkte, zusammen 201 Punkte und die 6te Zahl ist 456.

Die Differenzen zwischen den Zahlen erhält man aus folgender Reihe von höherer Ordnung in der ersten Differenzenreihe

0) 1 · 12 · 48 · 124 · 255 · 456 ..... $\frac{1}{2} n (5n^2 - 5n + 2)$

1) 11 36 76 131 201 ..... $\frac{1}{2}(15n^2 - 25n + 12)$

25 40 55 70 .....

15 15 15 .....

Ikositetraeder, (Trapezoeder, Leucitoeder) hat 24 gleiche Trapezoidflächen; 48 Kanten, von denen 24 länger und 24 kürzer sind; 26 Ecken. Von diesen werden 6 von 4 größeren Kanten, 8 von 3 kleineren (*b*) und 12 von 2

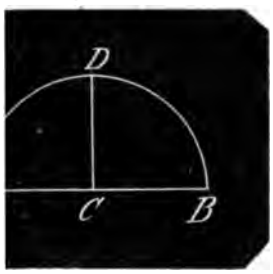
2 kleineren Kanten (c) gebil- Axen verbinden die 6 grö- n, je 2 und 2 mit einander.

722.

e Grösen, eingebildete, he Grösen sind Grösen, der Bezeichnung, nur der , nicht aber in Wirklichkeit sind. Z. B. *arc sin* $(1+x)$ inen Sinus gibt, der >1 ist. x) weil es keinen negativen us gibt. *Log* $(-a)$ weil eine ahl keinen Logarithmus hat.

n n eine positive ganze Zahl eine Zahl, 2 oder $2n$ mal mit multiplicirt ein negatives Pro- kann.

Fig. 723.



Halbkreis ADB sei C der An- Nullpunkt, $AC=1$

$BC=-1$

$1:CD=CD:-1$

$1:CD=CD:-1$

$CD^2=-1$

$CD=\sqrt{-1}$

so CD eine imaginäre Grösse, oder vielmehr, sie erscheint in ihrer Bezeichnung als imaginär, vorhanden ist sie wirklich.

So wie dieser einfache Fall darthut, können reelle Grösen im Laufe des Calcüls als imaginäre Grösen erscheinen, und es kommt dann darauf an, diese Form fortzuschaffen, welches in der Regel durch Einführung neuer Grösen von imaginärer Form geschieht, und daher ist eine Lehre erforderlich, wie man mit imaginären Grösen rechnet, die Lehre von der Rechnung mit imaginären Grösen.

2 Die Grösse $\sqrt{-1}$ als Repraesentant aller imaginären Grösen arithmetischer Art wird in der Regel der Kürze und Bequemlichkeit wegen mit i bezeichnet.

Man schreibt dann

$$i\sqrt{a} \text{ für } \sqrt{-a} \quad (1)$$

$$i(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}) \text{ für } \sqrt{-a}\pm\sqrt{-b} \quad (2)$$

Es ist ferner

$$i=\sqrt{-1} \quad (3)$$

$$i^2=(\sqrt{-1})^2=-1 \quad (4)$$

$$i^3=(\sqrt{-1})^3=-1\sqrt{-1}=-\sqrt{-1} \quad (5)$$

$$i^4=(\sqrt{-1})^4=(-1)^2=+1 \quad (6)$$

$$i^5=(\sqrt{-1})^5=+1\sqrt{-1}=\sqrt{-1} \quad (7)$$

u. s. w.

Daher ist

$$\sqrt{-a}\sqrt{-b}=i^2\sqrt{ab}=-\sqrt{ab} \quad (8)$$

$$\frac{a}{\sqrt{-1}}=\frac{a}{i}=\frac{ai}{i^2}=\frac{a\sqrt{-1}}{-1}=-a\sqrt{-1} \quad (9)$$

3. Wenn $a+bi=a'+b'i$

so muss $a=a'$ und $b=b'$ sein.

Denn es folgt aus der gegebenen Gleichung

$$a-a'=(b'-b)i$$

woraus

$$i=\frac{a-a'}{b'-b}$$

Wären nun $a\gtrless a'$, $b\lessgtr b'$ so wären $a-a'$ und $b'-b$ reelle Grösen, also $i=\frac{a-a'}{b'-b}$ eine reelle Grösse, welches nicht der Fall ist. Es kann demnach nur $a=a'$ und $b=b'$ sein. Dann ist $i=\frac{0}{0}$ welches jede Grösse ohne alle Ausnahme, also auch eine imaginäre Grösse bezeichnet.

4. Zwei imaginäre Grösen von der Form $a+bi$ und $a-bi$ heisen einander conjugirt.

Es ist

$$(a+bi)+(a-bi)=2a \quad (1)$$

$$(a+bi)-(a-bi)=2bi \quad (2)$$

$$(a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 \quad (3)$$

$$\frac{a+bi}{a-bi} = \frac{(a+bi)^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \frac{2abi}{a^2+b^2} \quad (4)$$

Es sind also die Summe und das Product zweier imaginärer conjugirter Ausdrücke reell, die Differenz und der Quotient derselben sind imaginär.

5. Die imaginäre Gröſse $A \pm Bi$ läſst sich in ein Product verwandeln; denn es ist allgemein

$$(a \pm bi)(\alpha \pm \beta i) = a\alpha - b\beta \pm (a\beta + \alpha b)i$$

Ein Product zweier imaginären Gröſsen, jede von der Form $A \pm Bi$ ist hiermit durch einfache Multiplication in eine Gröſse von derselben Form $A \pm Bi$ umgewandelt worden. Man müſste dagegen bei specieller Anwendung 4 unbekannte Gröſsen a, b, α, β entwickeln, wenn der rechts stehende Theil zur Verwandlung gegeben wäre.

Dagegen hat man dieselbe Umwandlung mit Hülfe trigonometrischer Functionen einfacher:

Schreibt man nämlich $\sin\varphi \pm i\cos\varphi$, so hat dieser Ausdruck die Form der gegebenen imaginären Gröſse, und wenn $A < 1$ und $B < 1$, so kann man $A = \sin\varphi$ und $B = \cos\varphi$ setzen. Sind dagegen A und B einzeln gröſser als 1, so ist ganz allgemein zu setzen

$$A \pm Bi = \varrho(\sin\varphi \pm i\cos\varphi) \quad (5$$

wo ϱ eine bestimmte Zahl ist.

Für die links gegebene imaginäre Gröſ ist also immer das rechts befindliche Pr duct zu setzen, wenn es für weitere Er wickelungen von **Nutzen ist**, und m nennt ϱ **den Modul und** $(\sin\varphi \pm i\cos$ **den reducirten Ausdruck.**

Für die Reduction hat man

$$A = \varrho\sin\varphi$$
$$B = \varrho\cos\varphi$$

hieraus $A^2 + B^2 = \varrho^2$

und $$\varrho = \sqrt{A^2+B^2}$$

hiernach $$\sin\varphi = \frac{A}{\varrho} = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

und $$\cos\varphi = \frac{B}{\varrho} = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Desgleichen kann man die Gleichu zu Grunde legen

$$A \pm Bi = \varrho(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$$

Alsdann bleibt $\varrho = \sqrt{A^2+B^2}$ (

$$\sin\varphi = \frac{B}{\varrho} = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad (6$$

$$\cos\varphi = \frac{A}{\varrho} = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad (7$$

Im ersten Fall hat man

$$Arc\left(\sin = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right) = Arc\left(\cos = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right) = \varphi \quad (8$$

Im zweiten Fall

$$Arc\left(\cos = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right) = Arc\left(\sin = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right) = \varphi \quad (9$$

Da $\sqrt{A^2+B^2}$ immer $> A$ und $> B$ so ist in jedem besonderen Fall φ zu be stimmen und wird niemals unmöglich.

6. Es ist $(A \pm Bi) \pm (A' \pm B'i) \pm (A'' \pm B''i) \pm \ldots$
$= (A \pm A' \pm A'' + \ldots) \pm (B + B' + B'' + \ldots)i$

Es kann mithin jede algebraische Summe der imaginären Gröſsen von de Form $A \pm Bi$ auf dieselbe Form $A \pm Bi$ gebracht werden.

7. Es ist $(A \pm Bi)(A' \pm B'i)(A'' \pm B''i) \ldots\ldots$
$= \varrho(\cos\varphi \pm i\sin\varphi) \cdot \varrho'(\cos\varphi' \pm i\sin\varphi') \cdot \varrho''(\cos\varphi'' \pm i\sin\varphi'') \ldots$
$= \varrho \cdot \varrho' \cdot \varrho'' \ldots (\cos\varphi \pm i\sin\varphi)(\cos\varphi' \pm i\sin\varphi')(\cos\varphi'' \pm i\sin\varphi'') \ldots$
$= \varrho \cdot \varrho' \cdot \varrho'' \ldots [\cos(\varphi + \varphi' + \varphi'' + \ldots) \pm i\sin(\varphi + \varphi' + \varphi'' \ldots)]$

Producte der imaginären Gröſsen $A \pm Bi$ lassen sich also auf dieselbe For $A \pm Bi$ bringen.

8. Es ist $$\frac{A+Bi}{A'+B'i} = \frac{\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{\varrho'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')}$$
$$= \frac{\varrho}{\varrho'} \cdot \frac{(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi' - i\sin\varphi')}{(\cos\varphi' + i\sin\varphi')(\cos\varphi' - i\sin\varphi')}$$
$$= \frac{\varrho}{\varrho'} \cdot \frac{(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi' - i\sin\varphi')}{\cos^2\varphi' + \sin^2\varphi'} = \frac{\varrho}{\varrho'} \cdot [\cos(\varphi - \varphi') + i\sin(\varphi - \varphi$$

Quotienten der imaginären Gröfsen von der Form $A \pm Bi$ lassen sich also auf dieselbe Form $A \pm Bi$ bringen.

9. Es ist $(A + Bi)^n = \varrho^n (\cos\varphi + i \sin\varphi)^n$

Denn es ist

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = \cos(\varphi + \varphi_1) + i\sin(\varphi + \varphi_1)$$

Multiplicirt man noch mit $(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ so erhält man das Product aus den 3 Factoren $= \cos(\varphi + \varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi + \varphi_1 + \varphi_2)$ und so fort ein Product von n Factoren =

$$\cos(\varphi + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots\ldots \varphi_{n-1}) + i\sin(\varphi + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots\ldots \varphi_{n-1})$$

Setzt man $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \ldots\ldots \varphi_{n-1}$, so hat man

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$$

Demnach ist

$$(A + Bi)^n = \varrho^n [\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)] = A_1 + B_1 i$$

Also die Potenz einer imaginären Gröfse von der Form $A + Bi$ läfst sich auf dieselbe Form $A + Bi$ bringen.

10. Dafs $\log(A + Bi)$ sich in die Form $A + Bi$ bringen läfst, ist folgendermafsen zu erweisen:

Es ist Bd. III., pag. 67

$$e^{\pm x} = 1 \pm \frac{x}{1} + \frac{x^2}{(2)} \pm \frac{x^3}{(3)} + \frac{x^4}{(4)} \pm \ldots\ldots \frac{x^n}{(n)} \qquad (1)$$

Bd. II., pag. 145, Formel IV.

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{(3)} + \frac{\alpha^5}{(5)} - \frac{\alpha^7}{(7)} + \frac{\alpha^9}{(9)} - \ldots \qquad (2)$$

Daselbst Formel V.

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{(2)} + \frac{\alpha^4}{(4)} - \frac{\alpha^6}{(6)} + \frac{\alpha^8}{(8)} - \ldots \qquad (3)$$

Setzt man φi für x in Formel 1, ferner φ für α in Formel 2 und 3) so erhält man

$$e^{\pm\varphi i} = 1 \pm \frac{\varphi i}{1} - \frac{\varphi^2}{(2)} \mp \frac{\varphi^3 i}{(3)} + \frac{\varphi^4}{(4)} \pm \frac{\varphi^5 i}{(5)} - \frac{\varphi^6}{(6)} \mp \frac{\varphi^7 i}{(7)} + \frac{\varphi^8}{(8)} \pm \ldots\ldots \qquad (4)$$

$$i\sin\varphi = \varphi i - \frac{\varphi^3 i}{(3)} + \frac{\varphi^5 i}{(5)} - \frac{\varphi^7 i}{(7)} + \frac{\varphi^9 i}{(9)} - \frac{\varphi^{11} i}{(11)} + \ldots\ldots \qquad (5)$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{(2)} + \frac{\varphi^4}{(4)} - \frac{\varphi^6}{(6)} + \frac{\varphi^8}{(8)} - \frac{\varphi^{10}}{10} + \ldots\ldots \qquad (6)$$

Addirt man nun Formel 5 und 6, so erhält man Formel 4, mit den oberen Zeichen und demnach ist

$$e^{\varphi i} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Subtrahirt man Formel 5 von 6, so erhält man Formel 4 mit den unteren Zeichen, also

$$e^{-\varphi i} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

woraus $$e^{\pm\varphi i} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi \qquad (7)$$

Nun ist e die Basis der natürlichen Logarithmen, $ln\, e = 1$, folglich:

$$\pm\varphi i = \log(\cos\varphi \pm i\sin\varphi) \qquad (8)$$

so $\log\varrho \pm \varphi i = \log\varrho(\cos\varphi \pm i\sin\varphi) = \log(A \pm Bi)$

Also $\log(A \pm Bi) = \log\varrho \pm \varphi i \qquad (9)$

so ebenfalls von der Form $A \pm Bi$.

11. Es läfst sich nun auch beweisen, dafs $\sin(A \pm Bi)$ = einer Gröfse $A' + B'i$

gl. dasselbe von Cosinus, Tangente d allen übrigen trigonometrischen Funcen:

Aus Formel 7 No. 10 hat man

$$e^{\varphi i} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$
$$e^{-\varphi i} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

durch Addition und Subtraction hat man

$$\cos\varphi = \tfrac{1}{2}(e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}) \qquad (1)$$

$$\sin\varphi = \frac{1}{2i}(e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}) \qquad (2)$$

durch Division beider Gleichungen in einander

$$tg\,\varphi = \frac{e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}}{i\,(e^{\varphi i} + e^{-\varphi i})} = \frac{e^{2\varphi i} - 1}{i\,(e^{2\varphi i} + 1)}$$

$$cot\,\varphi = \frac{i\,(e^{\varphi i} + e^{-\varphi i})}{e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}} = \frac{i\,(e^{2\varphi i} + 1)}{e^{2\varphi i} - 1} = \frac{1 + e^{2\varphi i}}{i\,(1 - e^{2\varphi i})}$$

Setzt man in Formel 1 und 2 für φ den Werth Bi, dann ist

$$cos\,Bi = \tfrac{1}{2}\,(e^{Bi^2} + e^{-Bi^2}) = \tfrac{1}{2}\,(e^{-B} + e^{+B})$$

$$sin\,Bi = \frac{1}{2i}\,(e^{Bi^2} - e^{-Bi^2}) = \frac{1}{2i}\,(e^{-B} - e^{+B}) = -\frac{1}{2i}\,(e^{B} - e^{-B})$$

Nun ist

$$sin\,(A + Bi) = sin\,A \cdot cos\,Bi + cos\,A \cdot sin\,Bi$$

$$= \frac{sin\,A}{2}\,(e^{+B} + e^{-B}) - \frac{cos\,A}{2i}\,(e^{B} - e^{-B})$$

$$= \frac{sin\,A}{2}\,(e^{B} + e^{-B}) + \frac{i\,cos\,A}{2}\,(e^{B} - e^{-B}) = A' + B'i$$

Ganz auf dieselbe Weise erhält man

$$cos\,(A + Bi) = cos\,A \cdot cos\,Bi - sin\,A \cdot sin\,Bi =$$

$$\frac{cos\,A}{2}\,(e^{B} + e^{-B}) + \frac{sin\,A}{2i}\,(e^{B} - e^{-B})$$

$$= \frac{cos\,A}{2}\,(e^{B} + e^{-B}) - \frac{i\,sin\,A}{2}\,(e^{B} - e^{-B}) = A' + B'i$$

$$tg\,(A + Bi) = \frac{sin\,(A + Bi)}{cos\,(A + Bi)} = \frac{A' + B'i}{A'' + B''i} = A_1 + B_1 i$$

$$cot\,(A + Bi) = \frac{cos\,(A + Bi)}{sin\,(A + Bi)} = \frac{A'' + B''i}{A' + B'i} = A_2 + B_2 i$$

$$sec\,(A + Bi) = \frac{1}{cos\,(A + Bi)} = (A_2 + B_2 i)^{-1} = A_4 + B_4 i$$

$$cosec\,(A + Bi) = \frac{1}{sin\,(A + Bi)} = (A_3 + B_3 i)^{-1} = A_5 + B_5 i$$

12. Ist $arc\,cos\,(A + Bi)$ gegeben, so ist

wenn man (No. 10, Formel 7) in $e^{\varphi i} = cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi$

für $\varphi = arc\,cos\,x$ setzt

$$e^{i\,arc\,cos\,x} = x + i\sqrt{1 - x^2}$$

hieraus $i \cdot arc\,cos\,x = ln\,(x + i\sqrt{1 - x^2})$

und

$$i\,arc\,cos\,(A + Bi) = ln\,[(A + Bi) + i\sqrt{1 - (A + Bi)^2}]$$

und nach Formel 5

$$arc\,cos\,(A + Bi) = \frac{1}{i}\,ln\,[A + Bi + i\,(A' + B'i)] = \frac{1}{i}\,ln\,(A_1 + B_1 i)$$

und durch Auflösung in eine Reihe

$$arc\,cos\,(A + Bi) = \frac{A_1}{i} + B_1 = A_2 + B_2 i$$

Ist $arc\,sin\,(A + Bi)$ gegeben, so ist, wenn man für $\varphi = arc\,sin\,x$ se

$$e^{i\,arc\,sin\,x} = \sqrt{1 - x^2} + ix$$

$$i\,arc\,sin\,x = ln\,(ix + \sqrt{1 - x^2})$$

$$arc\,sin\,(A + Bi) = ln\,[i\,(A + Bi) + \sqrt{1 - (A + Bi)^2}]$$

$$= \frac{1}{i}\,ln\,(Ai - B + \sqrt{1 - A^2 + B^2 - 2ABi}) = A_2 + B_2 i$$

Für $B = 0$ hat man aus No. 11 und 12

$$i\,Arc\,cos\,A = ln\,(A + i\sqrt{1 - A^2})$$

$$i\,Arc\,sin\,A = ln\,(iA + \sqrt{1 - A^2})$$

13. Die Formeln 7 No. 10 und 1, 2 No. 11 eignen sich dazu, die Summen mehrerer unendlicher abnehmender Reihen in einfachen Ausdrücken anzugeben.

Z. B. Die folgende Reihe, in welcher $x =$ einem ächten Bruch ist:

$$y = x \sin\varphi + x^2 \frac{\sin 2\varphi}{(2)} + x^3 \frac{\sin 3\varphi}{(3)} + \ldots\ldots x^n \frac{\sin(n\varphi)}{(n)}$$

Der Kürze wegen soll die Summe aller unendlichen Glieder der Reihe durch das allgemeine Glied mit vorgesetztem Summenzeichen ausgedrückt werden, so dafs $\int \frac{x^n \sin(n\varphi)}{(n)}$ so viel wie y bedeutet.

Setzt man nun in Formel 2, No. 11 für φ den Werth $n\varphi$, so erhält man das allgemeine Glied dieser Reihe

$$\frac{x^n}{(n)} \sin n\varphi = \frac{x^n}{(n)} \cdot \frac{e^{in\varphi} - e^{-in\varphi}}{2i} = \frac{1}{2i}\left[\frac{x^n}{(n)} e^{in\varphi} - \frac{x^n}{(n)} e^{-in\varphi}\right] = \frac{1}{2i}\left[\frac{(xe^{i\varphi})^n}{(n)} - \frac{(xe^{-i\varphi})^n}{(n)}\right]$$

und wenn man für n hintereinander die Werthe 1, 2, 3, ... n setzt und sämmtliche Gleichungen addirt, so erhält man

$$y = \int \frac{x^n}{(n)} \sin n\varphi = \frac{1}{2i}\left[\int \frac{(xe^{i\varphi})^n}{(n)} - \int \frac{(xe^{-i\varphi})^n}{(n)}\right]$$

Nun ist Formel 1, No. 10, wenn man auf beiden Seiten 1 subtrahirt

$$e^x - 1 = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{(2)} + \frac{x^3}{(3)} + \ldots\ldots \frac{x^n}{(n)}$$

oder $e^x - 1 = \int \frac{x^n}{(n)}$

oder wenn man für x die Werthe $xe^{i\varphi}$ und $xe^{-i\varphi}$ setzt

$$e^{xe^{i\varphi}} - 1 = \int \frac{(xe^{i\varphi})^n}{(n)}$$

$$e^{xe^{-i\varphi}} - 1 = \int \frac{(xe^{-i\varphi})^n}{(n)}$$

Hieraus

$$y = \frac{1}{2i}\left(e^{xe^{i\varphi}} - e^{xe^{-i\varphi}}\right)$$

Setzt man die Werthe $e^{\pm i\varphi}$ aus Gleichung 7 No. 10 so erhält man

$$y = \frac{1}{2i}\left[e^{x(\cos\varphi + i\sin\varphi)} - e^{x(\cos\varphi - i\sin\varphi)}\right] = e^{x\cos\varphi} \cdot \frac{e^{xi\sin\varphi} - e^{-xi\sin\varphi}}{2i}$$

Der zweite Factor stimmt aber mit der rechten Seite der Formel 2, No. 11 überein, wenn man statt φ den Werth $x\sin\varphi$ setzt; demnach ist

$$y = e^{x\cos\varphi} \cdot \sin(x\sin\varphi)$$

14. Es sei gegeben

$$s = 1 + x\cos\varphi + x^2 \frac{\cos 2\varphi}{(2)} + x^3 \frac{\cos 3\varphi}{(3)} + \ldots\ldots x^n \frac{\cos n\varphi}{(n)}$$

In Formel 1, No. 11 für φ den Werth $n\varphi$ gesetzt und mit $\frac{x^n}{(n)}$ multiplicirt, gibt

$$\frac{x^n}{(n)} \cos n\varphi = \frac{x^n}{2(n)}\left(e^{in\varphi} + e^{-in\varphi}\right) = \tfrac{1}{2}\left[\frac{x^n}{(n)} e^{in\varphi} + \frac{x^n}{(n)} e^{-in\varphi}\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[\frac{(xe^{i\varphi})^n}{(n)} + \frac{(xe^{-i\varphi})^n}{(n)}\right]$$

Wieder die Formel $e^x - 1 = \int \frac{x^n}{(n)}$ angewendet, indem man für x die Werthe $xe^{i\varphi}$ und $xe^{-i\varphi}$ setzt, gibt

$$e^{xe^{i\varphi}} + e^{xe^{-i\varphi}} = \int \frac{(xe^{i\varphi})^n}{(n)} + \int \frac{(xe^{-i\varphi})^n}{(n)}$$

also $s = \tfrac{1}{2}\left(e^{xe^{i\varphi}} + e^{xe^{-i\varphi}}\right)$

und mit Hülfe von Formel 7, No. 10:

$$s = \tfrac{1}{2}\left[e^{x(\cos\varphi + i\sin\varphi)} + e^{x(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\right]$$
$$= \tfrac{1}{2} e^{x\cos\varphi}\left(e^{xi\sin\varphi} + e^{-xi\sin\varphi}\right)$$

Dieser 2te Factor stimmt aber mit der rechten Seite der Formel 1, N
überein, wenn man statt φ den Werth $x \sin \varphi$ setzt.

Demnach ist $s = e^{x \cos \varphi} \cdot \cos(x \sin \varphi)$

Beispiele zu No. 13 und 14.

Es sei $x = \frac{1}{2}$; $\varphi = 30°$ also Bogen $\varphi = \frac{1}{6}\pi$

Nun ist also $y = e^{\frac{1}{2}\cos 30°} \sin(\frac{1}{2}\sin 30°) = e^{\frac{1}{4}\sqrt{3}} \sin(\frac{1}{4})$

Hieraus $ln\, y = \frac{1}{4}\sqrt{3} + ln \sin 21° 29' 9''$

und $ln\, s = \frac{1}{4}\sqrt{3} + ln \cos 21° 29' 9''$

$ln\, y = 0{,}6495190 - 1{,}0043814 = -0{,}3548624$

$ln\, s = 0{,}6495190 - 0{,}0720246 = 0{,}5774944$

hieraus $log\, br\, y = 0{,}845\ 8852 - 1$; $y = 0{,}70127$

$log\, br\, s = 0{,}250\ 8026$; $s = 1{,}78157$

15. Es sei $v = x \sin \varphi + x^2 \sin 2\varphi + x^3 \sin 3\varphi + \ldots . x^n \sin n\varphi$

x = einem ächten Bruch. Man soll die Summe $v = \int x^n \sin n\varphi$ bestimmen.

Es ist nach No. 13

$$\sin n\varphi = \frac{e^{in\varphi} - e^{-in\varphi}}{2i}$$

und $$x^n \sin n\varphi = \frac{1}{2i}\left[(xe^{i\varphi})^n - (xe^{-i\varphi})^n\right]$$

und $$\int x^n \sin n\varphi = \frac{1}{2i} \cdot \int (xe^{i\varphi})^n - \frac{1}{2i} \int (xe^{-i\varphi})^n$$

Nun ist aber in der Reihe (s. Bd. III., pag. 151, Formel 4)

$$a + ae + ae^2 + \ldots . ae^{n-1}$$

wenn $e < 1$ ist,

$$\int ae^{n-1} = \frac{1 - e^n}{1 - e}\, a$$

Für $n = \infty$ ist $e^n = 0$ und

$$\int ae^{n-1} = \frac{a}{1 - e}$$

wenn man nun $a = e = s$ setzt, so steht die Reihe

$$s + s^2 + s^3 + \ldots s^n \text{ in } inf$$

und $$\int s^n = \frac{s}{1 - s}$$

Setzt man hierein für s die W
$xe^{i\varphi}$ und $xe^{-i\varphi}$ zieht die 2te Forme
der ersten ab und multiplicirt beid
tig mit $\frac{1}{2i}$ so erhält man

$$\int x^n \sin n\varphi = \frac{1}{2i}\left(\frac{xe^{i\varphi}}{1 - xe^{i\varphi}} - \frac{xe^{-i\varphi}}{1 - xe^{-i\varphi}}\right)$$

Nimmt man x zum gemeinschaftlichen Factor, bringt beide Brüche au
meinschaftliche Benennung und reducirt, so erhält man

$$\int x^n \sin n\varphi = \frac{x}{2i} \cdot \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{1 + x^2 - x\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)} = x \cdot \frac{\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}}{1 + x^2 - 2x\,\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}}$$

Nun ist nach Formel 2, No. 11 der Zähler $= \sin \varphi$, und nach Formel 1, N
der Bruch im 3ten Gliede des Nenners $= \cos \varphi$.

Mithin hat man

$$V = x\,\frac{\sin \varphi}{1 + x^2 - 2x \cos \varphi}$$

16. Auf dieselbe Weise erhält man

$$W = 1 + x \cos \varphi + x^2 \cos 2\varphi + x^3 \cos 3\varphi + \ldots . x^n \cos n\varphi \text{ in } inf$$
$$= \frac{1 - x \cos \varphi}{1 + x^2 - 2x \cos \varphi}$$

Immensurabel, unmefsbar wegen der Gröfse des Raumes. Die Entfernungen der Fixsterne von uns sind so grofs, dafs selbst die der uns zunächst befind nur geschätzt werden kann. Imm rabel oder unmefsbar ist aber nich

ıdlich: Die Entfernung zwischen zweien ın weitesten von uns befindlichen Fixernen, von denen der eine im Westen, er andere im Osten steht, ist nicht unıdlich, weil man die Endpunkte der änge sieht.

Impuls ist die Einwirkung zweier Körer auf einander mittelst eines Stofses, ach der Stofs selbst. Er wird gemesen mit dem Product der Masse mal der eschwindigkeit des stofsenden Körpers.

Impulsive Kraft ist eine Kraft, die uf Stofs wirkt.

Incidenz ist der Einfall eines Lichtstrahls auf die Oberfläche eines Körpers.

Incidenzwinkel, s. v. w. „Einfallsinkel".

Incommensurabel sind Gröfsen, die ein gemeinschaftliches Maafs haben, als 1 und $\sqrt{2}$ (vergl. „Commensurabel"). n Potenz incommensurabel heifst ei Euklid incommensurabel im Quadrat. m X. Buch heifst seine 2. Erklärung: ncommensurabele Gröfsen sind, für welche ich gar kein gemeines Maafs finden läfst. 3. Erkl.: Gerade Linien sind in Potenz commensurabel, wenn ihre Quadrate von einem und demselben Flächenraum gemessen werden. 4. Erkl.: In Potenz incommensurabel aber, wenn sich für ihre Quadrate gar kein Flächenraum als gemeines Maafs finden läfst.

Ferner sind folgende Zeichen eingeführt:

$A \cap B$ heifst: die Linien A und B sind commensurabel.

$A \cup B$, sie sind incommensurabel,

$A \cap_{-} B$, sie sind blofs in Potenz commensurabel,

$A \cup^{-} B$, sie sind in Potenz incommensurabel.

Lehrsatz 5 heifst: commensurabele Gröfsen (Linien) A, B verhalten sich wie Zahlen. Lehrs. 7 heifst: Incommensurabele Gröfsen A, B verhalten sich nicht wie Zahlen zu einander. Satz 9 heifst:

1. Die Quadrate gerader in Länge commensurabeler Linien A, B verhalten sich wie Quadratzahlen, und Quadrate, welche sich wie Quadratzahlen verhalten, haben in Länge commensurabele Seiten A, B.

2. Hingegen die Quadrate gerader in Länge incommensurabeler Linien A, B verhalten sich nicht wie Quadratzahlen; und Quadrate, welche sich nicht wie Quadratzahlen verhalten, haben in Länge incommensurabele Seiten A, B.

Satz 11 ist eine Aufgabe: Zu einer gegebenen geraden Linie A zwei andere zu finden, von denen die eine ihr blofs in Länge, die andere aber zugleich in Potenz incommensurabel ist: Auflösung. Erstlich: Nimm 2 Zahlen B, C, welche sich nicht wie Quadratzahlen verhalten und mache $B : C = \square A : \square D$, so sind A und D blofs in Länge incommensurabel.

Zweitens: Nimm zwischen A und D die mittlere Proportionallinie E, so sind A und E in Länge und Potenz zugleich incommensurabel.

Denn da $A : E = E : D$
so ist auch $A : D = \square A : \square E$
folglich sind wie A und D auch $\square A$ und $\square E$ incommensurabel, also die Linien A und E in Potenz incommensurabel.

Incomplexe Gröfsen sind solche, die zu keinem Complex vereinigt werden können (s. „Complex"), als 3 Thaler und 7 Pfund.

Increment bei veränderlichen Gröfsen ist die Gröfse des Wachsthums, der Zunahme, wie Decrement die Gröfse der Abnahme; für beide Bezeichnungen sagt man jetzt allgemein: Differenz.

Index (Zeiger) ist bei den Reihen die Stellenzahl, daher bei den Logarithmen die Characteristik, die Kennziffer, weil diese als ganze Stellenzahl für eine Potenzenreihe betrachtet werden kann. An Winkelinstrumenten ist Index der mit dem Nonius verbundene Schieber.

Indirect (ungerade) ist dem direct (gerade) entgegengesetzt; beides wird vornehmlich von Verhältnissen gesagt. Je gröfser A ist, desto gröfser ist B, ist ein gerades, ein directes Verhältnifs; je gröfser A ist, desto kleiner ist B, ist ein ungerades, ein umgekehrtes, ein indirectes Verhältnifs. Je mehr Arbeiter desto mehr Arbeit ist ein directes Verhältnifs; je mehr Arbeiter desto geringere Zeit zu Vollendung derselben Arbeit ist ein indirectes Verhältnifs. Bei gleichen mechanischen Momenten $V \cdot P = v \cdot p$ verhalten sich die Kräfte oder Massen P, p indirect wie deren Geschwindigkeiten V, v; nämlich $P : p = v : V$. Darum nennt man indirecte Verhältnisse solche, bei welchen die zusammen gehörigen Gröfsen in ungleichnamigen Gliedern zu stehen kommen.

Indirecte Bewegung, retrograde, rückläufige Bewegung der Planeten kommt bei den beiden unteren Planeten, dem Merkur und der Venus vor. Die Planeten nämlich laufen alle nach einerlei

Seite hin gerichtet um die Sonne, und zwar von Westen über Süden nach Osten. Wenn nun die beiden unteren Planeten zwischen Erde und Sonne oder in der Nähe ihrer unteren Conjunction sich befinden (s. Conjunction), so scheinen sie, besonders da sie ihrer gröfseren Winkelgeschwindigkeit wegen voreilen, die entgegengesetzte Bewegung von Ost nach West zu machen.

Infinitesimalrechnung ist die Differenzialrechnung nach einer zu Grunde gelegten besonderen Anschauung und Methode der Behandlung. Der Hauptgrundsatz dieser Methode ist: Eine unendlich kleine Gröfse verschwindet gegen eine endliche Gröfse; eine unendlich kleine Gröfse der zweiten Ordnung verschwindet gegen eine unendlich kleine Gröfse der ersten Ordnung; überhaupt eine unendlich kleine Gröfse einer höheren Ordnung verschwindet gegen eine unendlich kleine Gröfse einer niedereren Ordnung.

Die Infinitesimalmethode ist die älteste Methode und diejenigen Mathemati welche ihr angehört haben und noch gehören, werden Infinitesimalis genannt. Folgendes Beispiel wird Methode wohl klar darlegen; man nur zuvor den Art. „Differensi No. 1 bis 7.

Wenn eine veränderliche Gröfse x eine unendlich kleine Gröfse Δx $x+\Delta x$ sich ändert, so ändert sich von x abhängige Function fx in $f(x+$ Dann sind in dem Quotient

$$\frac{f(x+\Delta x)-fx}{(x+\Delta x)-\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-fx}{\Delta x}$$

der Zähler wie der Nenner unend kleine Gröfsen. Wie aber

$$\frac{1}{100\,000^n}:\frac{1}{10000\,000^n}=10^n$$

ist, so kann auch der obige Quoti beider unendlich kleinen Gröfsen e nicht unbedeutende endliche Gröfse v den.

Es sei $fx=x^n$, so ist nach dem bi mischen Satz

$$\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=nx^{n-1}+\frac{n\cdot n-1}{1\cdot 2}x^{n-2}\cdot\Delta x+\frac{n\cdot n-1\cdot n-2}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}\Delta x^2+\ldots.$$

Nun sagt die I-methode: Das Glied mit dem Factor Δx^n verschwindet gegen das Glied mit dem Factor Δx^{n-1}; dieses verschwindet gegen das Glied mit dem Factor Δ^{n-2} u. s. f. Endlich verschwindet das zweite Glied der Reihe mit dem Factor Δx gegen das erste endliche Glied, und dieses nun ist das Differenzial der Function x^n.

Die strengere Grenzmethode sagt: nx^{n-1} sei der Grenzwerth der Function x^n unter der Bedingung, dafs die Urveränderliche x um die sehr kleine Gröfse Δx wächst oder abnimmt. Denn da Δx kleiner genommen werden kann, als jede noch so klein gegebene Gröfse, also auch jedes Product mit dem Factor Δx kleiner werden kann, als jede noch so kleine Gröfse, so ist das zweite Glied rechts kleiner als jede noch so kleine Gröfse und ebenso ist die Summe sämmtlicher Glieder vom 2ten Gliede ab kleiner zu machen als jede noch so kleine Gröfse. Demnach ist

$$\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}-nx^{n-1}$$

kleiner als jede noch so kleine Gröfse und folglich nx^{n-1} der Grenzwerth der Function x^n bei einem Wachsthum e einer Abnahme von x um die sehr kle Gröfse Δx.

Die Methode von Lagrange, die Nu rechnung ist noch schärfer, sie l $\Delta x=0$ werden, alsdann hat man

$$\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=\frac{0}{0}$$

und dieser jeden Werth vertrete Quotient ist in dem Fall für Δx gleich dem ersten Gliede nx^{n-1} der re befindlichen Reihe.

Inflexionspunkt, s. v. w. „Wendun punkt“, s. „Curvenlehre“ IV., 1 188.

Inhalt einer Fläche ist die Sum der Flächeneinheiten, welche die Fl in sich begreift; Inhalt eines K pers, eines körperlichen Raums Summe der Kubikeinheiten, die der K per in sich begreift.

In infinitum, abgekürzt in inf. ist den Reihen die Bezeichnung, dafs Anzahl der Glieder unendlich sein dafs die Reihe bis ins Unendli sich erstrecken oder fortgesetzt ged werden soll.

Innere Glieder einer Proportion, s. u. „äufsere Glieder".

Innere Winkel, s. u. „äufsere Winkel".

Instrument, Werkzeug und Apparat sind Geräthe, mit deren Hülfe durch die leitende Hand des Arbeiters nützliche Gegenstände hervorgebracht werden. Instrument und Werkzeug unterscheiden sich von Apparat, dafs jene beiden einfache Geräthe sind, die mit den Händen erfafst und geeignet geleitet, gehandhabt werden, also Handhaben; während der Apparat ein aus mehreren einzelnen Theilen zusammengesetztes standfähiges Werk, ein Bauwerk ist und welches zur Maschine wird, wenn dessen Theile durch äufsere auf sie einwirkende Kräfte ihre Lage gegen einander mittelst Construction planmäfsig ändern. Werkzeug und Instrument unterscheiden sich, dafs jenes ein Geräth des Handwerks, dieses ein Geräth der Kunst ist.

Brechstange, Maurerkelle, Zimmeraxt, Schmiedezange sind Werkzeuge; Modellirstifte, Lanzetten sind Instrumente, Dampfkessel, Destillirblasen sind Apparate; Krahne, Pumpen, Bohr- und Schneidewerke sind Maschinen.

Apparate, deren Handhabung eine besondere Kunstfertigkeit erfordert, heifsen Instrumente. Ein Leierkasten ist ein musikalischer Apparat, Klavier und Orgel sind musikalische Instrumente. Die Atwoodsche Maschine, die sogenannte Electrisirmaschine sind physikalische Apparate; Barometer, Thermometer, Aräometer sind physikalische Instrumente. Eine Taschenuhr ist ein Zeitmefsinstrument, welches aus zweien in einander wirkenden Maschinen besteht. Theodolit, Bussole, Niveau und alle die Mefsvorrichtungen, welche des Stativs oder überhaupt der nothwendigen festen Aufstellung wegen Apparate heifsen sollten, heifsen eben so wie Kette und Stäbe Mefsinstrumente.

Integral. 1. Allgemeines.

Integral einer gegebenen Function ist diejenige Function, von welcher die gegebene das Differenzial ist.

Jede Function, die zur Auffindung ihres Integrals gegeben ist, mufs demnach als ein Differenzial betrachtet werden; also als eine Gröfse, die von einer Function durch eine mit dieser geschehene Aenderung abgeleitet worden ist, und es ist die Aufgabe gestellt, aus der abgeänderten Function die ursprüngliche Function, die primitive Function, die Stammfunction in ihrem ungeändert befindlich gewesenen Zustand aufzufinden, die gegebene geänderte Function in integrum herzustellen, das Integral zu finden.

Von einer gegebenen Function das Integral finden heifst die Function integriren.

Wie die Forderung des Differenzirens ausgedrückt wird durch $\frac{\partial \varphi x}{\partial x}$, so wird die Forderung des Integrirens ausgedrückt durch $\int fx \cdot \partial x$

Jenes ∂ ist ein etwas abgeändertes lateinisches d (Differenzial), dieses ein etwas abgeändertes lateinisches langes s (Summe), wofür früher ein I gesetzt wurde.

Wenn $\frac{\partial \varphi x}{\partial x} = fx$

so ist $\int fx \cdot \partial x = \varphi x$

In den Forderungen

$$\int \varphi x \cdot \partial x$$
$$\int \varphi y \cdot fx \cdot \partial x$$

Bedeutet ∂x, dafs die gegebenen Differenziale φx, $\varphi y \cdot fx$ aus den Stammfunctionen in Beziehung auf die Urveränderliche x abgeleitet worden sind.

Das Integral $\int \varphi x \cdot \partial y$ heifst, dafs das Differenzial φx auf die Urveränderliche y genommen worden und dafs x eine von y abhängige veränderliche Gröfse ist.

In der Coordinatengleichung für die Hyperbel pag. 262, No. 3, Gl. 14.

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(2ax + x^2)$$

ist die Differenzialgleichung

$$y\,\partial y = \frac{c^2}{a^2}(a + x)\,\partial x$$

hieraus

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{a+x}{y}$$

Es ist also in dem rechts befindlichen Ausdruck das Differenzial von y in Beziehung auf die Urveränderliche x gegeben; soll nun dasselbe integrirt werden, so ist die Forderung zu schreiben:

$$y = \int \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{a+x}{y}\,\partial x$$

und man erhält das Integral y durch die Urveränderliche x ausgedrückt.

Entwickelt man dagegen aus obiger Coordinatengleichung das Differenzial

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{y}{a+x}$$

so ist der rechts befindliche Ausdruck das Differenzial von x in Beziehung auf die Urveränderliche y und man erhält x durch y ausgedrückt mit der Forderung:

$$x = \int \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{y}{a+x} \partial y$$

Es ist $\frac{\partial ax}{\partial x} = a$

$$\frac{\partial ay}{\partial y} = a$$

$$\frac{\partial as}{\partial s} = a$$

Es ist also $\int a =$ dem Product aus a in die Veränderliche $= ax$, auch $= ay$, auch $= as$ u. s. w.

Es ist mithin die Hinzufügung der Urveränderlichen unerläfslich und die Forderungen werden geschrieben:

$$\int a \partial x; \int a \partial y; \int a \partial z.$$

2. Das Integriren ist dem Differenziren so entgegengesetzt wie das Dividiren dem Multipliciren. Denn wie das Einsineins aus dem Einmaleins unmittelbar sich ergibt, wie z. B. aus dem Satz: 6 mal 7 ist 42 sofort der Satz hervorgeht 7 in 42 geht 6mal, so geht unmittelbar aus der Differenzialformel (104)

$$\frac{\partial \sin x}{\partial x} = \cos x$$

die Integralformel hervor:

$$\int \cos x \cdot \partial x = \sin x$$

Aus der Differenzialformel (105)

$$\frac{\partial \cos x}{\partial x} = -\sin x$$

Die Integralformel

$$\int -\sin x \partial x = \cos x$$

Wie man in geordneter Tabelle Differenzialformeln zusammenstellt, um diese für Fälle, wo Differenziale von Functionen ähnlicher Form zu bestimmen sind, als Fundamentalformeln zu benutzen, so geschieht dies auch mit den Integralformeln.

Es ist aber nicht angemessen, Formeln für negative Functionen aufzustellen, und da

$$\frac{\partial(-\cos x)}{\partial x} = -\frac{\partial \cos x}{\partial x} = \sin x$$

so hat man die Integralformel und zwar eine Hauptfundamentalformel

$$\int \sin x \cdot \partial x = -\cos x$$

Die Differenzialformel (65) ist

$$\frac{\partial(a+bs^n)^m}{\partial s} = m n b s^{n-1} (a+bs^n)^{m-1}$$

hieraus ist gegenseitig:

$$\int m n b s^{n-1} (a+bs^n)^{m-1} \partial s = (a+bs^n)^m$$

In dieser Form ist aber eine Integralformel als Normalformel nicht aufzustellen: Man hat den Coefficient mnb fortzuschaffen und m statt $m-1$ zu setzen. Alsdann erhält man eine Normalformel

$$\int s^{n-1} (a+bs^n)^m \partial s = \frac{(a+bs^n)^{m+1}}{mnb}$$

oder

$$\int s^n (a+bs^{n+1})^m \partial s = \frac{(a+bs^{n+1})^{m+1}}{mnb}$$

Behufs der Zusammenstellung von geordneten Integralformeln und um mit Hülfe dieser wieder Integrale von Functionen anderer Form ableiten zu können mufs demnach ein wissenschaftlich begründetes Verfahren angewendet werden können.

Der Inbegriff der Regeln, nach welchen die Integrale aus gegebenen Differenzialen entwickelt werden, heifst die Integralrechnung. Diese zerfällt wie die Differenzialrechnung in die Lehre von Integriren algebraischer und transcendenter Functionen; erstere wieder in die rationaler und irrationaler, ganzer und gebrochener Functionen. Ferner wird unterschieden das Integriren gesonderter und ungesonderter Functionen, der Functionen mit einer und mit mehreren veränderlichen Gröfsen.

3. Constanten der Integrale.

Es ist $\frac{\partial ax}{\partial x} = a$

$$\frac{\partial(ax+b)}{\partial x} = a$$

Demnach ist $\int a \cdot \partial x = ax$

und dasselbe $\int a \cdot \partial x = ax + b$

Ueberhaupt ist $\int a \cdot \partial x$ entweder $= a$ oder $ax +$ einer constanten Gröfse so dafs die vielen Integrale $\int a$ allein durch constante Gröfsen von einander unterschieden sind.

Es fragt sich nun, ob eine Function mehrere Integrale haben kann, deren Unterschied nicht nur constant ist, sondern der auch in einer Function der Veränderlichen bestehen kann. D. h. ob zwei und mehrere verschiedene Functionen derselben Urveränderlichen ein und dasselbe Differenzial haben können.

Um dies zu untersuchen seien $y = \varphi x$ und $s = fx$ zwei verschiedene Functionen von x, deren Differenziale einander gleich, also

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial x}$$

in gleiche Functionen nur gleiche diale haben können, so ist auch

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$$

demselben Grunde

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 s}{\partial x^3}$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 s}{\partial x^4}$$ u. s. w.

Die Gleichheit dieser Functionen besteht bei jedem Werth von x, also auch für $x = 0$. Demnach ist

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)_0$$

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\right)_0$$

u. s. w.

Nun ist nach Bd. II.; pag. 289 die Mac Laurinsche Reihe

$$y = \varphi x = (y)_0 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)_0 + \ldots.$$

$$s = fx = (s)_0 + \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^3 s}{\partial x^3}\right)_0 + \ldots.$$

man nun eine Reihe von der an-, so fallen sämmtliche untereinahende Glieder von den ersten ialen ab gegen einander fort und

$$-s = \varphi x - fx = y_0 - s_0$$

ır in den Functionen y_0 und s_0 nderliche $x = 0$ gesetzt ist, so und s_0 constant, der Unterschied y und $s = y - s$ besteht also in ıstanten Gröfse. D. h.

ı zwei von einander verne Functionen gleiche Difıle haben, so kann deren edenheit nur darin besteıfs der Unterschied beider ɔnen eine constante Gröfse d gegenseitig:

Die Integrale einer und derselben Function können nur um eine constante Gröfse von einander verschieden sein.

Um an diese möglicher Weise noch hinzuzufügende Constante sich zu erinnern, schreibt man in jedem besonderen Fall $f\varphi' x = \varphi x + C$ anstatt $f\varphi' x = \varphi x$; die Ermittelung des Werths der Constante (C) geschieht der jedesmaligen Natur der Aufgabe entsprechend.

Beispiel:

$$F\varphi = tg\,(\alpha + \varphi)$$

und

$$f\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos(\alpha+\varphi)\cdot\cos\alpha}$$

Nun ist

$$\frac{\partial F\varphi}{\partial\varphi} = \partial\, tg\,(\alpha+\varphi) = sec^2(\alpha+\varphi)$$

$$= \partial\frac{\sin\varphi}{\cos\alpha\cdot\cos(\alpha+\varphi)} = \frac{\cos(\alpha+\varphi)\cdot\cos\varphi + \sin(\alpha+\varphi)\cdot\sin\varphi}{\cos\alpha\cdot\cos^2(\alpha+\varphi)}$$

$$= \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos^2(\alpha+\varphi)} = sec^2(\alpha+\varphi)$$

Functionen $F\varphi$ und $f\varphi$ haben Differenzial.

ſs demnach

$$+\varphi) - \frac{\sin\varphi}{\cos\alpha\cdot\cos(\alpha+\varphi)}$$

sein.

Zur Untersuchung ist diese Differenz unter einerlei Nenner zu bringen und zu schreiben

$$\frac{\sin(\alpha+\varphi)\cdot\cos\alpha - \sin\varphi}{\cos\alpha\cdot\cos(\alpha+\varphi)}$$

Der Zähler umgeformt gibt

$$\text{e}\,\alpha\cdot\cos\varphi + \cos^2\alpha\cdot\sin\varphi - \sin\varphi$$
$$= \sin\alpha(\cos\alpha\cdot\cos\varphi - \sin\alpha\cdot\sin\varphi) = \sin\alpha\cdot\cos(\alpha+\varphi)$$

nterschied $F\varphi - f\varphi$ ist demnach

$$\frac{\sin\alpha\cdot\cos(\alpha+\varphi)}{\cos\alpha\cdot\cos(\alpha+\varphi)} = tg\,\alpha$$

ist demnach erwiesen, dafs

wenn man von zwei oder mehreren Integralen, die aus einer Function entwickelt werden können, das eine Integral von einem der

anderen abzieht, die Differenz eine Constante ist.

Aus diesem Grunde betrachtet man auch ein negatives Integral als den Subtrahend eines Integrals, dessen Minuend eine Constante ist. Z. B.

$$\int \sin x = -\cos x = \cos A - \cos x$$

Constanter Factor eines Integrals.

5. Wenn (Differenzial No. 10)

$$\varphi x = Afx$$

so ist $$\frac{\partial \varphi x}{\partial x} = \varphi' x = A \cdot f' x$$

Folglich ist gegenseitig

$$\int \varphi' x \cdot \partial x = \int A f' x \cdot \partial x = A \int f' x \cdot \partial x = Afx$$

D. h. Wenn eine Function fx einen constanten Factor hat, so ist deren Integral = dem Factor mal dem Integral der Function: z. B.

$$\int A \cos x = A \int \cos x = A \sin \alpha$$

Algebraische Summe zu integriren.

6. Wenn (Differenzial No. 9)

$$y = Fx \pm fx \pm \varphi x$$

so ist $$\frac{\partial y}{\partial x} = \partial (Fx \pm fx \pm \varphi x) \frac{1}{\partial x} = \frac{\partial Fx}{\partial x} \pm \frac{\partial fx}{\partial x} \pm \frac{\partial \varphi x}{\partial x}$$

daher gegenseitig $$\int (F'x \pm f'x \pm \varphi' x)\, \partial x = \int F'x \cdot \partial x \pm \int f'x \cdot \partial x \pm \int \varphi' x \cdot \partial x \qquad (1)$$

D. h. Das Integral einer algebraischen Summe von Functionen ist = der algebraischen Summe der Integrale der Summanden.

Producte zu integriren.

7. Wenn (Differenzial No. 11)

$$y = u \cdot s = fx \cdot \varphi x$$

so ist

$$\partial (fx \cdot \varphi x) = fx \cdot \varphi' x + \varphi x \cdot f' x$$

Also gegenseitig

$$fx \cdot \varphi x = \int [fx \cdot \varphi' x + \varphi x \cdot f' x] = \int fx \cdot \varphi' x + \int \varphi x \cdot f' x$$

Setzt man nun $\varphi' x = Fx \cdot \partial x$

so ist $$\varphi x = \int Fx \cdot \partial x$$

Diese Werthe in die letzte Gleichung substituirt, entsteht

$$fx \int Fx \cdot \partial x = \int fx \cdot Fx \cdot \partial x + \int (f'x \int Fx \cdot \partial x)\, \partial x$$

woraus $$\int fx \cdot Fx \cdot \partial x = fx \int Fx \cdot \partial x - \int [f'x \int Fx \cdot \partial x]\, \partial x \qquad (2)$$

D. h. Das Integral eines Products zweier Functionen ist gleich der einen Function multiplicirt mit dem Integral der anderen, minus dem Integral des Products aus dem Differenzial der ersten Function multiplicirt mit dem Integral der zweiten Function.

Beispiele. 1. Zu finden: $\int \sin x \cdot \cos x \cdot \partial x$

Es ist $$\int \sin x \cdot \cos x \cdot \partial x = \sin x \int \cos x \cdot \partial x - \int \left[\frac{\partial \sin x}{\partial x} \int \cos x \cdot \partial x\right] \partial x$$

Nun ist $$\int \cos x \cdot \partial x = \sin x\,; \quad \frac{\partial \sin x}{\partial x} = \cos x$$

Daher hat man

$$\int \sin x \cdot \cos x \cdot \partial x = \sin x \cdot \sin x - \int \cos x \cdot \sin x \cdot \partial x$$

hieraus $$2 \int \sin x \cdot \cos x \cdot \partial x = \sin^2 x$$

folglich $$\int \sin x \cdot \cos x \cdot \partial x = \tfrac{1}{2} \sin^2 x$$

2. Zu finden $\int x^2 \partial x$

Schreibt man $x \cdot x^2$ für x^3 so hat man

$$\int x \cdot x^2 \cdot \partial x = x \int x^2 \cdot \partial x - \int \left[\frac{\partial x}{\partial x} \int x^2 \cdot \partial x\right] \partial x$$

Nach Differenzialformel 32 ist

$$\frac{\partial x^3}{\partial x} = 3x^2$$

also gegenseitig

$$\int x^2 \partial x = \tfrac{1}{3} x^3$$

also $$\int x^3 \partial x = x \cdot \tfrac{1}{3} x^3 - \int [1 \cdot \tfrac{1}{3} x^3 \partial x] = \tfrac{1}{3} x^4 - \tfrac{1}{3} \int x^3 \partial x$$

woraus $$\tfrac{4}{3} \int x^3 \partial x = \tfrac{1}{3} x^4$$

und $$\int x^3 \partial x = \tfrac{1}{4} x^4$$

3. Zu finden $\int 1 = \int x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \partial x$

Es ist $$\int x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \partial x = x^2 \int \frac{1}{x^2} \partial x - \int \left[\frac{\partial x^2}{\partial x} \cdot \int \frac{1}{x^2} \partial x\right] \partial x$$

Differenzialformel 35 ist

$$\partial z^{-1} = -z^{-2}$$

$$\partial \frac{1}{z} = -\frac{1}{z^2}$$

gegenseitig $$\int \frac{1}{z^2} = -\frac{1}{z}$$

Mithin $$\int 1 = x^2\left(-\frac{1}{x}\right) - \int 2x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$= -x + 2\int x \cdot \frac{1}{x}\,\partial x = -x + 2\int 1 \cdot \partial x = -x + 2x = x$$

Integrirung algebraischer Functionen.

A. Rationale Functionen.

ich No. 3 ist

$$\int a\,\partial x = ax \qquad (3)$$

Zu finden das Integral einer Potenz x, als

$$y = \int x^m\,\partial x$$

ie 25te Differenzialformel ist

$$\partial y = \frac{\partial (\varphi x)^n}{\partial x} = n(\varphi x)^{n-1}\,\partial \varphi x$$

gegenseitig

$$\int n(\varphi x)^{n-1} \cdot \partial \varphi x \cdot \partial x = \varphi x^n$$

an kommt dem verlangten Integral d, wenn man $\varphi x = x$ also $\partial \varphi x = \partial x$ und $n-1 = m$ also $n = m+1$ setzt und mit $m+1$ dividirt. Alsdann hat man

$$\int x^m\,\partial x = \frac{x^{m+1}}{m+1} \qquad (4)$$

Für m nach und nach die Zahlen 1, 2, 3, 4.... gesetzt entstehen die Integralformeln

$$\int x \cdot \partial x = \tfrac{1}{2}x^2$$

$$\int x^2 \cdot \partial x = \tfrac{1}{3}x^3$$

$$\int x^3 \cdot \partial x = \tfrac{1}{4}x^4$$

$$\int x^4 \cdot \partial x = \tfrac{1}{5}x^5$$

u. s. w.

9. Setzt man in Differenzialformel 25 den Exponent subtractiv, so erhält man Differenzialformel 29

$$\frac{\partial z^{-n}}{\partial z} = \partial \frac{1}{z^n\,\partial z} = -nz^{-(n+1)} = -\frac{n}{z^{n+1}}$$

gegenseitig $$-\int \frac{n\,\partial z}{z^{n+1}} = -\int nz^{-(n+1)}\partial z = z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$

$$\int z^{-(n+1)}\,\partial z = -\frac{1}{n}\,z^{-n} = \frac{-1}{nz^n}$$

Für $n+1$ den Werth m, also für n den Werth $m-1$ und x für z gesetzt gibt

$$\int x^{-m}\,\partial x = \int \frac{\partial x}{x^m} = -\frac{x^{-(m-1)}}{m-1} = -\frac{1}{(m-1)\,x^{m-1}} \qquad (5)$$

tzt man für m nach und nach die he 1, 2, 3.. so erhält man

$$\int x^{-1}\,\partial x = \int \frac{\partial x}{x} = -\frac{x^{-0}}{0}$$

ber dieses Integral, s. No. 10

$$\int x^{-2}\,\partial x = \int \frac{\partial x}{x^2} = -x^{-1} = -\frac{1}{x}$$

$$\int x^{-3}\,\partial x = \int \frac{\partial x}{x^3} = -\tfrac{1}{2}x^{-2} = -\frac{1}{2x^2}$$

$$\int x^{-4}\,\partial x = \int \frac{\partial x}{x^4} = -\tfrac{1}{3}x^{-3} = -\frac{1}{3x^3}$$

$$\int x^{-5}\,\partial x = \int \frac{\partial x}{x^5} = -\tfrac{1}{4}x^{-4} = -\frac{1}{4x^4}$$

. w.

10. Das Integral von $x^{-1} = \frac{1}{x}$ ist in der Differenzialformel 84 begründet. Diese ist:

$$\partial\, log\, z = \frac{\partial z}{z} = z^{-1}\,\partial z$$

also gegenseitig

$$\int z^{-1}\,\partial z = log\, z$$

also $$\int x^{-1}\,\partial x = \int \frac{\partial x}{x} = log\, x \qquad (6)$$

Einführung neuer Veränderlichen.

11. Hat man ein Differenzial $\varphi' x$ zu integriren, das in der Potenz einer zwei- oder mehrgliedrigen Function der Urver-

änderlichen x besteht oder eine complicirte Function von x als Factor enthält, so ist es oft erleichternd, diese mehrgliedrige Function durch eine einfache neue Veränderliche (z) auszudrücken.

Es sei allgemein die Aufgabe das Integral zu finden:

$$u = \int y \, \partial x = \int \varphi x \cdot \partial x$$

und man habe Veranlassung $\varphi x = f z$ zu setzen, so ist die Aufgabe

$$u = \int y \cdot \partial x = \int f z \cdot \partial x$$

In dem Integral $f z$ erscheint nun z als unveränderlich und es entsteht aus einer Function $f z$ von z zunächst immer nur ein Differenzial $f' z \cdot \partial z$, nicht aber ein Differenzial wie $f' z \cdot \partial x$ (s. Differenzialformeln 1 bis 12, pag. 279). Man hat demnach zuerst das Integral u von y in Beziehung auf die Veränderliche z zu bestimmen. D. h. man hat zu integriren

$$\int y \cdot \partial z = \int f z \cdot \partial z$$

Nun ist aus $u = \int y \cdot \partial x$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y$$

Es ist aber (s. „Differenzial", No. 15, pag. 263)

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} = y \frac{\partial x}{\partial z}$$

also beiderseitig auf z als Urvariabele integrirt:

$$u = \int y \, \partial x = \int \left(y \frac{\partial x}{\partial z} \right) \partial z$$

oder (s. „Differenzial" No. 17, pag. 263)

$$u = \int y \, \partial x = \int \frac{y}{\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)} \cdot \partial z$$

Oder wenn $y = \varphi x = f z$, so ist

$$\int y \cdot \partial x = \int \varphi x \cdot \partial x = \int \left(f z \cdot \frac{\partial x}{\partial z} \right) \partial z \quad (7$$

oder

$$\int y \cdot \partial x = \int \varphi x \cdot \partial x = \int \frac{f z}{\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)} \partial z \quad (8$$

Diese beiden gleichgeltenden Formeln 7 und 8 sind also die allgemeine Vorschrift für das Verfahren beim Integriren einer Function, wenn statt der Urveränderlichen ein neue Veränderliche eingeführt wird. Die Regel ist also:

Nachdem die Einführung der neuen Veränderlichen geschehen multiplicire das dadurch entstandene Resultat mit dem Differenzial der ersten Urveränderlichen als abhängig veränderliche genommen in Beziehung auf die neue Veränderliche, diese als Urveränderliche betrachtet.

Oder dividire das Resultat mit dem Differenzial der neuen Veränderlichen in Beziehung auf die erste Urveränderliche genommen.

12. Zu finden $\int y \, \partial x = \int (x + x)^m \, \partial x$

Setzt man $a + x = z$, so hat man nach No. 11:

$$\int y \cdot \partial x = \int z^m \, \partial x = \int \left(z^m \frac{\partial x}{\partial z} \right) \partial z$$

Nun ist $\partial z = \partial (a + x) = \partial x$

also $\frac{\partial x}{\partial z} = 1$

Mithin $$\int y \, \partial x = \int z^m \, \partial z = \frac{z^{m+1}}{m+1} = \frac{(a+x)^{m+1}}{m+1} \quad (9$$

13. Setzt man in No. 12: $m = -1$, so hat man

$$\int y \, \partial x = \int (a + x)^{-1} \, \partial x = \int z^{-1} \, \partial z = ln \, z \text{ (s. Formel 6)}$$

also $$\int (a + x)^{-1} \, \partial x = \int \frac{\partial x}{a + x} = ln \, (a + x) \quad (10$$

14. Für $x = -x$ hat man aus No. 12.

$$\int y \, \partial x = \int (a - x)^m \, \partial x = \int \left(z^m \frac{\partial x}{\partial z} \right) \partial z$$

Nun ist $\partial z = \partial (a - x) = -\partial z$

folglich $$\int y \, \partial x = \int (-z^m) \, \partial z = -\int z^m \, \partial z = -\frac{z^{m+1}}{m+1}$$

oder $$\int (a - x)^m \, \partial x = -\frac{(a - x)^{m+1}}{m+1} \quad (11$$

15. Man erhält nach No. 10.

$$\int y \, \partial x = \int (a - x)^{-1} \, \partial x = \int \frac{\partial x}{a - x} = -ln \, (a - x) \quad (12$$

nden $\int y\,\partial x = \int (a+bx)^m\,\partial x$

n $(a+bx) = s$

$\partial (a+bx) = b\,\partial x$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{1}{b}$$

$$x = \int \frac{1}{b} s^m\,\partial s = \frac{s^{m+1}}{b(m+1)}$$

$$(a+bx)^m = \frac{(a+bx)^{m+1}}{b(m+1)} \quad (13)$$

enentwickelung.

tz No. 11 veranlafst, dafs ge- ionale Functionen durch die chriebene Umformung irratio- . Z. B. Es sei zu finden

$\partial x = \int (a+x^n)^m\,\partial x$

n $a + x^n = s$

so ist $x = (s-a)^{\frac{1}{n}}$

und

$$\partial x = \partial (s-a)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}(s-a)^{\frac{1}{n}-1}\,\partial s$$

woraus $$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{1}{n\,(s-a)^{\frac{n-1}{n}}}$$

mithin

$$\int y\,\partial x = \int \left(s^m \frac{\partial x}{\partial s}\right)\partial s = \int \frac{s^m\,\partial s}{n\,(s-a)^{\frac{n-1}{n}}}$$

Um also das gegebene I zu finden mufs man auf die Einführung einer neuen Veränderlichen verzichten. Man kann jedoch das I mit Hülfe des binomischen Satzes in eine Reihe entwickeln, und wenn dann m als bestimmte Zahl gegeben ist, so erhält man ein geschlossenes Integral.

man hat $(a+x^n)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} x^n + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2} x^{2n} + \ldots\ldots$

$$(a+x^n)^m\,\partial x = \int a^m\,\partial x + m a^{m-1} \int x^n\,\partial x + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2} \int x^{2n}\,\partial x + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{m \cdot m-1 \ldots\ldots 2}{1 \cdot 2 \ldots\ldots m-1} a \int x^{(m-1)n}\,\partial x + \int x^{mn}\,\partial x \quad (14)$$

Für $m = 2$ ist

$$\int (a+x^n)^2\,\partial x = \int a^2\,\partial x + 2a \int x^n\,\partial x + \int x^{2n}\,\partial x$$

$$= a^2 x + 2a \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (15)$$

$$\int (a+x^n)^3\,\partial x = a^3 \int \partial x + 3a^2 \int x^n\,\partial x + 3a \int x^{2n}\,\partial x + \int x^{3n}\,\partial x$$

$$= a^3 x + 3a^2 \frac{x^{n+1}}{n+1} + 3a \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{x^{3n+1}}{3n+1} \quad (16)$$

u finden $\int y\,\partial x = \int x^m (a+x)^n\,\partial x$

dem binomischen Satz hat man

$$(a+x)^n = a^n + n_1 a^{n-1} x + n_2 a^{n-2} x^2 + \ldots\ldots n a x^{n-1} + x^n$$

$$\cdot x)^n = a^n x^m + n a^{n-1} x^{m+1} + n_2 a^{n-2} x^{m+2} + \ldots\ldots n a x^{m+n-1} + x^{m+n}$$

nzelne Glied integrirt und die summirt ergibt das verlangte

finden

$z = \int x^m (a+x^n)^p\,\partial x$

ıle nach dem binomischen Satz in eine Reihe, multiplicire jeerselben mit x^m, integrire je- Glieder, so gibt die Summe ıle das verlangte Integral.

ıctionsformel.

bis jetzt 2 Hülfsmittel angegeben worden, um zusammengesetzte rationale Integrale zu finden. 1. Die Einführung einer neuen Veränderlichen (No. 11) und 2. die Entwickelung in eine Reihe (No. 17). Ein drittes Hülfsmittel bietet die Formel No. 2

$$\int fx \cdot Fx \cdot \partial x = fx \int Fx \cdot \partial x - \int [f'x \int Fx \cdot \partial x]\,\partial x$$

durch welche man successive, nämlich mit Wiederholung eines und desselben Verfahrens zu dem verlangten I gelangt, indem man das gegebene Differenzial auf ein einfacheres zurückbringt, reducirt,

weshalb die Formel die allgemeine Reductionsformel genannt wird.

Eine Anwendung davon ist bei folgender Aufgabe zu machen:

21. Zu finden

$$\int y\,\partial x = \int \frac{x^m\,\partial x}{(a+x)^n}$$

Schreibe $\int y\,\partial x = \int x^m (a+x)^{-n}\,\partial x$

Alsdann hat man nach der allgemeine Reductionsformel (2)

$$\int x^m (a+x)^{-n}\,\partial x = x^m \int (a+x)^{-n}\,\partial x - \int \left[\partial x^m \cdot \int (a+x)^{-n}\,\partial x\right]\partial x$$

$$= x^m \frac{(a+x)^{-n+1}}{-n+1} - \int m x^{m-1} \cdot \frac{(a+x)^{-n+1}}{-n+1}\,\partial x$$

oder

$$= -x^m \frac{(a+x)^{-(n-1)}}{n-1} + \frac{m}{n-1}\int x^{m-1}(a+x)^{-(n-1)}\,\partial x \qquad (17)$$

Man sieht, dafs man auf ein Integral kommt, in welchem die Exponenten m und n um eine Einheit niedriger sind, als in der zu integriren gegebenen Function. Behandelt man nun dieses letztere Integral auf dieselbe Weise, so erhält man

$$\int x^{m-1}(a+x)^{-(n-1)}\,\partial x = -x^{m-1}\frac{(a+x)^{-(n-2)}}{n-2} + \frac{m-1}{n-2}\int x^{m-2}(a+x)^{-(n-2)}\partial x$$

Fährt man so fort, so erhält man endlich x^0 oder $(a+x)^{-0}$; und zwar das erste oder das zweite zuerst, je nachdem $m<n$ oder $n<m$ ist.

Ist $m<n$ so entsteht zuletzt das noch aufzulösende Integral

$$\int (a+x)^{-p}\,\partial x = -\frac{(a+x)^{-(p-1)}}{p-1}$$

und das verlangte I ist vollständig (geschlossen) gefunden.

Ist $m>n$ so erhält man als Schlufsglied $\int x^p (a+x)^{-1}\partial x$ und dies ist nicht anders aufzulösen, als dafs man $\int \frac{x^p \partial x}{x+a}$ schreibt und mit $x+a$ in x^p so lange dividirt, bis man auf ein Glied $\int \frac{a^n \partial x}{x+a}$ als Ergänzungsglied kommt, welches $= a^n \ln(x+a)$ ist.

Mit der Summe der bis zu diesem letzten Gliede erhaltenen Integrale ist das verlangte I ebenfalls geschlossen gefunden.

22. Beispiel. Es sei $m=2$, $n=2$, also zu finden.

$$\int y\,\partial x = \int x^2 (a+x)^{-2}\,\partial x$$

Man hat

$$\int y\,\partial x = -x^2\frac{(a+x)^{-1}}{+1} + \tfrac{1}{1}\int x\,(a+x)^{-1}\,\partial x$$

$$= -\frac{x^2}{a+x} + 2\int \frac{x\,\partial x}{a+x} = -\frac{x^2}{a+x} + 2\int\left(1 - \frac{a}{x+x}\right)\partial x$$

$$= -\frac{x^2}{x+a} + 2x - 2a\ln(x+a)$$

oder

$$\int \frac{x^2\,\partial x}{(a+x)^2} = \frac{x^2+2ax}{x+a} - 2a\ln(x+a) \qquad (18)$$

Von der Richtigkeit des I überzeugt man sich durch Rückdifferenzirung. Man findet

$$\partial\left[\frac{x^2+2ax}{x+a} - 2a\ln(x+a)\right] = \frac{x^2}{(x+a)^2}$$

23. Zu finden $\int y\,\partial x = \int \frac{\partial x}{a+bx+x^2}$

Man setze $s = x + \frac{1}{2}b$

Dann ist $x = s - \frac{1}{2}b$ und da $\partial x = \partial s$ ist, so hat man

$$\frac{\partial x}{a+bx+x^2} = \frac{\partial s}{a-\frac{b^2}{4}+s^2}$$

Setzt man unter der Voraussetzung, dafs $\frac{1}{4}b^2 > a$ ist

$$\left(\frac{b^2}{4} - a\right) = c^2$$

o ist, wenn A, B unbestimmte Coefficienten bedeuten

$$\int\frac{\partial x}{a+bx+x^2}=\int\frac{\partial z}{z^2-c^2}=\int\left(\frac{A\,\partial z}{z+c}+\frac{B\,\partial z}{z-c}\right)$$

Nun sind A und B so zu bestimmen, lafs

$$A(z-c)+B(z+c)=1$$

also dafs $(A+B)z+(B-A)c=1$

Es kann aber diese Bedingung nur erfüllt werden, wenn $(A+B)z=0$ ist, weil verschwinden mufs; dann hat man

$$B-A=\frac{1}{c}$$

hiezu $B+A=0$

gibt $B=\frac{1}{2c}$ und $A=-\frac{1}{2c}$

Demnach ist

$$\int\frac{\partial x}{a+bx+x^2}=-\frac{1}{2c}\int\frac{\partial z}{z+c}+\frac{1}{2c}\int\frac{\partial z}{z-c}$$

Nun ist Differenzialformel 84

$$\partial\, logn\, z=\frac{\partial z}{z}$$

also auch $\partial\, logn\,(z\pm c)=\frac{\partial z}{z\pm c}$

folglich

$$\int\frac{\partial z}{z^2-c^2}=-\frac{1}{2c}logn\,(z+c)+\frac{1}{2c}logn\,(z-c)=\frac{1}{2c}ln\frac{z-c}{z+c} \tag{19}$$

Setzt man nun für z und c die ursprünglichen Werthe, so erhält man

$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{b^2}{4}-a}}logn\frac{x+\frac{1}{2}b-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a}}{x+\frac{1}{2}b+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a}}$$

und reducirt

$$\int\frac{\partial x}{a+bx+x^2}=\frac{1}{\sqrt{b^2-4a}}ln\frac{2x+b-\sqrt{b^2-4a}}{2x+b+\sqrt{b^2-4a}} \tag{20}$$

24. Ist jedoch $a>\frac{1}{4}b^2$, so hat man

$$a-\frac{b^2}{4}=c^2 \text{ gesetzt:}$$

$$\frac{\partial x}{a+bx+x^2}=\frac{\partial z}{z^2+c^2}=\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial z}{1+\left(\frac{z}{c}\right)^2}=\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\left(\frac{z}{c}\right)}{1+\left(\frac{z}{c}\right)^2}$$

Nun ist Differenzialformel 120

$$\partial\, arc\,(tg=s)=\frac{\partial z}{1+z^2}$$

uithin ist

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\left(\frac{z}{c}\right)}{1+\left(\frac{z}{c}\right)^2}=\frac{\partial z}{z^2+c^2}=\frac{1}{c}\,\partial\, arc\,tg\,\frac{z}{c}$$

Hierein die Werthe $z=x+\frac{1}{2}b$; $c^2=\frac{4a-b^2}{4}$ gesetzt und reducirt

$$\int\frac{\partial x}{a+bx+x^2}=\frac{2}{\sqrt{4a-b^2}}arc\,tg\,\frac{2x+b}{\sqrt{4a-b^2}} \tag{21}$$

25. Ist drittens $a=\frac{1}{4}b^2$ so wird

$$\int\frac{\partial x}{a+bx+x^2}=\int\frac{\partial z}{z^2}=-\frac{1}{z}=-\frac{2}{b+2x} \tag{22}$$

26. Zu finden $\int y\,\partial x=\int\frac{x+A}{a+bx+x^2}\partial x$ zweien besteht, denn es ist

Man sieht, dafs diese Aufgabe aus $\int y\,\partial x=\int\frac{x\,\partial x}{a+bx+x^2}+\int\frac{A\,\partial x}{a+bx+x^2}$

Das 2te Integral ist aber schon in No. 23 bis 25 für 3 verschiedene Fälle bestimmt worden, wenn man dasselbe dort mit A multiplicirt.

Setzt man für das aufzulösende erste Integral wie No. 23

$$s = x + \frac{b}{2}$$

ist also $x = s - \frac{b}{2}$

und $\partial x = \partial s$

Setzt man ferner $\pm c^2 = \pm \frac{b^2}{4} \mp a$

so hat man das erste Integral

$$\int \frac{x\,\partial x}{a + bx + x^2} = \int \frac{\left(s - \frac{b}{2}\right)\partial s}{s^2 \pm c^2} = \int \frac{s\,\partial s}{s^2 \pm c^2} - \frac{b}{2}\int \frac{\partial s}{s^2 \pm c^2}$$

Dieses getrennte subtractive I ist ebenfalls No. 23 aufgelöset, und man hat zu dem noch aufzulösenden Integral

$$\int \frac{s\,\partial s}{s^2 \pm c^2}$$

zu addiren das Integral No. 23 multiplicirt mit $(A - \frac{1}{2}b)$.

Nun ist für den Fall $(s^2 - c^2)$ im Nenner

$$\int \frac{s\,\partial s}{s^2 - c^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2s\,\partial s}{s^2 - c^2}$$

Also nach der 84ten Differenzialformel

$$\int \frac{s\,\partial s}{s^2 - c^2} = \frac{1}{2} log_n (s^2 - c^2) \qquad (A)$$

Hierzu gehört das Integral 19 mit $(A - \frac{1}{2}b)$ multiplicirt, nämlich

$$\frac{A - \frac{1}{2}b}{2c} ln \frac{s - c}{s + c} \qquad (B)$$

und es ist mithin, wenn $\frac{1}{4}b^2 > a$ ist, das verlangte $I = (A) + (B)$, oder

$$\int \frac{(x + A)\,\partial x}{a + bx + x^2} = \frac{1}{2} ln (s^2 - c^2) + \frac{A - \frac{1}{2}b}{2c} ln \frac{s - c}{s + c}$$

$$= \frac{1}{2} ln (a + bx + x^2) + \frac{A - \frac{1}{2}b}{\sqrt{b^2 - 4a}} ln \frac{x + \frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a}}{x + \frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a}} \qquad (33)$$

Für den Fall $(s^2 + c^2)$ im Nenner hat man eben so

$$\int \frac{s\,\partial s}{s^2 + c^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2s\,\partial s}{s^2 + c^2} = \frac{1}{2} ln (s^2 + c^2) = \frac{1}{2} ln (a + bx + x^2)$$

Hierzu das Integral 21 multiplicirt mit $(A - \frac{1}{2}b)$ gibt

$$\int \frac{(x + A)\,\partial x}{a + bx + x^2} = \frac{1}{2} ln (a + bx + x^2) + \frac{2(A - \frac{1}{2}b)}{\sqrt{4a - b^2}} arc\ tg \frac{2x + b}{\sqrt{4a - b^2}} \qquad (34)$$

Endlich drittens für $a = \frac{1}{4}b^2$ ist

$$\int \frac{x\,\partial x}{a + bx + x^2} = \int \frac{s\,\partial s}{s^2} = \int \frac{\partial s}{s} = ln\, s = ln (x + \tfrac{1}{2}b)$$

hierzu $(A - \frac{1}{2}b)$ mal dem Integral 20 gibt

$$\int \frac{(x + A)\,\partial x}{a + bx + x^2} = \int \frac{(x + A)\,\partial x}{(x + \frac{1}{2}b)^2} = ln (x + \tfrac{1}{2}b) - \frac{A - \frac{1}{2}b}{x + \frac{1}{2}b} \qquad (35)$$

27. Zu finden $fy\,\partial x = \int \frac{\partial x}{x(a + bx + x^2)}$

Es ist am geeignetsten, wenn man den Bruch des gegebenen Differenzials in 2 Summanden zerlegt, in welchen die Factoren des Nenners die Nenner sind.

Man hat

$$\frac{1}{x(a + bx + x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{a + bx + x^2}$$

und folglich die Bedingung

$$A(a + bx + x^2) + Bx = 1$$

oder $Aa + A(bx + x^2) + Bx = 1$

Setzt man nun $Aa = 1$ also $A = \frac{1}{a}$

so erhält man $A(b + x) + B = 0$

und hierein $A = \frac{1}{a}$ gesetzt

$$B = -\frac{b + x}{a}.$$

hin $$\frac{\partial x}{x(a+bx+x^2)} = \frac{1}{a}\left[\frac{\partial x}{x} - \frac{b+x}{a+bx+x^2}\right]$$

Daher $$\int y\,\partial x = \frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{x} - \frac{1}{a}\int\frac{b+x}{a+bx+x^2}\partial x$$
$$= \frac{1}{a}\left[ln\,x - b\int\frac{\partial x}{a+bx+x^2} - \int\frac{x\,\partial x}{a+bx+x^2}\right]$$

r $\frac{1}{a}$ [$ln\,x -$ einem der 3 Integrale 23, 24, 25, wenn man b statt A schreibt.]

$$\int\frac{\partial x}{x(a+bx+x^2)} = \frac{1}{a}\left[ln\,x - \tfrac{1}{2}ln\,(a+bx+x^2) - \frac{b}{2}\int\frac{\partial x}{a+bx+x^2}\right]$$
$$= \frac{1}{2a}\left[ln\,\frac{x^2}{a+bx+x^2} - b\int\frac{\partial x}{a+bx+x^2}\right] \qquad (26)$$

em für das letzte Integral die Formel 20, 21 oder 22 genommen wird, je nachdem $> a$ oder $\frac{b^2}{4} < a$ oder $\frac{b^2}{4} = a$ ist.

28. Zu finden $\int y\,\partial x = \int\frac{(x+A)\,\partial x}{(a+bx+x^2)^m}$

Setzt man wieder $z = x + \frac{1}{2}b$
hat man wie in den vorigen Aufgaben

$$y = \frac{(x+A)\,\partial z}{(z^2 \mp c^2)^m} = \frac{\left(z - \frac{b}{2} + A\right)\partial z}{(z^2 \mp c^2)^m} = \int\frac{z\,\partial z}{(z^2 \mp c^2)^m} + \int\frac{\left(A - \frac{b}{2}\right)\partial z}{(z^2 \mp c^2)^m}$$

Um das erste Integral zu finden, setze man

$$z^2 \mp c^2 = \mu$$

ist $$2z \cdot \partial z = \partial\mu$$

raus $$z = \tfrac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial z}$$

Diese Werthe eingeführt, ist

$$\int\frac{z\cdot\partial z}{(z^2 \mp c^2)^m} = \int\frac{\frac{1}{2}\frac{\partial\mu}{\partial z}\cdot\partial z}{\mu^m} = \tfrac{1}{2}\int\frac{\partial\mu}{\mu^m} = \tfrac{1}{2}\int\mu^{-m}\,\partial\mu$$

Nun ist nach Integralformel 5

$$\tfrac{1}{2}\int\mu^{-m}\,\partial\mu = \tfrac{1}{2}\frac{\mu^{-m+1}}{-m+1} = -\frac{1}{2(m-1)\,\mu^{m-1}}$$

o $$\int\frac{z\cdot\partial z}{(z^2 \mp c^2)^m} = -\frac{1}{2(m-1)\,\mu^{m-1}} = -\frac{1}{2(m-1)(z^2 \mp c^2)^{m-1}} \qquad (27)$$

Um das zweite Integral zu finden, muſs an dasselbe auf das Integral einer Function derselben Form zurückführen, wo m einen geringeren Werth hat, so daſs man durch wiederholtem Verfahren auf die Form $\frac{-\frac{b}{2}}{z^2 \mp c^2}$ kommt. Hierzu dient die Reductionsformel 2. (s. No. 20).

Setzt man nun $A - \frac{b}{2} = Fx = B$;

$$fx = \frac{1}{(z^2 \mp c^2)^m} = (z^2 \mp c^2)^{-m}$$

so hat man

$$\int Fx\,\partial z = Bz$$

$$\frac{\partial fx}{\partial z} = -m\,(z^2 \mp c^2)^{-m-1}\cdot 2z = \frac{-2mz}{(z^2 \mp c^2)^{m+1}}$$

her $$\int\frac{B\,\partial z}{(z^2 \mp c^2)^m} = \frac{Bz}{(z^2 \mp c^2)^m} + 2m\int\frac{z}{(z^2 \mp c^2)^{m+1}} \times Bz\,\partial z$$

$$= \frac{Bz}{(z^2 \mp c^2)^m} + 2m \int \frac{B}{(z^2 \mp c^2)^m} \cdot \frac{z^2}{z^2 \mp c^2} \partial z$$

$$= \frac{Bz}{(z^2 \mp c^2)^m} + 2m \int \frac{B}{(z^2 \mp c^2)^m} \left(1 \pm \frac{c^2}{z^2 \mp c^2}\right) \partial z$$

$$= \frac{Bz}{(z^2 \mp c^2)^m} + 2m \int \frac{B \partial z}{(z^2 \mp c^2)^m} \pm 2m c^2 \int \frac{B \partial z}{(z^2 \mp c^2)^{m+1}}$$

Hieraus das letzte Integral entwickelt gibt:

$$\int \frac{B \partial z}{(z^2 \mp c^2)^{m+1}} = \mp \int \frac{Bz \partial z}{2m c^2 (z^2 \mp c^2)^m} \mp \frac{2m-1}{2m c^2} \int \frac{B \partial z}{(z^2 \mp c^2)^m}$$

Setzt man nun $m-1$ statt m, so erhält man die Reductionsformel

$$\int \frac{B \partial z}{(z^2 \pm c^2)^m} = \mp \frac{Bz}{2(m-1)c^2 (z^2 \mp c^2)^{m-1}} \mp \frac{2m-3}{2(m-1)c^2} \int \frac{B \partial z}{(z^2 \mp c^2)^{m-1}} \quad (26)$$

Vermittelst dieser Reductionsformel ist nun das Integral der Function auf ein anderes derselben Form reducirt, in welchem der Exponent um 1 geringer ist. Setzt man in das letzte Integral dann wiederum $m-1$ statt m, so erhält man dieses zurückgeführt auf ein I mit dem Exponent $m-2$; und so fortgefahren gelangt man endlich auf ein Integral $\int \frac{B \partial z}{z^2 \mp c^2}$ welches in den Integralformeln 16 und 18 aufgelöst ist.

Da nun $\partial x = \partial z$ ist, so kann man ohne Weiteres für z seinen Werth in x ausdrücken, und man hat (27 + 28)

$$\int \frac{(x+A) \partial x}{(a+bx+x^2)^m} = -\frac{1}{2(m-1)(a+bx+x^2)^{m-1}} - \frac{\left(A - \frac{b}{2}\right)(x+\frac{1}{2}b)}{2(m-1)\left(\frac{b^2}{4} - a\right)(a+bx+x^2)^{m-1}}$$

$$- \frac{2m-3}{2(m-1)\left(\frac{b^2}{4} - a\right)} \cdot \int \frac{\left(A - \frac{b}{2}\right) \partial x}{(a+bx+x^2)^{m-1}}$$

29. Das Integral aus einer gebrochenen algebraischen Function zu finden, wenn deren Nenner in ein Product von binomischen und trinomischen Factoren sich zerlegen läfst.

Das Verfahren besteht darin, dafs man den gegebenen Bruch in lauter Theilbrüche zerlegt, von jedem Theilbruch das Integral sucht und sämmtliche Integrale addirt.

In dem Art. „Functionenlehre" No. 4 und 5 ist gezeigt, wie man einen Bruch, dessen Nenner aus 2 Factoren besteht, in 2 Theilbrüche zerlegt: Der Nenner des einen Theilbruchs ist der erste Factor und der Nenner des anderen Theilbruchs der zweite Factor des gegebenen Nenners, die Zähler der beiden Theilbrüche sind aufzufinden. Von diesem Satz ist schon No. 23 dieses Art. Anwendung gemacht worden.

Hat nun der Nenner der gegebenen Function mehr als 2, z. B. n ungleiche Factoren, so nimmt man den ersten Factor als Nenner des ersten Theilbruchs und das Product der übrigen $(n-1)$ Factoren als den Nenner des zweiten Theilbruchs. Man findet den Zähler des ersten Theilbruchs und mit demselben diesen Bruch selbst. Wiederholt man nun das Verfahren mit den übrigen $(n-1)$ Factoren des Nenners, so erhält man nach und nach sämmtliche Theilbrüche der gegebenen Function.

Beispiel.

Es ist $N = \frac{2x^2+7x+3}{(x+1)(x-1)(x+2)}$ in 3 Theilbrüche zu zerlegen. Demnach sei

$$N = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x-1)(x+2)}$$

hieraus

$$A(x-1)(x+2) + B(x+1) = 2x^2 + 7x + 3$$

Um A zu finden mufs B verschwinden, demnach ist $x+1=0$ also $x=-1$ zu nehmen, und diesen Werth in die Be-

dingungsgleichung eingesetzt wird

$$-2A+0=-2$$

woraus $A=1$

und es ist $$\frac{2x^2+7x+3}{(x+1)(x-1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}+\frac{B}{(x-1)(x-2)}$$

Hieraus $$2x^2+7x+3-(x-1)(x+2)\cdot 1=B(x+1)$$

woraus $B=\frac{x^2+6x+5}{x+1}=x+5$

Der in 2 Theilbrüche noch zu zerlegende Bruch ist demnach

$$=\frac{x+5}{(x-1)(x+2)}=\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+2}$$

hieraus

$$x+5=C\cdot(x+2)+D(x-1)$$

Setzt man wieder $x=+1$, so hat man

$$x+5=C\cdot(x+2)$$

und $C=\frac{6}{3}=2$

und setzt man $x=-2$, so erhält man

$$x+5=D(x-1)$$

und $D=\frac{+3}{-3}=-1$

mithin hat man $$\frac{2x^2+7x+3}{(x+1)(x-1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

Man übersieht aus diesem Beispiel das erforderliche Rechnenverfahren, ohne dafs man nöthig hat die Gleichungen aufzustellen.

Man setzt nämlich nach einander jeden Factor des Nenners $=0$, das x welches daraus jedesmal entsteht, setzt man in die übrigen Factoren des Nenners und in den gegebenen Zähler und dividirt diesen durch jenes Product, so erhält man in dem Quotient den Zähler zu dem zu Null gemachten Nenner.

In dem vorigen Beispiel ist

$$\frac{2x^2+7x+3}{(x+1)(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

$x+1=0$ gibt $x=-1$

daher $$\frac{2x^2+7x+3}{(x-1)(x+2)}=\frac{2-7+3}{(-2)\times(+1)}=\frac{-2}{-2}=+1=A$$

$x-1=0$ gibt $x=+1$

daher $$\frac{2x^2+7x+3}{(x+1)(x+2)}=\frac{2+7+3}{2\times 3}=\frac{12}{6}=+2=B$$

$x+2=0$ gibt $x=-2$

daher $$\frac{2x^2+7x+3}{(x+1)(x-1)}=\frac{8-14+3}{(-1)\times(-3)}=\frac{-3}{+3}=-1=C$$

30. In No. 6 des Art.: Functionenlehre ist nachgewiesen, dafs wenn 2 oder mehrere gleiche Factoren im Nenner sich befinden, diese zweite oder höhere Potenz in so viele Brüche mit der Wurzel zum Nenner als der Grad der Potenz beträgt nicht zerlegt werden kann, und dafs diese Potenz als Nenner eines einzigen Theilbruchs genommen werden mufs.

Dagegen kann man solchen Bruch $\left(\frac{fx}{(\varphi x)^n}\right)$ in Theilbrüche zerlegen von der Form

$$\frac{fx}{(\varphi x)^n}=\frac{A}{(\varphi x)^n}+\frac{B}{(\varphi x)^{n-1}}+\frac{C}{(\varphi x)^{n-2}}+\ldots+\frac{N}{\varphi x}$$

wie folgendes Beispiel:

$\frac{3x^2+2x+5}{(x-2)^3}$ soll zerlegt werden in $\frac{A}{(x-2)^3}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x-2}$

Die drei letzten Brüche unter gleiche Benennung gebracht und die gleichen Nenner fortgelassen entsteht

$$3x^2+2x+5=A+B(x-2)+C(x-2)^2$$

Setzt man $x=2$, so verschwinden B und C und man hat

$$3\cdot 2^2+2\cdot 2+5=21=A$$

hieraus $$3x^2+2x+5-21=B(x-2)+C(x-2)^2$$

oder $$\frac{3x^2+2x-16}{x-2}=3x+8=B+C(x-2)$$

wiederum $x=2$ gesetzt, verschwindet C, und man hat

$$3\cdot 2+8=14=B$$

hieraus $$3x+8-14=3x-6=C(x-2)$$

woraus $$C=\frac{3x-6}{x-2}=+3$$

Es ist mithin $$\frac{3x^2+2x+5}{(x-2)^3}=\frac{21}{(x-2)^3}+\frac{14}{(x-2)^2}+\frac{3}{x-2}$$

31. Nicht immer sind die Factoren des Nenners Binomen; auch trin Factoren kommen vor. Z. B. soll folgender Bruch behufs der Integriru Factoren aufgelöst werden

$$\frac{2x^2+x-7}{(x-2)(x^2-2x+3)}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{x^2-2x+3}$$

so hat man $\frac{2x^2+x-7}{x^2-2x+3}$ (für $x=2$) $=\frac{+3}{+3}=1=A$

Der erste Bruch ist also $\frac{1}{x-2}$

ferner $$\frac{(2x^2+x-7)-(x^2-2x+3)}{x-2}=\frac{x^2+3x-10}{x-2}=x+5=B$$

mithin $$\frac{2x^2+x-7}{(x-2)(x^2-2x+3)}=\frac{1}{x-2}+\frac{x+5}{x^2-2x+3}$$

Sind aber statt eines Trinoms 2 und mehrere als Factoren im Nen sollen die einfachen, wie hier imaginären Wurzeln als Factoren genommen so ist die Arbeit mühsam.

Es ist hier $x^2-2x+3=(x-1+\sqrt{-2})(x-1-\sqrt{-2})$

Man hat also die beiden Brüche

$$\frac{C}{x-1+\sqrt{-2}}+\frac{D}{x-1-\sqrt{-2}}$$ anstatt $$\frac{x+5}{x^2-2x+3}$$

Setzt man nun in den Zähler $2x^2+x-7$ den Werth von $x=1\pm\sqrt{-2}$ und denselben Werth für x in den Nenner $(x-2)$ so erhält man $\frac{-8\pm 5\sqrt{-2}}{-1\pm\sqrt{-2}}$

Setzt man diesen Bruch $=x+y\sqrt{-2}$ und entwickelt, setzt das Rationale dem Rationalen und das Irrationale dem Irrationalen gleich, so erhält man Nenner x^2-2x+3) den Zähler

$$\frac{-8\pm 5\sqrt{-2}}{-1\pm\sqrt{-2}}=6\pm\sqrt{-2}$$

Setzt man nun, um C zu $x=1+\sqrt{-2}$ und um D zu $x=1-\sqrt{-2}$, so hat man:

$$\frac{6+\sqrt{-2}}{x-1+\sqrt{-2}}=\frac{6+\sqrt{-2}}{2\sqrt{-2}}=\tfrac{1}{2}(1-3\sqrt{-2})=C$$

$$\frac{6-\sqrt{-2}}{x-1-\sqrt{-2}}=\frac{6-\sqrt{-2}}{-2\sqrt{-2}}=\tfrac{1}{2}(1+3\sqrt{-2})=D$$

und man hat $$\frac{2x^2+x-7}{x^2-2x+3}=\frac{1}{x-2}+\frac{\frac{1}{2}(1-3\sqrt{-2})}{x-1+\sqrt{-2}}+\frac{\frac{1}{2}(1+3\sqrt{-2})}{x-1-\sqrt{-2}}$$

32. Die zum Integriren gegebene Function ist von folgender allgemein

$$y=\frac{Ax^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots A_{m-1}x+Am}{x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots a_{n-1}x+a_n}$$

ist hierbei zu bemerken, dafs der ient von x^n im Nenner, wenn er geben sein sollte, durch Division jederzeit in 1 umgeändert werden wie hier als geschehen zu den-t.

ier ist zu beachten, dafs wenn die ion nach einer der hier vorange-n Integralformeln integrirt werden ie Function eine ächt gebrochene uſs, so dafs der höchste Exponent Zählers kleiner sein muſs als der e n des Nenners.

te nun $m > n$ gegeben werden, so Zähler so lange mit dem Nenner idiren, bis ein Rest entsteht, des-ichster Exponent von x kleiner als l. Die gebrochene Function wird in eine ganze Function + einer ebrochenen aufgelöst.

d nun ein Bruch, dessen Nenner iner polynomischen Function der derlichen besteht, zum Integriren n, so hat man in der Summe der ale seiner Theilbrüche, die nach tehenden Anweisungen sämmtlich wickeln sind das Integral desselben.

die Function in Buchstabengröſsen n, so kann die Zerlegung des Nen-n Factoren unmöglich sein; alsdann ich deren Integrirung unmöglich. e gegebene Function mit bestimm-ahlencoefficienten versehen, so ist nner jedesmal ein Product so vieler en, als der höchste Exponent der derlichen Einheiten enthält; dage-innen diese Factoren irrational und eise unmöglich sein. Erstere sind mit beliebiger Genauigkeit annä-zu finden. Hat man nun einen ben gefunden und man dividirt mit lben in den Nenner, so erhält man Function der Veränderlichen, deren ter Exponent einen Grad niedriger ist, von der man nun auf dieselbe Weise einen zweiten Factor näherungsweise sucht u. s. f.

Statt dieses sehr weitläufigen Verfahrens ist es besser zu versuchen, ob man die Function in eine möglichst convergirende Reihe entwickeln kann, deren Glieder dann einzeln zu integriren sind und deren Summe dem wirklichen Integral möglichst nahe gebracht werden kann. Hiervon No. 63 und weiter.

33. Eine Function kann übrigens nur dann ein Integral haben, wenn sie selbst das Differenzial dieses Integrals, wenn sie also überhaupt das Differenzial einer Function ist. Da es nun Functionen gibt, die aus keiner anderen Function als Differenzial hervorgehen, so haben diese auch keine Integrale. Vergl. den Art.: „Differenzialgleichung," No. 4, pag. 287. Ein näherungsweises Integral ist diejenige Function, welche ein Differenzial hat, dessen Werth dem Werth der gegebenen Function nahe kommt.

B. Irrationale Functionen.

34. Irrationale Functionen sind jederzeit Wurzelgröſsen, die nicht anzugeben sind, als $\sqrt{x+a}$, $\sqrt[n]{(x+bx^2)^m}$. Irrationalzahlen wie π, $ln\ a$ sind constant, $\int n\,\partial x$ ist $= nx$; $\int ln\,a\,\partial x$ ist $= x\,ln\,a$; $sin\,\varphi x$, $log\,\varphi x$ sind transcendente Functionen.

Die irrationale Function der einfachsten Form ist $x^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x}$. Diese und alle übrigen einfachen Functionen in Potenzen mit gebrochenen Exponenten werden integrirt, wenn man in den Integralformeln für rationale Potenzen statt des ganzen den gebrochenen Exponenten einsetzt.

Formel 4 ist: $\int x^m\,\partial x = \dfrac{x^{m+1}}{m+1}$

Man hat demnach

$$\int x^{\frac{m}{n}}\,\partial x = \frac{x^{\left(\frac{m}{n}+1\right)}}{\frac{m}{n}+1} = \frac{n}{m+n}\,x^{\frac{m+n}{n}} \qquad (29)$$

Aus Formel 5 entsteht

$$x^{-\frac{m}{n}}\,\partial x = \int \frac{\partial x}{x^{\frac{m}{n}}} = \frac{x^{-\frac{m}{n}+1}}{-\frac{m}{n}+1} = -\frac{n}{m-n}\cdot x^{-\frac{m-n}{n}} = -\frac{n}{m-n}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{x^{m-n}}} \qquad (30)$$

Aus Formel 9 entsteht

$$x)^{\frac{m}{n}}\,\partial x = \frac{n}{m+n}(a+x)^{\frac{m+n}{n}} \qquad (31)$$

Aus Formel 11

$$\int (a-x)^{\frac{m}{n}}\,\partial x = -\frac{n}{m+n}(a-x)^{\frac{m+n}{n}} \tag{32}$$

Aus Formel 13

$$\int (a+bx)^{\frac{m}{n}}\,\partial x = \frac{n}{m+n}\cdot\frac{(a+bx)^{\frac{m+n}{n}}}{b} \tag{33}$$

Aus Formel 14, 15, 16

$$\begin{aligned}\int \left(a+x^{\frac{n}{p}}\right)^m \partial x &= a^m\int \partial x + ma^{m-1}\int x^{\frac{n}{p}}\,\partial x + m_2 a^{m-2}\int x^{\frac{2n}{p}}\,\partial x \\ &+ \ldots\ldots m_{n-1}a^{m-n+1}\int x^{\frac{(n-1)n}{p}}\,\partial x + m_n a^{m-n}\int x^{\frac{n^2}{p}}\,\partial x \\ &+ \ldots\ldots + m_{m-1}a\int x^{\frac{(m-1)n}{p}}\,\partial x + \int x^{\frac{mn}{p}}\,\partial x\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}\int \left(a+x^{\frac{n}{p}}\right)^2 &= a^2\int \partial x + 2a\int x^{\frac{n}{p}}\,\partial x + \int x^{\frac{2n}{p}}\,\partial x \\ &= a^2 x + \frac{2ap}{n+p}x^{\frac{n+p}{p}} + \frac{p}{2n+p}x^{\frac{2n+p}{p}}\end{aligned} \tag{35}$$

$$\int \left(a+x^{\frac{n}{p}}\right)^3 \partial x = a^3x + \frac{3a^2p}{n+p}x^{\frac{n+p}{p}} + \frac{3ap}{2n+p}x^{\frac{2n+p}{p}} + \frac{p}{3n+p}x^{\frac{3n+p}{p}} \tag{36}$$

35. In No. 18 ist $\int x^m (a+x)^n\,\partial x$ dadurch gefunden, dafs $(a+x)^n$ durch den binomischen Satz in eine Reihe entwickelt worden ist. Demnach mufs bei diesem Verfahren n eine ganze Zahl sein. Man findet demnach:

$$\int x^{\frac{m}{p}}(a+x)^n\,\partial x = a^n\int x^{\frac{m}{p}}\,\partial x + n_1 a^{n-1}\int x^{\frac{m+p}{p}}\,\partial x + n_2 a^{n-2}\int x^{\frac{m+2p}{p}}\,\partial x + \ldots \tag{37}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}\int x^{\frac{1}{2}}(a+x)^3\,\partial x &= \int x^{\frac{1}{2}}(a^3+3a^2x+3ax^2+x^3)\,\partial x \\ &= a^3\int x^{\frac{1}{2}}\partial x + 3a^2\int x^{\frac{3}{2}}\partial x + 3a\int x^{\frac{5}{2}}\partial x + \int x^{\frac{7}{2}}\partial x \\ &= \tfrac{2}{3}a^3x^{\frac{3}{2}} + \tfrac{6}{5}a^2x^{\frac{5}{2}} + \tfrac{6}{7}ax^{\frac{7}{2}} + \tfrac{2}{11}x^{\frac{11}{2}} \\ &= 2x^{\frac{3}{2}}(\tfrac{1}{3}a^3 + \tfrac{1}{5}a^2x + \tfrac{3}{7}ax^2 + \tfrac{1}{11}x^3)\end{aligned}$$

36. Man kann das I. No. 35 auch mit Hülfe der allgemeinen Reductionsformel 2 finden. Man hat:

$$\begin{aligned}\int x^{\frac{m}{p}}(a+x)^n\,\partial x &= x^{\frac{m}{p}}\int (a+x)^n\,\partial x - \int\left[\frac{\partial x^{\frac{m}{p}}}{\partial x}\cdot\int (a+x)^n\,\partial x\right]\partial x \\ &= x^{\frac{m}{p}}\frac{(a+x)^{n+1}}{n+1} - \int\left(\frac{m}{p}x^{\frac{m}{p}-1}\cdot\frac{(a+x)^{n+1}}{n+1}\right)\partial x \\ &= x^{\frac{m}{p}}\frac{(a+x)^{n+1}}{n+1} - \frac{m}{p(n+1)}\int x^{\frac{m}{p}-1}(a+x)^{n+1}\,\partial x\end{aligned}$$

Da $\frac{m}{p}$ eine gebrochene Zahl ist, so ist mit dem um 1 verminderten Exponenten $\left(\frac{m}{p}-1\right)$ nichts gewonnen und man mufs weiter umformen. Setzt man deshalb in die Integralgleichung $n-1$ für n und $\frac{m}{p}+1$ für $\frac{m}{p}$, so erhält man

$$\int x^{\frac{m}{p}+1}(a+x)^{n-1}\,\partial x = x^{\frac{m}{p}+1}\frac{(a+x)^n}{n} - \frac{m+p}{np}\int x^{\frac{m}{p}}(a+x)^n\,\partial x$$

Hieraus das letzte Integral entwickelt gibt die ursprüngliche Aufgabe

$$\int x^{\frac{m}{p}} (a+x)^n \, \partial x = \frac{p}{m+p} x^{\frac{m}{p}+1} (a+x)^n - \frac{np}{m+p} \int x^{\frac{m}{p}+1} (a+x)^{n-1} \, \partial x \qquad (38)$$

In dieser Formel wird also der positive ganze Exponent n in dem neuen Integral um 1 geringer. Nun kann man das letzte I wiederum auf ein I zurückführen, welchem der Exponent von $(a+x)$ um 1 geringer, nämlich $= n-2$ wird, und so fort bis man auf den Exponent = 0 kommt.

Beispiel (obiges No. 35) $\int x^{\frac{1}{2}} (a+x)^3 \, \partial x$ wird nach Formel 38

$$\tfrac{2}{3} x^{\frac{1}{2}} (a+x)^3 - \tfrac{6}{3} \int x^{\frac{1}{2}} (a+x)^2 \, \partial x$$

Nun ist nach derselben Formel

$$(a+x)^2 \, \partial x = \tfrac{2}{4} x^{\frac{1}{2}} (a+x)^2 - \tfrac{2}{4} \int x^{\frac{1}{2}} (a+x) \, \partial x$$

gleichen

$$(a+x) \, \partial x = \tfrac{2}{3} x^{\frac{1}{2}} (a+x) - \tfrac{2}{3} \int x^{\frac{1}{2}} (a+x)^0 \, \partial x$$

Es ist mithin

$$\begin{aligned}
(a+x)^3 \partial x &= \tfrac{2}{3} x^{\frac{1}{2}} (a+x)^3 - \tfrac{1}{3}\tfrac{2}{3} x^{\frac{1}{2}} (a+x)^2 + \tfrac{1}{1}\tfrac{6}{0}\tfrac{2}{5} x^{\frac{1}{2}} (a+x) - \tfrac{1}{1}\tfrac{2}{1}\tfrac{2}{5} x^{\frac{11}{2}} \\
&= \tfrac{2}{3} a^3 x^{\frac{1}{2}} + \tfrac{2}{3} a^2 x^{\frac{1}{2}} + \tfrac{2}{3} a x^{\frac{2}{2}} + \tfrac{2}{3} x^{\frac{11}{2}} \\
&\quad - \tfrac{1}{3}\tfrac{2}{5} a^2 x^{\frac{1}{2}} - \tfrac{2}{3}\tfrac{2}{5} a x^{\frac{2}{2}} - \tfrac{1}{3}\tfrac{2}{5} x^{\frac{11}{2}} \\
&\quad + \tfrac{1}{1}\tfrac{6}{0}\tfrac{2}{5} a x^{\frac{2}{2}} + \tfrac{1}{1}\tfrac{6}{0}\tfrac{2}{5} x^{\frac{11}{2}} \\
&\quad - \tfrac{1}{1}\tfrac{2}{1}\tfrac{2}{5} x^{\frac{11}{2}} \\
\hline
\int x^{\frac{1}{2}} (a+x)^3 \, \partial x &= \tfrac{2}{3} a^3 x^{\frac{1}{2}} + \tfrac{2}{5} a^2 x^{\frac{1}{2}} + \tfrac{2}{3} a x^{\frac{2}{2}} + \tfrac{2}{11} x^{\frac{11}{2}}
\end{aligned}$$

ichtes mit dem Resultat No. 35 überstimmt.

37. Die Formel No. 18, auf irrationale unctionen angewandt, hat man noch zu stimmen:

$$\int x^m (a+x)^{\frac{n}{p}} \, \partial x$$

Die Auflösung geschieht nach No. 35 durch eine Reihe, wenn man $a+x=z$ setzt.

Dann ist $x = z - a$

$$\partial x = \partial z$$

und man hat

$$\int x^m (a+x)^{\frac{n}{p}} \, \partial x = \int z^{\frac{n}{p}} (z-a)^m \, \partial z$$

Nun ist $(z-a)^m = z^m - m z^{m-1} a + m_2 z^{m-2} a^2 - \ldots\ldots$

$$\mp m z a^{m-1} \pm a^m$$

Hiernach jedes Glied mit $z^{\frac{n}{p}}$ multiplicirt und integrirt

$$\int z^{\frac{n}{p}} (z-a)^m \, \partial z = \int z^{\frac{n}{p}+m} \, \partial z - ma \int z^{\frac{n}{p}+m-1} \, \partial z + m_2 a^2 \int z^{\frac{n}{p}+m-2} \, \partial z - \ldots$$

$$\mp m a^{m-1} \int z^{\frac{n}{p}+1} \, \partial z \pm a^m \int z^{\frac{n}{p}} \, \partial z$$

Für z den Werth $(a+x)$ gesetzt:

$$\begin{aligned}
\int x^m (a+x)^{\frac{n}{p}} \, \partial x &= \int (a+x)^{\frac{n}{p}+m} \, \partial x - ma \int (a+x)^{\frac{n}{p}+m-1} \, \partial x \\
&\quad + m_2 a^2 \int (a+x)^{\frac{n}{p}+m-2} \, \partial x - \ldots\ldots \\
&\quad \mp m a^{m-1} \int (a+x)^{\frac{n}{p}+1} \, \partial x \pm a^m \int (a+x)^{\frac{n}{p}} \, \partial x
\end{aligned} \qquad (39)$$

Beispiel: Zu finden $\int x^2 (a+x)^{\frac{1}{2}} \, \partial x$ Es ist nach Formel 39:

$$\int x^2 (a+x)^{\frac{1}{2}}\,\partial x = \int (a+x)^{\frac{5}{2}}\,\partial x - 2a\int (a+x)^{\frac{3}{2}}\,\partial x + a^2\int (a+x)^{\frac{1}{2}}\,\partial x$$
$$= \tfrac{2}{7}(a+x)^{\frac{7}{2}} - \tfrac{4}{5}a(a+x)^{\frac{5}{2}} + \tfrac{2}{3}a^2(a+x)^{\frac{3}{2}}$$
$$= 2(a+x)^{\frac{3}{2}}\left[\tfrac{1}{7}\tfrac{6}{5}a^2 - \tfrac{8}{35}ax + \tfrac{1}{7}x^2\right]$$

38. Dasselbe $\int x^m (a+x)^{\frac{n}{p}}\,\partial x$ kann auch mit Hülfe der allgemeinen Reductionsformel gefunden werden.

Man erhält unmittelbar

$$\int x^m (a+x)^{\frac{n}{p}}\,\partial x = x^m \int (a+x)^{\frac{n}{p}}\,\partial x - \int\left[\frac{\partial x^m}{\partial x}\int (a+x)^{\frac{n}{p}}\,\partial x\right]\partial x$$
$$= x^m \frac{(a+x)^{\frac{n}{p}+1}}{\frac{n}{p}+1} - \frac{m}{\frac{n}{p}+1}\int x^{m-1}(a+x)^{\frac{n}{p}+1}\,\partial x \qquad (40)$$

Das letzte I wird wiederholt auf ein I zurückgeführt, in welchem der Exponent von x immer um 1 geringer und endlich $=0$ wird.

Beispiel (aus No. 37)

$\int y\,\partial x = \int x^2 (a+x^{\frac{1}{2}})\,\partial x$ zu finden. Es ist

$$\int y\,\partial x = \frac{x^2(a+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{2}{\frac{3}{2}}\int x(a+x)^{\frac{3}{2}}\,\partial x$$
$$= \tfrac{2}{3}x^2(a+x)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{4}{3}\int x(a+x)^{\frac{3}{2}}\,\partial x$$
$$\int x(a+x)^{\frac{3}{2}}\,\partial x = \tfrac{2}{5}x(a+x)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{4}{5}\int x^0 (x+x)^{\frac{3}{2}}\,\partial x$$

folglich summirt

$$\int x^2 (a+x)^{\frac{1}{2}}\,\partial x = \tfrac{2}{7}x^2(a+x)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{4}{3\,5}x(a+x)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1\,6}{3\,5}(a+x)^{\frac{3}{2}}$$
$$= 2(a+x)^{\frac{3}{2}}\left[\tfrac{1}{7}\tfrac{6}{5}a^2 - \tfrac{8}{35}ax + \tfrac{1}{7}x^2\right]$$

39. Die Aufgabe $\int y\,\partial x = \int x^{\frac{m}{q}}(a+x)^{\frac{n}{p}}\,\partial x$ ist in geschlossenem Ausdruck nicht aufzulösen. Denn man erhält durch die Reductionsformel

$$\int y\,\partial x = \frac{x^{\frac{m}{q}}(a+x)^{\frac{n}{p}+1}}{\frac{n}{p}+1} - \frac{m}{q\left(\frac{n}{p}+1\right)}\int x^{\frac{m}{q}-1}(a+x)^{\frac{n}{p}+1}$$

Das letzte I ist aber nur aufzulösen, wenn entweder $\frac{m}{q}-1$ oder $\frac{n}{p}+1$ eine ganze Zahl ist. D. h. wenn entweder $\frac{m}{q}$ oder $\frac{n}{p}$ eine ganze Zahl ist. Eben so führen Substitutionen auf nicht geschlossen zu lösende Hülfsintegrale.

40. No. 19 hat die Aufgabe

$\int x^m (a+x^n)^p\,\partial x$

wo m, n, p ganze Zahlen sind und es ist dort vorgeschrieben, die Potenz $(a+x^n)^p$ in eine Reihe zu entwickeln. Demnach kann man nur folgende Aufgaben lösen:

$$\int x^{\frac{m}{q}}(a+x^n)^p\,\partial x$$
$$\int x^m\left(a+x^{\frac{n}{r}}\right)^p\,\partial x$$
$$\int x^{\frac{m}{q}}\left(a+x^{\frac{n}{r}}\right)^p\,\partial x$$

Man erhält

$$\int x^{\frac{m}{q}}(a+x^n)^p\,\partial x = \int x^{\frac{m}{q}}\left[a^p + p_1 a^{p-1}x^n + p_2 a^{p-2}x^{2n} + \ldots . pax^{(p-1)n} + x^{pn}\right]$$

Nun wird jedes Glied der Reihe mit $x^{\frac{m}{q}}$ multiplicirt, jedes Product einzeln integrirt und sämmtliche Integrale addirt.

Es ist mithin

$$\int x^{\frac{m}{q}} (a + x^n)^p \, \partial x = a^p \int x^{\frac{m}{q}} \partial x + p_1 a^{p-1} \int x^{\frac{m}{q}+n} \partial x + p_2 a^{p-2} \int x^{\frac{m}{q}+2n} \partial x + \ldots\ldots \quad (41)$$

Man erhält ferner

$$\int x^m \left(a + x^{\frac{n}{r}}\right)^p \partial x = a^p \int x^m \partial x + p_1 a^{p-1} \int x^{m+\frac{n}{r}} \partial x + p_2 a^{p-2} \int x^{m+\frac{2n}{r}} \partial x + \ldots\ldots \quad (42)$$

Endlich

$$\int x^{\frac{m}{q}} \left(a + x^{\frac{n}{r}}\right)^p \partial x = a^p \int x^{\frac{m}{q}} \partial x + p_1 a^{p-1} \int x^{\frac{m}{q}+\frac{n}{r}} \partial x + p_2 a^{p-2} \int x^{\frac{m}{q}+\frac{2n}{r}} \partial x + \ldots\ldots \quad (43)$$

Beispiel zu Formel 41

Zu finden $\int y \, \partial x = \int x^{\frac{1}{2}} (a + x^2)^3$

Man erhält $x^{\frac{3}{2}} \left[\frac{2}{3}a^3 + \frac{6}{7}a^2 x^2 + \frac{3}{11}a x^4 + \frac{2}{15}x^6\right]$

Beispiel zu Formel 42:

Zu finden $\int y \, \partial x = \int x^2 \left(a + x^{\frac{1}{2}}\right)^3$

Man erhält $x^3 \left[\frac{1}{3}a^3 - \frac{3}{5}a^2 x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}a x^2 + \frac{2}{7}x^{\frac{3}{2}}\right]$

Beispiel zu No. 43

Zu finden $\int y \, \partial x = \int x^{\frac{1}{2}} \left(a + x^{\frac{1}{2}}\right)^3$

Man erhält $x^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{5}a^3 + a^2 x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}a x^2 + \frac{2}{7}x^{\frac{3}{2}}\right)$

41. Für den Fall, dafs auch p gebrochen ist, hat man für

$$\int y \, \partial x = \int x^m (a + x^n)^p \, \partial x$$

die Fälle zu bestimmen, in welchen das Integral geschlossen anzugeben ist.

Setze $a + x^n = s$ so ist $x = (s - a)^{\frac{1}{n}}$

und $\partial x = \frac{1}{n} (s - a)^{\frac{1}{n} - 1} \partial s$

Mithin ist

$$\int y \, \partial x = \int (s - a)^{\frac{m}{n}} s^p \cdot \frac{1}{n} (s - a)^{\frac{1}{n} - 1} \partial s$$

$$= \frac{1}{n} \int s^p (s - a)^{\frac{m+1}{n} - 1} \partial s$$

Nach der allgemeinen Reductionsformel ist nun

$$\int y \, \partial x = \frac{1}{n} \left[\frac{s^p (s - a)^{\frac{m+1}{n}}}{\frac{m+1}{n}} - \int p s^{p-1} \frac{(s - a)^{\frac{m+1}{n}}}{\frac{m+1}{n}} \partial s\right]$$

$$= \frac{s^p (s - a)^{\frac{m+1}{n}}}{m + 1} - \frac{p}{m + 1} \int s^{p-1} (s - a)^{\frac{m+1}{n}} \partial s \quad (44)$$

Nun ist aber das letzte I nur geschlossen zu bestimmen, wenn $\frac{m+1}{n}$ eine ganze positive Zahl ist, und dies ist die Bedingung, unter welcher das gegebene I geschlossen anzugeben ist.

Beispiel $\int x^{\frac{1}{2}}\left(a+x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$

Hier ist $z = a + x^{\frac{3}{2}}$

also $x = (z-a)^{\frac{2}{3}}$

und $\partial x = \frac{2}{3}(z-a)^{-\frac{1}{3}}\partial z$

ferner ist $m = \frac{1}{2}$; $n = \frac{3}{2}$; $p = \frac{1}{3}$

Man hat demnach nach Formel 44

$$\int y\,\partial x = \frac{z^{\frac{1}{3}}(z-a)^{\frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+1}\int z^{\frac{1}{3}-1}(z-a)\,\partial z$$

$$= \tfrac{2}{3}z^{\frac{1}{3}}(z-a) - \tfrac{2}{5}\left(\int z^{\frac{1}{3}}\cdot\partial z - a\int z^{-\frac{1}{3}}\partial z\right)$$

$$= \tfrac{2}{3}z^{\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{3}} - \tfrac{2}{5}az^{\frac{1}{3}} - \tfrac{1}{1}\tfrac{0}{5}z^{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{3}} + \tfrac{2}{5}az^{\frac{1}{3}}$$

$$= \tfrac{1}{1}\tfrac{6}{5}z^{\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{3}} = \tfrac{1}{1}\tfrac{6}{5}\left(a+x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{3}}$$

Alle Functionen derselben Form, in welchen $\frac{m+1}{n}$ eine ganze positive Zahl nicht ist, können nur durch Reihen näherungsweise aufgelöst werden.

42. Zu finden $\int y\,\partial x = \int x^m(a+x)^{-\frac{n}{q}}\partial x = \int \frac{x^m}{(a+x)^{\frac{n}{q}}}\partial x$

wenn m eine ganze positive Zahl ist.

Es gilt die Formel 17 wenn man für n den Werth $\frac{n}{q}$ setzt.

$$\int y\,\partial x = -\frac{x^m(a+x)^{-\left(\frac{n}{q}-1\right)}}{\frac{n}{q}-1} + \frac{m}{\frac{n}{q}-1}\int x^{m-1}(a+x)^{-\left(\frac{n}{q}-1\right)}\partial x \qquad (45)$$

Beispiele.

$$\int \frac{x\,\partial x}{\sqrt{(a+x)}} = \tfrac{2}{3}(x-2a)\sqrt{a+x}$$

$$\int \frac{x^2\,\partial x}{\sqrt{a+x}} = \tfrac{2}{1}\tfrac{}{5}(3x^2-4ax+8a^2)\sqrt{a+x}$$

43. Zu finden $\int y\,\partial x = \int x^{\frac{m}{p}}(a+x)^{-n}\partial x = \int \frac{x^{\frac{m}{p}}}{(a+x)^n}\partial x$

wenn n eine ganze positive Zahl ist.

Man erhält keine geeignete Reductionsformel, denn durch jede derselben kommt man auf ein letztes Glied von der Form $\int \frac{x^{\frac{m}{p}}}{a+x}$. Dies ist aber nur zu integriren, wenn $\frac{m}{p}$ eine ganze Zahl ist, wenn man dann $x^{\frac{m}{p}}$ durch $x+a$ dividirt und so viele Glieder entwickelt, bis man endlich eins ohne x erhält. Dieses Ergänzungsglied ist dann $\int \frac{\partial x}{a+x} = ln(a+x)$. Ist nun $\frac{m}{p}$ gebrochen, so ist eine Auflösung ganz unmöglich.

44. In allen bisherigen allgemeinen Aufgaben für die Integrirung des Products eines eingliedrigen Factors x^m mit einer zweigliedrigen Function $(a+x)$, $(a+x^2)$ als Wurzel einer Potenz ist die Bedingung für eine Auflösung in geschlossenem Integral erkannt, dafs der Exponent (p) der zweigliedrigen Function eine ganze positive Zahl sei; daher wenn der Exponent p gebrochen ist, die vorgenommenen Umformungen, durch welche eine andere zweigliedrige Function mit ganzem Exponenten erzeugt wird.

In No. 41 ist durch solche Umformung möglich gemacht, dafs die geschlossene

Auflösung geschieht, wenn $\frac{m+1}{n}$ eine positive ganze Zahl ist, wenn also $m = kn-1$ ist, wo k eine ganze positive Zahl bedeutet.

Ist durch Umformung ein ganzer Exponent der zweigliedrigen Function nicht herzustellen, so muſs, wenn der Exponent der eingliedrigen Function nicht schon einen ganzen Exponent hat, durch Einführung einer Hülfsfunction ein solcher hervorgebracht werden. Sodann wird durch Reduction dieser Exponent immer um 1 vermindert bis zu dem Werth = 0, wo dann das letzte I die einfachste Form $\int(a+x^n)^p$ erhält. Nur in den wenigsten Fällen ist es möglich, dieses letzte I geschlossen aufzulösen, und dann muſs eine näherungsweise Reihen-Integrirung geschehen, wovon der folgende Abschnitt handelt.

Die Exponenten m, n, p sind nun zum Theil entweder ganz, gebrochen, additiv oder subtractiv, eine Umformung jedesmal überlegen und ausführen ist zeitraubend; es ist daher nothwendig, für alle möglich vorkommenden Fälle Reductionsformeln zu haben, welche die Umformungen ersparen und diese sollen in Folgendem entwickelt werden:

45. Die Formel $\int x^m(a+bx^n)^p$ soll durch Reduction integrirt werden.

Die allgemeine Reductionsformel (2) ist

$$\int fx \cdot Fx\, \partial x = fx \int Fx\, \partial x - \int [f'x \int Fx\, \partial x]\, \partial x$$

Man setze $Fx = x^m$

$$fx = (a+bx^n)^p$$

so ist $$fx \int Fx\, \partial x = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1}$$

$$f'x = nbp(a+bx^n)^{p-1} \cdot x^{n-1}$$

und

$$f'x \int Fx\, \partial x = \frac{nbp}{m+1} x^{m+n}(a+bx^n)^{p-1}$$

Demnach ist

$$\int x^m(a+bx^n)^p\, \partial x = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1} - \frac{nbp}{m+1}\int x^{m+n}(a+bx^n)^{p-1}\, \partial x \qquad (A)$$

Es ist aber auch

$$\int x^m(a+bx^n)^p\, \partial x = \int x^m(a+bx^n)^{p-1}(a+bx^n)\, \partial x$$

$$= \int ax^m(a+bx^n)^{p-1}\, \partial x + \int bx^{m+n}(a+bx^n)^{p-1}\, \partial x \qquad (B)$$

Setzt man die beiden Werthe A und B einander gleich, schafft das subtractive Glied auf die andere Seite und reducirt, so hat man

$$\int ax^m(a+bx^n)^{p-1}\, \partial x + \left(\frac{nbp}{m+1}+b\right)\int x^{m+n}(a+bx^n)^{p-1}\, \partial x = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1}$$

Oder das erste Glied links entwickelt, mit a dividirt und p für $p-1$ geschrieben

$$\int x^m(a+bx^n)^p\, \partial x = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{a(m+1)} - \frac{b}{a}\cdot\frac{np+n+m+1}{m+1}\int x^{m+n}(a+bx^n)^p\, \partial x \qquad (46)$$

Diese Formel ist als Reductionsformel brauchbar, wenn m und n entgegengesetzte Vorzeichen haben, weil dann $m+n<m$, das zweite I also einfacher wird.

Beispiel. Zu integriren

$$\int y\, \partial x = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(a+bx^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\, \partial x$$

Nach Formel 46 hat man

$$\int y\, \partial x = -\frac{2}{a}x^{-\frac{1}{2}}\left(a+bx^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{3b}{4a}\int x^{-1}\left(a+bx^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\, \partial x$$

Das letzte $I = \int \frac{\left(a+bx^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{x}\, \partial x$ läſst nur eine unvollständige Entwickelung in Reihen zu.

46. Sind m und n von einerlei Vorzeichen, so ist $m+n>m$ und die Formel führt auf eine zusammengesetztere Function als die gegebene ist. Man erhält aber eine geeignete Reductionsformel, wenn man in die Formel 46 $m-n$ für n schreibt und das zweite I entwickelt; dann hat man

$$\int x^m(a+bx^n)^p\, \partial x = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(np+m+1)b} - \frac{(m-n+1)a}{(np+m+1)b}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\, \partial x \qquad (47)$$

Beispiel. Zu integriren

$$\int y\,\partial x = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(a - bx^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int y\,\partial x = -\frac{8}{7\cdot b}\,x^0\left(a + bx^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} - 0 = -\frac{8}{7\cdot b}\left(a + bx^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

47. Die gegebene Function kann auch dadurch vereinfacht werden, dafs man den absoluten Zahlenwerth von p vermindert, so dafs dem subtractivem p etwas additives und dem additiven p etwas subtractives hinzugesetzt wird.

Setzt man nun in Formel 47 statt p den Werth $p-1$ und statt m den Werth $m+n$, so erhält man

$$\int x^{m+n}\left(a + bx^n\right)^{p-1}\partial x = \frac{x^{m+1}\left(a + bx^n\right)^p}{(np + m + 1)\,b} + \frac{(m+1)\,a}{(np + m + 1)\,b}\int x^m\left(a + bx^n\right)^{p-1}\partial x$$

Setzt man diesen Werth von $\int x^{m+n}\left(a + bx^n\right)^{p-1}\partial x$ in die Formel 45, A statt des letzten Integrals, so erhält man die Reductionsformel

$$\int x^m\left(a + bx^n\right)^p\partial x = \frac{x^{m+1}\left(a + bx^n\right)^p}{np + m + 1} + \frac{npa}{np + m + 1}\int x^m\left(a + bx^n\right)^{p-1}\partial x \qquad (48)$$

Entwickelt man aus dieser dritten Reductionsformel das Integral des letzten Gliedes und schreibt dann $p+1$ statt p, so erhält man die 4te und letzte Reductionsformel

$$\int x^m\left(a + bx^n\right)^p\partial x = -\frac{x^{m+1}\left(a + bx^n\right)^{p+1}}{n\,(p+1)\,a} + \frac{np + n + m + 1}{n\,(p+1)\,a}\int x^m\left(a + bx^n\right)^{p+1}\partial x \qquad (49)$$

Diese Formel wird angewendet, wenn p subtractiv ist.

48. Die letzten 4 Hauptreductionsformeln (46 bis 49) auf eine gegebene Function nach einander angewendet, führen die Integrirung auf das I einer Function zurück, bei welcher der gebrochene Exponent des Binoms ein ächter Bruch ist und m nach einander immer um n vermindert seinen einfachsten Werth erhält. Ist man auf diesem Wege zu der einfachsten Function gelangt, so dafs die fortgesetzte Anwendung der Reductionsformeln diese wieder zusammengesetzter machen würde, so mufs zur unmittelbaren Integrirung der in der einfachsten Form erhaltenen Function geschritten werden.

Beispiel $\int y\,\partial x = \int x^{\frac{1}{2}}\left(a + x^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\partial x$

Hier ist zuerst Formel 47 anzuwenden, und man erhält

$$\int y\,\partial x = -\frac{12}{5}\,x^{\frac{1}{6}}\left(a + x^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} + 2a\int x^{-\frac{1}{6}}\left(a + x^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\partial x$$

Da nun in dem zweiten I x einen ächten Bruch zum Exponenten hat, so mufs zur Reduction von p mit Hülfe der Formel 49 geschritten werden und man hat

$$\int x^{-\frac{1}{6}}\left(a + x^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\partial x = +\frac{4}{5a}\left[x^{\frac{1}{6}}\left(a + x^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} + \int x^{-\frac{1}{6}}\left(a + x^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\partial x\right]$$

Wendet man nochmals Formel 49 an, so erhält man

$$\int x^{-\frac{1}{6}}\left(a + x^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{12}{5a}\,x^{\frac{1}{6}}\left(a + x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} - 3a\int x^{-\frac{1}{6}}\left(a + x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\partial x$$

Diese Form ist für das letzte I die einfachste. Entwickelt man nun das Binom, multiplicirt jedes einzelne Glied mit $x^{-\frac{1}{6}}$, so erhält man eine nach x steigende Reihe; schreibt man $x^{\frac{1}{3}}$ als erstes Glied, so erhält man eine nach a steigende Reihe. Das I wird aber um so genauer und man bedarf um so weniger Glieder, je convergenter die Reihe wird. Deshalb schreibe man

$$a^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{a} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \text{ für } \left(a + x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

entwickele binomisch und multiplicire jedes einzelne Glied mit $x^{-\frac{1}{6}}$, so hat man

$$3a\int x^{-\frac{1}{3}}(a+x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}\,\partial x = 3a^{\frac{1}{3}}\int x^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{a}+1\right)^{\frac{1}{2}}\partial x =$$

$$3ax^{\frac{1}{3}} + \frac{3a^2}{4}x^{-1\frac{1}{3}} - \frac{9}{32}a^3x^{-1\frac{1}{3}} + \frac{7}{128}a^4x^{-1\frac{1}{3}} -$$

$$3ax^{\frac{1}{3}} + 3a^2\cdot\tfrac{1}{4}x^{-1\frac{1}{3}} - \frac{3a^3}{4^2}\cdot\frac{1\cdot3}{1\cdot2}x^{-1\frac{1}{3}} + \frac{3a^4}{4^3}\cdot\frac{1\cdot3\cdot7}{1\cdot2\cdot3}x^{-1\frac{1}{3}}$$

Das $n$te Glied ist =

$$\pm\frac{3a^n}{4^{n-1}}\cdot\frac{1\cdot3\cdot7\cdot11\ldots.[3+(n-2)4]}{1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots.\quad n}x^{-\frac{17+(n-2)20}{12}}$$

Die Reihe ist also nach x genommen ziemlich bedeutend convergent. Man hat demnach

$$\int y\,\partial x = -\tfrac{3}{8}x^{\frac{1}{3}}\left[(a+x^{\frac{1}{3}})^{-\frac{1}{2}} + \frac{24}{5a}(a+x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}\right] - \tfrac{1}{5}\int \text{der Reihe.}$$

Setzt man $(a+x^{\frac{1}{3}}) = z$, so ist die Summe der beiden vor dem letzten I sten henden in Klammern befindlichen Glieder

$$= z^{-\frac{1}{2}} + \frac{24}{5a}z^{\frac{1}{2}} = z^{-\frac{1}{2}}\left[1+\frac{24}{5a}z\right] = (a+x^{\frac{1}{3}})^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{29a+24x^{\frac{1}{3}}}{5a}$$

und

$$\int y\,\partial x = -\frac{4x^{\frac{1}{3}}}{25\cdot a}(29a+24x^{\frac{1}{3}})(a+x^{\frac{1}{3}})^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{8}{5}\int \text{der Reihe.}$$

49. Wie das letzte Beispiel, so sind die wenigsten irrationalen Functionen dieser und anderer Formen in geschlossenen Integralen zu erhalten. In den folgenden Aufgaben sollen diejenigen Fälle betrachtet werden, wo eine geschlossene Integrirung möglich ist. Diese Fälle beschränken sich auf den Werth $n=2$.

50. Zu finden

$$\int y\,\partial x = \int\frac{x\,\partial x}{\sqrt{a+bx^2}}$$

Man setze $a+bx^2 = z$

so ist $2bx\,\partial x = \partial z$

hieraus $x = \dfrac{\partial z}{2b\,\partial x}$

also

$$\int y\,\partial x = \int\frac{\frac{1}{2b}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\partial x}{\sqrt{z}} = \frac{1}{2b}\int z^{-\frac{1}{2}}\partial z = \frac{1}{2b}\cdot 2z^{\frac{1}{2}}$$

also

$$\int\frac{x\,\partial x}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{b}\sqrt{a+bx^2} \qquad (50)$$

Man kann auch einfacher setzen:

$$\int\frac{x\,\partial x}{\sqrt{a+bx^2}} = \int x(a+bx^2)^{-\frac{1}{2}}\partial x = \frac{1}{2b}\int(a+bx^2)^{-\frac{1}{2}}2bx\cdot\partial x$$

$$= \frac{1}{2b}\int(a+bx^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\partial(a+bx^2)\,\partial x = \frac{1}{2b}\cdot\frac{(a+bx^2)^{+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{b}\sqrt{a+bx^2}$$

51. Zu finden $\int y\,\partial x = \int\dfrac{\partial x}{\sqrt{a+bx^2}}$

Diese Function ist nicht anders zu integriren, als dafs sie in eine rationale Function verwandelt wird. Schreib deshalb

$$\sqrt{a+bx^2} = \sqrt{b}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}+x^2}$$

und setze

$$\sqrt{\frac{a}{b}+x^2} = z+x$$

so wird hieraus

$$\frac{a}{b} = z^2+2xz$$

woraus

$$x = \frac{\frac{a}{b}-z^2}{2z}$$

hieraus $\sqrt{\frac{a}{b}+x^2}=z+\frac{\frac{a}{b}-z^2}{2z}=\frac{z^2+\frac{a}{b}}{2z}$

und $\partial x=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2z^2-\left(\frac{a}{b}-z^2\right)}{z^2}=-\frac{\frac{a}{b}+z^2}{2z^2}\partial z$

Folglich diese Werthe in die gegebene Formel gesetzt:

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx^2}}=\frac{1}{\sqrt{b}}\int\left(-\frac{\frac{a}{b}+z^2}{2z^2}\partial z\right)\cdot\frac{1}{\left(\frac{z^2+\frac{a}{b}}{2z}\right)}=-\frac{1}{\sqrt{b}}\int\frac{\partial z}{z}$$

$$=-\frac{ln\,z}{\sqrt{b}}=-\frac{1}{\sqrt{b}}ln\left(\sqrt{\frac{a}{b}+x^2}-x\right)$$

oder

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx^2}}=-\frac{1}{\sqrt{b}}ln\frac{\sqrt{a+bx^2}-x\sqrt{b}}{\sqrt{b}}=-\frac{1}{\sqrt{b}}\left[ln\left(\sqrt{a+bx^2}-x\sqrt{b}\right)+ln\sqrt{b}\right]+C$$

Man kann das letzte constante Glied $ln\sqrt{b}$ mit zur Constante zählen; dann hat man auch

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx^2}}=-\frac{1}{\sqrt{b}}ln\left(\sqrt{a+bx^2}-x\sqrt{b}\right)+C \qquad (51)$$

52. Um die gegebene Function $\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx^2}}$ rational zu machen kann man auch $\sqrt{\frac{a}{b}+x^2}=\sqrt{a^2+x^2}=a+xz$ setzen.

Durch Quadrirung entsteht

$$x^2=2axz+x^2z^2$$

woraus $x=2az+xz^2$

und $x=\frac{2az}{1-z^2}$

Mithin

$$\sqrt{a^2+x^2}=a+\frac{2az^2}{1-z^2}=a\frac{1+z^2}{1-z^2}$$

und

$$\partial x=2a\frac{(1-z^2)+2z^2}{(1-z^2)^2}\partial z=2a\frac{1+z^2}{(1-z^2)^2}\partial z$$

Hiernach

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx^2}}=\frac{1}{\sqrt{b}}\int\frac{\partial x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{b}}\int2a\frac{1+z^2}{(1-z^2)^2}\partial z\cdot\frac{1}{a\left(\frac{1+z^2}{1-z^2}\right)}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{b}}\int\frac{\partial z}{1-z^2}=\frac{2}{\sqrt{b}}\int\frac{\partial z}{(1+z)(1-z)}=\frac{2}{\sqrt{b}}\int\left(\frac{\partial z}{2(1+z)}+\frac{\partial z}{2(1-z)}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{b}}\left[ln(1+z)-ln(1-z)\right]=\frac{1}{\sqrt{b}}ln\frac{1+z}{1-z}$$

Nun ist $z=\frac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{x}$

Diesen Werth in die letzte Formel gesetzt gibt

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx^2}}=\frac{1}{\sqrt{b}}ln\frac{1+\frac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{x}}{1-\frac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{x}}=\frac{1}{\sqrt{b}}ln\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}-a}{x-\sqrt{a^2+x^2}+a}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{b}}ln\frac{x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2}-\sqrt{a}}{x\sqrt{b}-\sqrt{a+bx^2}+\sqrt{a}}+C \qquad (52)$$

53. Diese Formel stimmt mit der Formel 51 nicht überein. Denn multiplicirt man Zähler und Nenner des Logarithmus mit dem Zähler, so erhält man

$$\frac{(x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2}-\sqrt{a})^2}{(x\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+bx^2}-\sqrt{a})^2}=\frac{(x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2}-\sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}(\sqrt{a+bx^2}-\sqrt{a})}$$

iplicirt man in dem letzten Quotient Zähler und Nenner mit $(\sqrt{a+bx^2}+\sqrt{a})$, man reducirt

$$\frac{bx^2\sqrt{a+bx^2}+bx^2\sqrt{b}}{bx^2\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a+bx^2}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$$

nach ist

$$\frac{}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{b}}ln\frac{\sqrt{a+bx^2}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{b}}\left[ln\left(\sqrt{a+bx^2}+x\sqrt{b}\right)-ln\sqrt{a}\right] \quad (53)$$

aber No. 3, pag. 293 nachgewie- wenn von einer und derselben zwei oder mehrere von einan- chiedene Integrale aufgefunden so können dieselben von einander abgezogen immer nur constante Reste geben. Nun ist das erste I (51)

$$\int y\,\partial x=-\frac{1}{\sqrt{b}}\left[ln\left(\sqrt{a+bx^2}-x\sqrt{b}\right)\right]+C$$

oder die Formel vor dem I. 51:

$$\int y\,\partial x=-\frac{1}{\sqrt{b}}\left[ln\left(\sqrt{a+bx^2}-x\sqrt{b}\right)+ln\sqrt{b}\right]+C$$

zweite I No. 52

$$\int y\,\partial x=\frac{1}{\sqrt{b}}\left[ln\left(\sqrt{a+bx^2}+x\sqrt{b}\right)-ln\sqrt{a}\right]+C$$

ıin muſs die Differenz

$$ln\left(\sqrt{a+bx^2}+x\sqrt{b}\right)+ln\left(\sqrt{a+bx^2}-x\sqrt{b}\right)$$

stante Gröſse liefern. Nun ist aber die Summe der Integrale = dem I des

$$=ln\left(\sqrt{a+bx^2}+x\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a+bx^2}-x\sqrt{b}\right)=ln\,a$$

sind beide I zwar sehr verschie- r beide richtig.

ı finden $\int y\,\partial x=\int\frac{\partial x}{\sqrt{a-bx^2}}$

ırt man, um die Function ratio- machen, nach No. 52, so wird

$-bx^2$ geschrieben $\sqrt{b}\sqrt{\frac{a}{b}-x^2}$

$^2-x^2=\sqrt{b}\,(\alpha-xz)$ u. s. w. und ın, wie No. 52 bis zum Schluſs ıq, entwickeln. Da diese Arbeit also wenig Mühe macht, so soll hier ein anderes Verfahren gewählt werden.

Man setze $\sqrt{\alpha^2-x^2}=z\,(\alpha-x)$

wo $\alpha=\sqrt{\frac{a}{b}}$

Beiderseits quadrirt und mit $(\alpha-x)$ dividirt, ergibt

$$\alpha+x=z^2(\alpha-x)$$

woraus $$x=\frac{\alpha(z^2-1)}{z^2+1}$$

$$\sqrt{\alpha^2-x^2}=z\left(\alpha-\frac{\alpha(z^2-1)}{z^2+1}\right)=\frac{2\alpha z}{z^2+1}$$

$$\partial x=\frac{\alpha\cdot(z^2+1)\,2z-(z^2-1)\,2z}{(z^2+1)^2}\partial z=\frac{4\alpha z}{(z^2+1)^2}\partial z$$

hin $$\int\frac{\partial x}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}=\int\frac{4\alpha z\,\partial z}{(z^2+1)^2}\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\left(\alpha-\frac{\alpha(z^2-1)}{z^2+1}\right)}=2\int\frac{\partial z}{z^2+1}$$

hin nach Differenzialformel No. 120

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}=2\,arc\,(tg=z)=2\,arc\left(tg=\sqrt{\frac{\alpha+x}{\alpha-x}}\right)$$

$$\int y\,\partial x=\int\frac{\partial x}{\sqrt{a-bx^2}}=\frac{2}{\sqrt{b}}Arc\left(tg=\sqrt{\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}}\right) \quad (54)$$

55. Man kommt auf eine andere Formel, wenn man für $\sqrt{a^2-x^2}$ den Werth $a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$ setzt. Dann ist

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a-bx^2}}=\frac{1}{a\sqrt{b}}\cdot\int\frac{\partial x}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot\int\frac{\partial\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

Nun ist nach der Differenzialformel 118

$$\frac{\partial\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=Arc\,sin\left(\frac{x}{a}\right)$$

Mithin $\int\frac{\partial x}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{b}}Arc\,sin\frac{x}{a}$

und für a den Werth $\sqrt{\frac{a}{b}}$ gesetzt

$$\int\frac{\partial}{a-bx^2}=\frac{1}{\sqrt{b}}Arc\left(sin=x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\quad(55)$$

Auch diese Formel ist von der 54 verschieden, jedoch sind beide wieder nur um eine Constante unterschieden. Nämlich

$$\frac{2}{\sqrt{b}}Arc\,tg\sqrt{\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}}-\frac{1}{\sqrt{b}}Arc\,sin\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)=C$$

oder $$2\,Arc\,tg\sqrt{\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}}-Arc\,sin\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)=C$$

Setzt man

$$Arc\,tg\sqrt{\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}}=\varphi,$$

so ist $tg\,\varphi=\sqrt{\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}}$

Zu dem gegebenen doppelten Bogen 2φ gehört die Tangente von 2φ, und es ist

$$tg\,2\varphi=\frac{2\,tg\,\varphi}{1-tg^2\varphi}=\frac{2\sqrt{\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}}}{1-\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}}$$

Und wenn man Zähler und Nenner des letzten Bruchs mit $\sqrt{a}-x\sqrt{b}$ multiplicirt und reducirt

$$tg\,2\varphi=\frac{2\sqrt{a-bx^2}}{-2x\sqrt{b}}=-\frac{\sqrt{a-bx^2}}{x\sqrt{b}}$$

Setzt man nun $Arc\,sin\,x\sqrt{\frac{b}{a}}=\psi$

so ist $sin\,\psi=x\sqrt{\frac{b}{a}}$

Hieraus folgt

$$tg\,\psi=\frac{sin\,\psi}{\sqrt{1-sin^2\psi}}=\frac{x\sqrt{\frac{b}{a}}}{\sqrt{1-x^2\frac{b}{a}}}=\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a-bx^2}}$$

Also $cot\,\psi=\frac{\sqrt{a-bx^2}}{x\sqrt{b}}$

$tg\left[\frac{\pi}{2}-(\pi-\psi)\right]=tg\left(\psi-\frac{\pi}{2}\right)=tg\,2\varphi$

Mithin ist $-cot\,\psi=tg\,2\varphi$

Es ist mithin $\psi-\frac{\pi}{2}=2\varphi$

oder $cot\,(\pi-\psi)=tg\,2\varphi$

oder

oder $\psi-2\varphi=\frac{\pi}{2}$

d. h. $$Arc\,sin\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)-2\,Arc\,tg\sqrt{\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}}=\tfrac{1}{2}\pi$$

56. Zu finden $\int y\,\partial x=\int\frac{\partial x}{\sqrt{-a+bx^2}}$ Setze wieder $\frac{a}{b}=a^2$

at man

$$\int y\,\partial x = \frac{1}{\sqrt{b}}\int \frac{\partial x}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

etze ferner

$$\sqrt{x^2-a^2} = x - z$$

$$\sqrt{x^2-a^2} = (x-a)\,z$$

ir die erste Annahme erhält man

$$-a^2 = -2xz + z^2$$

woraus $x = \frac{z^2+a^2}{2z}$

$$\sqrt{x^2-a^2} = \frac{z^2+a^2}{2z} - z = \frac{a^2-z^2}{2z}$$

und

$$\partial x = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{2z^2-(z^2+a^2)}{z^2} = \frac{z^2-a^2}{2z^2}\,\partial z$$

Hieraus hat man

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{z^2-a^2}{2z^2}\,\partial z \cdot \frac{2z}{a^2-z^2} = -\int \frac{\partial z}{z} = -ln\,z$$

$$\frac{\partial x}{\sqrt{-a+bx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{b}}\,ln\,\frac{x\sqrt{b}-\sqrt{-a+bx^2}}{\sqrt{b}} = -\frac{1}{\sqrt{b}}\left[ln\left(x\sqrt{b}-\sqrt{-a+bx^2}\right)-ln\sqrt{b}\right] \quad (56)$$

las letzte Glied $ln\sqrt{b}$ auch zur allgemeinen Constante gezogen und fortgelas- werden kann.

Für die zweite Annahme

$$\sqrt{x^2-a^2} = (x-a)\,z$$

hieht die Herleitung wie No. 54 und man erhält

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{-a+bx^2}} = \frac{2}{\sqrt{b}}\,ln\left(\sqrt{x+\sqrt{\frac{a}{b}}}+\sqrt{x-\sqrt{\frac{a}{b}}}\right) \quad (57)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{b}}\,ln\left(\sqrt{x\sqrt{b}+\sqrt{a}}+\sqrt{x\sqrt{b}-\sqrt{a}}\right) \quad (58)$$

Beide Integrale 56 und 58 sind wieder von einander verschieden. Dafs deren renz constant ist, beweifst sich wie folgt:

Es ist die Differenz beider Integrale =

$$\frac{1}{\sqrt{b}}\left[ln\left(x\sqrt{b}-\sqrt{-a+bx^2}\right)-ln\sqrt{b}+2\,ln\left(\sqrt{x\sqrt{b}+\sqrt{a}}+\sqrt{x\sqrt{b}-\sqrt{a}}\right)\right]$$

$\sqrt{b}$ als Constante und den Factor $\frac{1}{\sqrt{b}}$ als constant fortgelassen, ist

$$ln\left(x\sqrt{b}-\sqrt{-a+bx^2}\right)+ln\left(\sqrt{x\sqrt{b}+\sqrt{a}}+\sqrt{x\sqrt{b}-\sqrt{a}}\right)^2$$

$$ln\left(x\sqrt{b}-\sqrt{-a+bx^2}\right)+ln\,2\left(x\sqrt{b}+\sqrt{-a+bx^2}\right)$$

$$ln\,2\left[x\sqrt{b}-\sqrt{-a+bx^2}\right]\left[x\sqrt{b}+\sqrt{-a+bx^2}\right] = ln\,2\,a$$

No. 3 verlangt.

57. Zu finden $\int y\,\partial x = \int \frac{\partial x}{\sqrt{-a-bx^2}}$

Schreibt man $\int y\,\partial x = \int \frac{\partial x}{\sqrt{-1}\cdot\sqrt{a+bx^2}} = -\sqrt{-1}\int \frac{\partial x}{\sqrt{a+bx^2}}$ (59)

it man das I nach No. 51, 52 und 53 (Formel 51, 52 und 53) wenn man jedes r I mit $-\sqrt{-1}$ multiplicirt.

58. Zu finden $\int y\,\partial x = \int \frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$

(Vergleiche No. 23)

Setzt man $x = z - \frac{b}{2c}$ so erhält man

$$a+bx+cx^2 = a+b\left(z-\frac{b}{2c}\right)+c\left(z-\frac{b}{2c}\right)^2 = a-\frac{b^2}{4c}+cz^2$$

Schreibt man daher in die Formeln 51 bis 59 für a den Werth $\left(a-\frac{b^2}{4c}\right)$ und für b den Werth c, so erhält man, da $\partial x = \partial z$ ist, die Integrale für die verlangte Function.

Aus Formel 51 hat man

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt{a-\frac{b^2}{4c}+cz^2}} = -\frac{1}{\sqrt{c}} ln\left[\sqrt{a-\frac{b^2}{4c}+cz^2} - z\sqrt{c}\right]$$

Für z den Werth $x+\frac{b}{2c}$ und für ∂z den Werth ∂x gesetzt

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{c}} ln\left[\sqrt{a+bx+cx^2} - \frac{b+2cx}{2\sqrt{c}}\right] \quad (60)$$

Aus Formel 52 hat man

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} ln \frac{b+2cx-\sqrt{4ac-b^2}+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}}{b+2cx+\sqrt{4ac-b^2}-2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}} \quad (61)$$

Aus Formel 53 hat man

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} ln\left[\sqrt{a+bx+cx^2} + \frac{b+2cx}{2\sqrt{c}}\right] \quad (62)$$

Aus Formel 54 hat man

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{2}{\sqrt{c}} Arc\,tg \frac{\sqrt{4ac-b^2}+b+2cx}{\sqrt{4ac-b^2}-b-2cx} \quad (63)$$

Aus Formel 55 hat man

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} Arc\,sin \frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}} \quad (64)$$

Aus Formel 56 hat man

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt{-\left(a+\frac{b^2}{4c}\right)+cz^2}} = -\frac{1}{\sqrt{c}} ln\left(z\sqrt{c} - \sqrt{-\left(a+\frac{b^2}{4c}\right)+cz^2}\right)$$

(indem man hier für a den Werth $a+\frac{b^2}{4c}$ setzen muſs)

Hieraus

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{-a+bx+cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{c}} ln\left(\frac{b+2cx}{2c} - \sqrt{-a+bx+cx^2}\right) \quad (65)$$

Aus Formel 56 und 57 hat man

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{-a+bx+cx^2}} = \frac{2}{\sqrt{c}} ln\left[\sqrt{\frac{2cx+b+\sqrt{b^2+4ac}}{2\sqrt{c}}} + \sqrt{\frac{2cx+b-\sqrt{b^2+4ac}}{2\sqrt{c}}}\right] \quad (66)$$

Aus Formel 59 hat man

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{-a-bx-cx^2}} = -\sqrt{-1}\int \frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

Für das letzte I wird Formel 61 oder 62 gesetzt.

59. Zu finden $\int \sqrt{a+bx^2}\,\partial x$

Setze in die allgemeine Reductionsformel 2

$\int fx\,Fx = fx \int Fx\,\partial x - \int (f'x \cdot \int Fx\,\partial x)\,\partial x$

$fx = \sqrt{a+bx^2}$

$Fx = \partial x$

so ist

$\int Fx\,\partial x = x$

$f'x = \frac{bx\,\partial x}{\sqrt{a+bx^2}}$

Mithin

$$\int\sqrt{a+bx^2}\cdot\partial x=\sqrt{a+bx^2}\cdot x-\int\left(\frac{bx}{\sqrt{a+bx^2}}\right)\cdot x\,\partial x$$
$$=x\sqrt{a+bx^2}-\int\frac{a+bx^2-a}{\sqrt{a+bx^2}}\partial x$$
$$=x\sqrt{a+bx^2}-\int\sqrt{a+bx^2}\,\partial x+\int\frac{a\,\partial x}{\sqrt{a+bx^2}}$$

eraus

$$2\int\sqrt{a+bx^2}\,\partial x=x\sqrt{a+bx^2}+a\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx^2}}$$

oraus

$$\int\sqrt{a+bx^2}\,\partial x=\frac{x}{2}\sqrt{a+bx^2}+\frac{a}{2}\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx^2}}$$

Statt des letzten I die Formel 51 oder 52 oder 53 gesetzt: gibt

$$\int\sqrt{a+bx^2}\,\partial x=\tfrac{1}{2}x\sqrt{a+bx^2}-\frac{a}{2\sqrt{b}}ln\left[\sqrt{a+bx^2}-x\sqrt{b}\right] \quad (67)$$

der
$$=\tfrac{1}{2}x\sqrt{a+bx^2}-\frac{a}{2\sqrt{b}}ln\frac{x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2}-\sqrt{a}}{x\sqrt{b}-\sqrt{a+bx^2}+\sqrt{a}} \quad (68)$$

der
$$=\tfrac{1}{2}x\sqrt{a+bx^2}+\frac{a}{2\sqrt{b}}ln\left(\sqrt{a+bx^2}+x\sqrt{b}\right) \quad (69)$$

60. Zu finden $\int\sqrt{a-bx^2}\,\partial x$

Setze hier $fx=\sqrt{a-bx^2}$; $Fx=\partial x$

also
$$f'x=-\frac{bx\,\partial x}{\sqrt{a-bx^2}};\ \int Fx\,\partial x=x$$

so hat man

$$\int\sqrt{a-bx^2}=\sqrt{a-bx^2}\cdot x+\int\frac{bx^2\,\partial x}{\sqrt{a-bx^2}}$$
$$=x\sqrt{a-bx^2}-\int\frac{a-bx^2}{\sqrt{a-bx^2}}\partial x+a\int\frac{\partial x}{\sqrt{a-bx^2}}$$
$$=x\sqrt{a-bx^2}-\int\sqrt{a-bx^2}\,\partial x+a\int\frac{\partial x}{\sqrt{a-bx^2}}$$

also
$$\int\sqrt{a-bx^2}=\tfrac{1}{2}x\sqrt{a-bx^2}+\frac{a}{2}\int\frac{\partial x}{\sqrt{a-bx^2}} \quad (70)$$

Für das letzte I Formel 54 gesetzt, gibt

$$\int\sqrt{a-bx^2}=\tfrac{1}{2}x\sqrt{a-bx^2}+\frac{a}{\sqrt{b}}Arc\,tg\sqrt{\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}} \quad (71\,A)$$

Für das letzte I Formel 55 gesetzt, gibt

$$\int\sqrt{a-bx^2}=\tfrac{1}{2}x\sqrt{a-bx^2}+\frac{a}{2\sqrt{b}}Arc\,sin\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right) \quad (71\,B)$$

61. Zu finden $\int y\,\partial x=\int\sqrt{a+bx+cx^2}\,\partial x$

Schreibe, wie in No. 58, $x=z-\frac{b}{2c}$, so erhält man

$$\int y\,\partial x=\sqrt{\left(a-\frac{b^2}{4c}\right)+cz^2}$$

Setzt man nun $a-\frac{b^2}{4c}$ für a in No. 59, so erhält man

$$\int y\,\partial x=\frac{(b+2cx)\sqrt{a+bx+cx^2}}{4c}+\frac{4ac-b^2}{8c}\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \quad (72)$$

womit das I auf Formel 61 und 62 zurückgeführt ist.

62. Zu finden $\int y\,\partial x = \int \sqrt{a+bx-cx^2}\,\partial x$

Verfahre hier wie ad 61, setze aber, weil c subtractiv ist, $a+\frac{b^2}{4c}$ für a und $x=z+\frac{b}{2c}$, so hat man nach Formel 70

$$\int \sqrt{\left(a+\frac{b^2}{4c}\right)-cz^2}\,\partial z = \tfrac{1}{2}z\sqrt{\left(a+\frac{b^2}{4c}\right)-cz^2} + \tfrac{1}{2}\left(a+\frac{b^2}{4c}\right)\int \frac{\partial z}{\sqrt{\left(a+\frac{b^2}{4c}\right)-cz^2}}$$

also

$$\int \sqrt{a+bx-cx^2}\,\partial x = \frac{1}{4c}\left[(2cx-b)\sqrt{a+bx-cx^2} + \tfrac{1}{2}(4ac+b^2)\int \frac{\partial x}{\sqrt{a+bx-cx^2}}\right] \quad (73$$

C. Von der Integrirung in Reihen.

63. Eine gegebene zu integrirende Function ist oft von der Beschaffenheit, dafs die bisher aufgefundenen Regeln des Integrirens nicht im Stande sind, das I vollständig oder geschlossen darzustellen. Vornehmlich ist dies der Fall bei den zusammengesetzten irrationalen Functionen, und aufser den im vorigen Abschnitt aufgeführten Fällen gibt es nur noch wenige, die wenn sie sich nicht auf jene Fälle zurückführen lassen, eine vollständige Integrirung gestatten. In solchen Fällen mufs man sich mit einem I begnügen, welches dem gesuchten I an Werth möglichst nahe kommt. (Vergl. No. 49 in Beziehung auf die in No. 48 geschehene Reihen-Integration.)

Um solche Näherungs-I. zu erhalten, entwickelt man die gegebene Function, oder wie es in No. 37 geschehen ist, den schwierigen Factor derselben in eine Reihe, die nach Potenzen der Urveränderlichen fortschreitet, dergestalt, dafs jedes einzelne Glied der Reihe sich vollständig integriren läfst. Integrirt man dann diese Reihe, indem man jedes einzelne Glied integrirt, und die Glieder des I convergiren, so hat man in der algebraischen Summe dieser Glieder das I um so an nähernder, je mehr Glieder der Reih man nimmt. Das Verfahren, eine Func tion auf diese Weise zu integriren heifst Integrirung durch Reihen, Rei hen-Integration.

Dagegen kommen Fälle vor, wo e nicht gelingen will, die I.-reihe conver gent zu machen (vergl No. 44), und e ist ein Mittel erforderlich, um auch i solchem Fall das I näherungsweise da zustellen. Dieses Mittel besteht dari dafs die Function zwischen 2 Gren zen für bestimmte Werthe der Ur veränderlichen integrirt wird.

64. Setzt man nämlich in ein Integra statt der Urveränderlichen 2 auf einande folgende bestimmte Werthe derselbe und zieht die zugehörigen Werthe der von einander ab, so nennt man den Un terschied beider Werthe ein bestimm tes oder begrenztes Integral ode einen Integralwerth.

Die beiden bestimmten Werthe de Urveränderlichen heifsen die Grenzen de I, und die Forderung für die Bildun eines solchen I drückt man aus: Es sol das I zwischen zwei bestimmte Grenzen genommen werden.

Z. B. Es sei zu finden $\int \left(a+\frac{b}{x^m}\right)^n \partial x$ so hat man nach dem binomischen Satz:

$$\int \left(a+\frac{b}{x^m}\right)^n \partial x = \int a^n\,\partial x + na^{n-1}b\int \frac{\partial x}{x^m} + n_2 a^{n-2}b^2 \int \frac{\partial x}{x^{2m}} + n_3 a^{n-3}b^3 \int \frac{\partial x}{x^{3m}}$$
$$+ \ldots\ldots + ab^{n-1}\int \frac{\partial x}{x^{(n-1)m}} + b^n \int \frac{\partial x}{x^{nm}}$$

also Glied für Glied integrirt:

$$\int \left(a+\frac{b}{x^m}\right)^n \partial x = a^n x - \frac{na^{n-1}b}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{n_2 a^{n-2}b^2}{(2m-1)x^{2m-1}} - \frac{n_3 a^{n-3}b^3}{(3m-1)x^{3m-1}} - \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots - \frac{ab^{n-1}}{(nm-m-1)x^{(n-1)m-1}} - \frac{b^n}{(nm-1)x^{nm-1}}$$

Um nun das I zwischen 2 bestimmten Grenzen zu nehmen, z. B. für $x=1$ d $x=a$, hat man

$$\int\left(a+\frac{b}{x^m}\right)^n \partial x \text{ für } x=1$$

$$-\frac{n}{m-1}a^{n-1}b-\frac{n_2}{2m-1}a^{n-2}b^2-\frac{n_3}{2m-1}a^{n-3}b^3-\ldots.-\frac{ab^{n-1}}{(n-1)m-1}-\frac{b^n}{nm-1}$$

r $x=a$

$$+1-\frac{n}{m-1}a^{n-m}b-\frac{n_2}{2m-1}a^{n-2m-1}b^2-\frac{n_3}{3m-1}a^{n-3m-2}b^3-$$

$$\ldots.-\frac{1}{(n-1)m-1}a^{-(n-1)m+2}b^{n-1}-\frac{1}{nm-1}a^{-nm+1}b^n$$

Zieht man von der zweiten Reihe die erste ab, so erhält man das zwischen =1 und $x=a$ genommene begrenzte I reducirt und geordnet.

$$a^n(a-1)+\frac{n}{m-1}ba^{n-m}(a^{m-1}-1)+\frac{n_2b^2}{2m-1}a^{n-2m-1}(a^{2m-1}-1)$$

$$+\frac{n_3b^3}{3m-1}a^{n-3m-2}(a^{3m-1}-1)+\ldots.+\frac{nb^{n-1}}{(n-1)m-1}a^{-(n-1)m+2}(a^{(n-1)m-1}-1)$$

$$+\frac{b^n}{nm-1}a^{-nm-1}(a^{nm}-1)$$

Für $n=2$, $m=3$ erhält man das begrenzte I

$$=a^2(a-1)+b\cdot\frac{a^2-1}{a}+\frac{b^2}{5}\cdot\frac{a^5-1}{a^5}$$

65. Allgemein hat man also Folgendes: st $y=fx$ irgend ein I, welches zwischen weien Grenzen a und b genommen wer- en soll, so sind die zugehörigen Werthe er Function

$$y'=fa$$
$$y''=fb$$

nd das begrenzte I hat den Werth

$$y''-y'=fb-fa$$

Man kommt also zu dem begrenzten I ach, wenn man in dem allgemeinen I ie Constante dergestalt bestimmt, dafs esen Werth für die eine Grenze $a=0$ ird und wenn man hiernach für x die te Grenze b als Werth für x einsetzt.

Dann hat man die Bestimmung

$$fa+C\,(\text{Constante})=0$$

ithin $C=-fa$

ıd das vollständige $I=fx-fa$

Wird nun für x die 2te Grenze b ge- tzt, so hat man

ıs begrenzte $I=fb-fa$

In dem Beispiel

$$\int\left(a+\frac{b}{x^3}\right)^2\partial x=a^2x-\frac{ab}{x^3}-\frac{b^2}{5x^5}+C$$

)ll für $x=1$ der Werth des $I=0$ wer- en. Man hat demnach

$$a^2-ab-b^2+C=0$$

oraus $C=-a^2+ab+b^2$

und das vollständige I

$$=a^2(x-1)-ab\left(\frac{1}{x^2}-1\right)-\frac{b^2}{5}\left(\frac{1}{x^5}-1\right)$$

Wird nun in diesem vollständigen I für $x=a$ gesetzt, so ist der Integralwerth zwischen a und 1

$$=a^2(a-1)+b\,\frac{a^2-1}{a}+\frac{b^2}{5}\cdot\frac{a^5-1}{a^5}$$

Man kann demnach die Forderung: Ein bestimmtes I zu nehmen auch ausdrücken, indem man sagt: Das I soll in seiner Constante so bestimmt worden, dafs dasselbe für einen bestimmten Werth der Urveränderlichen verschwinde und hierauf für einen zweiten bestimmten Werth der Urveränderlichen angegeben werden.

Wenn ein I für einen bestimmten Werth der Urveränderlichen verschwinden soll, so sagt man auch: das I fange mit diesem Werthe an, man drückt diese Forderung dadurch aus, dafs man den Anfangswerth rechts des Integralzeichens unten beifügt:

$\int_{,}\left(a+\frac{b}{x^m}\right)^n\partial x$ drückt die Forderung aus, dafs $\int\left(a+\frac{b}{x^m}\right)^n\partial x$ für $x=1$ verschwinde. Eine zweite Grenze der Urveränderlichen, bis zu welcher das I genommen werden soll, wird oben dem

I-zeichen angefügt: die Forderung für das Beispiel würde geschrieben werden

$$\int_{,}^{a}\left(a+\frac{b}{x^m}\right)^n \partial x$$

66. Wenn x_0; x_1 x_2 x_3 ... x_n auf einander folgende bestimmte Werthe der Urveränderlichen x in sehr geringem Abstande von einander sind. fx_0 fx_1 fx_2 .... fx_n die Werthe der Integrale der gegebenen Function für die Werthe x_0 x_1 .... x_n. Ferner

$$\begin{aligned} Fx_1 &= fx_1 - fx_0 \\ Fx_2 &= fx_2 - fx_1 \\ Fx_3 &= fx_3 - fx_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ Fx_{n-1} &= fx_{n-1} - fx_{n-2} \\ Fx_n &= fx_n - fx_{n-1} \end{aligned}$$

Die Integralwerthe zwischen den Grenzen fx_1 und fx_0, fx_2 und fx_1; .... fx_n und fx_{n-1}

so ist offenbar die Summe $Fx_1 + Fx_2 + Fx_3 + \ldots Fx_n$ der Werth des Gesammt-I zwischen den Werthen x_0 und x_n. Addirt man nun die unter einander gestellten Summanden und deren rechts stehenden Werthe, so heben sich unter diesen immer je 2 gleiche mit entgegengesetzten Vorzeichen versehene Glieder einander auf und man hat

$$\Sigma Fx_n = fx_n - fx_0$$

Setzt man fest, dafs für $x = 0$ auch $fx = 0$ werde, so hat man

$$fx_0 + C = 0$$

woraus $C = -fx_0$

Es ist sodann

$$\Sigma Fx_n = fx_n - fx_0 = F_0 x^n = fx_n + C$$

Aus derselben Darstellung geht hervor, dafs der Gesammtwerth des Integrals $\Sigma F_m x^n$ zwischen den Grenzen x_m und x_n $= fx_n - fx_m$

Demnach ist der oben erklärte Integralwerth zugleich der Gesammtwerth des zwischen den Grenzen genommenen I.

Wenn $fx = \int_0^x x\,\partial x = \int x^4\,\partial x = \frac{1}{5}x^5$

so ist $f_0 x = f0^5 = 0$

$f_1 x = \frac{1}{5} \cdot 1$

$f_2 x = \frac{1}{5} \cdot 32 = 6{,}4$

$f_1 x^5 = 5{,}4$

Beispiele von Reihen-Integrirung:

1. Beispiel. Es ist $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \ldots.$

Beiderseits integrirt gibt

$$arc\ sin\ x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots.$$

2. Beispiel. Es ist $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots.$

Beiderseits integrirt

$$Arc \cdot tg\ x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 + \ldots.$$

3. Beispiel. Es ist $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots.$

Hieraus $$fe^x = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots.$$

Eine interessante Reihenintegrirung enthält der Art. „Fall. D. durch einen Kreisbogen", Band III. pag. 72.

III. Integrirung transcendenter Functionen.

A. Exponentialfunctionen.

67. Die Exponentialfunction a^x zu integriren.

In dem Art. „Differenzial" ist pag. 265 entwickelt

Formel 5. $\frac{\partial a^x}{\partial x} = \frac{a^x}{M}$

Formel 6. $\frac{\partial a^x}{\partial x} = a^x \cdot ln\ a$

„ 8. $\frac{\partial a^x}{\partial x} = a^x \cdot \frac{log\ a}{log\ e}$

„ 9. $\frac{\partial a^x}{\partial x} = \frac{a^x}{log^a e}$

Die Bedeutung der Bezeichnungen ist dort angegeben. Von diesen 4 Formeln ist die von allen Nebengröfsen unabhängige Formel

$$\frac{\partial a^x}{\partial x} = a^x\ ln\ a$$

eraus ist unmittelbar

$$a^x = \int a^x \ln a \, \partial x = \ln a \int a^x \, \partial x$$

$$\int a^x \, \partial x = \frac{a^x}{\ln a} \tag{74}$$

ist also das I der Function a^x = er Function selbst, dividirt durch den rlichen Logarithmus der Basis a.

t $z = fx$, so ist

$$\int a^z \, \partial x = \int a^z \frac{\partial x}{\partial z} \partial z = \frac{a^z}{\ln a} \tag{75}$$

Bedeutet e die Basis des natürlichen Logarithmensystems, so ist, weil $\ln e = 1$ ist,

$$\int e^x \, \partial x = e^x \tag{76}$$

68. Die Function $x^n \cdot a^x$ zu integriren, wenn n eine ganze positive Zahl ist.

Setzt man in die allgemeine Reductionsformel

$$\int \varphi x \cdot fx \, \partial x = \varphi x \int fx \, \partial x - \int \frac{\partial \varphi x}{\partial x} \int fx \, \partial x$$

$\varphi x = x^n$; $fx = a^x$, so hat man

$$\int x^n \cdot a^x \, \partial x = x^n \cdot \frac{a^x}{\ln a} - \int n x^{n-1} \frac{a^x}{\ln a} \partial x$$

$$= x^n \cdot \frac{a^x}{\ln a} - \frac{n}{\ln a} \int x^{n-1} a^x \, \partial x$$

Das subtractive I nach derselben Reductionsformel aufgelöst und so fortgeen, bis man endlich auf ein $I = \int x^0 a^x \, \partial x$ kommt, gibt das I

$$a^x \partial x = \frac{a^x}{\ln a}\left[x - \frac{n x^{n-1}}{\ln a} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{(\ln a)^2} - \ldots \mp \frac{n(n-1)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(\ln a)^n}\right] \tag{77}$$

69. Die Function $\frac{a^x}{x^n}$ zu integriren.

Für die Reductionsformel ist hier

$$\varphi x = x^{-n}; \; fx = a^x$$

Diese Werthe eingesetzt ist

$$\int x^{-n} a^x \, \partial x = -\frac{x^{-(n-1)}}{n-1} a^x - \int \left(-\frac{x^{-(n-1)}}{n-1}\right) a^x \ln a \cdot \partial x$$

$$= -\frac{x^{-(n-1)}}{n-1} a^x + \frac{\ln a}{n-1} \int a^x x^{-n+1} \, \partial x$$

as gesuchte I ist also wieder auf ein urückgeführt, welches mit dem gegeen von einerlei Form ist, und in welm der subtractive Exponent von x um 1 geringer geworden. Das so erhaltene I durch dieselbe Reductionsformel aufgelöst, mit dem neu erhaltenen I desgleichen und so fort ergibt

$$\int a^x \partial x = -\frac{x^{-n+1}}{n-1} a^x - \frac{x^{-n+2}}{(n-1)(n-2)} a^x \ln a - \frac{x^{-n+3}}{(n-1)(n-2)(n-3)} a^x (\ln a)^2 - \ldots$$

$$\ldots - \frac{x^{-1} a^x (\ln a)^{n-2}}{(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1} + \frac{(\ln a)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1} \int x^{-1} a^x \, \partial x \tag{78}$$

Dieses letzte I, worauf das obige Verfahren zuletzt hinführt, läfst sich nicht chlossen integriren, die Integrirung mufs durch Reihen geschehen. Nun hat n aber

$$a^x = 1 + \frac{\ln a}{1} x + \frac{(\ln a)^2}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{(\ln a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots \frac{(\ln a)^m}{1 \cdot 2 \ldots n} x^m$$

lich ist

$$a^x = \frac{a^x}{x} = \frac{1}{x} + \frac{\ln a}{1} + \frac{x(\ln a)^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^2 (\ln a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{x^{m-1} (\ln a)^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m}$$

$$\frac{x}{x} \partial x = \ln x + x \ln a + \frac{x^2 (\ln a)^2}{2 \cdot 2} + \frac{x^3 (\ln a)^3}{2 \cdot 3 \cdot 3} + \ldots \frac{x^m (\ln a)^m}{2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots m \cdot m} \tag{79}$$

Dieses letzte I Glied für Glied mit dem Coefficient des I, Formel 78, multiplicirt und zu den vorhergehenden Gliedern addirt gibt $\int x^{-n} a^x \partial x$

B. Logarithmische Functionen.

Vorbemerkung. Es ist in genden nur der natürliche Lo (ln) aufgeführt; der briggische mus ($log\ br$) verhält sich zum n Logarithmus der Art dafs

$$log\ br\ a = \frac{1}{Modul} ln\ a = \frac{ln\ a}{ln\ 10} = 0{,}43429 \ldots ln\ a$$

Um also das Integral eines briggischen Logarithmus zu finden hat man

$$\int log\ br\ x\ \partial x = 0{,}43429 \ldots \int ln\ \partial x$$

70. Die einfachste logarithmische Function ist $ln\ x$. Nun ist aber unter den Differenzialformeln nicht eine Function aufgeführt worden, die $ln\ x$ zum Differenzial hat und auf welche hier zurückgegangen werden könnte. Au Grunde mufs man entwickeln, hufs der Entwickelung die $ln\ x \cdot \partial x$ aus 2 Factoren $ln\ x$ bestehend denken. Dann hat m Reductionsformel

$\int \varphi x\ fx\ \partial x = \varphi x \int fx\ \partial x - \int (\varphi' x$

$\varphi x = ln\ x$ und $fx = \partial x$;

$$\int ln\ x \cdot \partial x = ln\ x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot (x\ \partial x) = x\ ln\ x - \int \partial x$$

folglich $\int ln\ x\ \partial x = x\ (ln\ x - 1)$

71. Die Function $x^n\ ln\ x$ zu integriren.

Hier hat man $\varphi x = ln\ x$ und $fx = x_n$; mithin

$$\int x^n\ ln\ x\ \partial x = \frac{x^{n+1}}{n+1} ln\ x - \int \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}\right) \partial x$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} ln\ x - \frac{1}{n+1} \int x^n\ \partial x$$

woraus $$\int x^n\ ln\ x\ \partial x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left[ln\ x - \frac{1}{n+1}\right]$$

72. Die Function $(ln\ x)^m$ zu integriren.

Man hat wie No. 70

$$\int (ln\ x)^m\ \partial x = (ln\ x)^m\ x - \int m\ (ln\ x)^{m-1} \cdot \frac{1}{x} \cdot x\ \partial x$$

$$= (ln\ x)^m\ x - m \int (ln\ x)^{m-1}\ \partial x$$

Durch wiederholte Reduction des jedesmaligen neuen I kommt ma auf $\int ln\ x\ \partial x$ wenn nämlich m eine positive ganze Zahl ist, und man ha schlossene I.

$$\int (ln\ x)^m\ \partial x = x\ [(ln\ x)^m - m\ (ln\ x)^{m-1} + m\ (m-1)\ (ln\ x)^{m-2} - \ldots\ldots$$
$$\mp x\ (m-1) \ldots . 3 \cdot 2 \cdot x \int ln\ x\ \partial x]$$
$$= x\ [(ln\ x)^m - m\ (ln\ x)^{m-1} + m\ (m-1)\ (ln\ x)^{m-2} - \ldots\ldots$$
$$\mp m\ (m-1) \ldots . 3 \cdot 2\ (ln\ x - 1)]$$

Ist m eine gebrochene Zahl, so ist Auflösung in geschlossenem I nich

73. Die Function $x^n\ (ln\ x)^m$ zu integriren.

Hier hat man wie No. 71:

$$\int x^n\ (ln\ x)^m\ \partial x = \frac{x^{n+1}}{n+1} (ln\ x)^m - \int m\ (ln\ x)^{m-1} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}\ \partial x$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} (ln\ x)^m - \frac{m}{n+1} \int x^n\ (ln\ x)^{m-1}\ \partial x$$

In dem gewonnenen neuen I ist der Exponent n derselbe geblieben, m aber um 1 geringer geworden. Es entsteht demnach die Formel 82, w

dieselbe mit x^n multiplicirt und die aus den Integralen von x^n hervorgehenden Nenner $\frac{1}{n+1}, \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \ldots$. den einzelnen Gliedern zufügt. Man hat dann

$$\int x^n (ln\,x)^m \partial x = \frac{x^{n+1}}{n+1}(ln\,x)^m - \frac{m}{(n+1)^2} x^{n+1}(ln\,x)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{(n+1)^3} x^{n+1}(ln\,x)^{m-2} \pm \frac{m(m-1)(m-2)\ldots 3\cdot 2}{(n+1)^m} x^{n+1}\left(ln\,x - \frac{1}{n+1}\right)$$

oder

$$\int x^n (ln\,x)^m \partial x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left[(ln\,x)^m - \frac{m}{n+1}(ln\,x)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{(n+1)^2}(ln\,x)^{m-2} - \ldots\ldots + (-1)^{m-1}\frac{m(m-1)\ldots 3\cdot 2}{(n+1)^{m-1}} ln\,x + (-1)^m \frac{m(m-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{(n+1)^m}\right] \quad (83)$$

Dieses I ist nur geschlossen integrirbar, wenn m eine positive ganze Zahl ist.

74. Die Function $\frac{\partial x}{ln\,x}$ zu integriren.

Setze $ln\,x = z$

so ist $e^z = x$

und $\partial e^z \partial z = e^z \partial z = \partial x$

Demnach ist

$$\int \frac{\partial x}{ln\,x} = \int \frac{e^z \partial z}{z}$$

Dieses I ist aus Formel 79 zu entnehmen, wenn man e für a, also $ln\,a = 1$ setzt:

$$\int \frac{\partial x}{ln\,x} = ln\,z + z + \frac{z^2}{2\cdot 2} + \frac{z^3}{2\cdot 3\cdot 3} + \ldots + \frac{z^m}{2\cdot 3\cdot 4\ldots m\cdot m}$$
$$= ln\,(ln\,x) + ln\,x + \frac{(ln\,x)^2}{2\cdot 2} + \frac{(ln\,x)^3}{2\cdot 3\cdot 3} \ldots\ldots + \frac{(ln\,x)^m}{2\cdot 3\cdot 4\ldots m\cdot m} \quad (84)$$

75. Die Function $\frac{x^n}{(ln\,x)^m}$ zu integriren.

Aus der Reductionsformel

$$\int x^n (ln\,x)^m \partial x = \frac{x^{n+1}}{n+1}(ln\,x)^m - \frac{m}{n+1}\int x^n (ln\,x)^{m-1} \partial x$$

hat man das letzte I entwickelt:

$$\int x^n (ln\,x)^{m-1} \partial x = \frac{x^{n+1}}{m}(ln\,x)^m - \frac{n+1}{m}\int x^n (ln\,x)^m \partial x \quad (A)$$

Hierin $-m+1$ statt m gesetzt gibt

$$\int x^n (ln\,x)^{-m} \partial x = \frac{x^{n+1}}{-m+1}(ln\,x)^{-m+1} - \frac{n+1}{-m+1}\int x^n (ln\,x)^{-m+1} \partial x \quad (B)$$

Dies letzte I hat also einen um -1 geringeren Exponent für $ln\,x$ und kann nach und nach reducirt werden bis zu dem $I = \int x^n (ln\,x)^{-1} \partial x$. Man erhält

$$\int \frac{x^n \partial x}{(ln\,x)^m} = -\frac{x^{n+1}}{m-1}\left[\frac{1}{(ln\,x)^{m-1}} + \frac{n+1}{(m-2)(ln\,x)^{m-2}} + \frac{(n+1)^2}{(m-2)(m-3)(ln\,x)^{m-3}} + \ldots\ldots + \frac{(n+1)^{m-2}}{(m-2)(m-3)\ldots 2\cdot 1\, ln\,x}\right] + \frac{(n+1)^{m-1}}{(m-1)(m-2)\ldots 2\cdot 1}\int \frac{x^n \partial x}{ln\,x} \quad (85)$$

Das letzte I ist durch Formel 79 aufgelöst, wenn man nach No. 74 umformt. Nämlich $ln\,x = z$. Dann ist

$$\int \frac{x^n \partial x}{ln\,x} = \int \frac{(e^z)^n \cdot e^z \cdot \partial z}{z} = \int \frac{(e^{n+1})^z}{z} \partial z$$

Setzt man nun $e^{n+1} = a$, so hat man $\int \frac{x^n \partial x}{ln\,x}$ nach Formel 79,

C. Trigonometrische Functionen.

76. Die Function $\sin x$ zu integriren.

Es ist $\frac{\partial \cos x}{\partial x} = -\sin x$, also $-\frac{\partial \cos x}{\partial x} = \sin x$

daher $\int \sin x \, \partial x = -\cos x + C = \text{Constante } (C) - \cos x$ (86)

77. Die Function $\cos x$ zu integriren.

Es ist $\frac{\partial \sin x}{\partial x} = \cos x$

folglich $\int \cos x \, \partial x = \sin x$ (87)

78. Die Function $tg\, x$ zu integriren.

Es ist $tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{\partial \cos x}{\cos x}$

daher $\int tg\, x \, \partial x = -ln \cos x = ln \frac{1}{\cos x} = ln \sec x$ (88)

79. Die Function $\cot x$ zu integriren.

Es ist $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\partial \sin x}{\sin x}$

daher $\int \cot x \cdot \partial x = ln \sin x$ (89)

80. Die Function $\sec x$ zu integriren.

Es ist $\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\partial \sin x}{1 - \sin^2 x}$

daher $\int \sec x \, \partial x = \frac{1}{2} ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$

$$\int \sec x \, \partial x = \tfrac{1}{2} ln \cot^2 \tfrac{\frac{1}{2}\pi - x}{2} = ln \cot \tfrac{\frac{1}{2}\pi - x}{2} = ln\, tg \tfrac{\frac{1}{2}\pi + x}{2} \quad (90)$$

81. Die Function $cosec\, x$ zu integriren.

Es ist $cosec\, x = \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} = -\frac{\partial \cos x}{1 - \cos^2 x}$

mithin

$$\int cosec\, x \, \partial x = -\tfrac{1}{2} ln \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} = \tfrac{1}{2} ln \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \tfrac{1}{2} ln \frac{2 \sin^2(\frac{1}{2}x)}{2 \cos^2(\frac{1}{2}x)}$$
$$= \tfrac{1}{2} ln\, tg^2(\tfrac{1}{2}x) = ln\, tg\, (\tfrac{1}{2}x) \quad (91)$$

82. Die Functionen $sinv\, x$ und $cosv\, x$ zu integriren.

Es ist $sinv\, x = 1 - \cos x$

mithin $\int sinv\, x \, \partial x = x - \sin x$ (92)

desgleichen ist

$\int cosv\, x \, \partial x = x + \cos x$ (93)

83. Die Function $\frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$ zu integriren.

Es ist $\frac{1}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\partial \sin x}{\sin x} - \frac{\partial \cos x}{\cos x}$

folglich $\int \frac{\partial x}{\sin x \cdot \cos x} = ln \sin x - ln \cos x = ln \frac{\sin x}{\cos x} = ln\, tg\, x$ (94)

84. Die Function $\sin^n x$ zu integriren.

Es ist $\sin^n x = \sin^{n-1} x \cdot \sin x$

also $\int \sin^n x \, \partial x = -\sin^{n-1} x \cdot \cos x + \int (n-1) \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x \, \partial x$

$$= -\cos x \sin^{n-1}x + (n-1)\int(\sin^{n-2}x - \sin^{n}x)\,\partial x$$
$$= -\cos x \sin^{n-1}x + (n-1)\int\sin^{n-2}x\,\partial x - (n-1)\int\sin^{n}x\,\partial x$$

Das letzte Glied auf die linke Seite geschafft und mit n dividirt

$$\int\sin^{n}x\,\partial x = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}x\,\partial x \qquad (95)$$

geeignete Reductionsformel.

n gerade, so kommt man zuletzt auf $\int\sin^{0}x\cdot\partial x = \int\partial x = x$

n ungerade, so wird das letzte I $\int\sin x\cdot\partial x = -\cos x$

. Die Function $\cos^{n}x$ zu integriren.

ist $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Setzt man $\frac{\pi}{2} - x = z$, so ist $x = \frac{\pi}{2} - z$

und $\partial x = -\partial z$

Es ist daher

$$\int\cos^{m}x\,\partial x = -\int\sin^{n}z\cdot\partial z$$

Mithin nach Formel 95

$$\int\sin^{n}z\,\partial z = -\frac{1}{n}\cos z\cdot\sin^{n-1}z + \frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}z\,\partial z$$

indem man $-\partial x$ für ∂z setzt:

$$\int\cos^{n}x\,\partial x = +\frac{1}{n}\sin x\cdot\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x\cdot\partial x \qquad (96)$$

86. Die Function $tg^{n}x$ zu integriren.

Es ist $tg^{n}x = tg^{n-2}x\cdot tg^{2}x = tg^{n-2}x(\sec^{2}x - 1) = tg^{n-2}x\cdot\sec^{2}x - tg^{n-2}x$

Daher als Reductionsformel

$$\int tg^{n}x\,\partial x = \int tg^{n-2}x\cdot\partial\, tg\,x\,\partial x - \int tg^{n-2}x\,\partial x = \frac{tg^{n-1}x}{n-1} - \int tg^{n-2}x\,\partial x \qquad (97)$$

87. Die Function $\cot^{n}x$ zu integriren.

Schreibt man wie No. 85 $\cot x = tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, setzt $\frac{\pi}{2} - x = z$ so hat man nach mel 97

$$\int tg^{n}z\,\partial z = \frac{tg^{n-1}z}{n-1} - \int tg^{n-2}z\,\partial z$$

hin ($-\partial x$ für ∂z gesetzt)

$$\int\cot^{n}x\,\partial x = -\frac{\cot^{n-1}x}{n-1} - \int\cot^{n-2}x\,\partial x \qquad (98)$$

88. Die Function $\sec^{n}x$ zu integriren.

Es ist $\sec^{n}x = \sec^{n-2}x\cdot\sec^{2}x = \sec^{n-2}x\cdot\partial\, tg\,x$

er $\int\sec^{n}x\,\partial x = \int\sec^{n-2}\cdot\partial\, tg\,x\,\partial x = \sec^{n-2}x\, tg\,x - \int\partial\sec^{n-2}tg\,x\,\partial x$
$$= \sec^{n-2}x\, tg\,x - (n-2)\int\sec^{n-3}\cdot\partial\sec x\cdot tg\,x\,\partial x$$
$$= \sec^{n-2}x\, tg\,x - (n-2)\int\sec^{n-2}tg^{2}x\,\partial x$$
$$= \sec^{n-2}x\, tg\,x - (n-2)\int\sec^{n}x\,\partial x + (n-2)\int\sec^{n-2}\partial x$$

Das erste I der rechten Seite auf die linke gebracht und mit $n-1$ dividirt gibt

$$\int\sec^{n}x\,\partial x = \frac{\sec^{n-2}x\cdot tg\,x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int\sec^{n-2}x\cdot\partial x \qquad (99)$$

89. Wie $\cot^{n}x$ aus $tg^{n}x$ findet man aus $\sec^{n}x$:

$$\int\operatorname{cosec}^{n}x\,\partial x = -\frac{\operatorname{cosec}^{n-2}x\cot x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int\operatorname{cosec}^{n-2}x\,\partial x \qquad (100)$$

90. Die Function $\sin^{n}x\cos^{m}x$ zu integriren.

Es ist $\sin^{n}x = \dfrac{\dfrac{\partial\sin^{n+1}x}{\partial x}}{(n+1)\cos x}$

daher $\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, \partial x = \int \frac{\cos^{m-1} x}{n+1} \cdot \frac{\partial \sin^{n+1} x}{\partial x} \cdot \partial x$

$$= \frac{1}{n+1}\left[\cos^{m-1} x \cdot \sin^{n+1} x - \int \frac{\partial \cos^{m-1} x}{\partial x} \cdot \sin^{n+1} x \cdot \partial x\right]$$

$$\int \frac{\partial \cos^{m-1} x}{\partial x} \sin^{n+1} x \, \partial x = -(m-1)\int \cos^{m-2} x \cdot \sin^{n+2} \partial x =$$

$$-(m-1)\int \cos^{m-2} x \sin^n x (1-\cos^2 x)\partial x = -(m-1)\int \cos^{m-2} x \sin^n x + (m-1)\int \cos^m x \sin^n x \partial x$$

folglich

$$\int \sin^n x \cos^m x \, \partial x = \frac{1}{n+1}\left[\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x + (m-1)\int \cos^{m-2} x \sin^n x \, \partial x - (m-1)\int \cos^m x \sin^n x \, \partial x\right]$$

Das letzte I rechts auf die linke Seite gebracht und reducirt

$$\int \sin^n x \cos^m x \, \partial x = \frac{\cos^{m-1} x \cdot \sin^{n+1} x}{n+m} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^n x \cos^{m-2} x \, \partial x \qquad (101)$$

In dieser Reductionsformel ist der Exponent des Cosinus um 2 geringer geworden. Die Reduction wiederholt angewendet führt bei geradem m auf

$$\int \sin^n x \cos^0 \partial x = \int \sin^n x \, \partial x$$

welches nach Formel 95 bestimmt wird. Bei ungeradem m entsteht zuletzt

$$\int \sin^n x \cdot \cos x \, \partial x = \int \sin^n x \cdot \partial \sin x \, \partial x = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1}$$

und die Integrirung ist ebenfalls geschlossen.

91. Dieselbe Function $\sin^n x \cos^m x$ ist zu integriren, so dafs der Exponent des Sinus mit der Reduction vermindert wird.

Man setzt $\cos^m x = -\frac{\partial \cos^{m+1}}{(m+1)\sin x}$ und hat

$$\int \sin^n x \cos^m x \, \partial x = -\int \sin^{n-1} x \cdot \frac{\partial \cos^{m+1} x}{m+1} \partial x$$

$$= -\frac{1}{m+1}\left[\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x - \int (n-1)\sin^{n-2} x \cos^{m+2} x \, \partial x\right]$$

$$= \frac{1}{m+1}\left[-\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^m x \, \partial x - (n-1)\int \sin^n x \cos^m x \partial x\right]$$

woraus

$$\left(1+\frac{n-1}{m+1}\right)\int \sin^n x \cos^m x \, \partial x = -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{n-2} x \cos^m x \partial x$$

endlich

$$\int \sin^n x \cos^m x \, \partial x = -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^{n-2} \cos^m x \, \partial x \qquad (102)$$

Ist n eine gerade Zahl, so entsteht durch wiederholte Reduction endlich $\int \cos^m x \, \partial x$, welches nach Formel 96 integrirt wird. Ist n ungerade, so entsteht zuletzt $\int \cos^m x \sin x \, \partial x = -\int \cos^m x \cdot \partial \cos x \, \partial x = -\frac{\cos^{m+1}}{m+1}$

92. Die Function $\frac{\sin^n x}{\cos^m x}$ zu integriren.

Aus Formel 101 das letzte Glied entwickelt ist

$$\int \sin^n x \cos^{m-2} \partial x = -\frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{m-1} + \frac{m+n}{m-1}\int \sin^n x \cos^m x \, \partial x$$

Hierein für m den Werth $-m+2$ gesetzt gibt

$$\int \sin^n x \cos^{-m} \partial x = -\frac{\cos^{-m+1} x \sin^{n+1} x}{-m+1} + \frac{-m+2-n}{-m+1}\int \sin^n x \cos^{-m+2} x \, \partial x$$

$$\int \frac{\sin^n x}{\cos^m x}\,\partial x = -\frac{\sin^{n+1} x}{(m-1)\cos^{m-1} x} + \frac{m-n-2}{m-1}\int \frac{\sin^n x}{\cos^{m-2} x}\,\partial x \qquad (103)$$

3. Die Function $\frac{\cos^m x}{\sin^n x}$ zu integriren.

ntwickele das letzte Glied aus Formel 102:

$$\int \sin^{n-1} x \cos^{m+1} x\,\partial x = \frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{n-1} + \frac{m+n}{n-1}\int \sin^n x \cos^m x\,\partial x$$

etze $n = -n+2$, so erhält man

$$\int \sin^{-n+2} x \cos^m x\,\partial x = \frac{\sin^{-n+1} x \cos^{m+1} x}{-n+1} + \frac{m-n+2}{-n+1}\int \sin^{-n+2} x \cos^m x\,\partial x$$

$$\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x}\,\partial x = -\frac{\cos^{m+1} x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-m-2}{n-1}\int \frac{\cos^m x\,\partial x}{\sin^{n-2} x} \qquad (104)$$

ür Formel 103 und 104 gelten dieselben Bemerkungen wie für Formel 101 02.

4. Die Function $x^n \sin x$ zu integriren.

s ist $\int x^n \sin x\,\partial x = x^n \int \sin x\,\partial x - \int (\partial x^n \int \sin x\,\partial x)\partial x = -x^n \cos x + n\int x^{n-1}\cos x\,\partial x$

$$= -x^n \cos x + nx^{n-1}\int \cos x\,\partial x - n(n-1)\int x^{n-2}\sin x\,\partial x$$

$$= -x^n \cos x + nx^{n-1}\sin x - n(n-1)\int x^{n-2}\sin x\,\partial x$$

lit der Reduction so fortgefahren entsteht

$$\int x\,\partial x = -x^n \cos x + nx^{n-1}\sin x + n(n-1)x^{n-2}\cos x$$
$$- n(n-1)(n-2)x^{n-3}\sin x - n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}\cos x$$
$$+ + - - \ldots\ldots \qquad (105)$$

)urch dieselbe Reductionsweise erhält man

5. $$\int x^n \cos x\,\partial x = x^n \sin x + nx^{n-1}\cos x - n(n-1)x^{n-2}\sin x$$
$$- n(n-1)(n-2)x^{n-3}\cos x + + - - \ldots \qquad (106)$$

D. Cyclometrische Functionen.

)6. Die Function $Arc\sin x$ zu integriren.

Es ist $\int Arc\sin x \cdot \partial x = Arc\sin x \int \partial x - \int [\partial\, Arc\sin x \int \partial x]\,\partial x$

$$= x\,Arc\sin x - \int \frac{x\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = x\,Arc\sin x - \tfrac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)\,\partial x$$

lithin $\int Arc\sin x\,\partial x = x\,Arc\sin x + \sqrt{1-x^2}$ (107)

)7. Die Function $Arc\cos x$ zu integriren.

Wie ad 96 verfahren, ist

$$\int Arc\cos x\,\partial x = x\,Arc\cos x + \int \frac{x\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x\,Arc\cos x + \tfrac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x\,\partial x)$$

lithin $\int Arc\cos x\,\partial x = x\,Arc\cos x - \sqrt{1-x^2}$ (108)

)8. Die Function $Arc \cdot tg\, x$ zu integriren.

Es ist $\int Arc\,tg\,x \cdot \partial x = x\,Arc\,tg\,x - \int x \cdot \partial\, Arc\,tg\,x\,\partial x = x\,Arc\,tg\,x \int x \cdot \frac{\partial x}{1+x^2}$

$$= x\,Arc\,tg\,x - \tfrac{1}{2}\int \frac{2x\,\partial x}{1+x^2}$$

$$\int Arc\,tg\,x\,\partial x = x\,Arc\,tg\,x - \tfrac{1}{2}ln(1+x^2) \qquad (109)$$

)9. $$\int Arc\,cot\,x\,\partial x = x\,Arc\,cot\,x - \int (\partial\, Arc\,cot\,x \int \partial x)\,\partial x$$
$$= x\,Arc\,cot\,x + \int \frac{x\,\partial x}{1+x^2}$$

daher $\int Arc\ cot\ x\ \partial x = x\ Arc\ cot\ x + \frac{1}{2} ln(1+x^2)$ (110)

100. $\int Arc\ sec\ x\ \partial x = x\ Arc\ sec\ x - \int(\partial\ Arc\ sec\ x \int \partial x)\ \partial x$

$$= x\ Arc\ sec\ x - \int \frac{x \cdot \partial x}{x\sqrt{x^2-1}}$$

woraus $\int Arc\ sec\ x\ \partial x = x\ Arc\ sec\ x - ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ (111)

101. $\int Arc\ cosec\ x\ \partial x = x\ Arc\ cosec\ x + \int \frac{x\ \partial x}{x\sqrt{x^2-1}}$

mithin $\int Arc\ cosec\ x\ \partial x = x\ Arc\ cosec\ x + ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ (112)

102. $\int Arc\ sinv\ x\ \partial x = x\ Arc\ sinv\ x - \int \frac{x\ \partial x}{\sqrt{2x-x^2}}$

$$= x\ Arc\ sinv\ x + \sqrt{2x-x^2} - Arc\ sinv\ x$$

woraus $\int Arc\ sinv\ x\ \partial x = (x-1)\ Arc\ sinv\ x + \sqrt{2x-x^2}$ (113)

103. $\int Arc\ cosv\ x\ \partial x = x\ Arc\ cosv\ x + \int \frac{x\ \partial x}{\sqrt{2x-x^2}}$

woraus $\int Arc\ cosv\ x\ \partial x = (x-1)\ Arc\ cosv\ x - \sqrt{2x-x^2}$ (114)

Integralformel ist ein Ausdruck, der das Integral einer Function von bestimmter Form angibt. Hier folgt eine geordnete Zusammenstellung derjenigen, welche am gebräuchlichsten sind. Am Schluſs der Tabelle sind Erläuterungen für die Entwickelung der complicirteren Formeln hinzugefügt.

Integralformeln.

I. Von algebraischen Gröfsen.

A. Von rationalen Gröfsen.

I. $\int \partial x = x$ (1)

$\int A\ \partial x = A \int \partial x = Ax$ (2)

$\int \varphi' x\ \partial x = \int \partial \varphi\ x \cdot \partial x = \varphi x$ (3)

$\int A\varphi' x \cdot \partial x = A \int \varphi' x \cdot \partial x = A\varphi x$ (4)

$\int (\varphi' x \pm f' x)\ \partial x = \int \varphi' x \cdot \partial x \pm \int f' x \cdot \partial x = \varphi x \pm fx$ (5)

$\int \varphi x \cdot fx \cdot \partial x = \varphi x \int fx \cdot \partial x - \int (\varphi' x \int fx \cdot \partial x)\ \partial x$

$= fx \int \varphi x \cdot \partial x - \int (f' x \int \varphi x \cdot \partial x)\ \partial x$ (6)

$\int (A\varphi x) \cdot (Bfx)\ \partial x = A \cdot B \int \varphi x \cdot fx \cdot \partial x$ (7)

$\int \varphi x \cdot f' x \cdot \partial x = \varphi x \cdot fx - \int fx \cdot \varphi' x \cdot \partial x$ (8)

$\int \varphi x \cdot f' x \cdot \partial x + \int fx \cdot \varphi' x \cdot \partial x = \varphi x \cdot fx$ (9)

$$\int \frac{fx \cdot \varphi' x - \varphi x \cdot f' x}{(fx)^2}\ \partial x = \frac{\varphi x}{fx} \quad (10)$$

II. $\int x^n\ \partial x = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ (11)

$\int Ax^n\ \partial x = A \int x^n\ \partial x = A \frac{x^{n+1}}{n+1}$ (12)

$\int (\varphi x)^n\ \varphi' x\ \partial x = \frac{(\varphi x)^{n+1}}{n+1}$ (13)

$\int x^2\ \partial x = \frac{1}{3}x^3$ (14)

$\int x^3\ \partial x = \frac{1}{4}x^4$ (15)

$\int x^4\ \partial x = \frac{1}{5}x^5$ (16)

III. $\int \frac{\partial x}{x^n} = \int x^{-n}\ \partial x = -\frac{x^{-n+1}}{-n+1}$

$$= \frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}} \quad (17)$$

$$\int \frac{A\ \partial x}{x^n} = A \int \frac{\partial x}{x^n} = -\frac{A}{(n-1)\,x^{n-1}} \quad (18)$$

$$\int \frac{\varphi' x \cdot \partial x}{(\varphi x)^n} = -\int \varphi x^{-n}\ \varphi' x\ \partial x$$

$$= \frac{1}{(n-1)\,(\varphi x)^{n-1}} \quad (19)$$

$$\int \frac{A\varphi' x \cdot \partial x}{(\varphi x)^n} = A \int \frac{\varphi' x \cdot \partial x}{(\varphi x)^n}$$

$$= \frac{-A}{(n-1)\,(\varphi x)^{n-1}} \quad (20)$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2} = \int x^{-2}\ \partial x = -\frac{1}{x} \quad (21)$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3} = \int x^{-3}\ \partial x = -\frac{1}{2x^2} \quad (22)$$

$$\int \frac{\partial x}{x^4} = \int x^{-4}\ \partial x = -\frac{1}{3x^3} \quad (23)$$

$$\int \frac{\partial x}{x^5} = \int x^{-5}\ \partial x = -\frac{1}{4x^4} \quad (24)$$

V. $$\int \frac{\partial x}{x} = \int x^{-1}\,\partial x = ln\,(\pm x) \tag{25}$$

$$\int \frac{\varphi' x \cdot \partial x}{\varphi x} = \int (\varphi x)^{-1}\,\varphi' x\,\partial x = ln\,(\pm \varphi x) \tag{26}$$

$$\int \frac{\partial x}{a \pm bx} = \frac{1}{b}\,ln\,(a \pm bx) \tag{27}$$

$$\int \frac{\varphi' x \cdot \partial x}{a \pm b\varphi x} = \frac{1}{b}\,ln\,(a \pm b\varphi x) \tag{28}$$

Setzt man $b = 1$, so erhält man

$$\int \frac{\partial x}{a \pm x} = ln\,(a \pm x)$$

$$\int \frac{\varphi' x \cdot \partial x}{a \pm \varphi x} = ln\,(a \pm \varphi x)$$

V. $$\int \frac{\partial x}{x^m (a+bx)} = -\frac{b}{a}\int \frac{\partial x}{x^{m-1}(a+bx)} + \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{x^m} \tag{29}$$

$$\int \frac{\partial x}{x(a+bx)} = \frac{1}{a}\,ln\,\frac{x}{a+bx} \tag{30}$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2(a+bx)} = \frac{1}{a}\left(-\frac{1}{x} + \frac{b}{a}\,ln\,\frac{a+bx}{x}\right) \tag{31}$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3(a+bx)} = \frac{1}{a}\left[-\frac{1}{2x^2} + \frac{b}{ax} - \frac{b^2}{a^2}\,ln\,\frac{a+bx}{x}\right] \tag{32}$$

Setzt man $b = 1$, so erhält man die Formeln

$$\int \frac{\partial x}{x^m (a+x)} = -\frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{x^{m-1}(a+x)} + \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{x^m}$$

$$\int \frac{\partial x}{x(a+x)} = \frac{1}{a}\,ln\,\frac{x}{a+x}$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2(a+x)} = \frac{1}{a}\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{a}\,ln\,\frac{a+x}{x}\right)$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3(a+x)} = \frac{1}{a}\left(-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{ax} - \frac{1}{a^2}\,ln\,\frac{a+x}{x}\right)$$

VI. $$\int \frac{\partial x}{x^m (a-bx)} = \frac{b}{a}\int \frac{\partial x}{x^{m-1}(a-bx)} + \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{x^m} \tag{33}$$

$$\int \frac{\partial x}{x(a-bx)} = \frac{1}{a}\,ln\,\frac{x}{a-bx} \tag{34}$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2(a-bx)} = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{x} - \frac{b}{a}\,ln\,\frac{x}{a-bx}\right] \tag{35}$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3(a-bx)} = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{2x^2} - \frac{b}{ax} - \frac{b^2}{a^2}\,ln\,\frac{x}{a-bx}\right] \tag{36}$$

Für $b = 1$ erhält man

$$\int \frac{\partial x}{x^m (a-x)} = \frac{1}{a}\left[\int \frac{\partial x}{x^{m-1}(a-x)} + \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{x^m}\right]$$

$$\int \frac{\partial x}{x(a-x)} = \frac{1}{a}\,ln\,\frac{x}{a-x}$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2(a-x)} = \frac{1}{a}\left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{a}\,ln\,\frac{x}{a-x}\right]$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3(a-x)} = \frac{1}{a}\left[-\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{ax} + \frac{1}{a^2}\,ln\,\frac{x}{a-x}\right]$$

VII. $$\int \frac{x^m \partial x}{a+bx} = \left(-\frac{a}{b}\right)^m \int \frac{\partial x}{a+bx} - \int \frac{(-a)^m - (bx)^m}{b^m (a+bx)} \quad (37)$$

$$\int \frac{x \cdot \partial x}{a+bx} = \frac{1}{b}\left[x - \frac{a}{b} ln\,(a+bx)\right] \quad (38)$$

$$\int \frac{x^2\, \partial x}{a+bx} = \frac{1}{b}\left[\tfrac{1}{2}x^2 - \frac{a}{b}x + \frac{a^2}{b^2} ln\,(a+bx)\right] \quad (39)$$

$$\int \frac{x^3\, \partial x}{a+bx} = \frac{1}{b}\left[\tfrac{1}{3}x^3 - \frac{a}{2b}x^2 + \frac{a^2}{b^2}x - \frac{a^3}{b^3} ln\,(a+bx)\right] \quad (40)$$

Für $b=1$ erhält man

$$\int \frac{x^m \partial x}{a+x} = (-a)^m \int \frac{\partial x}{a+x} - \int \frac{(-a)^m - x^m}{a+x}$$

$$\int \frac{x \cdot \partial x}{a+x} = x - a\, ln\,(a+x)$$

$$\int \frac{x^2\, \partial x}{a+x} = \tfrac{1}{2}x^2 - ax + a^2 ln\,(a+x)$$

$$\int \frac{x^3\, \partial x}{a+x} = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}ax^2 + a^2x - a^3 ln\,(a+x)$$

VIII. $$\int \frac{x^m \partial x}{a-bx} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \int \frac{\partial x}{a-bx} - \int \frac{a^m - (bx)^m}{b^m (a-bx)} \partial x \quad (41)$$

$$\int \frac{x \cdot \partial x}{a-bx} = -\frac{1}{b}\left(x + \frac{a}{b} ln\,(a-bx)\right) \quad (42)$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{a-bx} = -\frac{1}{b}\left[\tfrac{1}{2}x^2 + \frac{a}{b}x + \frac{a^2}{b^2} ln\,(a-bx)\right] \quad (43)$$

$$\int \frac{x^3\, \partial x}{a-bx} = -\frac{1}{b}\left[\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}\frac{a}{b}x^2 + \frac{a^2}{b^2}x + \frac{a^3}{b^3} ln\,(a-bx)\right] \quad (44)$$

Setzt man $b=1$, so erhält man

$$\int \frac{x^m \partial x}{a-x} = a^m \int \frac{\partial x}{a-x} - \int \frac{a^m - x^m}{a-x} \partial x$$

$$\int \frac{x \cdot \partial x}{a-x} = -(x + a\, ln\,(a-x))$$

$$\int \frac{x^2\, \partial x}{a-x} = -[\tfrac{1}{2}x^2 + ax + a^2 ln\,(a-x)]$$

$$\int \frac{x^3\, \partial x}{a-x} = -[\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}ax^2 + a^2x + a^3 ln\,(a-x)]$$

IX. $$\int \frac{\partial x}{1+x^2} = \left.\begin{matrix} +\,Arc\,tg\,x \\ -\,Arc\,cot\,x \end{matrix}\right\} \quad (45)$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{-1}} ln \frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}} \quad (46)$$

$$\int \frac{\partial x}{1-x^2} = \tfrac{1}{2} ln \frac{1+x}{1-x} \quad (47)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{-1}} Arc\,tg(x\sqrt{-1}) \quad (48)$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2-1} = \tfrac{1}{2} ln \frac{x-1}{x+1} \quad (49)$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} Arc\,tg \frac{x}{a} \quad (50)$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln \frac{x-a}{x+a} \quad (51)$$

$$\int \frac{\partial x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} ln \frac{a+x}{a-x} \quad (52)$$

X. $$\int \frac{x \cdot \partial x}{1+x^2} = \tfrac{1}{2} ln\,(1+x^2) \quad (53)$$

$$\int \frac{x \cdot \partial x}{1-x^2} = \tfrac{1}{2} ln \frac{1}{1-x^2} \quad (54)$$

$$\int \frac{x \cdot \partial x}{x^2-1} = \tfrac{1}{2} ln\,(x^2-1) \quad (55)$$

$$\int \frac{x \cdot \partial x}{x^2+a^2} = \tfrac{1}{2} ln\,(x^2+a^2) \quad (56)$$

$$\int \frac{x \cdot \partial x}{x^2-a^2} = \tfrac{1}{2} ln\,(x^2-a^2) \quad (57)$$

$$\int \frac{x \cdot \partial x}{a^2-x^2} = \tfrac{1}{2} ln \frac{1}{a^2-x^2} \quad (58)$$

$$\int \frac{x^2\,\partial x}{1+x^2} = x - Arc\,tg\,x \quad (59)$$

$$\int \frac{x^2\,\partial x}{1-x^2} = -x + \tfrac{1}{2} ln\,\frac{1+x}{1-x} \quad (60)$$

$$\int \frac{x^2\,\partial x}{x^2-1} = x + \tfrac{1}{2} ln\,\frac{x-1}{x+1} \quad (61)$$

$$\int \frac{x^2\,\partial x}{x^2+a^2} = x - a\,Arc\,tg\,\frac{x}{a} \quad (62)$$

$$\int \frac{x^2\,\partial x}{x^2-a^2} = x + \frac{a}{2} ln\,\frac{x-a}{x+a} \quad (63)$$

$$\int \frac{x^2\,\partial x}{a^2-x^2} = -x + \frac{a}{2} ln\,\frac{a+x}{a-x} \quad (64)$$

$$\int \frac{x^3\,\partial x}{1+x^2} = \tfrac{1}{2}[x^2 - ln\,(1+x^2)] \quad (65)$$

$$\int \frac{x^3\,\partial x}{1-x^2} = -\tfrac{1}{2}[x^2 + ln\,(1-x^2)] \quad (66)$$

$$\int \frac{x^3\,\partial x}{x^2-1} = \tfrac{1}{2}[x^2 + ln\,(x^2-1)] \quad (67)$$

$$\int \frac{x^3\,\partial x}{x^2+a^2} = \tfrac{1}{2}[x^2 - a^2\,ln\,(x^2+a^2)] \quad (68)$$

$$\int \frac{x^3\,\partial x}{x^2-a^2} = \tfrac{1}{2}[x^2 + a^2(x^2-a^2)] \quad (69)$$

$$\int \frac{x^3\,\partial x}{a^2-x^2} = -\tfrac{1}{2}[x^2 + a^2\,ln\,(a^2-x^2)] \quad (70)$$

I.
$$\int \frac{\partial x}{x\,(1+x^2)} = \tfrac{1}{2}\,ln\,\frac{x^2}{1+x^2} \quad (71)$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2\,(1+x^2)} = -\left(\frac{1}{x} + Arc\,tg\,x\right) \quad (72)$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3\,(1+x^2)} = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} + ln\,\frac{x^2}{1+x^2}\right) \quad (73)$$

$$\int \frac{\partial x}{x^m\,(1+x^2)} = -\int \frac{\partial x}{x^{m-2}\,(1+x^2)} + \int \frac{\partial x}{x^m} \quad (74)$$

V.
$$\int \frac{\partial x}{x\,(1-x^2)} = \tfrac{1}{2}\,ln\,\frac{x^2}{1-x^2} \quad (75)$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2\,(1-x^2)} = -\frac{1}{x} + \tfrac{1}{2}\,ln\,\frac{1+x}{1-x} \quad (76)$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3\,(1-x^2)} = \tfrac{1}{2}\left[-\frac{1}{x^2} + ln\,\frac{x^2}{1-x^2}\right] \quad (77)$$

$$\int \frac{\partial x}{x^m\,(1-x^2)} = \int \frac{\partial x}{x^{m-2}\,(1-x^2)} + \int \frac{\partial x}{x^m} \quad (78)$$

V.
$$\int \frac{\partial x}{x\,(x^2-1)} = \tfrac{1}{2}\,ln\,\frac{x^2-1}{x^2} \quad (79)$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2\,(x^2-1)} = \frac{1}{x} + \tfrac{1}{2}\,ln\,\frac{x-1}{x+1} \quad (80)$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3\,(x^2-1)} = \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2} + ln\,\frac{x^2-1}{x^2}\right] \quad (81)$$

$$\int \frac{\partial x}{x^m\,(x^2-1)} = \int \frac{\partial x}{x^{m-2}\,(x^2-1)} - \int \frac{\partial x}{x^m} \quad (82)$$

VI.
$$\int \frac{\partial x}{x\,(x^2+a^2)} = \frac{1}{2a^2}\,ln\,\frac{x^2}{x^2+a^2} \quad (83)$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2(x^2+a^2)} = -\frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{a}\,Arc\,tg\left(\frac{x}{a}\right)\right] \quad (84)$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3(x^2+a^2)} = -\frac{1}{2a^2}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{a^2}\,ln\,\frac{x^2}{x^2+a^2}\right] \quad (85)$$

$$\int \frac{\partial x}{x^m\,(x^2+a^2)} = -\int \frac{\partial x}{a^2\,x^{m-2}\,(x^2+a^2)} + \int \frac{\partial x}{a^2\,x^m} \quad (86)$$

II.
$$\int \frac{\partial x}{x\,(x^2-a^2)} = \frac{1}{2a^2}\,ln\,\frac{x^2-a^2}{x^2} \quad (87)$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2(x^2-a^2)} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2a} ln \frac{x-a}{x+a} + \frac{1}{x}\right] \quad (88)$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2(x^2-a^2)} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2a^2} ln \frac{x^2-a^2}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right] \quad (89)$$

$$\int \frac{\partial x}{x^m(x^2-a^2)} = \frac{1}{a^2}\left[\int \frac{\partial x}{x^{m-2}(x^2-a^2)} - \int \frac{\partial x}{x^m}\right] \quad (90)$$

XVIII.

$$\int \frac{\partial x}{x(a^2-x^2)} = \frac{1}{2a^2} ln \frac{x^2}{a^2-x^2} \quad (91)$$

$$\int \frac{\partial x}{x^2(a^2-x^2)} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2a} ln \frac{a+x}{a-x} - \frac{1}{x}\right] \quad (92)$$

$$\int \frac{\partial x}{x^3(a^2-x^2)} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2a^2} ln \frac{x^2}{a^2-x^2} - \frac{1}{2x^2}\right] \quad (93)$$

$$\int \frac{\partial x}{x^m(a^2-x^2)} = \frac{1}{a^2}\left[\int \frac{\partial x}{x^{m-2}(a^2-x^2)} + \int \frac{\partial x}{x^m}\right] \quad (94)$$

XIX.

$$\int \frac{\partial x}{a+cx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ac}\sqrt{-1}} ln \frac{1+x\sqrt{\frac{c}{a}}\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{\frac{c}{a}}\sqrt{-1}} \quad (95)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ac}} Arc\,tg\left(x\sqrt{\frac{c}{a}}\right) \quad (96)$$

$$\int \frac{\partial x}{a-cx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ac}} ln \frac{1+x\sqrt{\frac{c}{a}}}{1-x\sqrt{\frac{c}{a}}} \quad (97)$$

$$= \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{ac}} Arc\,tg \frac{x\sqrt{\frac{c}{a}}}{\sqrt{-1}} \quad (98)$$

$$\int \frac{x\,\partial x}{a+cx^2} = \frac{1}{2c} ln(a+cx^2) \quad (99)$$

$$\int \frac{x\,\partial x}{a-cx^2} = -\frac{1}{2c} ln(a-cx^2) \quad (100)$$

$$\int \frac{x^2\,\partial x}{a+cx^2} = \frac{1}{c}\left[x - \sqrt{\frac{a}{c}}\, arc\,tg\left(x\sqrt{\frac{c}{a}}\right)\right] \quad (101)$$

$$\int \frac{x^2\,\partial x}{a-cx^2} = \frac{1}{c}\left[-x + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{c}}\, ln \frac{1+x\sqrt{\frac{c}{a}}}{1-x\sqrt{\frac{c}{a}}}\right] \quad (102)$$

$$\int \frac{x^3\,\partial x}{a+cx^2} = \frac{1}{2c}\left[x^2 - \frac{a}{c} ln(a+cx^2)\right] \quad (103)$$

$$\int \frac{x^3\,\partial x}{a-cx^2} = -\frac{1}{2c}\left[x^2 + \frac{a}{c} ln(a-cx^2)\right] \quad (104)$$

XX.

$$\int \frac{\partial x}{a+bx+x^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4a}} ln \frac{2x+b-\sqrt{b^2-4a}}{2x+b+\sqrt{b^2-4a}} \quad (105)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4a-b^2}}\, arc\,tg \frac{2x+b}{\sqrt{4a-b^2}} \quad (106)$$

$$= -\frac{2}{b+2x} \quad (107)$$

$$\int \frac{\partial x}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln \frac{b+2cx-\sqrt{b^2-4ac}}{b+2cx+\sqrt{b^2-4ac}} \tag{108}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{Arc\,tg} \frac{b+2cx}{\sqrt{4ac-b^2}} \tag{109}$$

$$= -\frac{4a}{b(2a+bx)} \tag{110}$$

$$\int \frac{\partial x}{1+x+x^2} = \tfrac{2}{3}\sqrt{3} \operatorname{Arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \tag{111}$$

$$\int \frac{\partial x}{1+x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \frac{1-2x-\sqrt{5}}{1-2x+\sqrt{5}} \tag{112}$$

$$\int \frac{\partial x}{1-x+x^2} = \tfrac{2}{3}\sqrt{3} \operatorname{Arc\,tg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \tag{113}$$

$$\int \frac{\partial x}{-1+x+x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \frac{1+2x-\sqrt{5}}{1+2x+\sqrt{5}} \tag{114}$$

$$\int \frac{\partial x}{-1-x+x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \frac{-1+2x-\sqrt{5}}{-1+2x+\sqrt{5}} \tag{115}$$

$$\int \frac{\partial x}{-1+x-x^2} = \tfrac{2}{3}\sqrt{3} \operatorname{Arc\,tg} \frac{1-2x}{\sqrt{3}} \tag{116}$$

$$\int \frac{\partial x}{+1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \frac{-1-2x-\sqrt{5}}{-1-2x+\sqrt{5}} \tag{117}$$

$$= -\frac{2\sqrt{5}}{5}\sqrt{-1} \operatorname{Arc\,tg} \frac{1+2x}{5}\sqrt{5}\cdot\sqrt{-1} \tag{118}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{-5}} \operatorname{Arc\,tg} \frac{1+2x}{\sqrt{-5}}$$

$$\int \frac{\partial x}{bx+cx^2} = \frac{1}{b} \ln \frac{cx}{b+cx} \tag{119}$$

$$= \frac{2}{b\sqrt{-1}} \operatorname{Arc\,tg} \frac{b+2cx}{b\sqrt{-1}} \tag{120}$$

$$\int \frac{\partial x}{bx-cx^2} = \frac{1}{b} \ln \frac{cx}{b-cx} \tag{121}$$

$$= \frac{2}{b\sqrt{-1}} \operatorname{Arc\,tg} \frac{b-2cx}{b\sqrt{-1}} \tag{122}$$

XXI.

$$\int \frac{x\,\partial x}{a+bx+x^2} = \tfrac{1}{2}\ln(a+bx+x^2) - \frac{b}{2}\int \frac{\partial x}{a+bx+x^2} \tag{123}$$

$$\int \frac{x\,\partial x}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{2c}\ln(a+bx+cx^2) - \frac{b}{2c}\int \frac{\partial x}{a+bx+cx^2} \tag{124}$$

$$\int \frac{(x+A)\,\partial x}{a+bx+x^2} = \tfrac{1}{2}\ln(a+bx+x^2) + \frac{A-\frac{1}{2}b}{2}\int \frac{\partial x}{a+bx+x^2} \tag{125}$$

$$\int \frac{(x+A)\,\partial x}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{2c}\ln(a+bx+cx^2) + \frac{A-\frac{1}{2}b}{2c}\int \frac{\partial x}{a+bx+cx^2} \tag{126}$$

$$\int \frac{\partial x}{x(a+bx+x^2)} = \frac{1}{2a}\left[\ln \frac{x^2}{a+bx+x^2} - b\int \frac{\partial x}{a+bx+x^2}\right] \tag{127}$$

$$\int \frac{\partial x}{x(a+bx+cx^2)} = \frac{1}{2a}\left[\ln \frac{x^2}{a+bx+cx^2} - b\int \frac{\partial x}{a+bx+cx^2}\right] \tag{128}$$

$$\int \frac{\partial x}{x(bx+cx^2)} = \frac{1}{b}\left[-x + \frac{c}{b}\ln \frac{b+cx}{x}\right] \tag{129}$$

$$\int \frac{\partial x}{x(bx-cx^2)} = \frac{1}{b}\left[-\frac{1}{x} + \ln \frac{x}{b-cx}\right] \tag{130}$$

$$\int \frac{\partial x}{x(a+cx^2)} = \frac{1}{2a}\ln \frac{x^2}{a+cx^2} \tag{131}$$

$$\int \frac{\partial x}{x(a-cx^2)} = \frac{1}{2a}\ln \frac{x^2}{a-cx} \tag{132}$$

XXII. $$\int \frac{\partial x}{(a+bx+x^2)^m} = \frac{-(x+\frac{1}{2}b)}{2(m-1)\left(\frac{b^2}{4}-a\right)(a+bx+x^2)^{m-1}} - \frac{2m-3}{2(m-1)\left(\frac{b^2}{4}-a\right)} \int \frac{\partial x}{(a+bx+x^2)^{m-1}} \quad (133)$$

$$\int \frac{\partial x}{(a+bx+x^2)^2} = -\frac{x+\frac{1}{2}b}{2\left(\frac{b^2}{4}-a\right)(a+bx+x^2)} - \frac{1}{2\left(\frac{b^2}{4}-a\right)} \int \frac{\partial x}{(a+bx+x^2)} \quad (134$$

$$\int \frac{\partial x}{(a+bx+x^2)^3} = \frac{-(x+\frac{1}{2}b)}{4\left(\frac{b^2}{4}-a\right)(a+bx+x^2)^2} - \frac{3}{4\left(\frac{b^2}{4}-a\right)} \int \frac{\partial x}{(a+bx+x^2)^2} \quad (1$$

$$\int \frac{\partial x}{(a+bx+cx^2)^m} = -\frac{1}{2(m-1)\left(\frac{b^2}{4c}-a\right)} \left[\frac{x+\frac{b}{2c}}{(a+bx+cx^2)^{m-1}} + (2m-3) \int \frac{\partial x}{(a+bx+cx^2)^{m-1}} \right] \quad (1$$

$$\int \frac{\partial x}{(a+bx+cx^2)^2} = -\frac{1}{2\left(\frac{b^2}{4c}-a\right)} \left[\frac{x+\frac{b}{2c}}{a+bx+cx^2} + \int \frac{\partial x}{a+bx+cx^2} \right] (1$$

$$\int \frac{\partial x}{(a+bx+cx^2)^3} = \frac{-1}{4\left(\frac{b^2}{4c}-a\right)} \left[\frac{x+\frac{b}{2c}}{(a+bx+cx^2)^2} + 3 \int \frac{\partial x}{(a+bx+cx^2)^2} \right] (1$$

XXIII. $$\int \frac{x\,\partial x}{(a+bx+x^2)^m} = \frac{1}{2(m-1)\left(\frac{b^2}{4}-a\right)} \left[\frac{a+\frac{1}{2}bx}{(a+bx+x^2)^{m-1}} + \frac{1}{2}b(2m-3) \int \frac{\partial x}{(a+bx+x^2)^{m-1}} \right] \quad (1$$

$$\int \frac{x\,\partial x}{(a+bx+cx^2)^m} = \frac{-1}{2c(m-1)\left(\frac{b^2}{4c}-a\right)} \left[\frac{a+\frac{b}{2}x}{(a+bx+cx^2)^{m-1}} + \frac{b}{2}(2m-3) \int \frac{\partial x}{(a+bx+cx^2)^{m-1}} \right] \quad (14$$

$$\int \frac{x\,\partial x}{(a+bx+x^2)^2} = \frac{1}{2\left(\frac{b^2}{4}-a\right)} \left[\frac{a+\frac{1}{2}bx}{a+bx+x^2} + \frac{1}{2}b \int \frac{\partial x}{a+bx+x^2} \right] \quad (141$$

$$\int \frac{x\,\partial x}{(a+bx+cx^2)^2} = \frac{-1}{2c\left(\frac{b^2}{4c}-a\right)} \left[\frac{a+\frac{b}{2}x}{a+bx+cx^2} + \frac{b}{2} \int \frac{\partial x}{a+bx+cx^2} \right] (14$$

IV. $$\int \frac{\partial x}{a+bx^3} = \frac{1}{6ac}\left[ln \frac{(1+cx)^3}{1-cx+c^2x^2} + 2\sqrt{3}\, Arc\, tg \frac{2cx-1}{\sqrt{3}}\right] \quad (143)$$

wo $c = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ bedeutet.

$$\int \frac{x\,\partial x}{a+bx^3} = \frac{1}{6ac^2}\left[ln \frac{1-cx+c^2x^2}{(1+cx)^2} + 2\sqrt{3}\, Arc\, tg \frac{2cx-1}{\sqrt{3}}\right] \quad (144)$$

wo $c = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ bedeutet.

$$\int \frac{x^2\,\partial x}{a+bx^3} = \frac{1}{3b} ln\,(a+bx^3) \quad (145)$$

XV. $$\int \frac{\partial x}{a+bx^4} = \frac{1}{4ac\sqrt{2}}\left[ln \frac{1+cx\sqrt{2}+c^2x^2}{1-cx\sqrt{2}+c^2x^2} + 2\, Arc\, tg \frac{cx\sqrt{2}}{1-c^2x^2}\right] \left(c = \sqrt[4]{\frac{b}{a}}\right) \quad (146)$$

$$\int \frac{\partial x}{a-bx^4} = \frac{1}{4ac}\left[ln \frac{1+cx}{1-cx} + 2\, Arc\, tg\, cx\right] \left(c = \sqrt[4]{\frac{b}{a}}\right) \quad (147)$$

$$\left.\begin{aligned} \int \frac{x\,\partial x}{a+bx^4} &= \frac{1}{2ac^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{-1}} ln \frac{1+c^2x^2\sqrt{-1}}{1-c^2x^2\sqrt{-1}} \\ &= \frac{1}{2ac^2} Arc\, tg\,(c^2x^2) = \frac{1}{2\sqrt{ab}} Arc\, tg\left(x^2\sqrt{\frac{b}{a}}\right) \end{aligned}\right\} \quad (148)$$

$c = \sqrt[4]{\frac{b}{a}}$

$$\int \frac{x\,\partial x}{a-bx^4} = \frac{1}{4\sqrt{ab}} ln \frac{\sqrt{a}+x^2\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x^2\sqrt{b}} \quad (149)$$

$$\int \frac{x^2\,\partial x}{a+bx^4} = \frac{1}{4ac^3\sqrt{2}}\left[ln \frac{1-cx\sqrt{2}+c^2x^2}{1+cx\sqrt{2}+c^2x^2} + 2\, Arc \frac{cx\sqrt{2}}{1-c^2x^2}\right] \quad (150)$$

$$\int \frac{x^2\,\partial x}{a-bx^4} = \frac{1}{4ac^3}\left[ln \frac{1+cx}{1-cx} - 2\, Arc\, tg\, cx\right] \quad (151)$$

$$\int \frac{x^3\,\partial x}{a+bx^4} = \frac{1}{4b}(a+bx^4) \quad (152)$$

$$\int \frac{\partial x}{ax+bx^4} = \frac{1}{3a} ln \frac{x^3}{a+bx^3} \quad (153)$$

$$\int \frac{\partial x}{x(x+bx^4)} = \frac{1}{4a} ln \frac{x^4}{a+bx^4} \quad (154)$$

$$\int \frac{\partial x}{bx^2+cx^4} = -\frac{1}{bx} - \frac{\sqrt{c}}{b\sqrt{b}} Arc\, x\sqrt{\frac{c}{b}} \quad (155)$$

$$\int \frac{\partial x}{x(bx^2+cx^4)} = -\frac{1}{2bx^2} + \frac{c}{2b^2} ln \frac{b+cx^2}{x^2} \quad (156)$$

XVI. $$y = \int \frac{\partial x}{a+bx^2+cx^4} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\left[\frac{1}{q} Arc\, tg \frac{x}{q} - \frac{1}{p} Arc\, tg \frac{x}{p}\right] \quad (157, A)$$

reell für $b^2 > 4ac$.

$$= \frac{1}{8cg^3 \cos\alpha}\left[ln \frac{x^2+2gx\cos\alpha+g^2}{x^2-2gx\cos\alpha+g^2} + 2\cot\alpha\, Arc\, tg \frac{2gx\sin\alpha}{g^2-x^2}\right] \quad (157, B)$$

reell wenn $b^2 < 4ac$

$$= \frac{x}{2a+bx^2} + \frac{1}{\sqrt{2ab}} Arc\, tg\, x\sqrt{\frac{b}{2a}} \quad (157, C)$$

gültig für $b^2 = 4ac$.

Die Bedeutung der Buchstaben p, q, g, α s. Erläuterungen.

$$y=\int\frac{x\,\partial x}{a+bx^2+cx^4}=\frac{1}{2\sqrt{b^2-4ac}}\,ln\,\frac{b+2cx^2-\sqrt{b^2-4ac}}{b+2cx^2+\sqrt{b^2-4ac}}$$

reell für $b^2>4ac$

$$=\frac{1}{\sqrt{4ac-b^2}}\,Arc\,tg\,\frac{b+2cx^2}{\sqrt{4ac-b^2}}$$

reell wenn $b^2<4ac$

$$=-\frac{2a}{b\,(2a+bx^2)}$$

gültig für $b^2=4ac$

$$y=\int\frac{x^2\,\partial x}{a+bx^2+cx^4}=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\left[p\,arc\,tg\,\frac{x}{p}-q\,arc\,tg\,\frac{x}{q}\right]$$

reell für $b^2>4ac$

$$=\frac{1}{8cg\,cos\,\alpha}\left[ln\,\frac{x^2-2gx\,cos\,\alpha+g^2}{x^2+2gx\,cos\,\alpha+g^2}+2\,cot\,\alpha\cdot Arc\,tg\,\frac{2gx\,sin\,\alpha}{g^2-x^2}\right]$$

reell für $b^2<4ac$

$$=\frac{2a}{b}\left[-\frac{x}{2a+bx^2}+\frac{1}{\sqrt{2ab}}\,Arc\,tg\,x\sqrt{\frac{b}{2a}}\right]$$

gültig für $b^2=4ac$

$$y=\int\frac{x^3\,\partial x}{a+bx^2+cx^4}=\frac{1}{4c}\,ln\,(a+bx^2+cx^4)-\frac{b}{2c}\int\frac{x\,\partial x}{a+bx+cx^4}$$

Die Ergänzung des I mit der Auflösung des I im 2ten Gliede geschiel Formel 158 A, B, C.

$$y=\int\frac{\partial x}{x(a+bx^2+cx^4)}=\frac{1}{4a}\,ln\,\frac{x^4}{a+bx^2+cx^4}-\frac{b}{2a}\int\frac{x\,\partial x}{a+bx^2+cx^4}$$

Die Ergänzung des I durch Formel 158, A, B, C.

$$y=\int\frac{\partial x}{1+x^2+x^4}\quad=\tfrac{1}{4}\left[ln\,\frac{1+x^2+x^4}{1-x^2+x^4}+\tfrac{1}{3}\sqrt{3}\,Arc\,tg\,\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}\right]$$

$$y=\int\frac{\partial x}{1+x^2-x^4}\quad=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\,Arc\,tg\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right.$$

$$\left.-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\cdot i\,Arc\,tg\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\,Arc\,tg\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\,ln\,\frac{\sqrt{2}+x\sqrt{-1+}}{\sqrt{2}-x\sqrt{-1+}}\right.$$

B. Von irrationalen Gröfsen.

XXVII. $$\int\sqrt[n]{x}\,\partial x=\int x^{\frac{1}{n}}\,\partial x=\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}=\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}$$

$$\int\sqrt[n]{\varphi x}\,\varphi' x\,\partial x=\int(\varphi x)^{\frac{1}{n}}\,\varphi' x\,\partial x=\frac{(\varphi x)^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}=\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{(\varphi x)^{n+1}}$$

$$\int\sqrt{x}\,\partial x=\int x^{\frac{1}{2}}\,\partial x=\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=\tfrac{2}{3}\sqrt{x^3}$$

$$\int\sqrt[3]{x}\,\partial x=\int x^{\frac{1}{3}}\,\partial x=\tfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}=\tfrac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}$$

$$\int\sqrt[4]{x}\,\partial x=\int x^{\frac{1}{4}}\,\partial x=\tfrac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}=\tfrac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}$$

$$\int\sqrt[5]{x}\,\partial x=\int x^{\frac{1}{5}}\,\partial x=\tfrac{5}{6}x^{\frac{6}{5}}=\tfrac{5}{6}\sqrt[5]{x^6}$$

XVIII. $$\int \frac{\partial x}{\sqrt[n]{x}} = \int x^{-\frac{1}{n}}\,\partial x = \frac{x^{-\frac{1}{n}+1}}{-\frac{1}{n}+1} = \frac{n}{n-1}\,x^{\frac{n-1}{n}} = \frac{n}{n-1}\sqrt[n]{x^{n-1}} \quad (168)$$

$$\int \frac{\varphi' x\cdot \partial x}{\sqrt[n]{\varphi x}} = \int (\varphi x)^{-\frac{1}{n}}\,\varphi' x\,\partial x = \frac{n}{n-1}\,(\varphi x)^{\frac{n-1}{n}} = \frac{n}{n-1}\sqrt[n]{(\varphi x)^{n-1}} \quad (169)$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}\,\partial x = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = 2\sqrt{x} \quad (170)$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{1}{3}}\,\partial x = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} = \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} \quad (171)$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[4]{x}} = \int x^{-\frac{1}{4}}\,\partial x = \frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1} = \tfrac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} \quad (172)$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[5]{x}} = \int x^{-\frac{1}{5}}\,\partial x = \frac{x^{-\frac{1}{5}+1}}{-\frac{1}{5}+1} = \tfrac{5}{4}\sqrt[5]{x^4} \quad (173)$$

XXIX. $$\int x^{\frac{m}{n}}\,\partial x = \int \sqrt[n]{x^m}\,\partial x = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} = \frac{n}{m+n}\,x^{\frac{m+n}{n}} = \frac{n}{m+n}\sqrt[n]{x^{m+n}} \quad (174)$$

$$\int \sqrt{x^3}\,\partial x = \tfrac{2}{5}\sqrt{x^5} \quad (175)$$

$$\int \sqrt{x^5}\,\partial x = \tfrac{2}{7}\sqrt{x^7} \quad (176)$$

$$\int \sqrt[3]{x^2}\,\partial x = \tfrac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} \quad (177)$$

$$\int \sqrt[3]{x^4}\,\partial x = \tfrac{3}{7}\sqrt[3]{x^7} \quad (178)$$

$$\int \sqrt[3]{x^5}\,\partial x = \tfrac{3}{8}\sqrt[3]{x^8} \quad (179)$$

$$\int \sqrt[4]{x^3}\,\partial x = \tfrac{4}{7}\sqrt[4]{x^7} \quad (180)$$

$$\int \sqrt[4]{x^5}\,\partial x = \tfrac{4}{9}\sqrt[4]{x^9} \quad (181)$$

XXX. $$\int x^{-\frac{m}{n}}\,\partial x = \int \frac{\partial x}{x^{\frac{m}{n}}} = \frac{x^{-\frac{m}{n}+1}}{-\frac{m}{n}+1} = \frac{n}{n-m}\,x^{\frac{n-m}{n}} \quad (182)$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{x^3}} = -\frac{2}{\sqrt{x}} \quad (183)$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{x^5}} = -\tfrac{2}{3}\,\frac{1}{\sqrt{x^3}} \quad (184)$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{x^2}} = 3\sqrt[3]{x} \quad (185)$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{x^4}} = -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} \quad (186)$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{x^5}} = -\tfrac{3}{2}\,\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \quad (187)$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[4]{x^3}} = 4\sqrt[4]{x} \quad (188)$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[4]{x^5}} = -4\,\frac{1}{\sqrt[4]{x}} \quad (189)$$

XXXI.

$$\int (a+bx)^{\frac{m}{n}}\,\partial x = \frac{n}{m+n}\cdot\frac{(a+bx)^{\frac{m+n}{n}}}{b} \tag{190}$$

$$\int (a-bx)^{\frac{m}{n}}\,\partial x = -\frac{n}{m+n}\cdot\frac{(a-bx)^{\frac{m+n}{n}}}{b} \tag{191}$$

$$\int (a+bx)^{-\frac{m}{n}}\,\partial x = \frac{n}{n-m}\cdot\frac{(a+bx)^{\frac{n-m}{n}}}{b} \tag{192}$$

$$\int (a-bx)^{-\frac{m}{n}}\,\partial x = -\frac{n}{n-m}\cdot\frac{(a-bx)^{\frac{n-m}{n}}}{b} \tag{193}$$

$$\int \sqrt{a+bx}\,\partial x = \tfrac{2}{3}\,\frac{a+bx}{b}\sqrt{a+bx} \tag{194}$$

$$\int \sqrt{a-bx}\,\partial x = -\tfrac{2}{3}\,\frac{a-bx}{b}\sqrt{a-bx} \tag{195}$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a+bx}} = 2\,\frac{\sqrt{a+bx}}{b} \tag{196}$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a-bx}} = -2\,\frac{\sqrt{a-bx}}{b} \tag{197}$$

$$\int \sqrt[3]{a+bx}\,\partial x = \tfrac{3}{4}\,\frac{a+bx}{b}\sqrt[3]{a+bx} \tag{198}$$

$$\int \sqrt[3]{a-bx}\,\partial x = -\tfrac{3}{4}\,\frac{a-bx}{b}\sqrt[3]{a-bx} \tag{199}$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{a+bx}} = \frac{3}{2b}\sqrt[3]{(a+bx)^2} \tag{200}$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{a-bx}} = -\frac{3}{2b}\sqrt[3]{(a-bx)^2} \tag{201}$$

$$\int \sqrt[3]{(a+bx)^2}\,\partial x = \frac{3}{5b}(a+bx)\sqrt[3]{(a+bx)^2} \tag{202}$$

$$\int \sqrt[3]{(a-bx)^2}\,\partial x = -\frac{3}{5b}(a-bx)\sqrt[3]{(a-bx)^2} \tag{203}$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}} = 3\,\frac{\sqrt[3]{a+bx}}{b} \tag{204}$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(a-bx)^2}} = -3\,\frac{\sqrt[3]{a-bx}}{b} \tag{205}$$

XXXII.

$$\int x^m (a+bx)^{\frac{n}{p}}\,\partial x = \left(\frac{1}{b}\right)^{m+1}\Big[\int (a+bx)^{\frac{n}{p}+m} b\,\partial x - m_1 a \int (a+bx)^{\frac{n}{p}+m-1} b\,\partial x$$
$$+ m_2 a^2 \int (a+bx)^{\frac{n}{p}+m-2} b\,\partial x - m_3 a^3 \int (a+bx)^{\frac{n}{p}+m-3} b\,\partial x + \ldots.$$
$$\mp m a^{m-1}\int (a+bx)^{\frac{n}{p}+1} b\,\partial x \pm a^m \int (a+x)^{\frac{n}{p}} b\,\partial x\Big] \tag{206}$$

dasselbe Integral

$$\int x^m (a+bx)^{\frac{n}{p}}\,\partial x = x^m \frac{(a+bx)^{\frac{n}{p}+1}}{b\left(\frac{n}{p}+1\right)} - \frac{m}{b\left(\frac{n}{p}+1\right)}\int x^{m-1}(a+bx)^{\frac{n}{p}+1}\,\partial x \tag{207}$$

$$\int x\sqrt{a+bx}\,\partial x = \frac{2}{15\cdot b^2}(3bx-2a)(a+bx)^{\frac{3}{2}} \tag{208}$$

$$\int x\sqrt{a-bx}\,\partial x = -\frac{2}{15\cdot b^2}(3bx+2a)(a-bx)^{\frac{3}{2}} \tag{209}$$

$$\int\frac{x\,\partial x}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{3b^2}(bx-2a)\sqrt{a+bx} \tag{210}$$

$$\int\frac{x\,\partial x}{\sqrt{a-bx}} = -\frac{2}{3b^2}(bx+2a)\sqrt{a-bx} \tag{211}$$

$$\int\frac{\sqrt{a+bx}}{x}\partial x = 2\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}\,ln\frac{2a+bx-2\sqrt{a+bx}}{x} \tag{212}$$

$$\int\frac{\sqrt{a-bx}}{x}\partial x = -2\sqrt{a-bx}+\sqrt{a}\,ln\frac{-2a+bx+2\sqrt{a}\sqrt{a-bx}}{x} \tag{213}$$

$$\int\frac{\partial x}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}}ln\frac{2a+bx-2\sqrt{a}\sqrt{a+bx}}{x} \tag{214}$$

$$\int\frac{\partial x}{x\sqrt{a-bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}}ln\frac{-2a+bx+2\sqrt{a}\sqrt{a-bx}}{x} \tag{215}$$

$$\int x(a+bx)^{\frac{3}{2}}\partial x = \frac{2}{35\cdot b^2}(5bx-2a)(a+bx)^{\frac{5}{2}} \tag{216}$$

$$\int x^2\sqrt{a+bx}\,\partial x = \frac{2}{105\cdot b^3}(8a^2-12abx+15b^2x^2)(a+bx)^{\frac{3}{2}} \tag{217}$$

$$\int x^2(a+bx)^{\frac{1}{2}}\partial x = \frac{2}{315\cdot b^3}(8a^2-20abx+35b^2x^2)(a+bx)^{\frac{5}{2}} \tag{218}$$

XXIII. $$\int\sqrt{a+bx^2}\,\partial x = \tfrac{1}{2}x\sqrt{a+bx^2}+\frac{a}{2}\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx^2}} \tag{219}$$

$$\int\sqrt{a-bx^2}\,\partial x = \tfrac{1}{2}x\sqrt{a-bx^2}+\frac{a}{2}\int\frac{\partial x}{\sqrt{a-bx^2}} \tag{220}$$

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{b}}ln\left(\sqrt{a+bx^2}-x\sqrt{b}\right) \tag{221 A}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}}ln\frac{x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2}-\sqrt{a}}{x\sqrt{b}-\sqrt{a+bx^2}+\sqrt{a}} \tag{221 B}$$

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a-bx^2}} = \frac{2}{\sqrt{b}}Arc\,tg\sqrt{\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}} \tag{222 A}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}}Arc\,sin\,x\sqrt{\frac{b}{a}} \tag{222 B}$$

$$\int x\sqrt{a+bx^2}\,\partial x = \frac{1}{3b}(a+bx^2)^{\frac{3}{2}} \tag{223}$$

$$\int x\sqrt{a-bx^2}\,\partial x = -\frac{1}{3b}(a-bx^2)^{\frac{3}{2}} \tag{224}$$

$$\int\frac{x\,\partial x}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{b}\sqrt{a+bx^2} \tag{225}$$

$$\int\frac{x\,\partial x}{\sqrt{a-bx^2}} = -\frac{1}{b}\sqrt{a-bx^2} \tag{226}$$

XXIV. $$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}ln\left[\sqrt{a+bx+cx^2}+\frac{b+2cx}{2\sqrt{c}}\right] \tag{227}$$

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{2}{\sqrt{c}}Arc\,tg\frac{\sqrt{4ac-b^2}+b+2cx}{\sqrt{4ac-b^2}-b-2cx} \tag{228 A}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}}Arc\,sin\frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}} \tag{228 B}$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{-a+bx+cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{c}} ln\left(\frac{b+2cx}{2\sqrt{c}} - \sqrt{-a+bx+cx^2}\right) \quad (229)$$

$$\int \frac{x\,\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{c}\sqrt{a+bx+cx^2} - \frac{b}{2c}\int \frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \quad (230)$$

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{a+bx+cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{a}} ln \frac{2a+bx+2\sqrt{a}\sqrt{a+bx+cx^2}}{x} \quad (231)$$

$$\int \sqrt{a+bx+cx^2}\,\partial x = \frac{b+2cx}{4c}\sqrt{a+bx+cx^2} + \frac{4ac-b^2}{8c}\int \frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \quad (232)$$

$$\int x\sqrt{a+bx+cx^2}\,\partial x = \frac{1}{3c}(a+bx+cx^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{b}{2c}\int \sqrt{a+bx+cx^2}\,\partial x \quad (233)$$

$$\int \frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{x}\partial x = \sqrt{a+bx+cx^2} + a\int \frac{\partial x}{x\sqrt{a+bx+cx^2}} + \frac{b}{2}\int \frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \quad (234)$$

II. Von transcendenten Grösen.

A. Von Exponentialgrösen.

XXXV. $\int e^x\,\partial x = e^x$ (235)

$$\int e^{\varphi x}\,\varphi' x\,\partial x = e^{\varphi x} \quad (236)$$

$$\int a^x\,\partial x = \frac{a^x}{ln\,a} \quad (237)$$

$$\int a^{\varphi x}\,\varphi' x\,\partial x = \frac{a^{\varphi x}}{ln\,a} \quad (238)$$

$$\int x^n e^x\,\partial x = nx^x - n\int e^x x^{n-1}\,\partial x \quad (239)$$

$$\int xe^x\,\partial x = (x-1)e^x$$

$$\int x^2 e^x\,\partial x = (x^2-2x+2)e^x$$

$$\int x^3 e^x\,\partial x = (x^3-3x^2+6x-6)e^x$$

$$\int x^4 e^x\,\partial x = (x^4-4x^3+12x^2-24x+24)e^x$$

$$\int x^n a^x\,\partial x = \frac{x^n a^x}{ln\,a} - \frac{n}{ln\,a}\int x^{n-1} a^x\,\partial x \quad (240)$$

$$\int xa^x\,\partial x = \frac{1}{ln\,a}(x-1)a^x$$

$$\int x^2 a^x\,\partial x = \frac{1}{ln\,a}(x^2-2x+2)a^x$$

$$\int \frac{e^x\,\partial x}{x^n} = \int x^{-n} e^x\,\partial x = -\frac{e^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int x^{-n+1} e^x\,\partial x \quad (241)$$

$$\int \frac{a^x\,\partial x}{x^n} = \int x^{-n} a^x\,\partial x = -\frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{ln\,a}{n-1}\int x^{-n+1} a^x\,\partial x \quad (242)$$

$$\int \frac{e^x\,\partial x}{x} = \int x^{-1} e^x\,\partial x = ln\,x + x + \frac{x^2}{2\cdot 2} + \frac{x^3}{2\cdot 3\cdot 3} + \ldots + \frac{x^m}{2\cdot 3\cdot 4\ldots m\,m} \quad (243)$$

$$\int \frac{a^x\,\partial x}{x} = \int x^{-1} a^x\,\partial x = ln\,x + x\,ln\,a + \frac{(x\,ln\,a)^2}{2\cdot 2} + \ldots + \frac{(x\,ln\,a)^m}{2\cdot 3\ldots m\,m} \quad (244)$$

$$\int \frac{e^x\,\partial x}{x^2} = -\frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x\,\partial x}{x}$$

$$\int \frac{a^x\,\partial x}{x^2} = -\frac{a^x}{x} + ln\,a\int \frac{a^x\,\partial x}{x}$$

$$\int \frac{e^x\,\partial x}{x^3} = -\frac{e^x}{2x^2} - \frac{e^x}{2x} + \frac{1}{2}\int \frac{e^x\,\partial x}{x}$$

$$\int \frac{a^x\,\partial x}{x^3} = -\frac{a^x}{2x^2} - \frac{ln\,a \cdot a^x}{2x} + \frac{ln\,a}{2}\int \frac{a^x\,\partial x}{x}$$

$$\int \frac{\partial x}{e^x} = -\frac{1}{e^x} \tag{245}$$

$$\int \frac{\partial x}{a^x} = -\frac{1}{a^x\,ln\,a} \tag{246}$$

$$\int \frac{x^n\,\partial x}{e^x} = \int (ln\,z)^n z^{-2}\,\partial z = -\frac{(ln\,z)^n}{z} + n\int \frac{(ln\,z)^{n-1}\,\partial z}{z^2} \tag{247}$$

$= e^x$

$$\int \frac{x\,\partial x}{e^x} = -\frac{1+x}{e^x} \tag{248}$$

$$\int \frac{x^2\,\partial x}{e^x} = -\frac{2+2x+x^2}{e^x} \tag{249}$$

$$\int \frac{x^3\,\partial x}{e^x} = -\frac{1}{e^x}(6+6x+3x^2+x^3) \tag{250}$$

$$\int \frac{x^n\,\partial x}{a^x} = \left(\frac{1}{ln\,a}\right)^{n+1} \int (ln\,z)^n z^{-2}\,\partial z$$

$$= \left(\frac{1}{ln\,a}\right)^{n+1}\left[-\frac{(ln\,z)^n}{z} + n\int \frac{(ln\,z)^{n-1}\,\partial z}{z^2}\right] \tag{251}$$

$$\int \frac{x\,\partial x}{a^x} = -\frac{1+x\,ln\,a}{(ln\,a)^2\,a^x} \tag{252}$$

$$\int \frac{x^2\,\partial x}{a^x} = -\frac{2+2x\,ln\,a+(x\,ln\,a)^2}{(ln\,a)^3\,a^x} \tag{253}$$

B. Von logarithmischen Gröfsen.

XXXVI. $\int (ln\,x)^m\,\partial x = x(ln\,x)^m - m\int (ln\,x)^{m-1}\,\partial x$ (254)

$\int ln\,x\,\partial x = x(ln\,x - 1)$

$\int (ln\,x)^2\,\partial x = x[(ln\,x)^2 - 2\,ln\,x + 2]$

$\int (ln\,x)^3\,\partial x = x[(ln\,x)^3 - 3\,(ln\,x)^2 + 6\,ln\,x - 6]$

XXXVII. $\int x^n (ln\,x)^m\,\partial x = \frac{1}{n+1}\left[(ln\,x)^m x^{n+1} - m\int x^n (ln\,x)^{m-1}\right]$ (255)

$\int x\,ln\,x\,\partial x = \frac{1}{4}x^2(2\,ln\,x - 1)$

$\int x^2\,ln\,x\,\partial x = \frac{1}{9}x^3(3\,ln\,x - 1)$

$\int x^3\,ln\,x\,\partial x = \frac{1}{16}x^4(4\,ln\,x - 1)$

$\int x^4\,ln\,x\,\partial x = \frac{1}{25}x^5(5\,ln\,x - 1)$

$\int x^n\,ln\,x\,\partial x = \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1}[(n+1)\,ln\,x - 1]$ (256)

XXXVIII. $\int x\,(ln\,x)^2\,\partial x = \frac{1}{4}x^2[2\,(ln\,x)^2 - 2\,ln\,x + 1]$

$\int x^2\,(ln\,x)^2\,\partial x = \frac{1}{27}x^3[9\,(ln\,x)^2 - 6\,ln\,x + 2]$

$\int x^3\,(ln\,x)^2\,\partial x = \frac{1}{64}x^4[16\,(ln\,x)^2 - 8\,ln\,x + 2]$

$\int x^4\,(ln\,x)^2\,\partial x = \frac{1}{125}x^5[25\,(ln\,x)^2 - 10\,ln\,x + 2]$

$\int x^n\,(ln\,x)^2\,\partial x = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^3}[(n+1)^2\,(ln\,x)^2 - 2\,(n+1)\,ln\,x + 2]$ (257)

XXXIX. $\int x\,(ln\,x)^3\,\partial x = \frac{1}{8}x^2[4\,(ln\,x)^3 - 6\,(ln\,x)^2 + 6\,ln\,x - 3]$

$\int x^2\,(ln\,x)^3\,\partial x = \frac{1}{27}x^3[9\,(ln\,x)^3 - 9\,(ln\,x)^2 + 6\,ln\,x - 2]$

$\int x^3\,(ln\,x)^3\,\partial x = \frac{1}{128}x^4[32\,(ln\,x)^3 - 24\,(ln\,x)^2 + 12\,ln\,x - 3]$

$\int x^4\,(ln\,x)^3\,\partial x = \frac{1}{625}x^5[125\,(ln\,x)^3 - 75\,(ln\,x)^2 + 30\,ln\,x - 6]$

$\int x^n\,(ln\,x)^3\,\partial x = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^4}[(n+1)^3\,(ln\,x)^3 - 3(n+1)^2\,(ln\,x)^2 + 6(n+1)\,ln\,x - 6]$ (258

XXXX. $\int x\,(ln\,x)^4\,\partial x = \frac{x^2}{8}[2(ln\,x)^4 - 4(ln\,x)^3 + 6(ln\,x)^2 - 6\,ln\,x + 3]$

$\int x^3(ln\,x)^4\,\partial x = \frac{x^3}{81}[27(ln\,x)^4 - 36(ln\,x)^3 + 36(ln\,x)^2 - 24\,ln\,x + 8]$

$\int x^3(ln\,x)^4\,\partial x = \frac{x^4}{128}[32(ln\,x)^4 - 32(ln\,x)^3 + 24(ln\,x)^2 - 12\,ln\,x + 3]$

$\int x^4(ln\,x)^4\,\partial x = \frac{x^5}{3125}[625(ln\,x)^4 - 500(ln\,x)^3 + 300(ln\,x)^2 - 120\,ln\,x + 24]$

$\int x^n(ln\,x)^4\,\partial x = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^5}[(n+1)^4(ln\,x)^4 - 4(n+1)^3(ln\,x)^3 + 12(n+1)^2(ln\,x)^2 - 24(n+1)\,ln\,x + 24]$ (259)

XXXXI. $\int \frac{x^n\,\partial x}{(ln\,x)^m} = -\frac{x^{n+1}}{(m-1)(ln\,x)^{m-1}} + \frac{n+1}{m-1}\int \frac{x^n\,\partial x}{(ln\,x)^{m-1}}$ (260)

$\int \frac{\partial x}{ln\,x} = ln(ln\,x) + ln\,x + \frac{(ln\,x)^2}{2\cdot 2} + \frac{(ln\,x)^3}{2\cdot 3\cdot 3} + \ldots + \frac{(ln\,x)^m}{2\cdot 3\cdot 4\ldots m\cdot m}$ (261)

$\int \frac{x\,\partial x}{ln\,x} = ln(ln\,x) + 2\,ln\,x + (ln\,x)^2 + \frac{1}{3}(ln\,x)^3 + \ldots + \frac{(ln\,x)^m}{3\cdot 4\ldots m}$ (262)

$\int \frac{x^2\,\partial x}{ln\,x} = ln(ln\,x) + 3\,ln\,x + \frac{3}{2}(ln\,x)^2 + \frac{1}{2}(ln\,x)^3 + \ldots + \frac{(ln\,x)^m}{2\cdot 4\cdot 5\ldots m}$ (263)

$\int \frac{x^n\,\partial x}{ln\,x} = ln(ln\,x) + (n+1)\,ln\,x + \frac{(n+1)^2}{2\cdot 2}(ln\,x)^2 + \frac{(n+1)^3}{2\cdot 3\cdot 3}(ln\,x)^3 + \ldots + \frac{(n+1)^m}{2\cdot 3\cdot 4\ldots m\cdot m}\cdot(ln\,x)^m$ (264)

XXXXII.

$\int \frac{\partial x}{(ln\,x)^2} = -\frac{x}{ln\,x} + ln(ln\,x) + ln\,x + \frac{(ln\,x)^2}{2\cdot 2} + \frac{(ln\,x)^3}{2\cdot 3\cdot 3} + \ldots \frac{(ln\,x)^m}{2\cdot 3\ldots m\cdot m}$ (265)

$\int \frac{x\,\partial x}{(ln\,x)^2} = -\frac{x^2}{ln\,x} + 2\left[ln(ln\,x) + 2\,ln\,x + (ln\,x)^2 + \frac{1}{3}(ln\,x)^3 + \ldots + \frac{(ln\,x)^m}{3\cdot 4\ldots m}\right]$ (266)

$\int \frac{x^2\,\partial x}{(ln\,x)^2} = -\frac{x^3}{ln\,x} + 3\left[ln(ln\,x) + 3\,ln\,x + \frac{3}{2}(ln\,x)^2 + \frac{1}{2}(ln\,x)^3 + \ldots + \frac{3}{2\cdot 4\ldots m}(ln\,x)^m\right]$ (267)

$\int \frac{x^n\,\partial x}{(ln\,x)^2} = -\frac{x^{n+1}}{ln\,x} + (n+1)\left[ln(ln\,x) + (n+1)(ln\,x) + \frac{n+1}{2}(ln\,x)^2 + \frac{n+1}{2\cdot 3}(ln\,x)^3 + \ldots + \frac{n+1}{2\cdot 3\ldots m}(ln\,x)^m\right]$ (268)

C. Von trigonometrischen Gröfsen.

XXXXIII. $\int sin\,x\,\partial x = -cos\,x$ (269)

$\int cos\,x\,\partial x = sin\,x$ (270)

$\int tg\,x\,\partial x = -ln\,cos\,x = ln\,sec\,x$ (271)

$\int cot\,x\,\partial x = ln\,sin\,x$ (272)

$\int sec\,x\,\partial x = ln(sec\,x + tg\,x)$ (273)

$\int cosec\,x\,\partial x = -ln(cosec\,x + cot\,x) = ln\,tg\,\frac{x}{2}$ (274)

$\int sinv\,x\,\partial x = x - sin\,x$ (275)

$\int cosv\,x\,\partial x = x + cos\,x$ (276)

XXXXIV. $\int sin^n x\,\partial x = -\frac{1}{n}sin^{n-1}x\,cos\,x + \frac{n-1}{n}\int sin^{n-2}x\,\partial x$ (277)

$\int sin^2 x\,\partial x = \frac{1}{2}(x - sin\,x\cdot cos\,x)$ (278)

$\int sin^3 x\,\partial x = -\frac{1}{3}cos\,x\,(2 + sin^2 x)$ (279)

$\int sin^4 x\,\partial x = \frac{1}{4}[\frac{3}{2}x - sin\,x\,cos\,x\,(\frac{3}{2} + sin^2 x)]$ (280)

XXV. $\int \cos^n x\,\partial x = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x$ (281)

$\int \cos^2 x\,\partial x = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x)$ (282)

$\int \cos^3 x\,\partial x = \frac{1}{3}\sin x\,(2 + \cos^2 x)$ (283)

$\int \cos^4 x\,\partial x = \frac{1}{4}[\frac{3}{2}x + \sin x \cos x\,(\frac{5}{2} + \cos^2 x)]$ (284)

XXVI. $\int tg^n x\,\partial x = \frac{tg^{n-1}x}{n-1} - \int tg^{n-2}x$ (285)

$\int tg^2 x\,\partial x = -x + tg\,x$ (286)

$\int tg^3 x\,\partial x = \frac{1}{2}\,tg^2 x + ln \cos x$ (287)

$\int tg^4 x\,\partial x = x - tg\,x + \frac{1}{3}\,tg^3 x$ (288)

XXVII. $\int cot^n x\,\partial x = -\frac{cot^{n-1}x}{n-1} - \int cot^{n-2}x$ (289)

$\int cot^2 x\,\partial x = -(x + cot\,x)$ (290)

$\int cot^3 x\,\partial x = -(\frac{1}{2}\,cot^2 x + ln \sin x)$ (291)

$\int cot^4 x\,\partial x = x + cot\,x - \frac{1}{3}\,cot^3 x$ (292)

XXVIII. $\int sec^n x\,\partial x = \frac{sec^{n-2}x\,tg\,x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int sec^{n-2}x$ (293)

$\int sec^2 x\,\partial x = tg\,x$ (294)

$\int sec^3 x\,\partial x = \frac{1}{2}[tg\,x\,sec\,x + ln\,(tg\,x + sec\,x)]$ (295)

$\int sec^4 x\,\partial x = \frac{1}{3}\,tg\,x\,(2 + sec^2 x)$ (296)

XXIX. $\int cosec^n x\,\partial x = -\frac{cosec^{n-2}x\,cot\,x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int cosec^{n-2}x$ (297)

$\int cosec^2 x\,\partial x = -cot\,x$ (298)

$\int cosec^3 x\,\partial x = -\frac{1}{2}[cot\,x\,cosec\,x + ln\,(cot\,x + cosec\,x)]$ (299)

$\int cosec^4 x\,\partial x = -\frac{1}{3}\,cot\,x\,(2 + cosec^2 x)$ (300)

L. $\int \sin^n x \cdot \cos^m x\,\partial x = \frac{\cos^{m-1}x \cdot \sin^{n+1}x}{n+m} + \frac{m-1}{n+m}\int \sin^n x \cos^{m-2}x$ (301)

$\int \sin^n x \cdot \cos^m x\,\partial x = -\frac{\sin^{n-1}x \cdot \cos^{m+1}x}{n+m} + \frac{n-1}{n+m}\int \sin^{n-2}x \cos^m x$ (302)

$\int \sin x \cdot \cos x\,\partial x = \frac{1}{2}\sin^2 x = -\frac{1}{2}\cos^2 x$ (303)

$\int \sin x \cdot \cos^2 x\,\partial x = \frac{1}{3}\cos x\,[\sin^2 x - 1] = -\frac{1}{3}\cos^3 x$ (304)

$\int \sin x \cdot \cos^3 x\,\partial x = \frac{1}{4}\sin^2 x\,(1 + \cos^2 x) = -\frac{1}{4}\cos^4 x$ (305)

$\int \sin x \cdot \cos^4 x\,\partial x = \frac{1}{5}\cos^3 x\,(\sin^2 - 1) = -\frac{1}{5}\cos^5 x$ (306)

$\int \sin^2 x \cdot \cos x\,\partial x = \frac{1}{3}\sin^3 x$ (307)

$\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x\,\partial x = \frac{1}{8}(x + 2\sin^2 x \cos x - \sin x \cos x)$ (308)

$\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x\,\partial x = \frac{1}{15}\sin^3 x\,(2 + 3\cos^2 x)$ (309)

$\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x\,\partial x = \frac{1}{48}[3x + 8\sin^3 x \cos^3 x + 6\sin^2 x \cos x - 3\sin x \cos x]$ (310)

$\int \sin^3 x \cdot \cos x\,\partial x = \frac{1}{4}\sin^4 x$ (311)

$\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x\,\partial x = -\frac{1}{15}\cos^3 x\,(2 + 3\sin^2 x)$ (312)

$\int \sin^3 x \cdot \cos^3 x\,\partial x = \frac{1}{12}\sin^4 x\,(1 + 2\cos^2 x)$ (313)

$\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x\,\partial x = -\frac{1}{35}\cos^3 x\,(2 - 5\sin^4 x + 3\sin^2 x)$ (314)

$\int \sin^4 x \cdot \cos x\,\partial x = \frac{1}{5}\sin^5 x$ (315)

$\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x\,\partial x = \frac{1}{48}[3x + 8\sin^5 x \cos x - 2\sin^3 x \cos x - 3\sin x \cos x]$ (316)

$\int \sin^4 x \cdot \cos^3 x\,\partial x = \frac{1}{35}\sin^5 x\,(2 + 5\cos^2 x)$ (317)

$\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x\,\partial x = \frac{1}{128}[3x + 16\sin^5 x \cos^3 x + 8\sin^5 x \cos x - 2\sin^3 x \cos x - 3\sin x \cdot \cos x]$ (318)

LI. $$\int \frac{\sin^n x}{\cos^m x}\,\partial x = \frac{\sin^{n+1} x}{(m-1)\cos^{m-1} x} + \frac{m-n-2}{m-1}\int \frac{\sin^n x}{\cos^{m-2} x} \quad (31$$

Für $m=1$ nicht anzuwenden.

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,\partial x = \int tg\, x = -\ln \cos x \quad (32$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,\partial x = \int tg\, x \sec x = \frac{1}{\cos x} = \sec x \quad (32$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,\partial x = \tfrac{1}{2} tg^2 x \quad (32$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^4 x}\,\partial x = \frac{1}{3\cos^3 x} \quad (32$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,\partial x = \int \sin^2 x \cos^{-1} x = -\sin x + \ln(\sec x + tg\, x) \quad (32$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\partial x = tg\, x - x \quad (32$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\,\partial x = \tfrac{1}{2}\left[\frac{\sin x}{\cos x} - \ln(\sec x + tg\, x)\right] \quad (326$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,\partial x = \tfrac{1}{3} tg^3 x \quad (327)$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}\,\partial x = \int \sin^3 x \cos^{-1} x = -\tfrac{1}{2}\sin^2 x - \ln \cos x \quad (328)$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,\partial x = \frac{1+\cos^2 x}{\cos x} \quad (329)$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\,\partial x = \tfrac{1}{2} tg^2 x + \ln \cos x \quad (330)$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,\partial x = \frac{1-3\cos^2 x}{3\cos^3 x} \quad (331)$$

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos x}\,\partial x = \int \sin^4 x \cdot \cos^{-1} x = -(\tfrac{1}{3}\sin^3 x + \sin x) + \ln(\sec x + tg\, x) \quad (332)$$

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\,\partial x = -\tfrac{3}{2} x + \frac{\sin x}{2\cos x}(2+\cos^2 x) \quad (333)$$

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x}\,\partial x = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \sin x - \tfrac{3}{2}\ln(\sec x + tg\, x) \quad (334)$$

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}\,\partial x = x + \tfrac{1}{3} tg^3 x - tg\, x \quad (335)$$

LII. $$\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x}\,\partial x = -\frac{\cos^{m+1} x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-m-2}{n-1}\int \frac{\cos^m x}{\sin^{n-2} x} \quad (336)$$

Ist für $n=1$ nicht anzuwenden.

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\,\partial x = \int \cot x = \ln \sin x \quad (337)$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,\partial x = -\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x} \quad (339)$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,\partial x = -\tfrac{1}{2}\cot^2 x \quad (339)$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}\,\partial x = -\frac{1}{3\sin^3 x} \quad (340)$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin x}\,\partial x = \int \cos^2 x \sin^{-1} x = \cos x + \ln tg\,\frac{x}{2} \quad (341)$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,\partial x = \int \cot^2 x = -(x + \cot x) \quad (342)$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}\,\partial x = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x} + ln\ tg\ \frac{x}{2}\right) \tag{343}$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\,\partial x = -\tfrac{1}{3}\cot^3 x \tag{344}$$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\,\partial x = \int \cos^2 x \cdot \sin^{-1} x = \tfrac{1}{2}\cos^2 x + ln \sin x \tag{345}$$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,\partial x = -\frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\sin x} \tag{346}$$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x}\,\partial x = \int \cot^3 x = -\left(\tfrac{1}{2}\cot^2 x + ln \sin x\right) \tag{347}$$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,\partial x = \frac{2\sin^2 x - \cos^2 x}{3\sin^3 x} \tag{248}$$

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin x}\,\partial x = \int \cos^4 x \cdot \sin^{-1} x = \tfrac{1}{3}\cos^3 x + \cos x + ln\ tg\ \frac{x}{2} \tag{349}$$

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}\,\partial x = -\tfrac{1}{2}\left[3x + \frac{\cos x}{\sin x}(2 + \sin^2 x)\right] \tag{350}$$

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\,\partial x = -\tfrac{1}{2}\left[\frac{\cos x}{\sin^2 x} + 2\cos x + 3\, ln\ tg\ \frac{x}{2}\right] \tag{351}$$

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x}\,\partial x = \int \cot^4 x = x + \cot x - \tfrac{1}{3}\cot^3 x \tag{352}$$

LIII. $\int x^n \sin x\,\partial x = -x^n \cos x + n x^{n-1}\sin x + n(n-1)x^{n-2}\cos x$
$$- n(n-1)(n-2)x^{n-3}\sin x - ++\ldots. \tag{353}$$

$$\int x \sin x\,\partial x = -x\cos x + \sin x \tag{354}$$

$$\int x^2 \sin x\,\partial x = (-x^2 + 2)\cos x + 2x \sin x \tag{355}$$

$$\int x^3 \sin x\,\partial x = (-x^3 + 6x)\cos x + (3x^2 - 6)\sin x \tag{356}$$

$$\int x^4 \sin x\,\partial x = (-x^4 + 12x^2 - 24)\cos x + (4x^3 - 24x)\sin x \tag{357}$$

LIV. $\int x^n \cos x\,\partial x = x^n \sin x + n x^{n-1}\cos x - n(n-1)x^{n-2}\sin x$
$$- n(n-1)(n-2)x^{n-3}\cos x + + - - \ldots.. \tag{358}$$

$$\int x \cdot \cos x\,\partial x = x \cdot \sin x + \cos x \tag{359}$$

$$\int x^2 \cdot \cos x\,\partial x = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x \tag{360}$$

$$\int x^3 \cdot \cos x\,\partial x = x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6\cos x \tag{361}$$

$$\int x^4 \cdot \cos x\,\partial x = x^4 \sin x + 4x^3 \cos x - 12x^2 \sin x - 24x\cos x + 24\sin x \tag{362}$$

LV. $\int x \sin^n x\,\partial x = \frac{\sin^n x}{n^2} - \frac{x\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int x \sin^{n-2} x$ (363)

$$\int x \sin x\,\partial x = -x\cos x + \sin x \tag{364}$$

$$\int x \sin^2 x\,\partial x = \tfrac{1}{4}(x^2 - 2x\sin x \cdot \cos x + \sin^2 x) \tag{365}$$

$$\int x \sin^3 x\,\partial x = \tfrac{1}{9}(\sin^3 x - 3x\sin^2 x\cos x - 6x\cos x + 6\sin x) \tag{366}$$

$$\int x \sin^4 x\,\partial x = \tfrac{1}{16}[3x^2 - 2x\sin x\cos x(2\sin^2 x + 3) + \sin^4 x + 3\sin^2 x] \tag{367}$$

LVI. $\int x \cos^n x\,\partial x = \frac{\cos^n x}{n^2} + \frac{x\sin x \cdot \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int x \cos^{n-2} x$ (368)

$$\int x \cos x\,\partial x = x\sin x + \cos x \tag{369}$$

$$\int x \cos^2 x\,\partial x = \tfrac{1}{4}(x^2 + 2x\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x) \tag{370}$$

$$\int x \cos^3 x\,\partial x = \tfrac{1}{9}[(3x\sin x(2 + \cos^2 x) + 6\cos x + \cos^3 x] \tag{371}$$

$$\int x \cos^4 x\,\partial x = \tfrac{1}{16}[3x^2 + 2x(3 + 2\cos^2 x)\sin x\cos x + 3\cos^2 x + \cos^4 x] \tag{372}$$

LVII. $\int x^n \sin^m x\,\partial x = -\frac{1}{m}x^n \cos x \cdot \sin^{m-1} x + \frac{n}{m^2}x^{n-1}\sin^m x$
$$+ \frac{m-1}{m}\int x^n \sin^{m-2} x - \frac{n(n-1)}{m^2}\int x^{n-2}\sin^m x \tag{373}$$

$$\int x^2 \sin^2 x\,\partial x = \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{4}x^2 \sin x\cdot\cos x + \tfrac{1}{4}x[2\sin^2 x - 1] + \tfrac{1}{8}\sin x\cdot\cos x \quad (37$$

$$\int x^2 \sin^3 x\,\partial x = -\tfrac{1}{3}x^2\cos x(2+\sin^2 x) + \tfrac{2}{9}x\sin x[6+\sin^2 x] + \tfrac{2}{27}\cos x[20+\sin^2 x] \quad (37$$

$$\int x^2 \sin^4 x\,\partial x = \tfrac{1}{5}x^3 - \tfrac{1}{8}x^2(3+2\sin^2 x)\sin x\cdot\cos x + \tfrac{1}{64}x[-15+24\sin^2 x + 8\sin^4 x] + \tfrac{1}{64}[15+2\sin^2 x]\sin x\cdot\cos x \quad (37$$

LVIII. $$\int x^n \cos^m x\,\partial x = \frac{x^n \sin x\cdot\cos^{m-1} x}{m} + \frac{nx^{n-1}\cos^m x}{m^2} + \frac{m-1}{m}\int x^n \cos^{m-2} x - \frac{n(n-1)}{m^2}\int x^{n-2}\cos^m x \quad (3$$

$$\int x^2 \cos^2 x\,\partial x = \tfrac{1}{12}[2x^3 + bx^2\sin x\cdot\cos x - 3x(1-2\cos^2 x) - 3\sin x\cdot\cos x] \quad (3$$

$$\int x^2 \cos^3 x\,\partial x = \tfrac{1}{3}x^2\sin x(2+\cos^2 x) + \tfrac{2}{9}x\cos x(6+\cos^2 x) - \tfrac{2}{27}\sin x(20+\cos^3 x) \quad (3$$

$$\int x^2 \cos^4 x\,\partial x = \tfrac{1}{5}x^3 + \tfrac{1}{8}x^2\sin x\cdot\cos x(3+2\cos^2 x) + \frac{x}{64}[-15+8\cos^2 x(3+\cos^2 x)] - \tfrac{1}{64}\sin x\cdot\cos x[15+2\cos^2 x] \quad (3$$

LIX. $$\int \frac{\partial x}{\sin^n x\cdot\cos^m x} = \frac{-1}{(n-1)\sin^{n-1}x\cdot\cos^{m+1}x} + \frac{m+1}{n-1}\int \frac{\partial x}{\sin^{n-2}x\cdot\cos^{m+}} = \frac{+1}{(m-1)\sin^{n+1}x\cdot\cos^{m-1}x} + \frac{n+1}{m-1}\int \frac{\partial x}{\sin^{n+2}x\cdot\cos^{m-2}x} \quad (38$$

Die erste Formel ist für $n=1$, die zweite für $m=1$ nicht anzuwenden.

$$\int \frac{\partial x}{\sin x\cdot\cos x} = \int \frac{2\,\partial x}{\sin 2x} = \int \operatorname{cosec} 2x\cdot 2\,\partial x = \ln \operatorname{tg} x \quad (38$$

$$\int \frac{\partial x}{\sin x\cdot\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} - \ln\frac{1+\cos x}{\sin x} \quad (38$$

$$\int \frac{\partial x}{\sin x\cdot\cos^3 x} = \frac{1}{2\cos^2 x} + \ln \operatorname{tg} x \quad (38$$

$$\int \frac{\partial x}{\sin x\cdot\cos^4 x} = \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{1}{\cos x} - \ln\frac{1+\cos x}{\sin x} \quad (38$$

$$\int \frac{\partial x}{\sin^2 x\cdot\cos x} = \frac{-1}{\sin x} + \ln\frac{1+\sin x}{\cos x} \quad (38$$

$$\int \frac{\partial x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = \frac{-1+2\sin^2 x}{\sin x\cdot\cos x} \quad (38$$

$$\int \frac{\partial x}{\sin^2 x\cdot\cos^3 x} = \tfrac{1}{2}\left[\frac{1-3\cos^2 x}{\sin x\cdot\cos^2 x} + 3\ln\frac{1+\sin x}{\cos x}\right] \quad (38$$

$$\int \frac{\partial x}{\sin^2 x\cdot\cos^4 x} = \frac{1+4\sin^2 x\cdot\cos^2 x - 4\cos^4 x}{3\sin x\cdot\cos^3 x} \quad (38$$

$$\int \frac{\partial x}{\sin^3 x\cdot\cos x} = \frac{-1}{2\sin^2 x} + \ln \operatorname{tg} x \quad (39$$

$$\int \frac{\partial x}{\sin^3 x\cdot\cos^2 x} = \tfrac{1}{2}\left[\frac{2\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos x\cdot\sin^2 x} - 3\ln\frac{1+\cos x}{\sin x}\right] \quad (39$$

$$\int \frac{\partial x}{\sin^3 x\cdot\cos^3 x} = \frac{-1+2\sin^2 x}{2\sin^2 x\cdot\cos^2 x} + 2\ln \operatorname{tg} x \quad (39$$

$$\int \frac{\partial x}{\sin^3 x\cdot\cos^4 x} = \frac{-3+5\sin^2 x(1+3\cos^2 x)}{6\sin^3 x\cdot\cos^3 x} - \tfrac{1}{8}\ln\frac{1+\cos x}{\sin x} \quad (39$$

$$\int \frac{\partial x}{\sin^4 x\cdot\cos x} = -\frac{1+3\sin^2 x}{3\sin^3 x} + \ln\frac{1+\sin x}{\cos x} \quad (39$$

$$\int \frac{\partial x}{\sin^4 x\cdot\cos^2 x} = \frac{-1-4\sin^2 x+8\sin^4 x}{3\cos x\cdot\sin^3 x} \quad (39$$

$$\int \frac{\partial x}{\sin^4 x\cdot\cos^3 x} = \frac{-2-10\sin^2 x\cdot\cos^2 x+5\sin^4 x}{6\sin^3 x\cdot\cos^2 x} + \tfrac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{\cos x} \quad (39$$

$$\int \frac{\partial x}{\sin^4 x\cdot\cos^4 x} = \frac{-1+2\sin^2 x(1+4\sin^2 x\cdot\cos^2 x - 4\cos^4 x)}{3\sin^3 x\cdot\cos^3 x} \quad (39$$

. Cyclometrische Functionen, ag. 329.

Erläuterungen zu den vorste- ıden tabellarisch geordneten egralformeln.

. Formel 1 bis 10, s Integral No. 1 bis 7.
. „ 11 — 16, s. „ No. 8.
. „ 17 — 24, s. „ No. 9.
. „ 25 — 28, s. „ No. 10.

. „ 29. Man zerlegt den gege- en Quotient in 2 Factoren, nämlich

$$\frac{\partial x}{x^m(a+bx)} = \frac{A\,\partial x}{a+bx} + \frac{N\,\partial x}{x^m}$$

hieraus ist $Ax^m + N(a+bx) = 1$

oder $x(Ax^{m-1} + Nb) = 1 - Na$

Diese Gleichung gilt für jeden Werth von x, also auch für $x = 0$ und für $Ax^{m-1} + Nb = 0$. Für beide Werthe hat man

$$N = \frac{1}{a}$$

Diesen Werth in die Gleichung: $Ax^{m-1} + Nb = 0$ gesetzt:

ergibt $A = -\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{x^{m-1}}$

Hiermit erhält man das I:

$$\int \frac{\partial x}{x^m(a+bx)} = -\frac{b}{a}\int \frac{\partial x}{x^{m-1}(a+bx)} + \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{x^m}$$

as 2te I. wird nach Formel 17 be- mt, das 1te ist eine Reductionsfor- , indem der Exponent von x um 1 ner ist als in dem gegebenen I. ür m nach einander 1, 2, 3 gesetzt ben die Formeln 30, 31 und 32.

I. Formel 33. Man entwickelt, wie V., F. 29.

an erhält $N = \frac{1}{a}$, $A = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{x^{m-1}}$

II. Formel 37. Man kann den Zäh- x^m durch den Nenner $bx + a$ wieder- ntlich dividiren, wie No. 21 am Schluſs die Endformel $\frac{x^p}{x+a}$ empfohlen wor- den, wonach man eine Reihe erhält. Die Formel 37 ist im Resultat nichts als eine Verlängerung, durch welche eben so eine successive Reduction geschieht, wie durch die eben gedachte durch Division abzuleitende Reihe. Verwandelt man nämlich das letzte I in 2 Brüche mit gleichbleibendem Nenner, so ist der erste Bruch gleich dem entgegengesetzten ersten I. rechts des Gleichheitszeichens, der zweite Bruch aber das gegebene I selbst.

Die Formeln 38, 39, 40 entstehen, wenn für m die Werthe 1, 2, 3 gesetzt werden. Man hat nämlich für $m = 1$

$$\int \frac{x\,\partial x}{a+bx} = -\frac{a}{b}\int \frac{\partial x}{a+bx} - \int \frac{-a-bx}{b(a+bx)}\partial x = -\frac{a}{b^2}\int \frac{b\,\partial x}{a+bx} + \int \frac{\partial x}{b}$$

$$= -\frac{a}{b^2} ln(a+bx) + \frac{1}{b}x$$

$$2.\ \int \frac{x^2\,\partial x}{a+bx} = \left(-\frac{a}{b}\right)^2 \int \frac{\partial x}{a+bx} - \int \frac{(-a)^2 - (bx)^2}{b^2(a+bx)}\partial x$$

$$= \frac{a^2}{b^3}\int \frac{b\,\partial x}{a+bx} - \int \frac{a-bx}{b^2}\partial x$$

$$= \frac{a^2}{b^3}\int \frac{b\,\partial x}{a+bx} - \frac{a}{b^2}\int \partial x + \frac{1}{b}\int x\,\partial x$$

$$3.\ \int \frac{x^3\,\partial x}{a+bx} = \left(-\frac{a}{b}\right)^3 \int \frac{\partial x}{a+bx} - \int \frac{(-a)^3 - (bx)^3}{b^3(a+bx)}\partial x$$

$$= -\frac{a^3}{b^4} ln(a+bx) + \int \frac{a^2 - abx + b^2x^2}{b^3} \cdot \partial x$$

III. behandelt wie VII. gibt

$l = \left(\frac{a}{b}\right)^m$; $N = -\frac{a^m - (bx)^m}{(bx)^m(a-bx)}$

us auf dieselbe Weise wie VII. die Formel hervorgeht.

IX. Formel 45 geht unmittelbar aus den Differenzialformeln (Df.) 120 und 121 hervor.

Schreibt man

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(x\sqrt{-1})^2}=\frac{\frac{1}{2}}{1+x\sqrt{-1}}+\frac{\frac{1}{2}}{1-x\sqrt{-1}}$$

so ist auch

Formel 46 $$\int\frac{\partial x}{1+x^2}=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[\int\frac{\partial x\cdot\sqrt{-1}}{1+x\sqrt{-1}}-\int\frac{-\partial x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}\right]$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{-1}}ln\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}$$

Hieraus geht hervor:

$$Arc\,tg\,x=\frac{1}{2\sqrt{-1}}ln\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}$$

Schreibt man fx für x, so hat man

$$Arc\,tg\,(fx)=\frac{1}{2\sqrt{-1}}ln\frac{1-fx\sqrt{-1}}{1-fx\sqrt{-1}}$$

Und somit ist der in dem Art. „Arcus", pag. 115 stehende Satz I. als richtig bewiesen. (Vergl. „Erläuterung" zu No. XIX. Formel 95 und 96).

Formel 47: $$\int\frac{\partial x}{1-x^2}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial x}{1+x}+\frac{\partial x}{1-x}\right)=\frac{1}{2}\int\frac{\partial x}{1+x}-\frac{1}{2}\int\frac{-\partial x}{1-x}$$
$$=\frac{1}{2}ln\,(1+x)-\frac{1}{2}ln\,(1-x)=\frac{1}{2}ln\frac{1+x}{1-x}$$

Schreibt man $\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{1+(x\sqrt{-1})^2}=\frac{1}{\sqrt{-1}}\cdot\frac{\sqrt{-1}}{1+(x\sqrt{-1})^2}$

so ist auch

Formel 48: $$\int\frac{\partial x}{1-x^2}=\frac{1}{\sqrt{-1}}Arc\cdot tg\,(x\sqrt{-1})=\frac{1}{\sqrt{-1}}Arc\cdot tg-\frac{x}{\sqrt{-1}}$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{-1}}Arc\cdot tg\frac{x}{\sqrt{-1}}=\sqrt{=1}\cdot Arc\,tg\frac{x}{\sqrt{-1}}$$

Mithin ist

$$\frac{1}{2}ln\frac{1+x}{1-x}=\sqrt{-1}\cdot Arc\,tg\frac{x}{\sqrt{-1}}$$

oder $$Arc\,tg\frac{x}{\sqrt{-1}}=\frac{1}{2\sqrt{-1}}ln\frac{1+x}{1-x}$$

Setzt man nun fx für x, so erhält man

$$Arc\,tg\frac{fx}{\sqrt{-1}}=\frac{1}{2\sqrt{-1}}ln\frac{1+fx}{1-fx}$$

und somit ist der in dem Art. „Arcus", pag. 115 stehende Satz II. als richtig bewiesen.

Formel 49: $$\int\frac{\partial x}{x^2-1}=-\frac{1}{2}\int\frac{\partial x}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{\partial x}{x-1}=\frac{1}{2}ln\frac{x-1}{x+1}$$

Formel 50: $$\int\frac{\partial x}{x^2+a^2}=\int\frac{\frac{1}{a}\cdot\partial\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\cdot Arc\,tg\left(\frac{x}{a}\right)$$ (Df. 120)

Formel 51: $$\int\frac{\partial x}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{\partial x}{x-a}-\int\frac{\partial x}{x+a}\right]=\frac{1}{2a}ln\frac{x-a}{x+a}$$

Formel 52: $$\int\frac{\partial x}{a^2-x^2}=\int\frac{\partial x}{(a+x)(a-x)}=\frac{1}{2a}ln\frac{a+x}{a-x}$$

X. Formel 53. Schreib $$\int\frac{x\cdot\partial x}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int\frac{2x\cdot\partial x}{1+x^2}=\frac{1}{2}ln\,(1+x^2)$$ (I. V., 26)

Formel 54. Schreib $$\int\frac{x\cdot\partial x}{1-x^2}=-\frac{1}{2}\int\frac{-2x\cdot\partial x}{1-x^2}=-\frac{1}{2}ln\,(1-x^2)=\frac{1}{2}ln\frac{1}{1-x^2}$$

u. s. w. bis Formel 58.

XI. Formel 59 $$\int\frac{x^2\partial x}{1+x^2}=\int\frac{x^2}{x^2+1}\partial x=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\partial x$$
$$=\int\partial x-\int\frac{\partial x}{1+x^2}=x-Arc\,tg\,x$$

Eben so wird verfahren mit Formel 60 bis 64.

XII. Formel 65: $\int \frac{x^3\,\partial x}{1+x^2} = \int \left[x - \frac{x}{1+x^2}\right] \partial x = \int x\,\partial x - \int \frac{x\,\partial x}{1+x^2}$

w. bis Formel 70.

III. Verfahre mit dem allgemeinen ıruck (Formel 74) wie mit dem No. V,

Setze:

$$\frac{\partial x}{x^m(1+x^2)} = \int \frac{A\cdot\partial x}{1+x^2} + \int \frac{N\cdot\partial x}{x^m}$$

ıat man die Gleichung

$$Ax^m + N + Nx^2 - 1 = 0$$

$$x^2(Ax^{m-2} + N) = 1 - N$$

Setzt man die Klammergröfse $= 0$, so wird $N = 1$

und aus $Ax^{m-2} + N = Ax^{m-2} + 1 = 0$

entsteht $A = \frac{-1}{x^{m-2}}$.

Diese beiden Werthe in die obige Gleichung gesetzt, entsteht die Formel:

$$\int \frac{\partial x}{x^m(1+x^2)} = -\int \frac{\partial x}{x^{m-2}(1+x^2)} + \int \frac{\partial x}{x^m}$$

Setzt man $m = 1$, so erhält man Formel 71; man hat nämlich

$$\int \frac{\partial x}{x(1+x^2)} = -\int \frac{\partial x}{x^{-1}(1+x^2)} + \int \frac{\partial x}{x} = -\tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + \ln x$$

$$= \tfrac{1}{2}[-\ln(1+x^2) + 2\ln x] = \tfrac{1}{2}[-\ln(1+x^2) + \ln x^2]$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2} \text{ u. s. w.}$$

XIV. Bei dem Verfahren, wie bei No. III., erhält man für Formel 78

$$(Ax^m - Nx^2) = 1 - N$$

Hieraus $N = 1$; $A = \frac{1}{x^{n-2}}$

XV. Formel 82, XVI., 86; XVII, 90 und XVIII., 94 werden entwickelt wie XIII. und XIV.

XIX. Formel 95.

Schreib $\int \frac{\partial x}{a+cx^2} \doteq \int \frac{\frac{1}{a}\cdot\partial x}{\left(x\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2 - (\sqrt{-1})^2} = \frac{1}{a}\int \left[\frac{A\cdot\partial x}{x\sqrt{\frac{c}{a}} + \sqrt{-1}} + \frac{B\cdot\partial x}{x\sqrt{\frac{c}{a}} - \sqrt{-1}}\right]$

t nach Integral, No. 29, Beispiel pag. 302,

$\sqrt{\frac{c}{a}} + \sqrt{-1} = 0$ gesetzt $\quad x = -\sqrt{\frac{a}{c}}\sqrt{-1}$ und $A = \frac{-1}{2\sqrt{-1}}$

$\sqrt{\frac{c}{a}} - \sqrt{-1} = 0$ gesetzt $\quad x = +\sqrt{\frac{a}{c}}\sqrt{-1}$ und $B = \frac{+1}{2\sqrt{-1}}$

Mithin ist reducirt Formel 95:

$$\frac{\partial x}{+cx^2} = \frac{+1}{2\sqrt{ac}\sqrt{-1}}\int \frac{-\sqrt{\frac{c}{a}}\cdot\partial x}{x\sqrt{\frac{c}{a}} + \sqrt{-1}} + \int \frac{\sqrt{\frac{c}{a}}\cdot\partial x}{x\sqrt{\frac{c}{a}} - \sqrt{-1}}$$

$$= +\frac{1}{2\sqrt{ac}\sqrt{-1}}\ln\frac{x\sqrt{\frac{c}{a}} + \sqrt{-1}}{x\sqrt{\frac{c}{a}} - \sqrt{-1}} = \frac{1}{2\sqrt{ac}\sqrt{-1}}\ln\frac{x\sqrt{\frac{c}{a}} - \sqrt{-1}}{x\sqrt{\frac{c}{a}} + \sqrt{-1}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{ac}\sqrt{-1}}\cdot\ln\frac{+1 - x\sqrt{-\frac{c}{a}}}{-1 + x\sqrt{-\frac{c}{a}}} = \frac{1}{2\sqrt{ac}\sqrt{-1}}\cdot\ln\frac{1 + x\sqrt{-\frac{c}{a}}}{1 - x\sqrt{-\frac{c}{a}}}$$

Schreibt man dagegen

$$\int \frac{\partial x}{a+cx^2} = \sqrt{\frac{1}{ac}} \int \frac{\partial x \sqrt{\frac{c}{a}}}{1+\left(x\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2}$$

so erhält man nach Formel 45 die zweite Formel 96

$$\int \frac{\partial x}{a+cx^2} = \frac{1}{\sqrt{ac}} Arc\,tg\left(x\sqrt{\frac{c}{a}}\right)$$

Mit der Auflösung der Formel $\int \frac{\partial x}{a+cx^2}$ in 2 Ausdrücke 95 und 96 ist wie mit Formel 45 der in dem Artikel „Arcus", pag. 115 stehende Satz I. erwiesen, wenn man $c = a$ und $x\sqrt{\frac{c}{a}} = fx$ setzt.

Formel 97. Schreib $\int \frac{\partial x}{a-cx^2} = \frac{1}{a}\int\left(\frac{A\cdot\partial x}{1+x\sqrt{\frac{c}{a}}} + \frac{B\cdot\partial x}{1-x\sqrt{\frac{c}{a}}}\right)$

so erhält man $A = B = \frac{1}{2}$ und man hat

$$\int \frac{\partial x}{a-cx^2} = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{a}{c}}\left[\int \frac{\sqrt{\frac{c}{a}}\,\partial x}{1+x\sqrt{\frac{c}{a}}} - \int \frac{-\sqrt{\frac{c}{a}}\cdot\partial x}{1-x\sqrt{\frac{c}{a}}}\right] = \frac{1}{2\sqrt{ac}} ln \frac{1+x\sqrt{\frac{c}{a}}}{1-x\sqrt{\frac{c}{a}}}$$

Schreibt man dagegen

$a - cx^2 = 1 + \left(x\sqrt{\frac{c}{a}}\sqrt{-1}\right)^2$, also Formel 98

$$\int \frac{\partial x}{a-cx^2} = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a}{c}}\sqrt{-1}\int \frac{\sqrt{\frac{c}{a}}\sqrt{-1}\cdot\partial x}{1+\left(x\sqrt{\frac{c}{a}}\sqrt{-1}\right)^2} = -\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{ac}} arc\,tg\left(x\sqrt{\frac{c}{a}}\sqrt{-1}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{ac}} arc\,tg \frac{x\sqrt{\frac{c}{a}}}{\sqrt{-1}}$$

Formel 99. Schreib $\int \frac{x\cdot\partial x}{a+cx^2} = \frac{1}{2c}\int \frac{2cx\cdot\partial x}{a+cx^2}$

Formel 100. Schreib $\int \frac{x\cdot\partial x}{a-cx^2} = -\frac{1}{2c}\int \frac{-2cx\cdot\partial x}{a-cx^2}$

Formel 101. Schreib $\int \frac{x^2\partial x}{a+cx^2} = \int\left(\frac{1}{c} - \frac{a}{c}\cdot\frac{1}{a+cx^2}\right)\partial x$

$$= \int \frac{\partial x}{c} - \frac{1}{a}\cdot\frac{a}{c}\cdot\sqrt{\frac{a}{c}}\int \frac{\partial x\sqrt{\frac{c}{a}}}{1+\left(x\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2} = \frac{1}{c}x - \frac{1}{c}\sqrt{\frac{a}{c}}\,Arc\,tg\left(x\sqrt{\frac{c}{a}}\right)$$

Formel 102. Schreib $\int \frac{x^2\partial x}{a-cx^2} = \int\left(-\frac{\partial x}{c} + \frac{a}{c}\cdot\frac{\partial x}{a-cx^2}\right)$

$$= -\frac{1}{c}x + \frac{1}{c}\int \frac{\partial x}{1-\left(x\sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2} = -\frac{1}{c}x + \frac{1}{c}\int\left(\frac{\frac{1}{2}\partial x}{1+x\sqrt{\frac{c}{a}}} + \frac{\frac{1}{2}\partial x}{1-x\sqrt{\frac{c}{a}}}\right)$$

$$= -\frac{1}{c}x + \frac{1}{2c}\cdot\sqrt{\frac{a}{c}}\left[\int \frac{\partial x\sqrt{\frac{c}{a}}}{1+\left(x\sqrt{\frac{c}{a}}\right)} - \int \frac{-\partial x\sqrt{\frac{c}{a}}}{1-\left(x\sqrt{\frac{c}{a}}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{c}\left[-x + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{c}}\,ln\frac{1+x\sqrt{\frac{c}{a}}}{1-x\sqrt{\frac{c}{a}}}\right]$$

rmel 103. Schreib $\int \frac{x^2\,\partial x}{a+cx^2} = \int \left(\frac{x}{c} + \frac{a}{c}\cdot\frac{x}{a+cx^2}\right)\partial x$

$$= \frac{1}{c}\left[\int x : \partial x + \frac{a}{2c}\int \frac{2cx\cdot\partial x}{a+cx^2}\right] = \frac{1}{2c}\left[x^2 + \frac{a}{c}\,ln\,(a+cx^2)\right]$$

rmel 104. Schreib $\int \frac{x^2\,\partial x}{a-cx^2} = \int \left[-\frac{x\cdot\partial x}{c} + \frac{a}{c}\cdot\frac{x\cdot\partial x}{a-cx^2}\right]$

$$= \frac{1}{c}\int -x\cdot\partial x - \frac{a}{2c}\int \frac{-2cx\cdot\partial x}{a-cx^2} = -\frac{1}{2c}\left[x^2 + \frac{a}{c}\,ln\,(a-cx^2)\right]$$

X. Formel 105 bis 107 sind in dem „Integral", No. 23 vollständig entelt.

ormel 105 gilt wenn $b^2 > 4a$

„ 106 „ „ $4a > b^2$

„ 107 „ „ $4a = b^2$

ormel 108 bis 110.

Formel 108; $b^2 > 4ac$

Setze $x = z - \frac{b}{2c}$, so hat man

$$a + bx + cx^2 = c\left(z^2 - \frac{b^2}{4c^2} + \frac{a}{c}\right)$$

oder $\frac{b^2}{4c^2} - \frac{a}{c} = k^2$ gesetzt: $c\,(z^2 - k^2)$

Also $\int \frac{\partial x}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{c}\int \left(\frac{A\,\partial z}{z+k} + \frac{B\,\partial z}{z-k}\right) = \frac{1}{2kc}\left(-\int \frac{\partial z}{z+k} + \int \frac{\partial z}{z-k}\right)$

$$\int \frac{\partial x}{a+bx+cx^2} = \frac{logn}{2ck}\cdot\frac{z-k}{z+k} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\,ln\,\frac{b+2cx-\sqrt{b^2-4ac}}{b+2cx+\sqrt{b^2-4ac}}$$

Formel 109: $a > \frac{b^2}{4c}$

$\frac{a}{c} - \frac{b^2}{4c^2} = k^2$ gesetzt, gibt

$+bx+cx^2 = c\,(z^2+k^2)$

lich $\int \frac{\partial x}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{c}\int \frac{\partial z}{z^2+k^2} = \frac{1}{ck}\int \frac{\partial \frac{z}{k}}{1+\left(\frac{z}{k}\right)^2} = \frac{1}{ck}\,arc\,tg\left(\frac{z}{k}\right)$

$$= \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\,Arc\,tg\,\frac{b+2x}{\sqrt{4ac-b^2}}$$

Formel 110: $a = \frac{b^2}{4c}$

Dann ist $\int \frac{\partial x}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{c}\int \frac{\partial z}{z^2} = -\frac{1}{cz} = -\frac{2}{b+2cx} = -\frac{4a}{b(2a+bx)}$

ormel 111 entsteht aus Formel 106, n es ist $a = b = 1$, also $4a > b^2$

ormel 112 aus Formel 108, denn es $z = b = +1$, $c = -1$ mithin $4ac < b^2$

ormel 113 wie Formel 111. Denn es $z = 1$, $b = -1$ also $4a > b^2$

ormel 114 aus Formel 105. Denn es $= -1$, $b = +1$ also $4a < b^2$

ormel 115 aus Formel 105. Denn es $= -1$, $b = -1$ also $4a < b^2$

rmel 116 aus Formel 109. Denn es $= -1$, $b = +1$, $c = -1$, also $4ac > b^2$

rmel 117 aus Formel 108. Denn es $= +1$, $b = -1$, $c = -1$; also $4ac < b^2$

e Formeln 111 bis 117 werden unmögliche Ausdrücke, wenn zu deren Entwickelung Formel 105 und 108 mit 106 und 109 vertauscht werden, wie Formel 118 aus Formel 109.

Formel 119 bis 122 entstehen aus Formel 108 und 109, wenn man $a = 0$ setzt.

XXI. Formel 123. Es ist in dem Art. „Integral" No. 26 die Aufgabe gelöst

$$\int \frac{(x+A)\,\partial x}{a+bx+x^2}$$

und zwar in 3 Formeln 23, 24, 25 in Beziehung auf die 3 Formeln 20, 21, 22 No. 23, 24, 25, welche in der Tabelle (unter No. XX. 105, 106 und 107) stehen. Man kann demnach in jenen 3 Formeln 23

bis 25 für $A=0$ setzen um das I. $\int\frac{x\,\partial x}{a+bx+x^2}$ zu erhalten. Um dies aber selbstständig zu lösen, verfahre wie dort bis zu der Gleichung: $\int\frac{x\,\partial x}{a+bx+x^2}=\int\frac{z\,\partial z}{z^2\pm c^2}-\frac{b}{2}\int\frac{\partial z}{z^2\pm c^2}$ Nun ist

$$\int\frac{z\,\partial z}{z^2\pm c^2}=\tfrac{1}{2}\int\frac{2z\,\partial z}{z^2\pm c^2}=\tfrac{1}{2}ln\,(z^2\pm c^2)=\tfrac{1}{2}ln\,(a+bx+x^2)$$

und $\frac{b}{2}\int\frac{\partial z}{z^2\pm c^2}=\frac{b}{2}\int\frac{\partial x}{a+bx+x^2}$

Dieses letzte I ist aufgelöst durch Formel 105 bis 108, und je nach dem Verhältnifs von $4a:b^2$ ist eine der 3 Formeln anzuwenden. Demnach hat man vollständig

$$\int\frac{x\,\partial x}{x+bx+x^2}=\tfrac{1}{2}ln\,(a+bx+x^2)-\frac{b}{2}\int\frac{\partial x}{a+bx+x^2}$$

Formel 124. Um diese zu entwickeln, verfährt man wie für die Entwickelung der Formeln 108 bis 110.

Formel 125 s. oben XXI., Formel 123.

Formel 126 wie Formel 124.

Formel 127 ist im Art. „Integral“ No. 27 entwickelt.

Formel 128 wie Formel 126.

Formel 129 und 130 können mit Hülfe von Formel 128 nicht gelöst werden, weil für $a=0$ unendlich entsteht. Man schreibe $x^2(b\pm cx)$ und hat dann die Formeln 31 und 35.

Formel 131 und 132 entstehen aus Formel 128 wenn man $b=a$ setzt, das 2te Glied, das I, fällt fort.

XXII. Formel 133. In dem Art. „Integral“ No. 28 ist mit Formel 28 die Aufgabe gelöst: $\int\frac{B\,\partial z}{(z^2\pm c^2)^m}$

Nun ist $z^2\pm c^2=a+bx+x^2$

$$z=x+\tfrac{1}{2}b$$

$$c^2=\frac{b^2}{4}-a$$

und man erhält Formel 133, wenn man diese Werthe einsetzt und $B=1$ nimmt.

Formel 134 aus Formel 133, wenn $m=2$ gesetzt wird; das letzte I ist durch Formel XX., 105 bis 107 zu lösen.

Formel 135 aus Formel 133, wenn $m=3$ gesetzt wird; das letzte I ist mit Formel 134 bestimmt.

Formel 136 ist die Abänderung von Formel 133 dahin, dafs cx^2 statt x^2 im Nenner steht. Mit Rücksicht auf die vorstehende Erläuterung über Formel 133 und auf No. 28 des Art. „Integral“ hat man hier $z=x+\frac{b}{2c}$

für $(z^2-c^2)^m$ setze hier $(z^2-k^2)^m$

und es ist $k^2=\frac{b^2}{4c^2}-\frac{a}{c}$

Ferner ist wie für Formel 133 und in No. 28:

$$c\,(z^2-c^2)=a+bx+cx^2$$

Setzt man nun in Formel 28, No. 28 diese Werthe und $B=1$, so erhält man

$$\int\frac{\partial z}{(z^2-k^2)^m}=-\frac{z}{2(m-1)k^2(z^2-k^2)^{m-1}}-\frac{2m-3}{2(m-1)k^2}\int\frac{\partial z}{(z^2-k^2)^{m-1}}$$

Hieraus

$$\int\frac{\partial x}{\left(\frac{a+bx+cx^2}{c}\right)^m}=-\frac{1}{2(m-1)\left(\frac{b^2}{4c^2}-\frac{a}{c}\right)}\left[\frac{x+\frac{b}{2c}}{\left(\frac{a+bx+cx^2}{c}\right)^{m-1}}+(2m-3)\int\frac{\partial x}{\left(\frac{a+bx+cx^2}{c}\right)^{m-1}}\right]$$

Dividirt man nun mit c^m (multiplicirt sämmtliche Nenner mit c^m) so entsteht Formel 136.

XXIII. Formel 139.

Formel 27 No. 28 löst die Aufgabe

$$\int \frac{z\,\partial z}{(z^2-c^2)^m} = \frac{-1}{2(m-1)(z^2-c^2)^{m-1}}$$

Nun ist aber die verlangte Aufgabe

$$\frac{x\,\partial x}{a+bx+x^2)^m} = \int \frac{(z-\frac{1}{2}b)\,\partial z}{(z^2-c^2)^m} = \int \frac{z\,\partial z}{(z^2-c^2)^m} - \int \frac{\frac{1}{2}b\,\partial z}{(z^2-c^2)^m}$$

lich mufs noch dies letzte I hinzukommen; d. h. Es ist

$$\frac{x\,\partial x}{a+bx+x^2)^m} = \frac{-1}{2(m-1)(a+bx+x^2)^{m-1}} - \tfrac{1}{2}b\int \frac{\partial x}{(a+bx+x^2)^m}$$

Dies letzte I ist aber Formel XXII., 133 mithin ist

$$\frac{x\,\partial x}{(a+bx+x^2)^m} = \frac{-1}{2(m-1)(a+bx+x^2)^{m-1}} + \tfrac{1}{2}b\,\frac{x+\frac{1}{2}b}{2(m-1)\left(\frac{b^2}{4}-a\right)(a+bx+x^2)^{m-1}}$$

$$+ \frac{2m-3}{2(m-1)\left(\frac{b^2}{4}-a\right)} \cdot \frac{b}{2}\int \frac{\partial x}{(a+bx+x^2)^{m-1}}$$

ches reducirt die Formel 139 ergibt.

Formel 140.

Hier hat man wie bei der Behandlung der Formel in No. 28.

$$\frac{x\,\partial x}{(a+bx+cx^2)^m} = \int \frac{z-\frac{b}{2c}}{(z^2-k^2)^m} = \int \frac{z\,\partial z}{(z^2-k^2)^m} - \frac{b}{2c}\int \frac{\partial z}{(z^2-k^2)^m}$$

Mithin wie für Formel 139:

$$\int \frac{z\,\partial z}{(z^2-k^2)^m} = -\frac{1}{2(m-1)(z^2-k^2)^{m-1}} - \frac{b}{2c}\int \frac{\partial z}{(z^2-k^2)^m}$$

Schreibt man $k^2 = \left(\frac{b^2}{4c^2} - \frac{a}{c}\right)$, $c(z^2-k^2) = a+bx+cx^2$

hat man das erste Glied des I $\int \frac{z\,\partial z}{(z^2-k^2)^m}$

$$= \frac{-1}{2c(m-1)(a+bx+cx^2)^{m-1}}$$

nd $-\frac{b}{2c}\int \frac{\partial z}{(z^2-k^2)^m} = -\frac{b}{2c} \times$ (Formel 136). Hiernach

$$\int \frac{x\,\partial x}{(a+bx+cx^2)^m} = \frac{-1}{2c(m-1)(a+bx+cx^2)^{m-1}} + \frac{b}{2c} \times \text{(Formel 136) und reducirt}$$

s Formel 140.

XXIV. Formel 143 $\int \frac{\partial x}{a+bx^3}$

Setze $x\sqrt[3]{\frac{b}{a}} = z$ so ist $\int \frac{\partial x}{a+bx^3} = \frac{1}{a}\int \frac{\partial z}{1+z^3} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} = \sqrt[3]{\frac{1}{ba^2}}\int \frac{\partial z}{1+z^3}$

$$\frac{\partial z}{1+z^3} = \int\left(\frac{\frac{1}{3}\partial z}{1+z} + \frac{\frac{1}{3}(2-z)\,\partial z}{1-z+z^2}\right) = \tfrac{1}{3}\int \frac{\partial z}{1+z} + \tfrac{1}{3}\int \frac{\partial z}{1-z+z^2} - \tfrac{1}{3}\int \frac{z\,\partial z}{1-z+z^2}$$

$$\tfrac{1}{3}\int \frac{\partial z}{1+z} = \tfrac{1}{3}\ln(1+z) \text{ nach Formel IV, 36}$$

$$-\tfrac{1}{3}\int \frac{z\,\partial z}{1-z+z^2} = -\tfrac{1}{6}\ln(1-z+z^2) - \tfrac{1}{2}\int \frac{\partial x}{1-z+z^2}$$

ich Formel 123, wenn man $a=1$, $b=-1$ setzt)

Hierzu $\frac{1}{3}\int \frac{\partial z}{1-z+z^2}$ addirt sind $= \frac{1}{2}\int \frac{\partial z}{1-z+z^2} = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,Arc\,tg\,\frac{2z-1}{\sqrt{3}}$

(nach Formel 113). Mithin

$$\int \frac{\partial z}{1+z^3} = \tfrac{1}{3} ln(1+z) - \tfrac{1}{6} ln(1-z+z^2) + \tfrac{1}{3}\sqrt{3}\, Arc\, tg \frac{2z-1}{\sqrt{3}}$$
$$= \tfrac{1}{6} ln \frac{(1+z)^2}{1-z+z^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} Arc\, tg \frac{2z-1}{\sqrt{3}}$$

wo für z der Werth $x\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ zu setzen ist. Multiplicirt man diese Formel mi $\sqrt[3]{\frac{1}{a^2 b}}$ so erhält man Formel 143.

Formel 144. Schreibt man wie vorher $x\sqrt[3]{\frac{b}{a}} = z$ und $\sqrt[3]{\frac{b}{a}} = c$, so ist

$$\int \frac{x\,\partial x}{a+bx^3} = \frac{1}{a}\int \frac{\frac{z}{c}\,\partial z}{1+z^3} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{ac^2}\int \frac{z\,\partial z}{1+z^3}$$

$$\frac{z}{1+z^3} = \frac{1+z-1}{1+z^3} = \frac{1+z}{1+z^3} - \frac{1}{1+z^3} = \frac{1}{1-z+z^2} - \frac{1}{1+z^3}$$

daher $$\int \frac{z\,\partial z}{1+z^3} = \int \frac{\partial z}{1-z+z^2} - \int \frac{\partial z}{1+z^3}$$

Nun ist nach Formel 113

$$\int \frac{\partial z}{1-z+z^2} = \tfrac{2}{3}\sqrt{3}\, Arc\, tg \frac{2z-1}{\sqrt{3}}$$

$$\int \frac{\partial z}{1+z^3} = \text{der Formel 143. Mithin}$$

$$\int \frac{z\,\partial z}{1+z^3} = \tfrac{2}{3}\sqrt{3}\, Arc\, tg \frac{2z-1}{\sqrt{3}} - \tfrac{1}{6} ln \frac{(1+z)^2}{1-z+z^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} Arc\, tg \frac{2z-1}{\sqrt{3}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}} Arc\, tg \frac{2z-1}{\sqrt{3}} - \tfrac{1}{6} ln \frac{(1+z)^2}{1-z+z^2}$$

woraus bei Einsetzung der Werthe für z Formel 144 entsteht.

Formel 145.

Schreib $\frac{1}{3b}\int \frac{3b\,x^2\,\partial x}{a+bx^3}$ für $\int \frac{x^2\,\partial x}{a+bx^3}$

Für XXV. hat in den Formeln c die Bedeutung von $\sqrt[4]{\frac{b}{a}}$

Formel 146. Man setzt

$$a+bx^4 = a\cdot\left[1+\left(x\sqrt[4]{\frac{b}{a}}\right)^4\right] = a\,[1+(cx)^4$$

ferner der Kürze wegen $x\sqrt[4]{\frac{b}{a}} = cx = z$

alsdann ist $c\cdot\partial x = \partial z$

$$\int \frac{\partial x}{a+bx^4} = \frac{1}{a}\int \frac{\partial z}{1+z^4} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{ac}\int \frac{\partial z}{1+z^4}$$

Nun ist $1+z^4 = (1+z^2)^2 - 2z^2 = (1+z^2)^2 - (z\sqrt{2})^2$
$$= (1+z\sqrt{2}+z^2)(1-z\sqrt{2}+z^2)$$

und $$\frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{2}+z}{1+z\sqrt{2}+z^2} + \frac{\sqrt{2}-z}{1-z\sqrt{2}+z^2}\right]$$

und $$\int \frac{\partial z}{1+z^4} = \text{der Summe folgender 4 Integrale}$$

$$\tfrac{1}{2}\int \frac{\partial z}{1+z\sqrt{2}+z^2} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\, arc\, tg \frac{2z+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, arc\, tg\,(z\sqrt{2}+1)$$

$$\tfrac{1}{2}\int \frac{\partial z}{1-z\sqrt{2}+z^2} = \tfrac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{2}}\, arc\, tg \frac{2z-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, arc\, tg\,(z\sqrt{2}-1)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{z\,\partial z}{1+z\sqrt{2}+z^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\tfrac{1}{2} ln(1+z\sqrt{2}+z^2) - \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\partial z}{1+z\sqrt{2}+z^2}\right]$$

$$\frac{s\,\partial s}{-s\sqrt{2}+s^2}=\frac{-1}{2\sqrt{2}}\left[\tfrac{1}{2}\,ln\,(1-s\sqrt{2}+s^2)+\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{\partial s}{1-s\sqrt{2}+s^2}\right]$$

ste Formel nach Formel 106, weil ist, die zweite desgleichen, indem ubtractiv gesetzt wird, die letzten ıach Formel 123. Die beiden Integrale in den Klammern sind mit den ersten beiden Formeln übereinstimmend. Daher sämmtliche 4 Integrale addirt gibt

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\,ln\,\frac{1+s\sqrt{2}+s^2}{1-s\sqrt{2}+s^2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\,arc\,tg\,(s\sqrt{2}+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\,arc\,tg\,(s\sqrt{2}-1)$$

st $tg\,(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}$ mithin $tg\,(\alpha+\beta)=\dfrac{s\sqrt{2}}{1-s^2}$

r
$=s\sqrt{2}+1$; $tg\,\beta=s\sqrt{2}-2$, und $\alpha+\beta=arc\,tg\,\dfrac{s\sqrt{2}}{1-s^2}$

$$\int\frac{\partial s}{1+s^4}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[ln\,\frac{1+s\sqrt{2}+s^2}{1-s\sqrt{2}+s^2}+2\,arc\,tg\,\frac{s\sqrt{2}}{1-s^2}\right]$$

s den Werth cx gesetzt und mit ac dividirt entsteht Formel 146.

mel 147. Wie für 146; nämlich

$$\int\frac{\partial x}{a-bx^4}=\frac{1}{ac}\int\frac{\partial s}{1-s^2}=\frac{1}{2\,ac}\left[\int\frac{\partial s}{1+s^2}+\int\frac{\partial s}{1-s^2}\right]$$

o nach Formel 45 und 47

$$\int\frac{\partial x}{a-bx^4}=\frac{1}{2\,ac}\left[Arc\,tg\,s+\tfrac{1}{2}\,ln\,\frac{1+s}{1-s}\right]$$

unmittelbar Formel 147 hervorgeht.

mel 148. Es ist

$$\int\frac{x\,\partial x}{a+bx^4}=\frac{1}{a}\int\frac{\partial\left(\frac{x^2}{2}\right)}{1+\frac{b}{a}\,x^4}=\frac{1}{2a\,c^2}\int\frac{\partial\,(c^2\,x^2)}{1+(c^2\,x^2)^2}$$

ıach Formel 45 und 46 die For-
8. Alsdann ist $c=\sqrt[4]{-\frac{b}{a}}=\sqrt[4]{\frac{b}{a}}\cdot\sqrt[4]{-1}$

l 149. $\int\frac{\partial x}{a-bx^4}$ und $c^2=\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\sqrt{-1}$

rhält das I aus der Formel 148, 1, an $-b$ für b setzt. man hat also in Formel 148, 1 für c^2 $=c^2\sqrt{-1}$ zu setzen und erhält

$$\frac{1}{2\,ac^2\sqrt{-1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{-1}}\,ln\,\frac{1+c^2\sqrt{-1}\cdot x^2\sqrt{-1}}{1-c^2\sqrt{-1}\cdot x^2\sqrt{-1}}$$
$$=-\frac{1}{4\,ac^2}\,ln\,\frac{1-c^2\,x^2}{1+c^2\,x^2}=+\frac{1}{4\,ac^2}\,ln\,\frac{1+c^2\,x^2}{1-c^2\,x^2}$$

$=\sqrt{\frac{b}{a}}$ gesetzt entsteht Formel $\int\frac{x^2\,\partial x}{a+bx^4}=\frac{1}{ac^2}\int\frac{s^2\,\partial s}{1+s^4}$

el 150. und wenn man die Zerlegung wie zu Formel 146 anwendet:

ır vorigen Bezeichnung ist

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{(\sqrt{2}+s)\,s^2\,\partial s}{1+s\sqrt{2}+s^2}+\frac{(\sqrt{2}-s)\,s^2\,\partial s}{1-s\sqrt{2}+s^2}\right)$$

Setzt man nun den ersten Nenner der Klammergröfse $= A$, den zweiten $= B$, so hat man

$$\int \frac{z^2\,\partial z}{1+z^4} = \tfrac{1}{2}\int \frac{z^2\,\partial z}{A} + \tfrac{1}{2}\int \frac{z^2\,\partial z}{B} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{z^2\,\partial z}{A} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{z^2\,\partial z}{B}$$

Nun ist $z^2 = A - z\sqrt{2} - 1$

ebenso $z^2 = B + z\sqrt{2} - 1$

Diese Werthe eingesetzt hat man

$$\int \frac{z^2\,\partial z}{1+z^4} = \tfrac{1}{2}\int \frac{z^2\,\partial z}{A} + \tfrac{1}{2}\int \frac{z^2\,\partial z}{B} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{(Az - z^2\sqrt{2} - z)\,\partial z}{A} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{Bz + z^2\sqrt{2} - z}{B}\cdot \partial z$$

Nimmt man die Integrale der letzten beiden Glieder in den einzelnen Summanden und hebt, so erhält man

$$\int \frac{z^2\,\partial z}{1+z^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\int \frac{z\,\partial z}{B} - \int \frac{z\,\partial z}{A}\right) = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[ln\frac{1-z\sqrt{2}+z^2}{1+z\sqrt{2}+z^2} + \sqrt{2}\int \frac{\partial z}{B} + \sqrt{2}\int \frac{\partial z}{A}\right]$$

Diese Formel erhält man aus Formel 123 wenn man für b die Werthe $-\sqrt{2}$ und $+\sqrt{2}$ gesetzt: tegrale aus Formel 106, wiederum $b = -\sqrt{2}$ und $+\sqrt{2}$ setzt. Die beiden letzten In-

Nun ist $\int \frac{\partial z}{B} + \int \frac{\partial z}{A}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\left(arc\,tg\,\frac{2z-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + arc\,tg\,\frac{2z+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$

Nun ist $arc\,tg\,\alpha + arc\,tg\,\beta = arc\,\frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}$ mithin die Summe der beiden Bogen $= arc\,tg\,\frac{z\sqrt{2}}{1-z^2}$

folglich $\int \frac{z^2\,\partial z}{1+z^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[ln\frac{1-z\sqrt{2}+z^2}{1+z\sqrt{2}+z^2} + 2\,arc\,tg\,\frac{z\sqrt{2}}{1-z^2}\right]$

woraus Formel 150 hervorgeht.

Formel 151.

Es ist $\int \frac{x^2\,\partial x}{a-bx^4} = \frac{1}{ac^2}\int \frac{z^2\,\partial z}{1-z^4}$

$$\int \frac{z^2\,\partial z}{1-z^4} = \int \frac{z^2\,\partial z}{2(1+z^2)} + \int \frac{z^2\,\partial z}{2(1-z^2)}$$

Die beiden I nach Formel 59 und 60 ergeben sich

$$\tfrac{1}{2}z - \tfrac{1}{2}arc\,tg\,z + (-\tfrac{1}{2}z) + \tfrac{1}{4}ln\frac{1+z}{1-z}$$

woraus $\int \frac{x^2\,\partial x}{a-bx^4} = \frac{1}{4ac^2}\left[ln\frac{1+z}{1-z} - 2\,Arc\,tg\,z\right]$

Formel 152.

Es ist $\int \frac{x^2\,\partial x}{a+bx^4} = \frac{1}{4b}\int \frac{4b\,x^2\,\partial x}{a+bx^4} = \frac{1}{4b}\int \frac{\partial(a+bx^4)\,\partial x}{a+bx^4} = \frac{1}{4b}ln(a+bx^4)$

Formel 153. (Aus Formel 25 und 152.)

Es ist $\int \frac{\partial x}{ax+bx^4} = \frac{1}{a}\left[\int \frac{\partial x}{x} - \int \frac{bx^3\,\partial x}{a+bx^3}\right] = \frac{1}{a}\left[ln\,x - \tfrac{1}{3}\cdot ln(a+bx^3)\right]$

$$= \frac{1}{3a}ln\frac{x^3}{a+bx^3}$$

Formel 154.

Es ist $\int \frac{\partial x}{x(a+bx^4)} = \frac{1}{a}\int \left[\frac{\partial x}{x} - \frac{bx^3\,\partial x}{a+bx^4}\right] = \frac{1}{a}ln\,x - \frac{1}{a}\int \tfrac{1}{4}\cdot\frac{4b\,x^3\,\partial x}{a+bx^4}$

$$= \frac{1}{a}(ln\,x - \tfrac{1}{4}ln(a+bx^4)) = \frac{1}{4a}(4\,ln\,x - ln(a+bx^4)) = \frac{1}{4a}ln\frac{x^4}{a+bx^4}$$

Formel 155. (Aus Formel 25 und 145.)

Es ist $\int \frac{\partial x}{bx^2+cx^4} = \frac{1}{b}\left[\int \frac{\partial x}{x^2} - \int \frac{c\,\partial x}{b+cx^2}\right] = \frac{1}{b}\left[-\frac{1}{x} - \frac{c}{\sqrt{bc}}\,tg\left(x\sqrt{\frac{c}{b}}\right)\right]$

Formel 156. (Aus Formel 21 und 96.)

Schreib $\int \frac{\partial x}{x(bx^2+cx^4)} = \int \frac{\partial x}{x^3(b+cx^2)} = \frac{1}{b}\int \frac{\partial x}{x^3} - \frac{c}{b}\int \frac{\partial x}{x(b+cx^2)}$

)t nach Formel 22 und 131 die For-
l 156.

XXVI. Formel 157, A, B, C.

Es kommt darauf an, den Nenner in
1 Product zu verwandeln.
Setzt man denselben

$c\cdot\left(\frac{a+bx^2}{c} + x^4\right) = c(x^2+p^2)(x^2+q^2)$

$x^4 + (p^2+q^2)x^2 + p^2q^2$

so $p^2+q^2 = \frac{b}{c}$

und $p^2q^2 = \frac{a}{c}$

so erhält man $p^2 = \frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$

und $q^2 = \frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$

Setzt man der Kürze wegen $\frac{1}{a+bx^2+cx^4} = z$ so sei

$z = \frac{1}{c(x^2+p^2)(x^2+q^2)} = \frac{1}{c}\cdot\left(\frac{A}{x^2+p^2} + \frac{B}{x^2+q^2}\right)$

so nach No. 23, pag. 298, den Bruch in die Summe zweier Brüche verwandelt

$z = \frac{1}{c}\left[\frac{1}{x^2+q^2} - \frac{1}{x^2+p^2}\right]\cdot\frac{1}{p^2-q^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\left[\frac{1}{x^2+q^2} - \frac{1}{x^2+p^2}\right]$

Also nach Formel 50 und 51 entsteht die Formel 157, A

$y = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\left[\frac{1}{q}\,Arc\,tg\,\frac{x}{q} - \frac{1}{p}\,Arc\,tg\,\frac{x}{p}\right]$

Dies I wird für $4ac > b^2$ imaginär.

Um für diesen Fall ein reelles I zu erhalten hat man auch

$$a + bx^2 + cx^4 = c\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}x^2 + x^4\right) = c\cdot Z$$

Um die Klammergröfse Z eben so wie
157 A in ein Product umzuformen,
talte sie zunächst in die Differenz
ier Quadrate, setze demnach der Ein-
heit wegen

$\sqrt{\frac{a}{c}} = g$, dann hat man

$Z = g^4 + \frac{b}{2cg^2}\cdot 2g^2x^2 + x^4$

Man kommt nun zum Zweck, wenn man dem Factor $\frac{b}{2cg^2}$ die Form $1-2h^2$ gibt, denn alsdann erhält man

$Z = g^4 + 2g^2x^2 + x^4 - 4h^2g^2x^2$
$= (g^2+x^2)^2 - (2hgx)^2$
$= (g^2+2hgx+x^2)(g^2-2hgx+x^2)$

und

$$Y = \int \frac{\partial x}{a+bx^2+cx^4} = \int \frac{\partial x}{c(g^2+2hgx+x^2)(g^2-2hgx+x^2)} \qquad (1)$$

Diesen Bruch in die Summe zweier Brüche verwandelt

$$y = \frac{1}{4chg^2}\int\left[\frac{2hg+x}{g^2+2hgx+x^2} + \frac{2hg-x}{g^2-2hgx+x^2}\right]\partial x \qquad (2)$$

$$y = \frac{1}{4chg^2}\left[2hg\int\frac{\partial x}{g^2+2hgx+x^2} + 2hg\int\frac{\partial x}{g^2-2hgx+x^2} + \int\frac{x\,\partial x}{g^2+2hgx+x^2} - \int\frac{x\,\partial x}{g^2-2hgx+x^2}\right] \qquad (3)$$

Die ersten beiden Integrale werden aufgelöst durch Formel 106. Denn die Ent-

wickelung ist unter der Bedingung $4ac > b^2$ geschehen, welche sich auf die umgeformten Werthe überträgt.

Denn bei diesen beiden I ist nun g^2 für a, 1 für c und ah^2g^2 für b^2 zu schreiben. Es ist also zu vergleichen $4g^2$ mit $4h^2g^2$ oder 1 mit h^2.

Nun ist aber $2h^2 = 1 - \frac{b}{2cg^2}$ und da b, c, $g = \sqrt[4]{\frac{a}{c}}$ positive Größen sind, so ist $h < 1$ also $4g^2 > 4h^2g^2$.

Man hat demnach aus Formel 106:

$$\text{Int. I.} = \frac{2}{\sqrt{4g^2 - 4h^2g^2}} \operatorname{Arc\,tg} \frac{2x + 2hg}{\sqrt{4g^2 - 4h^2g^2}} = \frac{1}{g\sqrt{1-h^2}} \operatorname{Arc\,tg} \frac{x + hg}{g\sqrt{1-h^2}} \tag{4}$$

$$\text{Int. II.} = \frac{1}{g\sqrt{1-h^2}} \operatorname{Arc\,tg} \frac{x - hg}{g\sqrt{1-h^2}} \tag{5}$$

Beide I addirt, mit $2hg$ multiplicirt geben

$$\text{Int. I.} + \text{Int. II.} = \frac{2h}{\sqrt{1-h^2}} \left(\operatorname{Arc\,tg} \frac{x + hg}{g\sqrt{1-h^2}} + \operatorname{Arc\,tg} \frac{x - hg}{g\sqrt{1-h^2}} \right)$$

Beide Bogen α und β in $\alpha + \beta$ zusammengefafst nach der Formel

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} \text{ entsteht}$$

$$\alpha + \beta = \frac{2gx\sqrt{1-h^2}}{g^2 - x^2}$$

und $$\text{Int.}(\text{I.} + \text{II.}) = \frac{2h}{\sqrt{1-h^2}} \operatorname{Arc\,tg} \frac{2gx\sqrt{1-h^2}}{g^2 - x^2} \tag{6}$$

Aus denselben Gründen wie für die ersten beiden I, werden die beiden letzten I nach Formel 123 gelöst.

Es ist $$\text{Int. III.} = \tfrac{1}{2} ln(g^2 + 2hgx + x^2) - hg \int \frac{\partial x}{g^2 + 2hgx + x^2} \tag{7}$$

$$\text{Int. IV.} = \tfrac{1}{2} ln(g^2 - 2hgx + x^2) + hg \int \frac{\partial x}{g^2 - 2hgx + x^2} \tag{8}$$

Int. IV. von Int. III. subtrahirt ergibt in der Differenz der beiden letzten Glieder $= hg$ mal der Summe beider Int. I. und II. $= \frac{1}{2}$ Int.(I. + II.). Demnach ist

$$y = \frac{1}{4chg^2} \left[\tfrac{1}{2} ln \frac{g^2 + 2hgx + x^2}{g^2 - 2hgx + x^2} + \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \operatorname{Arc\,tg} \frac{2gx\sqrt{1-h^2}}{g^2 - x^2} \right] \tag{9}$$

Bei der anfangs stattgefundenen Annahme $\frac{b}{2cg^2} = 1 - 2h^2$ hat man für h den Werth $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2cg^2 - b}{cg^2}}$ oder wenn man für g seinen Werth $\sqrt[4]{\frac{a}{c}}$ setzt $h = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \frac{b}{\sqrt{ac}}}$

und $h^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{b}{2\sqrt{ac}}\right)$

Anstatt dieser Größe h führt man auch eine trigonometrische Function ein und zwar setzt man $h = \cos\alpha$.

Aus der letzten Formel hat man nun

$$2h^2 = 1 - \frac{b}{2\sqrt{ac}} = 2\cos^2\alpha$$

Mithin $$2h^2 - 1 = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha = -\frac{b}{2\sqrt{ac}}$$

woraus α gefunden ist.

Und es ist Formel 157 B

$$y = \frac{1}{8cg^3 \cos\alpha} \left[ln \frac{g^2 + 2gx\cos\alpha + x^2}{g^2 - 2gx\cos\alpha + x^2} + 2\cot\alpha \operatorname{Arc\,tg} \frac{2gx\sin\alpha}{g^2 - x^2} \right]$$

ür Formel 157 C gilt die Bedingung $4ac$.

lan hat demnach $cx^4 = \frac{b^2}{4a}x^4$

$$\int \frac{4a\,\partial x}{(2a+bx^2)^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{\left[1+\left(x\sqrt{\frac{b}{2a}}\right)^2\right]^2}$$

Setzt man $x\sqrt{\frac{b}{2a}} = tg\,\varphi$

so ist $y = \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{(1+tg^2\varphi)^2}$

Nun ist $\varphi = Arc\,tg\,x\sqrt{\frac{b}{2a}}$

also

$$\partial\varphi = \partial\, Arc\,tg\,x\sqrt{\frac{b}{2a}} = \frac{\sqrt{\frac{b}{2a}}\cdot\partial x}{1+\frac{b}{2a}x^2} = \sqrt{\frac{b}{2a}}\cdot\frac{\partial x}{1+tg^2\varphi}$$

raus $\partial x = \sqrt{\frac{2a}{b}}(1+tg^2\varphi)\,\partial\varphi$

d $y = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a}{b}}\int\frac{1+tg^2\varphi}{(1+tg^2\varphi)^2}\partial\varphi = \sqrt{\frac{2}{ab}}\int\frac{\partial\varphi}{1+tg^2\varphi} = \sqrt{\frac{2}{ab}}\int cos^2\varphi\,\partial\varphi$

o $y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{ab}}[\varphi + sin\,\varphi\,cos\,\varphi]$

$$= \frac{1}{\sqrt{2ab}}[\varphi + tg\,\varphi\,cos^2\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2ab}}\left[\varphi + \frac{tg\,\varphi}{1+tg^2\varphi}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2ab}}\left[Arc\,tg\,x\sqrt{\frac{b}{2a}} + \frac{x\sqrt{\frac{b}{2a}}}{1+\frac{b}{2a}x^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2ab}}\,Arc\,tg\,x\sqrt{\frac{b}{2a}} + \frac{x}{2a+bx^2}$$

ie Formel 157 C angegeben.

Diese letzte Formel findet man auch us Formel 137, wenn man dort für a n Werth $2a$, für $b=0$ und den Werth für c setzt. Dann ist

$$y = \frac{4a}{4a}\left[\frac{x}{2a+bx^2} + \int\frac{\partial x}{2a+bx^2}\right]$$

Das letzte I. wird durch Formel 96 ge- st bei derselben Buchstabenänderung nd ist $= \frac{1}{\sqrt{2ab}}\,Arc\,tg\,x\sqrt{\frac{b}{2a}}$

Formel 158, A, B, C.

Schreibt man

$$y = \frac{1}{2}\int\frac{\partial(x^2)}{a+bx^2+c(x^2)^2}$$

so hat man nach Formel 108, 109 und 110 die verlangten 3 I unmittelbar.

Formel 159, A, B, C.

Man hat wie für Formel 157, A entwickelt

$$z = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\left[\frac{x^2}{x^2+q^2} - \frac{x^2}{x^2+p^2}\right]$$

Mithin nach Formel 62

$$\int\frac{x^2}{x^2+q^2} = x - q\,Arc\,tg\,\frac{x}{q}$$

$$\int\frac{x^2}{x^2+p^2} = x - p\,Arc\,tg\,\frac{x}{p}$$

folglich Formel 159 A

$$y = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\left[p\,Arc\,tg\,\frac{x}{p} - q\,Arc\,tg\,\frac{x}{q}\right]$$

Für Formel 159 B hat man wie für Formel 157 B

$$y = \frac{1}{4ckg^2}\left[2kg\int\frac{x^2\,\partial x}{g^2+2kgx+x^2} + 2kg\int\frac{x^2\,\partial x}{g^2-2kgx+x^2} + \int\frac{x^2\,\partial x}{g^2+2kgx+x^2} - \int\frac{x^2\,\partial x}{g^2-2kgx+x^2}\right]$$

Bildet man 2 Summen, addirt nämlich das erste mit dem dritten und das

zweite mit dem vierten Integral, so erhält man die Klammergröfse

$$\int \frac{x^2+2hgx^2}{g^2+2hgx+x^2}\partial x - \int \frac{x^2-2hgx^2}{g^2-2hgx+x^2}\partial x$$

Setzt man nun $g^2+2hgx+x^2=M$

$$g^2-2hgx+x^2=N$$

so ist der Zähler des 1. $I=x(M-g^2)$

der Zähler des 2. $I=x(N-g^2)$

und die Klammergröfse

$$=\int \frac{x(M-g^2)}{M}\partial x - \int \frac{x(N-g^2)}{N}\partial x$$

und die Klammern aufgelöst und reducirt

$$\int \frac{g^2 x\,\partial x}{N} - \int \frac{g^2 x\,\partial x}{M}$$

hiernach

$$y=\frac{1}{4chg}\left[\int \frac{x\,\partial x}{N} - \int \frac{x\,\partial x}{M}\right]$$

Die Klammergröfse ist also entgegengesetzt übereinstimmend mit den beiden letzten Gliedern in Gleichung 3 der Entwickelung für Formel 157, B und beträgt Gl. 8 − Gl. 7 = − Gl. 9

$$\tfrac{1}{2} ln \frac{M}{N} - \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} Arctg \frac{2gx\sqrt{1-h^2}}{g^2-x^2}$$

Demnach ist Formel 159 B

$$y=\frac{1}{8chg}\left[ln\frac{g^2-2ghx+x^2}{g^2+2ghx+x^2}+\frac{2h}{\sqrt{1-h^2}}Arctg\frac{2gx\sqrt{1-h^2}}{g^2-x^2}\right]$$

worin $h=cos\,\alpha$ ist.

Formel 159, C gilt für $b^2=4ac$. Die Form von y ändert sich in

$$y=4a\int\frac{x^2\,\partial x}{(2a+bx^2)^2}=\frac{4a}{b}\int\frac{(2a+bx^2-2a)\,\partial x}{(2a+bx^2)^2}$$

$$=\frac{4a}{b}\int\frac{\partial x}{2a+bx^2}-\frac{8a^2}{b}\int\frac{\partial x}{(2a+bx^2)^2}$$

Das 1te I wird durch Formel 96, das 2te I durch Formel 157, C gelöst.

Formel 160.

Setzt man $a+bx^2+cx^4=z$

so ist $2bx+4cx^3=\frac{\partial z}{\partial x}$

Mithin hat man den Zähler

$$x^3\,\partial x=\frac{\partial z-2bx}{4c}$$

mithin

$$y=\frac{1}{4c}\int\frac{\partial z}{z}-\frac{b}{2c}\int\frac{x\,\partial x}{z}$$

$$=\frac{1}{4c}ln(a+bx^2+cx^4)-\frac{b}{2c}\int\frac{x\,\partial x}{z}$$

Formel 161.

Man hat $y=\frac{1}{a}\int\left[\frac{1}{x}-\frac{bx+cx^3}{a+bx^2+cx^4}\right]\partial x$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{x}-\frac{b}{a}\int\frac{x\,\partial x}{a+bx^2+cx^4}-\frac{c}{a}\int\frac{x^3\,\partial x}{a+bx^2+cx^4}$$

$$=\frac{1}{a}lnx-\frac{b}{a}\int\frac{x\,\partial x}{a+bx^2+cx^4}-\frac{c}{a}\left[\frac{1}{4c}ln(a+bx^2+cx^4)-\frac{b}{2c}\int\frac{x\,\partial x}{a+bx^2+cx^4}\right]$$

$$=\frac{1}{a}lnx-\frac{1}{4a}ln(a+bx^2+cx^4)-\frac{b}{2a}\int\frac{x\,\partial x}{a+bx^2+cx^4}$$

also $$y=\frac{1}{4a}ln\frac{x^4}{a+bx^2+cx^4}-\frac{b}{2a}\int\frac{x\,\partial x}{a+bx^2+cx^4}$$

Irrationale Functionen.

XXVII. bis XXXI. Formel 162 bis 205 s. Integral, B, No. 34.

XXXII., Formel 206 wird entwickelt, wenn man $a+bx=z$ setzt und wie für Formel 39 No. 37 verfährt. Alsdann

$x=\frac{z-a}{b}$, $\partial x=\frac{1}{b}\partial z$ und $\partial z=b\,\partial x$

Man hat demnach

$$\int z^{\frac{n}{p}}\left(\frac{z-a}{b}\right)^m \cdot \frac{\partial z}{b} = \left(\frac{1}{b}\right)^{m+1} \int z^{\frac{n}{p}} (z-a)^m \partial z$$

$$\left(\frac{1}{b}\right)^{m+1}\left[\int z^{\frac{n}{p}+m}\partial z - m_1 a \int z^{\frac{n}{p}+m-1}\partial z + m_2 a^2 \int z^{\frac{n}{p}+m-2}\partial z\right.$$

$$\left. \ldots\ldots \mp m a^{m-1}\int z^{\frac{n}{p}+1}\partial z \pm a^m \int z^{\frac{n}{p}}\partial z\right]$$

den Werth $a+bx$, für ∂z den Werth $b\,\partial x$ gesetzt, entsteht

$$\left(\frac{1}{b}\right)^{m+1}\left[\int (a+bx)^{\frac{n}{p}+m} b\cdot\partial x - m_1 a\int (a+bx)^{\frac{n}{p}+m-1} b\,\partial x + \ldots\ldots\right]$$

mel 207, dasselbe I, wird wie No. 37, el 40 aus der allgemeinen Reduc- ormel entwickelt.

Prüfung des Gebrauchs beider Formeln 206 und 207 ist als Beispiel Formel 217: $\int x^2\sqrt{a+bx}\,\partial x$ zuerst nach Formel 206 integrirt:

$$\left(\frac{1}{b}\right)^3\left[\int (a+bx)^{\frac{1}{2}} b\cdot\partial x - 2a\int (a+bx)^{\frac{1}{2}} b\cdot\partial x + a^2\int (a+bx)^{\frac{1}{2}} b\cdot\partial x\right]$$

$$\left(\frac{1}{b}\right)^3\left[\tfrac{2}{7}(a+bx)^{\frac{7}{2}} - \tfrac{4}{5}a(a+bx)^{\frac{5}{2}} + \tfrac{2}{3}a^2(a+bx)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$\frac{2(a+bx)^{\frac{3}{2}}}{105\cdot b^3}\left[15(a+bx)^2 - 42a(a+bx) + 35a^2\right]$$

$$\frac{2(a+bx)^{\frac{3}{2}}}{105\cdot b^3}\left(8a^2 - 12abx + 15b^2x^2\right)$$

Dieselbe nach Formel 207 integrirt:

$$\int\sqrt{a+bx}\,\partial x = x^2\frac{(a+bx)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}b} - \frac{2}{\frac{3}{2}b}\int x(a+bx)^{\frac{3}{2}}\partial x$$

$$= \frac{2}{3b}x^2(a+bx)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3b}x\int (a+bx)^{\frac{3}{2}}\partial x + \frac{4}{3b}\int\partial x\int (a+bx)^{\frac{3}{2}}\partial x$$

$$-\frac{4}{3b}\cdot\frac{2}{5b}x(a+bx)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3b}\cdot\frac{2}{5b}\int (a+bx)^{\frac{5}{2}}\partial x$$

$$+\frac{4}{3b}\cdot\frac{2}{5b}\cdot\frac{2}{7\cdot 6}(a+bx)^{\frac{7}{2}}$$

Hieraus, die Werthe rechts zusammengefafst ist:

$$\int\sqrt{a+bx}\,\partial x = \frac{2}{3b}x^2(a+bx)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{15b^2}x(a+bx)^{\frac{5}{2}} + \frac{16}{105b^3}(a+bx)^{\frac{7}{2}}$$

$$= \frac{2(a+bx)^{\frac{3}{2}}}{105b^3}\left[35b^2x^2 - 28bx(a+bx) + 8(a+bx)^2\right]$$

es reducirt dieselbe Formel gibt. s dieser Berechnung ist zu ersehen, Formel 206 die bequemere ist und weniger Aufmerksamkeit erfordert als Formel 207.

Formel 208 und 209 sind nach Formel 206

$$\int (a\pm bx)^{\frac{1}{2}}\partial x = \frac{1}{b^2}\left[\int (a\pm bx)^{\frac{3}{2}}(\pm b)\,\partial x - 1\cdot a\int (a\pm bx)^{\frac{1}{2}}(\pm b)\,\partial x\right]$$

$$= \frac{1}{b^2}\left[\tfrac{2}{5}(a\pm bx)^{\frac{5}{2}} - \tfrac{2}{3}a(a\pm bx)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{2}{15b^2}\left[3(a\pm bx) - 5a\right](a\pm bx)^{\frac{3}{2}}$$

Formel 210 und 211 nach Formel 206

$$\int \frac{x\,\partial x}{\sqrt{(a \pm bx)}} = \int x\,(a \pm bx)^{-\frac{1}{2}}\,\partial x = \frac{1}{b^2}\,[\int (a \pm bx)^{\frac{1}{2}}\,(\pm b)\,\partial x - a \int (a \pm bx)^{-\frac{1}{2}}\,(\pm b)\,\partial x]$$

$$= \frac{2}{3b^2}\,(\pm bx - 2a)\,(a \pm bx)^{\frac{1}{2}}$$

Formel 212 und 213

$\int \frac{\sqrt{a \pm bx}}{x}\,\partial x$ kann weder durch Formel 206 noch durch 207 gelöst werden, weil hier $m = -1$ ist. Man muſs umformen: Es ist

$$\int \frac{\sqrt{a \pm bx}}{x}\,\partial x = \int \frac{a \pm bx}{x\sqrt{a \pm bx}}\,\partial x = a \int \frac{\partial x}{x\sqrt{a \pm bx}} \pm b \int \frac{\partial x}{\sqrt{a \pm bx}}$$

Das 2te I ist aus Formel 196 und 197 zu entnehmen.

Setzt man nun um das erste I aufzulösen $\sqrt{a \pm bx} = z$

Dann ist $a \pm bx = z^2$ folglich

$$x = \frac{z^2 - a}{\pm b}$$

$$\partial x = \pm \frac{2z}{b}\,\partial z$$

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{a \pm bx}} = \pm \frac{1}{b} \int \frac{2z \cdot \partial z}{\frac{z^2 - a}{\pm b} \cdot z} = \int \frac{2\,\partial z}{z^2 - a}$$

und nach Formel 51

$$= 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{a}}\,ln \frac{z - \sqrt{a}}{z + \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot ln \cdot \frac{z^2 + a - 2z\sqrt{a}}{z^2 - a}$$

also

$$a \int \frac{\partial x}{x\sqrt{a \pm bx}} = \sqrt{a}\,ln \frac{2a \pm bx - 2\sqrt{a}\sqrt{a \pm bx}}{\pm x} \qquad (A)$$

$$\int \frac{\sqrt{a \pm bx}}{x}\,\partial x = \sqrt{a}\,ln \frac{\pm 2a + bx \mp 2\sqrt{a}\sqrt{a \pm bx}}{\pm x} \pm 2\sqrt{a \pm bx} \qquad (B)$$

Formel 214 und 215 sind übereinstimmend mit der eben entwickelten Formel *A*, wenn man sie mit *a* dividirt.

Die Formel 214 wird auch in Folge einer etwas von der vorstehenden Entwickelung abweichenden Form aufgeführt, nämlich

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{a + bx}} = -\frac{1}{\sqrt{a}}\,ln \frac{2a + bx + 2\sqrt{a}\sqrt{a + bx}}{x} \qquad (C)$$

Um zu ersehen, daſs beide Formeln, diese und No. 214 richtig sind, ist bloſs erforderlich zu finden, daſs deren Differenz eine Constante ist.

Es ist Formel C zu schreiben

$$+ ln \frac{1}{2a + bx + 2\sqrt{a}\sqrt{a + bx}} + ln\,x$$

hierzu Formel 214

$$+ ln\,(2a + bx - 2\sqrt{a}\sqrt{a + bx}) - ln\,x$$

wenn in beiden die Constante $\sqrt{\frac{1}{a}}$ fortgelassen wird.

Setzt man nun der leichteren Uebersicht wegen, wie bei der Entwickelung, $a + bx = z^2$ so hat man beide Werthe

$$ln \frac{1}{z^2 + a + 2 \cdot z\sqrt{a}} + ln\,x = ln \frac{1}{(z + \sqrt{a})^2} + ln\,x$$

$$ln\,(z^2 + a - 2z\sqrt{a}) - ln\,x = ln\,(z - \sqrt{a})^2 - ln\,x$$

$ln \frac{1}{z+\sqrt{a}} + ln\, x$

$ln (z-\sqrt{a}) - ln\, x$

ren Differenz

$ln \frac{1}{z+\sqrt{a}} - 2\, ln (z-\sqrt{a}) + 2\, ln\, x$

nstanten Factor 2 fortgelassen und

$+ ln (z+\sqrt{a}) - ln (z+\sqrt{a})$ zugefügt und reducirt gibt

$$ln \frac{z+\sqrt{a}}{z+\sqrt{a}} - ln (z^2-a) + ln\, x$$

Nun ist $ln \frac{z+\sqrt{a}}{z+\sqrt{a}} = ln\, 1 = 0$; Es ist mithin die Differenz beider I

$$= -ln (z^2-a) + ln\, x = -ln\, bx + ln\, x = ln \frac{1}{b}$$

XIII.

mel 219 ist die in No. 59 pag. 318 telte Formel, aus welcher die 3 in 67, 68, 69 als geschlossene I itet sind.

mel 220 ist aus No. 60, pag. 319, elbar zu entnehmen; aus derselben ie Formeln 70 und 71 als geschlos- entwickelt.

mel 221 A und B, s. die Entwickelungen No. 51 und 52, pag. 314 zu Formel 51 und 52.

Formel 222 A und B, s. die Entwickelungen No. 54 und 55, pag. 315 und 316 zu den Formeln 54 und 55.

Formel 223. Setze $a + bx^2 = z^2$

so ist $2bx\, \partial x = 2z\, \partial z$

also $\partial x = \frac{z}{bx}\, \partial z$

$$\int x \sqrt{a+bx^2}\, \partial x = \int xz \cdot \frac{z}{bx}\, \partial z = \frac{1}{b} \int z^2\, \partial z = \frac{1}{3b} z^3$$

mel 224 wird wie 223 entwickelt.

mel 225 ist No. 50 auf zwei verne Weisen zu Formel 50 ent-

mel 226 wird auf dieselbe Weise elt.

XIV.

mel 227 ist in No. 58, pag. 318 ch zwei ähnlichen Formeln, nämlich in den Formeln 60, 61 und 62 entwickelt.

Formel 228, A und B sind in No. 58 zu Formel 63 und 64 entwickelt.

Formel 229, s. No. 58, pag. 318, Formel 65.

Formel 230 wählt man die Bezeichnung wie für Entwickelung der Formeln 105 bis 107, also

$$a + bx + cx^2 = c\left(z^2 - \frac{b^2}{4c} + \frac{a}{c}\right) = c\,(z^2 - k^2)$$

o $$k^2 = \frac{b^2}{4c} - \frac{a}{c}$$

$$z = x + \frac{b}{2c} \text{ und also } \partial z = \partial x$$

$$\int \frac{x\, \partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \int \frac{\left(z - \frac{b}{2c}\right) \partial z}{\sqrt{cz^2 - ck^2}} = \int \frac{z\, \partial z}{\sqrt{cz^2-ck^2}} - \frac{b}{2c} \int \frac{\partial z}{\sqrt{cz^2-ck^2}}$$

ich Formel 225 und 227 A:

$$= \frac{1}{c} \sqrt{cz^2 - ck^2} - \frac{b}{2c} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}}\, ln \left(\sqrt{cz^2 - ck^2} + z\sqrt{c}\right)$$

$$= \frac{1}{c} \sqrt{a+bx+cx^2} - \frac{b}{2c\sqrt{c}} ln \left[\sqrt{a+bx+cx^2} + \left(x + \frac{b}{2c}\right)\sqrt{c}\right]$$

mel 231.

$$\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

Es ist

$$a + bx + cx^2 = c\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\, x + x^2\right)$$

Die Klammergröfse = 0 gesetzt entstehen die Wurzeln

$$x = -\frac{b}{2c} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4c^2} - \frac{a}{c}}$$

und es ist $a + bx + cx^2 = c\left[x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}\right]\left[x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}\right]$ (1)

$\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$ durch p

$\frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$ durch q ausgedrückt,

gibt $a + bx + cx^2 = c(x + p)(x + q)$ (4)

Setzt man nun

$\sqrt{(x + p)(x + q)} = (x + q)\,z$ (5) also nach 4 und 5

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{a + bx + cx^2}} = \int \frac{\partial x}{x\sqrt{c}\,(x + q)\,z} = -\frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{\frac{2(p - q)\,z\,\partial z}{(z^2 - 1)^2}}{\frac{p - qz^2}{z^2 + 1}(x + q)\,z}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{c}} \int \frac{(p - q)\,\partial z}{(z^2 - 1)\,(x + q)\,(p - qz^2)}$$

Es ist aber $x + q = \frac{p - qz^2}{z^2 - 1} + q = \frac{p - q}{z^2 - 1}$

Diesen Werth ins I gesetzt gibt

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{a + bx + cx^2}} = -\frac{2}{\sqrt{c}} \int \frac{\partial z}{p - qz^2} = -\frac{2}{q\sqrt{c}} \int \frac{\partial z}{\frac{p}{q} - z^2}$$

Nun ist aber nach Formel 6 $z^2 = \frac{x + p}{x + q} = \frac{p + x}{q + x} = \frac{p}{q} - \frac{p - q}{q\,(x + q)}$

also $z^2 < \frac{p}{q}$ und $\frac{\partial z}{\frac{p}{q} - z^2}$ eine positive Gröfse. Demnach hat man nach Formel 52

$$\int \frac{\partial x}{\frac{p}{q} - z^2} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{p}{q}}} ln \frac{\sqrt{\frac{p}{q}} + z}{\sqrt{\frac{p}{q}} - z} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{p}{q}}} ln \frac{\sqrt{p} - z\sqrt{q}}{\sqrt{p} - z\sqrt{q}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{p}{q}}} ln \frac{p + qz^2 + 2z\sqrt{pq}}{p - qz^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{p}{q}}} ln \frac{p + q \cdot \frac{x + p}{x + q} + 2\frac{\sqrt{(x + p)(x + q)}}{x + q} \cdot \sqrt{pq}}{p - q \cdot \frac{x + p}{x + q}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{p}{q}}} ln \frac{2pq + x(p + q) + 2\sqrt{(x + p)(x + q)}\sqrt{pq}}{x(p - q)}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{p}{q}}} ln \frac{2a + bx + 2\sqrt{a}\sqrt{a + bx + cx^2}}{x\sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Dieser Ausdruck mit $-\frac{2}{q\sqrt{c}}$ multiplicirt gibt, wenn man im Nenner des Logarithmus die Constante $\sqrt{b^2 - 4ac}$ fortläfst:

$$\int \frac{\partial x}{x\sqrt{a + bx + cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{a}} ln \frac{2a + bx + 2\sqrt{a}\sqrt{a + bx + cx^2}}{x}$$

Formel 232.

Setze wie für Formel 230: $x = z - \frac{b}{2c}$ so ist

$$\int \sqrt{a + bx + cx^2}\, \partial x = \int \sqrt{\frac{4ac - b^2}{4c} + cz^2}\, \partial z$$

thin nach Formel 219, z durch x ausgedrückt, entsteht Formel 232.

Formel 233. Es ist

$$\int x \sqrt{a + bx + cx^2} = \frac{[(b + 2cx) - b]\sqrt{a + bx + cx^2}}{2c}$$

glich

$$= \frac{1}{2c}\int [\sqrt{a + bx + cx^2}\,(b + 2cx)\,\partial x - \frac{b}{2c}\int (\sqrt{a + bx + cx^2})\,\partial x]$$

raus Formel 233 unmittelbar hervorgeht.

Formel 234. Es ist

$$\int \frac{\sqrt{a + bx + cx^2}}{x}\,\partial x = \int \frac{a + bx + cx^2}{x\sqrt{a + bx + cx^2}}\,\partial x = a\int \frac{\partial x}{x\sqrt{a + bx + cx^2}} + b\int \frac{\partial x}{\sqrt{a + bx + cx^2}} + c\int \frac{x\,\partial x}{\sqrt{a + bx + cx^2}}$$

Das erste I löst Formel 231 und ist s 2te Glied von Formel 234; das 3te durch Formel 230 gelöst und mit dem en I vereinigt gibt das 1te + dem drit- n Gliede von Formel 234.

Transcendente Functionen.

Exponential Functionen.

XXXV. Die Formeln 235 bis 244 sind us dem Vortrag: „Integral" etc. No. 67 nd 68 pag. 322 unmittelbar zu entnehmen.

Formel 245. Setze $e^x = z$, so ist $x = ln\, z$, also $\partial x = \frac{\partial z}{z}$

und $$\int \frac{\partial x}{e^x} = \int \frac{\partial z}{z^2} = -\frac{1}{z} = -\frac{1}{e^x}$$

Formel 246. Setze $a^x = z$ so ist $\partial x = \frac{\partial z}{z\, ln\, a}$

nd $$\int \frac{\partial x}{a^x} = \frac{1}{ln\, a}\int \frac{\partial z}{z^2} = -\frac{1}{z\, ln\, a} = -\frac{1}{x^x\, ln\, a}$$

Formel 247. Die Bezeichnung wie vorhin ist

$$\int \frac{x^n\,\partial x}{e^x} = \int \frac{(ln\, z)^n}{z}\cdot\frac{\partial z}{z} = \int (ln\, z)^n\, z^{-2}\,\partial z$$

$$= (ln\, z)^n \int z^{-2}\,\partial z - \int \left(\frac{n\,(ln\, x)^{n-1}}{z}\cdot \int z^{-2}\,\partial z\right)\partial z$$

$$= -\frac{(ln\, z)^n}{z} + n\int \frac{(ln\, z)^{n-1}\,\partial z}{z^2} = -\frac{x^n}{e^x} + n\int \frac{x^{n-1}}{e^{2x}}\,\partial z$$

Formel 248 aus Formel 247; $n = 1$ gesetzt.

Formel 249 desgl. $n = 2$ gesetzt, nämlich

$$\int \frac{x^2\,\partial x}{e^x} = \int (ln\, z)^2\, z^{-2}\,\partial z = -\frac{(ln\, z)^2}{z} + 2\int ln\, z\cdot z^{-2}\,\partial z$$

$$\int ln\, z\cdot z^{-2}\,\partial z = -\frac{ln\, z}{z} + \int z^{-2}\,\partial z = -\frac{ln\, z}{z} - \frac{1}{z}$$

ber $$\int \frac{x^2\,\partial x}{e^x} = -\frac{(ln\, z)^2}{z} - \frac{2\, ln\, z}{z} - \frac{2}{z} = -\frac{x^2 + 2x + 2}{e^x}$$

Formel 250.

$$\int \frac{x^3\,\partial x}{e^x} = \int (ln\,x)^3 z^{-2}\,\partial z = -\frac{(ln\,z)^3}{z} + 3\int (ln\,z)^2\, z^{-2}\,\partial z$$

$$= -\frac{(ln\,z)^3}{z} - \frac{3\,(ln\,z)^2}{z} + 6\int ln\,z \cdot z^{-2}\,\partial z$$

$$= -\frac{(ln\,z)^3}{z} - \frac{3\,(ln\,z)^2}{z} - \frac{6\,ln\,z}{z} - \frac{6}{z}$$

Formel 251. Setze hier $a^x = z$; und $\partial x = \frac{\partial z}{z\,ln\,a}$

dann ist $x\,ln\,a = ln\,z$ also $x = \frac{ln\,z}{ln\,a}$ folglich

$$\int \frac{x^n\,\partial x}{a^x} = \int \left(\frac{ln\,z}{ln\,a}\right)^n \cdot \frac{z^{-2}}{ln\,a}\,\partial z = \left(\frac{1}{ln\,a}\right)^{n+1} \int (ln\,z)^n\, z^{-2}\,\partial z$$

Logarithmische Functionen.

Die Formeln XXXVI. sind in No. 72, pag. 324 entwickelt.

Die Formeln XXXVII. bis XXXX sind in No. 71 und 73 pag. 324 entwickelt.

XXXXI. Formel 260 ist übereinstimmend mit Formel B, No. 75, pag. 325.

Aus dieser Formel kann keine Function integrirt werden, deren Nenner $ln\,x$ ist, denn m ist $= 1$ und die Nenner $m-1$ werden Null.

Formel 261 ist übereinstimmend mit Formel 84, No. 74, pag. 325.

Formel 262. Man setzt wie No. 74 $ln\,x = z$, dann erhält man

$$\int \frac{x\,\partial x}{ln\,x} = \int \frac{e^z \cdot (e^z\,\partial z)}{z} = \int \frac{e^{2z}\,\partial z}{z} = \int \frac{(e^2)^z}{z}\,\partial z$$

Folglich in No. 69, Formel 79, für a den Werth e^2 gesetzt, gibt

$$\int \frac{(e^2)^z}{z} = ln\,z + z\,ln\,e^2 + \frac{z^2\,(ln\,e^2)^2}{2\cdot 2} + \frac{z^3\,(ln\,e^2)^3}{2\cdot 3\cdot 3} + \ldots + \frac{z^m\,(e^2)^m}{2\cdot 3\cdot 4\ldots m\,m}$$

$$= ln\,z + 2z + z^2 + \tfrac{4}{3}z^3 + \ldots\ldots \frac{z^m}{3\cdot 4\ldots m}$$

Für z seinen Werth $ln\,x$ gesetzt gibt Formel 262.

Formel 263. Hier wird $\int \frac{x^2\,\partial x}{ln\,x} = \int \frac{(e^2)^z}{z}\,\partial z$

$$= ln\,z + z\,ln\,e^2 + z^2\,(ln\,e^2)^2 + \ldots\ldots$$

$$= ln\,z + 3z + \tfrac{3}{2}z^2 + \tfrac{1}{2}z^3 + \ldots\ldots + \frac{z^m}{2\cdot 4\cdot 5\ldots m}$$

Formel 264. Hier ist $\int \frac{x^n\,\partial x}{ln\,x} = \int \frac{(e^{n+1})^z}{z}\,\partial z$ mithin

$$= ln\,z + (n+1)\,z + \frac{(n+1)^2}{2\cdot 2}z^2 + \frac{(n+1)^3}{2\cdot 3\cdot 3}z^3 + \ldots + \frac{(n+1)^m}{2\cdot 3\ldots m\cdot m}z^m$$

XXXXII. Formel 265.

Es ist $\int \frac{\partial x}{(ln\,x)^2} = \int \frac{e^z\,\partial z}{z^2}$ $= -\frac{e^z}{z} + \int \frac{e^z}{z}\,\partial z$

also nach Formel 241 also nach Formel 243

$$\int \frac{\partial x}{(ln\,x)^2} = -\frac{e^z}{z} + ln\,z + z + \frac{z^2}{2\cdot 2} + \ldots + \frac{z^m}{2\cdot 3\cdot 4\ldots m\cdot m}$$

Formel 266 und 267 werden nach Formel 268 entwickelt.

ormel 268.

$$\frac{x^n\,\partial x}{(\ln x)^2} = \int \frac{(e^{n+1})^z\,\partial z}{z^2}$$

ach Formel 242

$$-\frac{(e^{n+1})^z}{z} + \frac{ln\,(e^{n+1})}{1}\int\frac{(e^{n+1})^z}{z}\,\partial z$$

$$-\frac{(e^{n+1})^z}{z} + (n+1)\int\frac{(e^{n+1})^z}{z}\,\partial z$$

as letzte Integral nach No. 69, For- 70.

rigonometrische Functionen.

XXXIII. Formel 269 bis 276 gehen unmittelbar aus No. 76 bis 82 mit Formel 86 bis 93 hervor.

XXXIV. bis LIV. die allgemeinen Formeln sind entwickelt No. 84 bis 95 mit den Formeln 95 bis 106.

LV. Formel 363 wird entwickelt aus LVII. Formel 373, weenn man $n = 1$ und $m = n$ setzt.

LVI. Formel 368 desgleichen aus LVIII. Formel 377 mit derselben Aenderung.

LVII. Formel 373.

Es ist $\int x^n \sin^m x\,\partial x = \int x^{n-1}\sin^{m-1}x \cdot \partial(\int \sin x\,\partial x)$

$\int x^{n-1}\sin^{m-1}\partial(-x\cos x + \sin x)$

$x^{n-1}\sin^{m-1}x(-x\cos x+\sin x) - \int\partial(x^{n-1}\sin^{m-1}x)(-x\cos x+\sin x)\,\partial x$

$-x^n\cos x\sin^{n-1}x + x^{n-1}\sin^m x$

$-\int(m-1)\,x^{n-1}\sin^{m-2}x\cos x(-x\cos x+\sin x)\,\partial x$

$-\int(n-1)\,x^{n-2}\sin^{m-1}x(-x\cos x+\sin x)\,\partial x$

$-x^n\cos x\sin^{m-1}x + x^{n-1}\sin^m x$

$+(m-1)\int x^n\sin^{m-2}x\cos^2 x\,\partial x - (m-1)\int x^{n-1}\sin^{m-1}x\cos x\,\partial x$

$+(n-1)\int x^{n-1}\sin^{m-1}x\cos x\,\partial x - (n-1)\int x^{n-2}\sin^m x\,\partial x$

$-x^n\cos x\sin^{m-1}x + x^{n-1}\sin^m x + (n-m)\int x^{n-1}\sin^{m-1}x\cos x\,\partial x$

$-(n-1)\int x^{n-2}\sin^m x\,\partial x + (m-1)\int x^n\sin^{m-2}x\,\partial x - (m-1)\int x^n\sin^m x\,\partial x$

Mithin das letzte I auf die linke Seite gebracht

$$\int x^n\sin^m x\,\partial x = -x^n\cos x\sin^{m-1}x + x^{n-1}\sin^m x + (n-m)\int x^{n-1}\sin^{m-1}x\cos x\,\partial x - (n-1)\int x^{n-2}x\sin^m x\,\partial x + (m-1)\int x^n\sin^{m-2}x\,\partial x$$

Nun ist das erste I rechts

$$(n-m)\int x^{n-1}\sin^{m-1}\cos x\,\partial x = \frac{n-m}{m}\int x^{n-1}\,\partial\sin^m x$$

$$= \frac{n-m}{m}x^{n-1}\sin^m x - \frac{n-m}{m}\int\sin^m x\,\partial x^{n-1}$$

$$= \frac{n-m}{m}x^{n-1}\sin^m x - \frac{(n-m)(n-1)}{m}\int x^{n-2}\sin^m x\,\partial x$$

Diesen Werth statt des ersten I eingesetzt und reducirt gibt

$$\int x^n\sin^m x\,\partial x = -x^n\cos x\cdot\sin^{m-1}x + \frac{n}{m}x^{n-1}\sin^m x + (m-1)\int x^n\sin^{m-2}x\,\partial x - \frac{(n-m)(n-1)}{m}\int x^{n-2}\sin^m x\,\partial x$$

Mit m dividirt ergibt Formel 373.

LVIII. Formel 377 wird auf demselben Wege wie Formel 373 entwickelt.

LIX. Formel 381 A und B.

Es ist $\int\frac{\partial x}{\sin^n x\cdot\cos^m x} = \int\sin^{-n}x\cdot\cos^{-m}x\,\partial x = \int\sin^{-n}x\cos x\cdot\cos^{-m-1}x\,\partial x$

$$= \frac{1}{-n+1}\int\cos^{-m-1}x\,\partial(\sin^{-n+1}x)$$

$$= +\frac{1}{-n+1}\cos^{-m-1}x\sin^{-n+1}x - \int\sin^{-n+1}x\,\partial(\cos^{-m-1}x)$$

$$= \frac{1}{-n+1}\cos^{-m-1}x\sin^{-n+1}x - \frac{-m-1}{-n+1}\int\sin^{-n+2}\cdot\cos^{-m-2}\partial x$$

also Formel 381 A.

$$= \frac{-1}{n-1} \cdot \frac{1}{\sin^{n-1}x \cdot \cos^{m+1}x} + \frac{m+1}{n-1} \int \frac{\partial x}{\sin^{n-2}x \cdot \cos^{m+2}x}$$

Formel 381 B.

Es ist $$\int \frac{\partial x}{\sin^n x \cdot \cos^m x} = \int \sin^{-n-1}x \cdot \cos^{-m}x \cdot \sin x \, \partial x$$

$$= -\frac{1}{-m+1} \int \sin^{-n-1}x \cdot \partial (\cos^{-m+1}x)$$

$$= \frac{1}{m-1} \sin^{-n-1}x \cdot \cos^{-m+1}x - \frac{1}{m-1} \int \cos^{-m+1} \partial (\sin^{n-1}x)$$

$$= \frac{1}{m-1} \sin^{-n-1}x \cdot \cos^{-m+1}x + \frac{n+1}{m-1} \int \cos^{-m+2} \sin^{-n-2} \partial x$$

also Formel 381 B.

$$= \frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{\sin^{n+1}x \cdot \cos^{m-1}x} + \frac{n+1}{m-1} \int \frac{\partial x}{\sin^{n+2} \cos^{m-2}}$$

Integralgleichung ist eine Gleichung, die durch die Integrirung einer Differenzialgleichung entsteht.

Die in diesen Artikel gehörende Aufgabe ist allgemein: Eine gegebene Differenzialgleichung zu integriren; oder was dasselbe ist: aus einer gegebenen Differenzialgleichung die derselben zugehörige Stammfunction zu finden.

Aus der Gleichung

$$y^2 = 2ax + x^2$$

geht die Differenzialgleichung hervor

$$y \, \partial y = (a + x) \, \partial x$$

Diese Gleichung wiederum integrirt

$$\tfrac{1}{2}y^2 = ax + \tfrac{1}{2}x^2$$

oder $$y^2 = 2ax + x^2$$

So einfach wie diese Gleichung ist jede andere Differenzialgleichung zu integriren, in welcher jede einzelne der beiden Functionen blofs mit ihrer Urveränderlichen und mit Constanten verbunden ist; vorausgesetzt, dafs jede Function selbst integrabel ist. Man sagt von solcher Gleichung: die veränderlichen Gröfsen in derselben seien gesondert.

$$\varphi x \cdot fx \cdot \partial x + Fy \cdot \partial y = 0$$

ist eine Differenzialgleichung mit gesonderten Veränderlichen.

$$\varphi(x,y)\, y + F(x)\, y = 0$$

ist eine Differenzialgleichung mit ungesonderten Veränderlichen, und es ist behufs der Auffindung der ihr zugehörigen Integralgleichung die erste Aufgabe, dafs die Veränderlichen gesondert werden.

Differenzialgleichungen, in welchen die höchsten Potenzen beider Veränderlichen gleiche Exponenten haben heifsen gleichartig, sonst ungleichartig.

Eine Differenzialgleichung ist vom ersten Grade, wenn ∂x und ∂y nur im ersten Grade vorkommen; sie ist vom $n$ten Grade, wenn $(\partial x)^n$ und $(\partial y)^n$ darin enthalten sind

Eine Differenzialgleichung ist von der ersten Ordnung wenn nur erste Differenziale vorkommen, von der $n$ten Ordnung wenn $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ darin vorkommt.

$$axy \, \partial y + bx \, \partial x + cx \, \partial y = 0$$

ist eine Differenzialgleichung von der ersten Ordnung und dem ersten Grade.

$$y^3 (\partial y)^2 + 2xy \, \partial y \cdot \partial x + (x^3 - y^2)(\partial x)^2 = 0$$

ist in Bezug auf $\frac{\partial y}{\partial x}$ eine Gleichung vom zweiten Grade und von der ersten Ordnung

$$\partial^2 y + (ax^2 + by^2) \, \partial x^2$$

ist wegen $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ eine Gleichung der zweiten Ordnung und vom ersten Grade, da das höchste Differenzial vom ersten Grade ist.

2. Eine gleichartige Differenzialgleichung mit ungesonderten Veränderlichen läfst für die Sonderung derselben ein einfaches Verfahren zu.

Sind $\varphi(x,y)$ und $f(x,y)$ von der Form, dafs jede in 2 Factoren zu zerlegen ist, von welchen der eine Factor eine Function von x, der andere eine Function von y ist, so geschieht deren Sonderung durch Division.

Als $\varphi(x,y)\, \partial x = f(x,y)\, \partial y$ (1)

und $\varphi(x,y) = X \times Y$; $f(x,y) = X' \times Y'$

wo X, X' Functionen von x, Y, Y' Functionen von y sind; dann hat man aus

$$X \times Y \, \partial x = X' \times Y' \times \partial y$$

$$\frac{X}{X'}\,\partial x = \frac{Y'}{Y}\,\partial y \qquad (2)$$

ıit die Sonderung geschehen ist.

Es seien in der obigen Gleichung ,y); $F(x,y)$ keine solche Producte, so

ə $y = ux$

$$\frac{\varphi(x,y)}{f(x,y)} = Fu$$

ann ist $\partial y = u \cdot \partial x + x \cdot \partial u$

aus Gl. 1 zugleich

$$\partial y = \frac{\varphi(x,y)\,\partial x}{f(x,y)} = Fu \cdot \partial x$$

ithin aus $u\,\partial x + x\,\partial u = Fu \cdot \partial x$

$$(Fu - u)\,\partial x = x\,\partial u$$

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{Fu - u}$$

iese Gleichung integrirt gibt die In-

algleichung

$$ln\,x = \int \frac{\partial u}{Fu - u} + C$$

1. Beispiel. Gegeben die Differenzialgleichung:

$$(ax + by)\,\partial x = (Ax + By)\,\partial y$$

für $y = ux$

ist $$Fu = \frac{ax + by}{Ax + By} = \frac{\frac{ay}{u} + by}{\frac{Ay}{u} + By} = \frac{a + bu}{A + Bu}$$

$$Fu - u = \frac{a + (b - A)u - Bu^2}{A + Bu}$$

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{(A + Bu)\,\partial u}{a + (b - A)u - Bu^2}$$

und $$ln\,x = \int \frac{(A + Bu)\,\partial u}{a + (b - A)u - Bu^2}$$

Multiplicirt man das I und dessen Nenner mit $\frac{1}{2}$ so ist das Differenzial des Nenners $= \frac{1}{2}b\,\partial u - \frac{1}{2}A\,\partial u - Bu\,\partial u$

Um den Zähler zum Theil in dieser Form zu erhalten, schreibt man denselben

$$-[\tfrac{1}{2}b\,\partial u - \tfrac{1}{2}A\,\partial u - Bu\,\partial u] + \tfrac{1}{2}b\,\partial u + \tfrac{1}{2}A\,\partial u$$

Man hat demnach

$$\frac{\partial x}{x} = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial[a + (b - A)]u - Bu^2}{\frac{1}{2}[a + (b - A)u - Bu^2]} + \tfrac{1}{2}(b + A)\frac{\partial u}{a + (b - A)u - Bu^2}$$

lich

$$\int \frac{\partial x}{x} = ln\,x = -\tfrac{1}{2}ln\,[a + (b - A)u - Bu^2] + \tfrac{1}{2}(b + A)\int \frac{\partial u}{a + (b - A)u - Bu^2}$$

as letzte I ist aus Integralformel 108 entwickeln.

. Beispiel. Gegeben die Differengleichung

$$by\,\partial x + c\,\partial y = 0$$

lieraus hat man $\frac{\partial y}{y} = -\frac{b}{c}\,\partial x$

ə integrirt $ln\,y = -\frac{b}{c}\,x$

d $y = e^{-\frac{b}{c}x}$ + Constante (C)

Für diese Form von y ist die Conıte als Summand unmöglich; denn ı in diesem allgemeinen Fall die Conıte zu bestimmen hat man für die gebene Gleichung

$$b\left(e^{-\frac{b}{c}x} + C\right) + ce^{-\frac{b}{c}x} = 0$$

oraus $C = -\left(\frac{c}{b} + 1\right)e^{-\frac{b}{c}x}$, also keine onstante.

Die Constante ist hier dem Exponent ıufügen und man hat

$$y = e^{-\frac{b}{c}x + C} = e^C \cdot e^{-\frac{b}{c}x}$$

oder wenn man C für e^C schreibt

$$y = Ce^{-\frac{b}{c}x} = \frac{C}{e^{\frac{b}{c}x}}$$

Diesen Werth von y in die Differenzialgleichung gesetzt ergibt $C = -\frac{c}{b}$

3. Beispiel. Gegeben die Differenzialgleichung

$$a + by\,\partial x + c\,\partial y = 0$$

Um die Constante fortzuschaffen setze $y = z + p$, so hat man

$$a + bz\,\partial x + bp + c\,\partial z = 0$$

Setzt man nun $a + bp = 0$, also $p = -\frac{a}{b}$

so hat man die Gleichung

$$bz\,\partial x + c\,\partial z = 0$$

woraus $$\frac{\partial z}{z} = -\frac{b}{c}\,\partial x$$

und integrirt

$$ln\,z = -\frac{b}{c}x + C = \left(-\frac{b}{c}x + C\right)ln\,e$$

und $z = -e^{-\frac{b}{c}x + C} = -Ce^{-\frac{b}{c}x}$

also nach Beispiel 2:

$$s = -\frac{c}{b}\, e^{-\frac{b}{c}x}$$

Mithin vollständig

$$y = -\frac{1}{b}\left(a + ce^{-\frac{b}{c}x}\right)$$

4. Gegeben die Differenzialgleichung

$$\varphi x + by\,\delta x + c\,\delta y = 0$$

Setze $y = uf x$ (1)

so ist $\delta y = uf'x + fx \cdot \delta u$

und die Gleichung wird ohne y zu enthalten

$$\varphi x + bu\,fx + cu\,f'x + cfx \cdot \delta u = 0 \quad (2)$$

Es soll nun fx in der Weise bestimmt sein, dafs

$$cu\,f'x + \varphi x = 0 \quad (3)$$

Dann ist, diese Werthe in die Gleichung gesetzt und mit fx dividirt

$$bu + c\,\delta u = 0$$

woraus $\frac{\delta u}{u} = -\frac{b}{c}\,\delta x$

und $\int \frac{\delta u}{u} = ln\, u = \left(-\frac{b}{c}x\right) ln\, e$

und $u = e^{-\frac{b}{c}x}$

Nun ist

$$f'x = -\frac{\varphi x}{cu} = -\frac{1}{c}\,\varphi x e^{\frac{b}{c}x}$$

also $$fx = -\frac{1}{c}\int \varphi x \cdot e^{\frac{b}{c}x}\,\delta x$$

mithin $$y = uf x = \frac{-1}{ce^{\frac{b}{c}x}} \cdot \int \varphi x e^{\frac{b}{c}x}\,\delta x$$

Die Constante fällt hier fort.

5. Beispiel. Gegeben die Differenzialgleichung

$$-x^2 + y + \delta y = 0$$

Hier ist im Vergleich mit der Gleichung No. 4

$$-x^2 = \varphi x;\ b = 1;\ c = 1;$$

$$u = e^{-x}$$

$$fx = \frac{y}{u} = ye^{-x}$$

daher $y = -e^{-x}\int(-x^2)e^x \delta x = e^{-x}\int x^2 e^x\,\delta x$

$$= e^{-x} \cdot e^x \cdot (x^2 - 2x + 2) = x^2 - 2x + 2$$

Ueber die Integration der Differenzialgleichungen lassen sich keine allgemein anzuwendende Regeln geben.

Intensität ist in der Aerodynamik gleichbedeutend mit (mechanischem) Moment in der Geomechanik und Hydromechanik. I ist das Product aus der Masse mit der Geschwindigkeit bei der Bewegung luftförmiger Körper.

Interpoliren, s. „Einschalten".

Inverse, s. v. w. „indirect".

Involute wurde früher auch für Evolvente gesagt.

Involution früher gebräuchlicher Ausdruck für Potenzirung.

Irdische Refraction, terrestrische R.; irdische, terrestrische Strahlenbrechung hat denselben Grund wie die schon hier abgehandelte astronomische R, nämlich in der Brechung des Lichtstrahls, wenn er aus einer dünneren Luftschicht in eine dichtere tritt, wodurch der Lichtpunkt höher zu stehen scheint als er in Wirklichkeit steht, indem der Lichtstrahl auf seinem Wege von einem hoch über der Erdoberfläche belegenen Punkt zu dem in dichterer Luft befindlichen Auge fortdauernd nach dem Lote des Auges gebrochen wird und statt in einer geraden Linie in einer nach der Erde hin concaven krummen Linie sich fortbewegt.

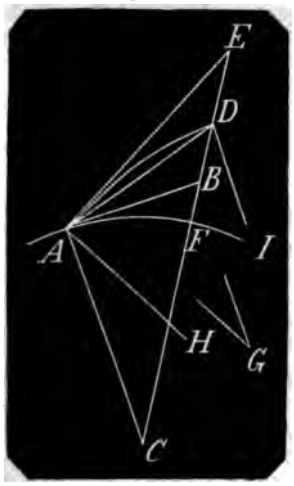
Der Lichtstrahl, welcher von einem Gestirn herrührt, durchbricht sämmtliche Erdluftschichten; ein zu dem Erdkörper gehörender hoher Punkt liegt innerhalb des Luftkreises, der von ihm ausgehende Lichtstrahl hat also viel weniger Luftschichten zu durchbrechen, und deshalb ist die irdische Strahlenbrechung geringer als die astronomische. Dennoch aber macht sie Höhenmessungen unrichtig.

Soll z. B. um die Höhe BD zu finden der $\angle DAB$ gemessen werden, so geht der Lichtstrahl von D nach A in einer krummen Linie DA ins Auge, auch das letzte Element des Weges ist noch ein Bogen und das Auge erblickt den wirklichen Punkt D in der Richtung AE, nämlich längs der Tangente des letzten Curvenelements. Es wird der $\angle EAB$ gemessen und die Brechung ergibt die Höhe um die Länge DE zu hoch.

Die Gröfsen der astronomischen R in Winkeln wie $\angle EAD$ ausgedrückt, sind Versuchen zufolge nach La Place Bd. I, pag. 156 angegeben. Ueber die irdische R sind die Angaben abweichend.

Allgemein wird angenommen, dafs die von dem Lichtstrahl beschriebene Curve ein Kreisbogen ist. Ist nun AF ein Bogen der Erdoberfläche, C der Erdmittelpunkt, so wird der Halbmesser des Bo-

Fig. 723.



gens AD im Verhältniſs zum Erdhalbmesser AC angegeben. Sind AH, DJ Richtungen der Radien von AD, G ihr Durchschnittspunkt, so sind Beobachtungen und Versuchen zufolge

nach Bouguer $AG = 9\,AC$
nach Thobias Mayer $AG = 8\,AC$
nach Lambert $AG = 7\,AC$

Diese letzte Bestimmung wird nun, und besonders von den preuſsischen Feldmessern als Norm genommen, nämlich daſs der Refractionswinkel (der Centriwinkel des Lichtstrahlbogens AGD) $\frac{1}{7}$ des Excentriwinkels (ACF) betrage.

Hierbei ist zu bemerken, daſs bei gröſseren Distanzen AF (bei kleineren ist die Refraction auſser Acht zu lassen) der Bogen AD = dem Bogen AF angenommen wird, und es kann dies auch, ohne daſs man einen bemerkbaren Fehler begeht geschehen. Denn in dem Art. „Horizont" ist nachgewiesen worden, daſs bei einer Länge $AF = 16000$ Fuſs der Bogen AF mit der Tangente AB einerlei Länge hat. Hierbei ist $\angle ACF = 2^\circ\,50'$, mithin $\angle AGD = 24\frac{1}{2}$ Secunden. Nun ist AE Tangente, mithin nach geometrischen Lehren $\angle DAE = \frac{1}{2}\angle AGD = 12\frac{1}{4}$ Secunden. Bei einer Strecke AF von 8000 Fuſs würde $\angle DAE$ nur $6\frac{1}{8}$ Secunden betragen.

AB ist Tangente, daher $\angle BAF = \frac{1}{2}ACF$, mithin $\angle DAE = \frac{1}{7}BAF$. Es ist dieses Verhältniſs beider Winkel das besonders bei den preuſsischen Feldmessern bekannte und gebräuchliche Ein Siebentel und heiſst: Der dem gemessenen Höhenwinkel noch zuzufügende Refractionswinkel beträgt ein Siebentel des Abweichungswinkels zwischen der wahren und scheinbaren Horizontalen.

Irrational heiſst eine Zahl, wenn sie weder von der Zahl Eins noch von einem ganzen Theil der Zahl Eins ein ganzes Vielfaches ist. Z. B. $\sqrt{3}$; *log nat* 2; π. Eine Zahl, die irrational ist, heiſst Irrationalzahl. Irrational sagt man von einem Verhältniſs, wenn es sich nicht durch ganze Zahlen ausdrücken läſst: $\frac{1}{2} : \frac{1}{5}$ ist ein rationales Verhältniſs weil es gleich ist 18 : 35, also in ganzen Zahlen ausgedrückt werden kann. $1 : \sqrt{2}$; $\sqrt{2} : \sqrt{3}$ sind irrationale Verhältnisse.

$\sqrt{2} : \sqrt{8}$ ist ein rationales Verhältniſs, denn $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ daher $\sqrt{2} : \sqrt{8} = 1 : 2$. Irrationalzahlen können also in einem rationalen Verhältniſs stehen.

Irrationalzahlen können auch ohne ein rationales Verhältniſs zu haben, commensurabel sein als $\sqrt[3]{4} : \sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{4} : \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} = 1 : \sqrt[3]{2}$; die gemeinschaftliche Einheit beider ist $\sqrt[3]{4}$.

2. Es kann von Nutzen sein, aus einer Gleichung irrationale Aggregate von Gröſsen fortzuschaffen. Fermat hat für sein Verfahren folgendes Beispiel gegeben (Klügel math. Wörterbuch II., pag. 953).

$$\sqrt[3]{(a^3 b + b^3)} + \sqrt{(bc + c^2)} = b$$

Setze $\sqrt{(bc + c^2)} = d$

so ist $\sqrt[3]{(a^3 b + b^3)} = b - d$

$$a^3 b + b^3 = b^3 - 3b^2 d + 3bd^2 - d^3$$

oder $$a^3 b = -3b^2 d + 3bd^2 - d^3$$

Um das neu eingeführte d auf die erste Potenz zu bringen multiplicire die Gleichung links mit d^2, rechts mit $bc + c^2$ so erhält man reducirt und durch d dividirt

$$3b^3 c + 3b^2 c^2 = (3b^2 c + 3bc^2 - a^3 b) d - (bc + c^2) d^2$$

Multiplicire wieder links mit d^2, rechts mit $bc + c^2$ so erhält man

$$d = \frac{b\,(3bc + 3c^2 - a^3)\,(b + c)}{3b^3 + 4b^2 c + bc^2 + c^3}$$

Diesen Werth in die aus der gegebenen Gleichung abgeleitete Gleichung $a^3 b + b^3 = (b - d)^3$ gesetzt, gibt eine der gegebenen Gleichung identische Gleichung, in welcher irrationale Gröſsen nicht mehr vorkommen.

Die Rechnung ist weitläufig und gewährt wegen der complicirten Endgleichung, welche man erhält, keinen Nutzen.

Bei einfacheren Gleichungen geschieht die Fortschaffung der irrationalen Gröfsen nach der Regel der Buchstabenrechnung. Z. B. $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=0$ woraus quadrirt

$$a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc}=0$$

wiederum quadrirt, nachdem die 3 Wurzelgröfsen nach rechts gebracht worden und reducirt

$$a^2+b^2+c^2=2(ab+ac+bc)+4(\sqrt{a^3bc}+\sqrt{ab^3c}+\sqrt{abc^3})$$
$$=2(ab+ac+bc)+4(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})\sqrt{abc}$$

woraus, weil das letzte Glied als = 0 fortfällt.

$$a^2+b^2+c^2=2(ab+ac+bc)$$

Irrational bei Euklid (Buch X) heifst eine Linie, welche einer rationalen Linie incommensurabel ist (s. die Art.: „commensurabel, incommensurabel"). Nach Erklärung 5 ist jede beliebige angenommene Linie, mit welcher andere verglichen werden sollen, rational. Jede andere Linie, welche mit dieser commensurabel ist, ist ebenfalls rational, und die welche mit ihr incommensurabel ist, ist irrational. Nach Erklärung 8 heifst auch das Quadrat der angenommenen Linie rational und nach Erklärung 6 soll auch diejenige Linie, welche der angenommenen Linie blofs in Potenz commensurabel ist, rational heifsen.

Ist demnach in Zahlen die angenommene Linie = 1, so sind auch die Linien 3 und $\sqrt{3}$ rational, erstere weil sie der angenommenen Linie 1 in Länge und letztere, weil sie in Potenz, d. h. im Quadrat (3) dem Quadrat 1 der Linie 1 commensurabel ist. Die Bezeichnungen für diese Linien s. im Art. „incommensurabel".

Das zehnte Buch des Euklid ist das Capitel der Arithmetik: Von den Irrationalzahlen, die aber dort geometrisch, nämlich als gerade Linien, Quadrate und Rectangel bildlich dargestellt sind. Die alten Mathematiker hatten so gut wie wir heut eine richtige Vorstellung von den Zahlengröfsen, allein nur sehr dürftige arithmetische Hülfsmittel; Es fehlten ihnen unsere Zahlen, unser Zahlensystem, unsre Rechnenkunst und die Buchstabenrechnung. Daher ist denn auch alles, was im Alterthum in Arithmetik geschehen ist, nichts anders als eine synthetisch behandelte analytische Geometrie. Die Leichtigkeit, mit welcher jetzt arithmetische Lehren aufgefafst werden, und wozu schon die Elementarschulen vorbereiten, macht zum Studium des 10ten euklidischen Buches unlustig. Dagegen hat dies Buch nicht nur den historischen Werth, dafs man erfährt, welche Schwierigkeiten die Alten bei den ihnen zu Gebote gestandenen nur geringen arithmetischen Hülfsmitteln vorfanden; es ist auch interessant und belehrend, mit Aufmerksamkeit die geistreichen Gedanken- und Schlufsfolgen kennen zu lernen, mit welchen sie jene Schwierigkeiten überwunden haben.

Folgende Erläuterungen, oder vielmehr algebraische Uebersetzung der euklidischen Constructionen haben den Zweck, das Studium des zehnten Buchs im Euklid zu erleichtern.

Rationallinien, die einander in Länge, also auch in Potenz (im Quadrat) commensurabel sind, werden hier bezeichnet mit den grofsen Buchstaben $A, B, C \ldots X, Y, Z$.

Ganze positive Zahlen mit den kleinen Buchstaben $m, n, p, q \ldots$.

Der Rationallinie A ist die Linie $A\sqrt{n}$ in Länge incommensurabel, in Potenz commensurabel. Die Linien $A\sqrt{n}$ und $B\sqrt{n}$ sind in Länge commensurabel, sie verhalten sich wie $A:B$. Die Linien $A\sqrt{n}$ und $B\sqrt{m}$ sind in Länge incommensurabel in Potenz commensurabel. Die Linie $B\sqrt[4]{m}$ ist der Linie A in Länge und Potenz incommensurabel. $A\sqrt[4]{n}$ und $B\sqrt[4]{n^3}$ sind in Länge incommensurabel, in Potenz commensurabel.

Die Sätze 1 bis 20 bedürfen keiner Erläuterung.

1. Die Linien A und $B\sqrt{m}$ enthalten ein irrationales Rectangel $AB\sqrt{m}$, und die Linie L, welche solches Rectangel potenzirt (d. h. $L^2=AB\sqrt{m}$) ist ebenfalls irrational. L hat demnach die Form $A\sqrt{m}$ (Satz 21).

2. Eine Irrationallinie (L), welche ein aus zweien blofs in Potenz commensurabelen Linien ($A\sqrt{m}$, $B\sqrt{n}$) zusammengesetztes Rechteck ($AB\sqrt{mn}$) potenzirt, heifst eine Mediale. Es ist $L=\sqrt{AB\sqrt{mn}}$, und folglich hat die Mediale L die Form $A\sqrt[4]{m}$ (Satz 22).

3. Jedes unter medialen und in Länge commensurablen Linien

$B\sqrt[4]{m}$) enthaltene Rectangel
edial (Satz 25). $\square = AB\sqrt{m}$

Jedes unter medialen blofs in
nz commensurablen Linien
ıltene Rectangel ist entwe-
ational oder medial (Satz 26).

$\sqrt[4]{mn^2} \times B\sqrt{\frac{n^2}{m}} = n\,AB$ (rational)

$\sqrt[4]{m^2} \times B\sqrt[4]{n^2} = AB\sqrt{mn}$ (irrational)

5. Ein Mediales (Rectangel) übertrifft ein Mediales nicht um ein Rationales (Satz 27).

Denn $R(A\sqrt[4]{m} - B\sqrt[4]{n})$ bleibt medial.

6. Zwei mediale blofs in Potenz commensurable Linien, die ein Rationales enthalten zu finden (Satz 28).

Die Construction arithmetisch ausgedrückt ergiebt die Proportion

$$A\sqrt[4]{m^2} : B\sqrt[4]{n^2} = \sqrt{AB} \times \sqrt[4]{mn} : \frac{B\sqrt{n}}{A\sqrt{m}} \cdot \sqrt{AB} \cdot \sqrt[4]{mn}$$

dritte Glied ist die mittlere Proıale der beiden gegebenen ersten
r, das 4te Glied die 4te Propor-
› der 3 ersten; die beiden letzten
r sind die verlangten Linien. Deren

ist $L = A\sqrt[4]{mn}$; $L' = B\sqrt[4]{\frac{n^2}{m}}\,L$ und

d nur in Potenz commensurabel
as zwischen ihnen Enthaltene ist
', also rational.

wei mediale blofs in Potenz
ıensurable Linien, die ein
ıles enthalten, zu finden (Satz

arithmetische Darstellung beider
gten Linien der Construction zu-
ıahe wie ad 6. Die Form ist

$$L = A\sqrt[4]{mn};\quad L' = B\sqrt[4]{mn^2}$$

das Rectangel $L \cdot L'$ ist $= nAB\sqrt{m}$

8. Zwei rationale blofs in Potenz commensurabele Linien zu finden, von denen die gröfsere um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabelen Linie über die kleinere potenzirt (Satz 30).

Es sei die eine der gesuchten Rationalen $A\sqrt{m}$

Sind p^2, q^2 Quadratzahlen, $p^2 - q^2$ keine Quadratzahl, so ist die 2te gesuchte Rationale $= A\sqrt{\frac{p^2-q^2}{p^2}} \cdot \sqrt{m}$. Deren Form ist $L = A$; $L' = A\sqrt{\frac{p^2-q^2}{p^2}}$. Beide sind nur in Potenz commensurabel und

$$A^2 - \frac{p^2-q^2}{p^2} \cdot A^2 = A^2 - A^2 + \frac{q^2}{p^2} A^2 = \left(\frac{q}{p} A\right)^2$$

gröfsere (A) potenzirt also über die
re $A\sqrt{\frac{p^2-q^2}{p^2}}$ um das Quadrat der
$\frac{p}{q} A$, welche mit der ersteren A
ıge commensurabel ist.

wei rationale blofs in Potenz
ıensurabele Linien zu fin-
von denen die gröfsere um
Quadrat einer ihr in Länge incommensurablen Linie über die kleinere potenzirt (Satz 31).

Ist $A\sqrt{m}$ eine der gesuchten Linien, sind p^2, q^2 Quadratzahlen, $p^2 + q^2$ keine Quadratzahl, so ist die zweite gesuchte Linie $A\sqrt{\frac{p^2}{p^2+q^2}}\sqrt{m}$. Deren Form $L = A$; $L' = A\sqrt{\frac{p^2}{p^2+q^2}}$. Beide sind nur in Potenz commensurabel und

$$A^2 - \frac{p^2}{p^2+q^2} A^2 = \frac{q^2}{p^2+q^2} A^2 = \left(\sqrt{\frac{q^2}{p^2+q^2}} A\right)^2$$

A und die Linie $A \cdot \sqrt{\frac{q^2}{p^2+q^2}}$ sind
rlangt in Länge incommensurabel.

Zwei mediale, blofs in Po-
commensurabele Linien zu finden, die ein Rationales enthalten und von denen die gröfsere um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabelen Linie über die kleinere potenzirt (Satz 32).

Man nimmt nach No. 8 (Satz 30) die beiden Linien A und $A\sqrt{\frac{p^2-q^2}{p^2}}$, so ist die erste der gesuchten Linien die mittlere Proportionale von diesen beiden $= A\cdot\sqrt[4]{\frac{p^2-q^2}{p^2}}$. Die zweite gesuchte ist die dritte Proportionale zwischen der eben gefundenen ersten Linie und der zweiten angenommenen Linie =

$$A^2\frac{p^2-q^2}{p^2} : A\sqrt[4]{\frac{p^2-q^2}{p^2}} = A\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{p^2-q^2}{p^2}\right)^3}$$

Also die Form der gesuchten Linien

$$L = A\sqrt[4]{\frac{p^2-q^2}{p^2}} \text{ und } L' = A\sqrt[4]{\left(\frac{p^2-q^2}{p^2}\right)^3}$$

Beide sind in Potenz commensurabel, nämlich

$$A^2\sqrt{\frac{p^2-q^2}{p^2}} : A^2\cdot\frac{p^2-q^2}{p^2}\sqrt{\frac{p^2-q^2}{p^2}} = 1 : \frac{p^2-q^2}{p^2}$$

Beide enthalten ein Rationales, nämlich

$$L\cdot L' = A^2\cdot\frac{p^2-q^2}{p^2}$$

und es ist

$$A^2\cdot\sqrt{\frac{p^2-q^2}{p^2}} - A^2\cdot\frac{p^2-q^2}{p^2}\sqrt{\frac{p^2-q^2}{p^2}} = A^2\sqrt{\frac{p^2-q^2}{p^2}\cdot\frac{q^2}{p^2}} = \left(\frac{q}{p}A\sqrt[4]{\frac{p^2-q^2}{p^2}}\right)^2$$

Die erste Linie L potenzirt also über die zweite L' um das Quadrat der Linie $\frac{q}{p}A\sqrt[4]{\frac{p^2-q^2}{p^2}}$ welche mit L in Länge commensurabel ist und sich zu ihr verhält wie $\frac{q}{p} : 1$.

11. Zwei Linien wie ad 10 zu finden, von denen die gröfsere um das Quadrat einer ihr in Länge incommensurabelen Linie über die kleinere potenzirt (Anmerk. zu Satz 32).

Man nimmt nach No. 9 (Satz 31) die beiden Linien $A\sqrt{m}$ und $A\sqrt{m}\sqrt{\frac{q^2}{p^2+q^2}}$

Dann ist $L = A\sqrt[4]{\frac{q^2}{p^2+q^2}}$ in der Form $L = A\sqrt[4]{m}$

$$L' = A\sqrt[4]{\left(\frac{q^2}{p^2+q^2}\right)^3} \text{ in der Form } L_1 = A\sqrt[4]{m^3}$$

$$L^2 : L_1^2 = 1 : m$$
$$L\times L' = mA^2$$
$$L^2 - L_1^2 = (A\sqrt[4]{m})^2\cdot\left(\sqrt{1-m}\right)^2$$

Die Potenzirung geschieht also um eine der L in Länge incommensurabele Linie.

12. Zwei mediale blofs in Potenz commensurabele Linien zu finden, die ein Mediales enthalten und von denen die gröfsere um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabelen Linie über die kleinere potenzirt (Satz 33).

Nimm 2 Linien nach No. 8 (Satz 30) $l = A$ und $l' = A\sqrt{\frac{p^2-q^2}{p^2}}$, eine dritte l'' $= B\sqrt{m}$. Dann ist die eine der verlangten Linien L die mittlere Proportionale zwischen l und l'', also $L = \sqrt{AB}\cdot\sqrt[4]{m}$. Das Product von L mit der zweiten gesuchten Linie L' also $L\times L'$ ist = dem Product von l'' mit $l' = B\cdot\sqrt{m}\cdot A\cdot\sqrt{\frac{p^2-q^2}{p^2}}$ mithin hat man

$$L' = \frac{l'\cdot l''}{L} = \frac{AB\cdot\sqrt{\frac{p^2-q^2}{p^2}}\,m}{\sqrt{AB}\cdot\sqrt[4]{m}}$$
$$= \sqrt{\left(AB\cdot\frac{p^2-q^2}{p^2}\right)}\sqrt[4]{m}$$

:m der gesuchten Linien ist

und $L' = A\sqrt{\frac{p^2-q^2}{p^2}}\sqrt[4]{m}$

.inien L und L' sind medial,
enzen
$\frac{p^2-q^2}{p^2}\sqrt{m} = 1 : \frac{p^2-q^2}{p^2}$, also die
Potenz commensurabel.

$= A\sqrt{\frac{p^2-q^2}{p^2}}\sqrt{m}$ enthält ein Me-

$A^2\frac{p^2-q^2}{p^2}\sqrt{m} = A^2\sqrt{m}\cdot\frac{q^2}{p^2}$

die Linie, um deren Quadrat
er die L' potenzirt, $= A\frac{q}{p}\sqrt[4]{m}$
Länge commensurabel.

e Linien ad 12, von denen
sere um das Quadrat einer
änge incommensurabelen
kleinere potenzirt zu fin-
ıerk. zu Satz 33).

rfährt so wie No. 11 in Bezie-
No. 10 und erhält

$= A\sqrt[4]{m}$

$= A\sqrt{\frac{q^2}{p^2+q^2}}\sqrt[4]{m}$

$= 1 : \frac{q^2}{p^2+q^2}$ ist commensurabel.

$= A^2\sqrt{\frac{q^2}{p^2+q^2}}\sqrt{m}$ ist medial.

$\frac{q^2}{p^2+q^2}\sqrt{m} = \left(A\sqrt[4]{m}\cdot\sqrt{\frac{p^2}{p^2+q^2}}\right)^2$

ie des letzten Quadrats ist mit
ı Länge commensurabel.

ei in Potenz incommen-
Linien zu finden, die ein
s enthalten und deren
e zusammen ein Rationa-
ıachen (Satz 34).

der Construction zufolge 2 Li-
No. 9 (Satz 31).

$= A;\ l, = A\sqrt{\frac{q^2}{p^2+q^2}}$

Bedeutet X eine Hülfslinie (in Euklids Figur $= BE$)

so ist $(A-X)X^2 = (\frac{1}{2}l,)^2 = \frac{1}{4}A^2\frac{q^2}{p^2+q^2}$

hieraus $X = \frac{1}{2}A\left(1-\sqrt{\frac{p^2}{p^2+q^2}}\right)$

Nun hat man für die verlangten Linien
$L^2 + L,^2 = A^2$

$$L,^2 = A\cdot X = \frac{A^2}{2}\cdot\left(1-\sqrt{\frac{p^2}{p^2+q^2}}\right)$$

woraus $L = A\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{p^2}{p^2+q^2}}\right)}$

$$L, = A\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{p^2}{p^2+q^2}}\right)}$$

Die Form beider Linien ist

$$L = A\sqrt{1+\sqrt{m}}$$
$$L, = A\sqrt{1-\sqrt{m}}$$

Beide Linien L und L' sind in Potenz incommensurabel, nämlich

$$L^2 : L'^2 = 1+\sqrt{m} : 1-\sqrt{m}$$

Beide Linien enthalten ein Mediales:

$$L \times L, = A^2\sqrt{1-m}$$

Die Summe ihrer Quadrate ist rational, nämlich

$$L^2 + L,^2 = 2A^2$$

15. Zwei in Potenz incommensurabele Linien zu finden, die ein Rationales enthalten und deren Quadrate zusammen ein Mediales ausmachen (Satz 35).

Nimm der Construction zufolge 2 Linien nach No. 11 (Anmerk. Satz 32).

$$l = A\sqrt[4]{m};\ l, = A\sqrt[4]{m^3}$$

Nun ist wie No. 14:

$(A\sqrt[4]{m} - X)X = (\frac{1}{2}l,)^2 = \frac{1}{4}A^2\sqrt{m^3}$

woraus $X = \frac{1}{2}A\sqrt[4]{m}(1-\sqrt{1-m})$

$L^2 + L,^2 = A^2\sqrt{m}$

$L,^2 = lX = \frac{1}{2}A^2\sqrt{m}(1-\sqrt{1-m})$

$L^2 = \frac{1}{2}A^2\sqrt{m}(1+\sqrt{1-m})$

mithin die beiden verlangten Linien

$$L = A\sqrt[4]{m}\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-m})} \text{ oder } A\sqrt[4]{m}\sqrt{1+\sqrt{1-m}}$$
$$L, = A\sqrt[4]{m}\sqrt{\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-m})} \text{ oder } A\sqrt[4]{m}\sqrt{1-\sqrt{1-m}}$$

Linien sind in Potenz incom-
el; sie enthalten ein Rationales,

$, = A^2\sqrt{m}\sqrt{m} = A^2m$

deren Quadrate zusammen sind ein Mediales, nämlich

$$L^2 + L,^2 = 2A^2\sqrt{m}.$$

16. Zwei in Potenz incommen

surabele Linien zu finden, deren Quadrate zusammen ein Mediales ausmachen und welche ein Mediales, das jenem incommensurabel ist, enthalten (Satz 36).

Nimm zufolge der Construction 2 Linien nach No. 13 (Anmerk. zu Satz 33).

$$l = A \sqrt[4]{m}$$

$$l_{,} = A \sqrt{\frac{q^2}{p^2+q^2}} \sqrt[4]{m}.$$

Nun wird wie No. 15 verfahren; man hat daher

$$(A \sqrt[4]{m} - X) X = \tfrac{1}{4} A^2 \frac{q^2}{p^2+q^2} \sqrt{m}$$

woraus $X = \tfrac{1}{2} A \sqrt[4]{m} \left(1 - \sqrt{\frac{p^2}{p^2+q^2}}\right)$

Eben so ist

$$L^2 + L_{,}^2 = A^2 \sqrt{m}$$

$$L'^2 = lx = \tfrac{1}{4} A^2 \sqrt{m} \left(1 - \sqrt{\frac{p^2}{p^2+q^2}}\right)$$

und die beiden verlangten Linien

$$L = A \sqrt[4]{m} \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{p^2}{p^2+q^2}}\right)} \text{ oder } A \sqrt[4]{m} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{p^2}{p^2+q^2}}}$$

$$L_{,} = A \sqrt[4]{m} \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{p^2}{p^2+q^2}}\right)} \text{ oder } A \sqrt[4]{m} \sqrt{1 - \sqrt{\frac{p^2}{p^2+q^2}}}$$

Beide Linien sind in Potenz incommensurabel; die Summe ihrer Quadrate ist medial, nämlich $= A^2 \sqrt{m}$, und sie enthalten ein Mediales $\frac{A^2}{2} \sqrt{m} \sqrt{\frac{q^2}{p^2+q^2}}$ welches jener Quadratsumme $A^2 \sqrt{m}$ incommensurabel ist.

Von den durch das Zusammensetzen entstehenden sechs Irrationallinien.

17. Werden zwei bloſs in Potenz commensurabele Rationallinien zusammengesetzt, so ist die ganze irrational und heiſst Binomiale (Satz 37).

Die Binomiale hat also die Form $A \sqrt{m} + B \sqrt{n}$ auch $A + B \sqrt{n}$

18. Werden 2 bloſs in Potenz commensurabele Mediallinien, die ein Rationales enthalten, zusammengesetzt, so ist die ganze irrational und heiſst die erste Bimediale (Satz 38).

Nach No. 6 (Satz 28) hat die erste Bimediale die Form $L = A \sqrt[4]{mn} + B \sqrt[4]{\frac{n^3}{m}}$ beide verhalten sich in Potenz

$$= A \sqrt{mn} : B \frac{n}{m} \sqrt{nm}$$

19. Werden zwei bloſs in Potenz commensurabele Mediallinien, die ein Mediales enthalten, zusammengesetzt, so ist die Ganze irrational und heiſst die zweite Bimediale (Satz 39).

Nach No. 7 (Satz 29) hat die zweite Bimediale die Form $A \sqrt[4]{mn} + B \sqrt[4]{mn^3}$.

20. Werden zwei in Potenz incommensurabele Linien, die ein Mediales enthaltes und deren Quadrate zusammen ein Rationales ausmachen, zusammengesetzt, so ist die ganze irrational und heiſst die gröſsere Irrationale (Satz 40).

Nach No. 14 (Satz 34) ist die Form der gröſseren Irrationale

$$A \sqrt{1 + \sqrt{m}} + A \sqrt{1 - \sqrt{m}}$$

(Hier müssen die Rationallinien A in beiden Gliedern einander gleich sein.)

21. Werden zwei in Potenz incommensurabele Linien, die ein Rationales enthalten und deren Quadrate zusammen ein Mediales ausmachen, zusammengesetzt, so ist die ganze irrational und heiſst die ein Rationales und Mediales Potenzirende (Satz 41).

Nach No. 15 (Satz 35) ist die Form der Linie

$$A \sqrt[4]{m} \sqrt{1 + \sqrt{1-m}} + B \sqrt[4]{m} \sqrt{1 - \sqrt{1-m}}$$

22. Werden zwei in Potenz incommensurabele Linien, deren Quadrate zusammen ein Mediales ausmachen und die ein Mediales, das jenem incommensurabel ist, enthalten, zusammengesetzt, so ist die ganze irrational und heiſst die zwei Mediale Potenzirende (Satz 42).

Nach No. 16 (Satz 36) ist die Form der Linie

$$A \sqrt[4]{m} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{p^2}{p^2+q^2}}} + B \sqrt[4]{m} \sqrt{1 - \sqrt{\frac{p^2}{p^2+q^2}}}$$

23. Die Sätze 43 bis 48 im Euklid enthalten die Beweise, daſs jede der von

.17 bis No. 22 aufgeführten Irrationalien nur in einem Punkt in ihre Na-n sich zerlegen lasse. Aus den euklichen Constructionen geht hervor, dafs de Theile jedesmal mit den einzelnen ebraischen Summanden der vorstehen-1 Formeln übereinstimmen.

Von den sechs Ordnungen der Binomialen.

24. Eine Binomiale, deren gröfserer me um das Quadrat einer ihm in nge commensurabelen Linie über den eineren potenzirt, heifst

Die erste Binomiale, wenn der öfsere Name einer angenommenen Ra-nallinie in Länge commensurabel ist.

Die zweite Binomiale, wenn der einere Name,

Die dritte Binomiale, wenn keiner er beiden Namen solcher Rationallinie Länge commensurabel ist.

Eine Binomiale hingegen, deren grö-erer Name um das Quadrat einer ihm Länge incommensurabelen Linie über n kleineren potenzirt, heifst

Die vierte Binomiale, wenn der öfsere Name der angenommenen Ra-nallinie in Länge commensurabel ist.

Die fünfte Binomiale, wenn der leinere Name,

Die sechste Binomiale, wenn kei-er der beiden Namen solcher Rational-nie in Länge commensurabel ist.

25. Die erste Binomiale zu finden atz 49).

Nimm 2 Zahlen, von welchen sowohl ie eine als auch die Summe beider eine uadratzahl ist; also 2 Zahlen von der rm $(n^2 - m^2)$ und m^2. Sind nun A und zwei Rationallinien so setze

$$n^2 : n^2 - m^2 = A^2 : B^2$$

Man hat nun den einen Namen $= A$

id den zweiten $B = A\sqrt{\frac{n^2 - m^2}{n^2}}$ beide

amen addirt geben die erste Binomiale

$$A + A\sqrt{\frac{n^2 - m^2}{n^2}}$$

id es ist $A^2 - A^2\frac{n^2 - m^2}{n^2} = \left(\frac{m}{n}A\right)^2$

Mithin potenzirt der gröfsere Name A er den kleineren um das Quadrat $\frac{m^2}{n^2}A^2$ ner mit A commensurablen Linie $\frac{m}{n}A$.

26. Die zweite Binomiale zu fin-n (Satz 50).

Man erhält die Namen A und $A\sqrt{\frac{n^2}{n^2 - m^2}}$

die zweite Binomiale ist $A + A\sqrt{\frac{n^2}{n^2 - m^2}}$

und $A^2\frac{n^2}{n^2 - m^2} - A^2 = \frac{m^2}{n^2 - m^2}A^2$

Der gröfsere Name $\frac{nA}{\sqrt{n^2 - m^2}}$ potenzirt um das Quadrat der diesem commensurablen Linie $\frac{mA}{\sqrt{n^2 - m^2}}$ und der kleinere Name A ist rational.

27. Die dritte Binomiale zu finden (Satz 51).

n^2 und m^2 Zahlen wie vorher, p keine Quadratzahl.

A, B, C seien in Länge commensurabele Rationalzahlen so setze

$$p : n^2 = A^2 : B^2$$
$$n^2 : n^2 - m^2 = B^2 : C^2$$

so ist aus 1 der eine Name $B = \frac{An}{\sqrt{p}}$

Aus 1 und 2 hat man

$$p : n^2 - m^2 = A^2 : C^2$$

hieraus der andere Name $C = A\sqrt{\frac{n^2 - m^2}{p}}$

Die dritte Binomiale ist

$$A\frac{n}{\sqrt{p}} + A\sqrt{\frac{n^2 - m^2}{p}}$$

Keiner der Namen ist rational. Ferner ist $A^2\frac{n^2}{p} - A^2\frac{n^2 - m^2}{p} = A^2\frac{m^2}{p}$

und der gröfsere Name $\frac{An}{\sqrt{p}}$ potenzirt um das Quadrat der ihm in Länge commensurabelen Linie $\frac{Am}{\sqrt{p}}$.

28. Die vierte Binomiale zu finden (Satz 52).

Nimm zwei Zahlen, von denen keine eine Quadratzahl, deren Summe aber eine Quadratzahl ist, also von der Form $(n^2 - m)$ und m, A und B seien Rationalzahlen, so setze die Proportion

$$n^2 : n^2 - m = A^2 : B^2$$

und man erhält

den einen Namen $= A$

den anderen $= \frac{A}{n}\sqrt{n^2 - m}$

Die vierte Binomiale ist $A + \frac{A}{n}\sqrt{n^2 - m}$

Der gröfsere Name A ist rational und es ist

$$A^2 - \frac{A^2}{n^2}(n^2 - m) = mA^2$$

mithin potenzirt der gröfsere Name A um das Quadrat einer ihm incommensurabelen Linie $A\sqrt{m}$.

29. Die fünfte Binomiale zu finden (Satz 53).

Nimm zwei Quadratzahlen, deren Summe keine Quadratzahl ist, m^2 und n^2, A und B seien 2 Rationallinien, so setze

$$m^2 : m^2 + n^2 = A^2 : B^2$$

und man hat beide Namen $= A$ und $B = A\sqrt{\frac{m^2+n^2}{m^2}}$

Die fünfte Binomiale ist

$$A + A\sqrt{\frac{m^2+n^2}{m^2}}$$

der kleinere Name A ist rational und der gröfsere Name $A\sqrt{\frac{m^2+n^2}{m^2}}$ potenzirt über den kleineren A um das Quadrat der Linie $\left(\frac{n}{m}A\right)$ welche mit dem gröfseren Namen incommensurabel ist.

30. Die sechste Binomiale zu finden (Satz 54).

Nimm zwei Zahlen die nicht Quadratzahlen sind, deren Summe aber eine Quadratzahl ist $(m^2 - n)$ und n, und eine dritte Zahl p, welche weder Quadratzahl ist noch mit einer der ersten beiden das Verhältnifs einer Quadratzahl hat; A, B, C seien Rationallinien. Setze

$$p : m^2 = A^2 : C^2$$
$$m^2 : m^2 - n = C^2 : B^2$$

---

so ist aus 1. $C^2 = \frac{m^2}{p}A^2$

aus 2 $B^2 = \frac{m^2-n}{m^2}C^2 = \frac{m^2-n}{p}A^2$

Die Namen sind $A\sqrt{\frac{m^2}{p}}$ und $A\sqrt{\frac{m^2-n}{p}}$

Keiner der Namen ist rational und der gröfsere Name $A\sqrt{\frac{m^2}{p}}$ potenzirt über den kleineren $A\sqrt{\frac{m^2-n}{p}}$ um das Quadrat der Linie $A\sqrt{\frac{n}{p}}$ welche zu dem gröfseren Namen sich verhält wie $\sqrt{n} : m$ also mit demselben incommensurabel ist.

31. Den unter einer Rationallinie und der ersten Binomiale enthaltenen Raum potenzirt eine Binomiale (Satz 55).

Nach No. 25 ist die erste Binomiale $= A + A\sqrt{\frac{n^2-m^2}{n^2}}$

Nach No. 17 hat eine Binomiale die Form $A\sqrt{m} + B\sqrt{n}$.

Es ist also nachzuweisen, wenn C, D rationale noch unbekannte Linien sind und wenn R die im Satz angenommene Rationallinie bedeutet, dafs das Quadrat einer Linie von der Form $C\sqrt{p} + D\sqrt{q}$ = ist dem Rectangel $R\left(A + A\sqrt{\frac{n^2-m^2}{n^2}}\right)$

Setzt man die Linie EG (Figur zu Satz 55) $= B$, so hat man der Construction zufolge

$$(AE - EG)\,EG = (\tfrac{1}{2}ED)^2$$
$$(A - B)\,B = \tfrac{1}{4}A^2 \cdot \frac{n^2-m^2}{n^2}$$

Hieraus ist $B = \frac{1}{2}A\left(1 - \frac{m}{n}\right)$

$$A - B = \tfrac{1}{2}A\left(1 + \frac{m}{n}\right)$$

Die verlangte potenzirende Linie ist nun

$$L = \sqrt{R(A-B)} + \sqrt{RB}$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}AR\left(1+\frac{m}{n}\right)} + \sqrt{\tfrac{1}{2}AR\left(1-\frac{m}{n}\right)}$$

Ein Ausdruck, der die Form $(C\sqrt{p} + D\sqrt{q})$ annehmen kann, wenn man schreibt

$$L = \sqrt{AR\,\frac{n+m}{2n}} + \sqrt{AR\,\frac{n-m}{2n}}$$

Die Quadrirung von L ergibt aber

$$\tfrac{1}{2}AR\left(1+\frac{m}{n}\right) + \tfrac{1}{2}AR\left(1-\frac{m}{n}\right) + 2\sqrt{\tfrac{1}{4}A^2R^2\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)} = AR + AR\sqrt{\frac{n^2-m^2}{n^2}}$$

welches das gegebene Rectangel $R\left(A + A\sqrt{\frac{n^2-m^2}{n^2}}\right)$ ist, und die potenzirende Linie L ist die Binomiale.

32. Den unter einer Rationallinie R und der zweiten Binomiale $\left(A + A\sqrt{\frac{n^2}{n^2-m^2}}\right)$ enthaltenen Raum

tenzirt die erste Bimediale (Satz
).

Es ist also nachzuweisen, dafs (No 18 id 26) mit 2 Linien X, Y eine Gleiung möglich ist:

$$X\sqrt[4]{pq} + Y\sqrt[4]{\left(\frac{p^3}{q}\right)^3} = AR\left(1+\sqrt{\frac{n^2}{n^2-m^2}}\right)$$

Bei derselben Construction wie No. 31 t zu beachten, dafs hier das zweite Glied $\sqrt{\frac{n^2}{n^2-m^2}}$ der gröfsere Name ist, und dafs der Construction zufolge die Gleichung entsteht:

$$\left(A\sqrt{\frac{n^2}{n^2-m^2}} - B\right)B = \tfrac{1}{4}A^2 \qquad (1)$$

woraus $$B = \frac{A}{2}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2-m^2}} - \frac{m}{\sqrt{n^2-m^2}}\right) \qquad (2)$$

aber $$A\sqrt{\frac{n^2}{n^2-m^2}} - B = \frac{A}{2}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2-m^2}} + \frac{m}{\sqrt{n^2-m^2}}\right) \qquad (3)$$

Die potenzirende Linie ist nun in ihren beiden Namen

$$L = \sqrt{\left(A\sqrt{\frac{n^2}{n^2-m^2}} - B\right)R} + \sqrt{BR}$$

$$= \sqrt{\frac{A}{2}R\frac{n+m}{\sqrt{n^2-m^2}}} + \sqrt{\frac{A}{2}R\frac{n-m}{\sqrt{n^2-m^2}}} \qquad (4)$$

$$= \sqrt{\frac{A}{2}R}\left[\sqrt[4]{\frac{n+m}{n-m}} + \sqrt[4]{\frac{n-m}{n+m}}\right] \qquad (5)$$

Beide Namen sind medial, sie sind in otenz commensurabel, wie aus Formel unmittelbar zu ersehen, nämlich

$$\frac{AR}{2\sqrt{n^2-m^2}}(n+m) \text{ und } \frac{AR}{2\sqrt{n^2-m^2}}(n-m)$$

Beide enthalten ein Rationales $= \frac{AR}{2}$

Folglich ist die Linie L nach No. 18 eine rste Bimediale.

Will man den Ausdruck für die Linie in die obige allgemeine Form der ersten Bimediale bringen, so setze in Formel 5

$$n+m = q$$

$$\frac{1}{n-m} = p \text{ und man hat}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}AR}\left[\sqrt[4]{qp} + \sqrt[4]{\frac{1}{p\cdot q}}\right]$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}AR}\left[\sqrt[4]{pq} + \frac{1}{p}\sqrt{\frac{p^3}{q}}\right]$$

$\frac{1}{2}AR = X$; $\frac{1}{p}\sqrt{\frac{1}{2}AR} = Y$ gesetzt, gibt die verlangte Form.

Die Linie L im Quadrat ist aus Formel 4

$$= AR\frac{n}{\sqrt{n^2-m^2}} + AR = AR\left(1+\sqrt{\frac{n^2}{n^2-m^2}}\right)$$

Sie potenzirt also den Raum wie verlangt.

33. Den unter einer Rationallinie R und der dritten Binomiale $A\frac{n}{\sqrt{p}} + A\sqrt{\frac{n^2-m^2}{p}}$ enthaltenen Raum potenzirt die zweite Bimediale (Satz 57).

Bei derselben Construction ist

$$\left(A\sqrt{\frac{n^2}{p}} - B\right)B = \tfrac{1}{4}A^2\frac{n^2-m^2}{p}$$

woraus $$B = \tfrac{1}{2}A\left(\sqrt{\frac{n^2}{p}} - \sqrt{\frac{m^2}{p}}\right)$$

$$A\sqrt{\frac{n^2}{p}} - B = \tfrac{1}{2}A\left(\sqrt{\frac{n^2}{p}} + \sqrt{\frac{m^2}{p}}\right)$$

die verlangte Linie

$$\sqrt{\left(A\sqrt{\frac{n^2}{p}} - B\right)R} + \sqrt{BR} = \sqrt{\tfrac{1}{2}AR\frac{n+m}{\sqrt{p}}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}AR\frac{n-m}{\sqrt{p}}}$$

Beide Namen bilden die zweite Bimediale (No. 19), denn sie sind Mediallinien, ie sind in Potenz commensurabel:

$$\frac{AR}{2\sqrt{p}}(m+n) \text{ und } \frac{AR}{\sqrt{p}}(n-m)$$

nd sie enthalten ein Mediales $\frac{1}{2}AR\sqrt{\frac{n^2-m^2}{p}}$

Ihr Quadrat ist $= AR\left[\frac{n}{\sqrt{p}} + \sqrt{\frac{n^2-m^2}{p}}\right]$

wie verlangt.

34. Den unter einer Rationallinie R und der vierten Binomiale $A+\frac{A}{n}\sqrt{n^2-m}$ enthaltenen Raum potenzirt die gröfsere Irrationale (Satz 58).

Bei derselben Construction ist:

$$(A-B)B=\tfrac{1}{4}A^2\left(1-\frac{m}{n^2}\right)$$

woraus $$B=\tfrac{1}{2}A\left(1-\frac{\sqrt{m}}{n}\right)$$

und $$A-B=\tfrac{1}{2}A\left(1+\frac{\sqrt{m}}{n}\right)$$

Die verlangte Linie ist

$$L=\sqrt{(A-B)R}+\sqrt{BR}=\sqrt{\frac{RA}{2}\left(1+\frac{\sqrt{m}}{n}\right)}+\sqrt{\frac{RA}{2}\left(1-\frac{\sqrt{m}}{n}\right)}$$

Beide Namen sind medial, in Potenz incommensurabel, sie enthalten ein Mediales $=\frac{RA}{2}\sqrt{1-\frac{m}{n^2}}$, deren Quadrate machen zusammen RA, ein Rationales aus; folglich ist L eine gröfsere Irrationale $L^2=RA\left(1+\sqrt{\frac{n^2-m}{n^2}}\right)$ wie verlangt.

35. Den unter einer Rationallinie R und der fünften Binomiale $A+A\sqrt{\frac{m^2+n^2}{m^2}}$ enthaltenen Raum potenzirt die ein Rationales und Mediales Potenzirende (Satz 59).

Bei derselben Construction ist, da der 2te Name der gröfsere ist

$$\left(A\sqrt{\frac{m^2+n^2}{m^2}}-B\right)B=\tfrac{1}{4}A^2$$

woraus $$B=\frac{A}{2m}(\sqrt{m^2+n^2}-n)$$

und $$A-B=\frac{A}{2m}(\sqrt{m^2+n^2}+n)$$

Die verlangte Linie

$$L=\sqrt{\tfrac{1}{2}AR\frac{\sqrt{m^2+n^2}+n}{m}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}AR\frac{\sqrt{m^2+n^2}-n}{m}}$$

Beide Namen sind medial, in Potenz incommensurabel sie enthalten ein Rationales $=\frac{1}{2}AR$, deren Quadrate zusammen machen ein Mediales aus $\left(\frac{AR}{m}\sqrt{m^2+n^2}\right)$; folglich ist L eine die ein Rationales und Mediales Potenzirende. Ihr Quadrat ist $=AR\left(1+\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}\right)$ wie verlangt.

36. Den unter einer Rationallinie R und der sechsten Binomiale $A\sqrt{\frac{m^2}{p}}+A\sqrt{\frac{m^2-n}{p}}$ enthaltenen Raum potenzirt die zwei Mediale Potenzirende (Satz 60).

Bei derselben Construction ist

$$\left(A\sqrt{\frac{m^2}{p}}-B\right)B=\tfrac{1}{4}A^2\frac{m^2-n}{p}$$

woraus $$B=\tfrac{1}{2}A\left(\sqrt{\frac{m^2}{p}}-\sqrt{\frac{n}{p}}\right)$$

und $$A\sqrt{\frac{m^2}{p}}-B=\tfrac{1}{2}A\left(\sqrt{\frac{m^2}{p}}+\sqrt{\frac{n}{p}}\right)$$

Die verlangte Linie

$$L=\sqrt{\tfrac{1}{2}AR\left(\sqrt{\frac{m^2}{p}}+\sqrt{\frac{n}{p}}\right)}+\sqrt{\tfrac{1}{2}AR\left(\sqrt{\frac{m^2}{p}}-\sqrt{\frac{n}{p}}\right)}$$

Beide Namen sind medial, in Potenz incommensurabel.

Sie enthalten ein Mediales

$$\tfrac{1}{2}AR\sqrt{\frac{m^2}{p}-\frac{n}{p}}$$

Ihre Quadrate zusammen $AR\sqrt{\frac{m^2}{p}}$ ein Mediales, welches mit dem vorigen incommensurabel ist. Mithin ist L eine zwei Mediale Potenzirende. Ihr Quadrat ist $L^2=AR\left(\sqrt{\frac{m^2}{p}}+\sqrt{\frac{m^2-n}{p}}\right)$ wie verlangt.

37. Die folgenden sechs Sätze (Satz 61 bis 66) sind die umgekehrten Sätze von (Satz 55 bis 60) No. 31 bis 36. Sie

ten zusammengezogen nachfolgend, de- Formeln statt der Beweise sind die- ben wie dort.

Sätze. Das an einer Rationalen R entworfene Rectangel hat, wenn es gleich ist dem Quadrat

er Binomiale	zur Breite die	erste	Binomiale
r ersten Bimediale	„ „ „	zweite	„
r zweiten Bimediale	„ „ „	dritte	„
r gröfseren Irrationale	„ „ „	vierte	„
r ein Rationales und Mediales Potenzirenden	„ „ „	fünfte	„
r zwei Mediale Potenzirenden	„ „ „	sechste	„

37. Nun folgen fünf Sätze (Satz 67 bis): Jede Linie, welche in Länge com- ensurabel ist irgend einer der genann- ten Irrationallinien, ist auch dieselbe Irrationallinie. Ist eine Linie in Länge commensurabel

ner Binomiale,	so ist sie eine	Binomiale derselben Ordnung
ner Bimediale,	„ „ „ „	Bimediale „ „
ner gröfseren Irrationale,	„ „ „ „	gröfsere Irrationale

. s. w. mit einer ein Rationales und ediales und mit einer zwei Mediale Po- nzirende.

Es geht die Richtigkeit dieser Sätze unmittelbar aus den für die Irrationalen aufgestellten algebraischen Formen hervor:

Die erste Binomiale $= A + A\sqrt{\frac{n^2 - m^2}{n^2}}$

„ zweite „ $= A + A\sqrt{\frac{n^2}{n^2 - m^2}}$

„ dritte „ $= A\sqrt{\frac{n^2}{p}} + A\sqrt{\frac{n^2 - m^2}{p}}$

„ vierte „ $= A + A\sqrt{\frac{n^2 - m}{n^2}}$

„ fünfte „ $= A + A\sqrt{\frac{n^2 + m^2}{m^2}}$

„ sechste „ $= A\sqrt{\frac{n^2}{p}} + A\sqrt{\frac{n^2 - m}{p}}$

„ erste Bimediale $= A\sqrt[4]{mn} + A\sqrt[4]{\frac{n^2}{m}} = A\sqrt[4]{mn} + nA\sqrt[4]{\frac{1}{mn}}$

„ zweite „ $= A\sqrt[4]{mn} + A\sqrt[4]{mn^2} = A\sqrt[4]{mn} + nA\sqrt[4]{\frac{m}{n}}$

„ gröfsere Irrationale $= A\sqrt{1 + \sqrt{m}} + A\sqrt{1 - \sqrt{m}}$

„ ein Rationales und Mediales Potenzirende

$$= A\sqrt[4]{m}\sqrt{1 + \sqrt{1 - m}} + A\sqrt[4]{m}\sqrt{1 - \sqrt{1 - m}}$$

„ zwei Mediale Potenzirende

$$= A\sqrt[4]{m}\sqrt{1 + \sqrt{\frac{p^2}{p^2 + q^2}}} + A\sqrt[4]{m}\sqrt{1 - \sqrt{\frac{p^2}{p^2 + q^2}}}$$

Bei der wesentlichen Verschiedenheit Form jeder einzelnen Linie von allen igen sind die vorstehenden Sätze un- ttelbar als richtig anzuerkennen.
Die Beweise Euklids sind, algebraisch gedrückt, folgende.

$\cap$ bedeutet: In Länge commensurabel.
$\cap$ bedeutet: In Potenz commensurabel.
n und m können je nach der Ordnung der Binomialen auch = 1 sein.

I. Es sei die betreffende Binomiale in

ihre Namen zerlegt $A\sqrt{n} + A\sqrt{m}$. C, D seien 2 Linien, so dafs $C+D \cap A\sqrt{n} + A\sqrt{m}$ und dafs

$$A\sqrt{n} + A\sqrt{m} : C + D = A\sqrt{n} : C \quad (1)$$

so ist $A\sqrt{m} : D = A\sqrt{n} + A\sqrt{m} : C + D$ (2)

weil nun, wie der Satz voraussetzt

$$A\sqrt{n} + A\sqrt{m} \cap C + D \quad (3)$$

so ist auch $A\sqrt{n} \cap C$ (4)

und $A\sqrt{m} \cap D$ (4)

Nun ist $A\sqrt{n} : C = A\sqrt{m} : D$ (aus 1 und 2) (5)

also $A\sqrt{n} : A\sqrt{m} = C : D$ (6)

Da nun $A\sqrt{n} \cap A\sqrt{m}$

so ist auch $C \cap D$

folglich sind C, D rational, blofs in Potenz commensurabel und $C+D$ ist eine Binomiale.

Ist nun $A\sqrt{n} + A\sqrt{m}$ die erste, oder die zweite oder die dritte Binomiale, $A\sqrt{n} > A\sqrt{m}$, so ist nach No. 24, wenn E eine beliebige Rationallinie bedeutet:

$$\sqrt{(A^2n - A^2m)} = E\sqrt{n} \,(\cap A\sqrt{n})$$

Nun ist aus Gleichung 6

$$A^2n : A^2m = C^2 : D^2$$

hieraus

$$\sqrt{(A^2n - A^2m)} : \sqrt{C^2 - D^2} = A\sqrt{n} : C$$

oder $$E\sqrt{n} : \sqrt{C^2 - D^2} = A\sqrt{n} : C$$

mithin nach Gleichung 4

$$\sqrt{C^2 - D^2} \cap E\sqrt{n}$$

Es potenzirt also der gröfsere Name C über den kleineren Namen D um eine dem gröfseren Namen in Länge commensurabele Linie $E\sqrt{n}$ und es ist $C+D$ die Binomiale derselben Ordnung mit $A\sqrt{n} + A\sqrt{m}$.

Ist aber $A\sqrt{n} + A\sqrt{m}$ die vierte oder fünfte oder sechste Binomiale $A\sqrt{n} > A\sqrt{m}$, so ist No. 24

$$\sqrt{(A^2n - A^2m)} = E\sqrt{n + p}$$

man erhält

$$E\sqrt{n+p} : \sqrt{C^2 - D^2} = A\sqrt{n} : C$$

Es ist also $$\sqrt{C^2 - D^2} \cap E\sqrt{n+p}$$

Es potenzirt also C über D um eine der Linie $E\sqrt{n+p}$ in Länge commensurabele Linie, mithin um eine der Linie $A\sqrt{n}$ in Länge incommensurabele Linie und es ist $C+D$ eine Binomiale derselben Ordnung mit $A\sqrt{n} + B\sqrt{m}$.

II. Es sei die betreffende Bimediale in ihre Namen zerlegt:

$A\sqrt[4]{n} + A\sqrt[4]{m}$; C, D zwei Linien

so dafs $C + D \cap A\sqrt[4]{n} + A\sqrt[4]{m}$ (1)

und

$$A\sqrt[4]{n} + A\sqrt[4]{m} : C + D = A\sqrt[4]{n} : C = A\sqrt[4]{m} : D \quad (2)$$

folglich aus 1 und 2

$$A\sqrt[4]{n} \cap C \text{ und } A\sqrt[4]{m} \cap D \quad (3)$$

Da nun $A\sqrt{n} \cap A\sqrt{m}$, so ist auch $C \cap D$ und folglich $C+D$ eine Bimediale.

Nun folgt aus Gleichung 2:

$$A^2\sqrt{n} : A^2\sqrt[4]{n} \cdot \sqrt[4]{m} = C^2 : CD$$

Da nun nach Vergleichung 3

$$A^2\sqrt{n} \cap C^2$$

so ist auch $$A^2\sqrt[4]{nm} \cap CD$$

Ist nun $A^2\sqrt[4]{nm} \cap$ einem Rationalen E^2,

so ist es auch CD; und ist $A\sqrt[4]{nm} \cap E^2$, so ist es auch CD.

Im ersten Fall, wo $A\sqrt[4]{n} + A\sqrt[4]{m}$ die erste Bimediale ist, ist also auch $C+D$ die erste Bimediale; im zweiten Fall ist mit $A\sqrt[4]{n} + \sqrt[4]{m}$ auch $C+D$ die zweite Bimediale.

III. Es sei die betreffende gröfsere Irrationale in ihre Namen zerlegt: $A\sqrt{n} + A\sqrt{m} \cap C + D$, so soll $C+D$ dergleichen eine gröfsere Irrationale sein. D. h. $C \cup D$; $C \cdot D = E^2\sqrt{n}$ und $C^2 + D^2 = F^2$, wo E und F Rationallinien sind.

Es sei wieder

$$A\sqrt{n} + A\sqrt{m} : C + D = A\sqrt{n} : C = A\sqrt{m} : D \quad (1)$$

Da nun $A\sqrt{n} \cup A\sqrt{m}$

so ist 1. auch $C \cup D$

Ferner ist aus 1.

$$(A\sqrt{n} + A\sqrt{m})^2 : (C+D)^2 = A^2n : C^2 = A^2m : D^2$$

Da nun $(A\sqrt{n} + A\sqrt{m})^2 \cap (C+D)^2$

so ist auch $A^2n \cap C^2$

und $A^2m \cap D^2$

Da nun $A^2n + A^2m$ rational

so ist 2. $C^2 + D^2$ rational $= F^2$

Wie ad II. findet man $A^2 \cdot \sqrt[4]{mn} \cap CD$. Da nun $A^2 \cdot \sqrt{mn}$ ein Mediales ist, so ist 3. auch $CD =$ ein Mediales $E^2\sqrt{p}$.

Es ist mithin $C+D$ die gröfsere Irrationale.

IV. Es sei die betreffende Ein Rationales und Mediales Potenzirende in ihre Namen zerlegt: $A\sqrt[4]{p}\sqrt{n} + A\sqrt[4]{p}\sqrt{m} \cap C+D$, so soll $C+D$ dieselbe Irrationallinie sein; nämlich $C \cup D$, $CD = E^2$ und $C^2 + D^2 = F^2\sqrt{q}$

Es ist wieder

$$A\sqrt[4]{p}\sqrt{n} + B\sqrt[4]{p}\sqrt{m} : C + D = A\sqrt[4]{p}\sqrt{n} : C = B\sqrt[4]{p}\sqrt{m} : D \quad (1)$$

Da nun $A\sqrt[4]{p}\sqrt{n} \cup B\sqrt[4]{p} \cdot \sqrt{m}$ (2)

st 1. auch $C \cup D$

erner ist aus der Proportion 1 wie II.

$$nA^2\sqrt{p} \cap C^2 \text{ und } mB^2\sqrt{p} \cap D^2 \quad (3)$$

a nun $nA^2\sqrt{p} + mB^2\sqrt{p}$ ein Mediales, st auch 2. $C^2 + D^2$ ein Mediales $F^2\sqrt{q}$.

un ist 3. aus Proportion 1

$$nA^2\sqrt{p} : C^2 = AB\sqrt{p} \cdot \sqrt{nm} : CD$$

l aus der Vergleichung 3

$$nA^2\sqrt{p} \cap C^2$$

ist auch $AB\sqrt[4]{p}\sqrt{nm} \cap CD$

)a nun $AB\sqrt[4]{p}\sqrt{nm}$ ein Rationales ist, ist auch CD ein Rationales und es ist $+D$ die ein Rationales und Mediales Potenzirende.

V. Es sei die betreffende Zwei Mediale Potenzirende in ihre Namen legt $A\sqrt[4]{p}\sqrt{n} + B\sqrt[4]{p}\sqrt{m} \cap C + D$, so CD dieselbe Irrationale sein, d. h. D, CD ein Mediales $E^2\sqrt{q}$ und C^2 ein Mediales, welches diesem Mediales incommensurabel ist $= F^2\sqrt{r}$. Der Beweis ist wie der ad VI.

38. Durch die Zusammensetzung eines Rationalen (Rectangels) mit einem Medialen (Rectangel) entstehen 4 Irrationalen (deren Quadrate einzeln beiden Rectangeln zusammengenommen gleich sind) entweder die Binomiale oder die 1te Bimediale oder die gröfsere Irrationale oder die ein Rationales und Mediales Potenzirende (Satz 72).

Ist AR das rationale Rectangel, F das Mediale, so kann dieses in eins von den Dimensionen $AR\sqrt{m}$ verwandelt werden. Man hat demnach das gegebene zusammengesetzte Rectangel

$$AR + AR\sqrt{m}.$$

In der Seite $A + A\sqrt{m}$ kann nun $> A\sqrt{m}$ oder $A < A\sqrt{m}$ sein.

Im ersten Fall hat die Seite die Form No. 37)

entweder der ersten Binomiale

$$A + A\sqrt{\frac{n^2 - m^2}{n^2}} \quad (1)$$

oder der vierten Binomiale

$$A + A\sqrt{\frac{n^2 - m}{n^2}} \quad (2)$$

Im 2ten Fall hat die Seite die Form entweder der zweiten Binomiale

$$A + A\sqrt{\frac{n^2}{n^2 - m^2}} \quad (3)$$

oder der fünften Binomiale

$$A + A\sqrt{\frac{n^2 + m^2}{m^2}} \quad (4)$$

In dem Fall 1 potenzirt den Raum $RA\left(1 + \sqrt{\frac{n^2 - m^2}{n^2}}\right)$ nach No. 31 (Satz 55) eine Binomiale.

In dem Fall 2 potenzirt den Raum $RA\left(1 + \sqrt{\frac{n^2 - m}{n^2}}\right)$ nach No. 34 (Satz 58) eine gröfsere Irrationale.

In dem Fall 3 potenzirt den Raum $RA\left(1 + \sqrt{\frac{n^2}{n^2 - m^2}}\right)$ nach No. 32 (Satz 56) eine erste Bimediale.

In dem Fall 4 potenzirt den Raum $RA\left(1 + \sqrt{\frac{n^2 + m^2}{n^2}}\right)$ nach No. 35 (Satz 59) eine ein Rationales und Mediales Potenzirende.

39. Durch die Zusammensetzung zweier incommensurabelen Medialen entstehen die beiden übrigen Irrationallinien; entweder die zweite Bimediale oder die zwei Mediale Potenzirende.

Die beiden Rectangel haben die allgemeine Form $RA\sqrt{n} + RA\sqrt{m}$ die Seite $A(\sqrt{n} + \sqrt{m})$ ist eine Binomiale. In derselben ist $A\sqrt{n}$ entweder gröfser oder kleiner als $A\sqrt{m}$. Wenn aber die Seite eine Binomiale bleiben soll, so ist Ersteres nur möglich; und zwar ist sie dann entweder eine 3te Binomiale

$$A\sqrt{\frac{n^2}{p}} + A\sqrt{\frac{n^2 - m^2}{p}}$$

oder eine 6te Binomiale

$$A\sqrt{\frac{n^2}{p}} + A\sqrt{\frac{n^2 - m}{p}}$$

In dem ersten Fall potenzirt den Raum $RA\left(\sqrt{\frac{n^2}{p}} + \sqrt{\frac{n^2 - m^2}{p}}\right)$ nach No. 33 (Satz 57) eine zweite Bimediale.

In dem zweiten Fall potenzirt den Raum $RA\left(\sqrt{\frac{n^2}{p}} + \sqrt{\frac{n^2 - m}{p}}\right)$ nach No. 36 (Satz 60) eine Zwei Mediale Potenzirende.

In den 11 Formeln No. 37 ist $n > m$ angenommen. Es gibt also keine der Binomialen für die Bedingung, dafs der erste Name kleiner sei als der zweite. Nimmt man für die verlangte Rectangelbildung die beiden Bimedialen so hat man

Die erste Bimediale

$$= A\sqrt[4]{mn} + nA\sqrt[4]{\frac{1}{mn}}$$

Der schon in den früheren Nummern gedachten Construction zufolge hat man

$$B = \tfrac{1}{2} A\sqrt[4]{\frac{1}{mn}}\left(n - \sqrt{(n - m)}\right)$$

$$A-B=\tfrac{1}{2}A\sqrt[4]{\frac{1}{mn}}\left(n+\sqrt{n(n-m)}\right)$$

$$=\sqrt{\tfrac{1}{2}AR\sqrt[4]{\frac{1}{mn}}\left(n+\sqrt{n(n-m)}\right)}+\sqrt{\tfrac{1}{2}AR\sqrt[4]{\frac{1}{mn}}\left(n-\sqrt{n(n-m)}\right)}$$

Jeder Name der Linie ist medial, beide Namen sind in Potenz incommensurabel, beide enthalten ein Mediales $=\tfrac{1}{2}RA\sqrt[4]{mn}$; die Summe ihrer Quadrate ein Mediales $=RA\sqrt[4]{\frac{n^3}{m}}$ welches mit jenem Medialen incommensurabel ist. Demnach ist die potenzirende Linie L eine zwei Mediale Potenzirende.

Die zweite Bimediale

Die potenzirende Linie

$$L=\sqrt{R(A-B)}+\sqrt{RB}$$

$$A\sqrt[4]{mn}+nA\sqrt[4]{\frac{m}{n}}$$

Hier ist $B=\tfrac{1}{2}A\sqrt[4]{\frac{m}{n}}\left(n-\sqrt{n(n-1)}\right)$

$$A-B=\tfrac{1}{2}A\sqrt[4]{\frac{m}{n}}\left(n+\sqrt{n(n-1)}\right)$$

Die potenzirende Linie

$$L=\sqrt{R(A-B)}+\sqrt{RB}$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}RA\sqrt[4]{\frac{m}{n}}\left(n+\sqrt{n^2-n}\right)}+\sqrt{\tfrac{1}{2}RA\sqrt[4]{\frac{m}{n}}\left(n-\sqrt{n^2-n}\right)}$$

Jeder Name der Linie ist medial, beide Namen sind in Potenz incommensurabel, beide enthalten ein Mediales $=\tfrac{1}{2}RA\sqrt[4]{mn}$. Die Summe beider Quadrate ist medial $=RA\sqrt{mn^3}=RAn\sqrt[4]{\frac{m}{n}}$ mit dem ersten Medialen incommensurabel. Demnach ist die potenzirende Linie L eine zwei Mediale Potenzirende.

Von den durch das Wegnehmen entstehenden sechs Irrationallinien.

40. Wird von einer Rationallinie eine andere ihr blofs in Potenz commensurabele weggenommen, so ist der Rest irrational und heifst Apotome (Satz 74).

41. Wird von einer Medialinie eine andere, die ihr blofs in Potenz commensurabel ist und mit ihr ein Rationales enthält, weggenommen, so ist der Rest irrational und heifst die erste Medialapotome (Satz 75).

42. Wird von einer Medialinie eine andere, die ihr blofs in Potenz commensurabel ist, und mit ihr ein Mediales enthält, weggenommen, so ist der Rest irrational und heifst die zweite Medialapotome (Satz 76).

43. Wird von einer Linie eine andere, die ihr in Potenz incommensurabel ist und ihre Quadrate zusammen zu einem Rationalen, das doppelte des unter ihnen enthaltenen Rectangels aber zu einem Medialen macht, weggenommen, so ist der Rest irrational und heifst die kleinere Irrationale (Satz 77).

44. Wird von einer Linie eine andere, die ihr in Potenz incommensurabel ist, und ihre Quadrate zusammen zu einem Medialen, das doppelte des unter ihnen enthaltenen Rectangels aber zu einem Rationalen macht, weggenommen, so ist der Rest irrational und heifst die mit einem Rationalen ein mediales Ganze Gebende (Satz 78).

45. Wird von einer Linie eine andere, die ihr in Potenz incommensurabel ist, ihre Quadrate zusammen zu einem Medialen und das Doppelte des unter ihnen enthaltenen Rectangels gleichfalls zu einem Medialen macht, das aber jenem incommensurabel ist, weggenommen, so ist der Rest irrational und heifst die mit einem Medialen ein mediales Ganze Gebende (Satz 79).

46. Mit Hülfe der Formeln No. 17 bis 22 findet man die Formen der 6 Irrationallinien:

Die Apotome $A-A\sqrt{m}$

Die erste Medialapotome $A\sqrt[4]{mn}-A\sqrt[4]{\frac{n^3}{m}}$

Die zweite Medialapotome $A\sqrt[4]{mn}-A\sqrt[4]{mn^3}$

Die kleinere Irrationale $A\sqrt{1+\sqrt{m}} - A\sqrt{1-\sqrt{m}}$

Die mit einem Rationalen ein mediales Ganze Gebende

$$A\sqrt[4]{m}\sqrt{1+\sqrt{1+m}} - A\sqrt[4]{m}\sqrt{1-\sqrt{1+m}}$$

Die mit einem Medialen ein mediales Ganze Gebende

$$A\sqrt[4]{m}\sqrt{1+\sqrt{\frac{p^2}{p^2+q^2}}} - A\sqrt[4]{m}\sqrt{1-\sqrt{\frac{p^2}{p^2+q^2}}}$$

7. Die folgenden sechs Sätze von Satz bis 85 sind Lehrsätze, die das Umehrte der Erklärungssätze (Satz 74 79) beweisen. Sie lauten mit den ɔbraisch geführten Nachweisen wie t und sind mit den Formeln No. 46 richtig erwiesen.

atz 80. An die Apotome $(A - A\sqrt{m})$ t sich nur eine einzige Ratiolinie $(A\sqrt{m})$, die mit der ganzen A s in Potenz commensurabel ist.

enn eine andere $(A\sqrt{n})$ hinzugefügt le die Ganze $(A - A\sqrt{m} + A\sqrt{n})$ ge, mit welcher $A\sqrt{n}$ in Potenz incomsurabel ist.

atz 81. An die erste Medialapo- $\left(A\sqrt[4]{mn} - A\sqrt[4]{\frac{n^3}{m}}\right)$ fügt sich nur e einzige Mediallinie $\left(A\sqrt[4]{\frac{n^3}{m}}\right)$ der ganzen $(A\sqrt[4]{mn})$ blofs in Potenz mensurabel ist und mit der Ganzen Rationales enthält. Denn eine an- $(A\sqrt[4]{m})$ hinzugefügt würde die Ganze $\sqrt[4]{mn} - A\sqrt[4]{\frac{n^3}{m}} + A\sqrt[4]{m}\Big)$ geben, mit wel- $A\sqrt[4]{m}$ in Potenz incommensurabel ist.

atz 82. An die zweite Medial- tome $(A\sqrt[4]{mn} - A\sqrt[4]{mn^3})$ fügt sich eine einzige Mediallinie $\sqrt[4]{mn^3}$), die der ganzen $(A\sqrt[4]{mn})$ blofs Potenz commensurabel ist und mit elben ein Mediales enthält.

rund wie im vorigen Satz.

atz 83. An die kleinere Irratio- e $(A\sqrt{1+\sqrt{m}} - A\sqrt{1-\sqrt{m}})$ fügt sich eine einzige Linie $(A\sqrt{1-\sqrt{m}})$, der ganzen u. s. w.

atz 84. An die mit einem Ratioen ein Mediales Ganze Gebende $\sqrt[4]{m}\sqrt{1+\sqrt{1+m}} - A\sqrt[4]{m}\sqrt{1-\sqrt{1+m}}\Big)$ t sich nur eine einzige Linie $\sqrt[4]{m}\sqrt{1-\sqrt{1+m}}\Big)$ die der ganzen u. s. w.

atz 85. An die mit einem Melen ein mediales Ganze Gebende $\left(A\sqrt[4]{m}\sqrt{1+\sqrt{\frac{p^2}{p^2-q^2}}} - A\sqrt[4]{mn}\sqrt{1-\sqrt{\frac{p^2}{p^2+q^2}}}\right)$ fügt sich nur eine einzige Linie $\left(A\sqrt[4]{m}\sqrt{1-\sqrt{\frac{p^2}{p^2+q^2}}}\right)$ die der ganzen u. s. w.

Erklärung der sechs Ordnungen von den Apotomen.

48. Eine Apotome, an die sich eine Linie fügt, so dafs die ganze aus beiden bestehende Linie um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabelen Linie über die angefügte potenzirt, heifst die erste Apotome, wenn solche ganze Linie einer angenommenen Rationallinie in Länge commensurabel ist.

Die zweite Apotome, wenn die angefügte Linie,

Die dritte Apotome, wenn keine von beiden solcher Rationallinie in Länge commensurabel ist.

Eine Apotome, an die sich eine Linie fügt, so dafs die ganze aus beiden bestehende Linie um das Quadrat einer ihr in Länge incommensurabelen Linie über die angefügte potenzirt, heifst

Die vierte Apotome, wenn solche ganze Linie der angenommenen Rationallinie in Länge commensurabel ist.

Die fünfte Apotome, wenn die angefügte Linie,

Die sechste Apotome, wenn keine von beiden solcher Rationallinie in Länge commensurabel ist.

49. Die erste Apotome zu finden (Satz 86).

Nimm 2 Quadratzahlen n^2, m^2, deren Differenz $n^2 - m^2$ keine Quadratzahl ist; ferner eine Rationallinie A, setze

$$n^2 : n^2 - m^2 = A^2 : X^2$$

so ist $X = A\sqrt{\frac{n^2-m^2}{n^2}}$ und es ist $A - A\sqrt{\frac{n^2-m^2}{n^2}}$ die erste Apotome. Die anzufügende Linie ist die Linie X; denn da A und $A\sqrt{\frac{n^2-m^2}{n^2}}$ blofs in Potenz

commensurabel sind, so ist nach No. 40 $A - A\sqrt{\frac{n^2-m^2}{n^2}}$ eine Apotome.

Nun ist

$$\left(A - A\sqrt{\frac{n^2-m^2}{n^2}}\right) - A\sqrt{\frac{n^2-m^2}{n^2}} = A$$

die Ganze

und $A^2 - \left(A\sqrt{\frac{n^2-m^2}{n^2}}\right)^2 = \left(\frac{m}{n}A\right)^2$

also potenzirt die Ganze A über die angefügte um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabelen Linie $\frac{m}{n}A$, und die Ganze A ist eine Rationallinie.

50. Die zweite Apotome zu finden (Satz 87).

Nimm zwei Quadratzahlen n^2, m^2, deren Differenz keine Quadratzahl ist; ferner eine Rationallinie A, setze

$$n^2 - m^2 : n^2 = A^2 : X^2$$

so ist $X - A = A\sqrt{\frac{m^2}{n^2-m^2}}$

und $L = A\sqrt{\frac{n^2}{n^2-m^2}} - A$ die zweite Apotome.

Denn die Linie L ist nach No. 40 eine Apotome; ferner ist

$$\left(A\sqrt{\frac{n^2}{n^2-m^2}}\right)^2 - A^2 = \left(A\sqrt{\frac{m^2}{n^2-m^2}}\right)^2$$

D. h. die ganze Linie $A\sqrt{\frac{n^2}{n^2-m^2}}$ potenzirt über die angefügte A um das Quadrat einer der ersten in Länge commensurabelen Linie $A\sqrt{\frac{m^2}{n^2-m^2}}$ und die angefügte Linie A ist rational.

51. Die dritte Apotome zu finden (Satz 88).

Nimm zwei Quadratzahlen n^2, m^2, deren Differenz $n^2 - m^2$ keine Quadratzahl ist, ferner eine dritte Zahl p, die weder mit n noch mit m noch mit $n^2 - m^2$ in dem Verhältnifs einer Quadratzahl steht, A sei eine Rationalzahl. Setze

$$p : n^2 = A^2 : X^2$$
$$n^2 : n^2 - m^2 = X^2 : Y^2$$

hieraus $X = A\sqrt{\frac{n^2}{p}}$

und $Y = A\sqrt{\frac{n^2-m^2}{p}}$

$L = X - Y = A\sqrt{\frac{n^2}{p}} - A\sqrt{\frac{n^2-m^2}{p}}$ die dritte Apotome.

Denn die Linie L ist nach No. 40 eine Apotome. Ferner ist

$$\left(A\sqrt{\frac{n^2}{p}}\right)^2 - \left(A\sqrt{\frac{n^2-m^2}{p}}\right)^2 = \left(A\sqrt{\frac{m^2}{p}}\right)^2$$

D. h. die ganze Linie $A\sqrt{\frac{n^2}{p}}$ potenzirt über die angefügte $A\sqrt{\frac{n^2-m^2}{p}}$ um das Quadrat einer der ersten in Länge commensurabelen Linie $A\sqrt{\frac{m^2}{p}}$ und weder die ganze noch die angefügte Linie ist rational.

52. Die vierte Apotome zu finden (Satz 89).

Nimm zwei Zahlen, die keine Quadratzahlen sind, deren Summe aber eine Quadratzahl ist: $n^2 + mn$ und $m^2 + mn$.

Setze $n^2 + mn : n^2 = A^2 : X^2$

so ist $L = A - X = A - A\sqrt{\frac{n}{n+m}}$ die gesuchte vierte Apotome.

Denn die Linie L ist nach No. 40 eine Apotome. Ferner ist $A^2 - \left(A\sqrt{\frac{n}{n+m}}\right)^2 = \left(A\sqrt{\frac{m}{n+m}}\right)^2$. D. h. die Ganze A potenzirt über die Angefügte $\left(A\sqrt{\frac{n}{n+m}}\right)$ um das Quadrat der Linie $A\sqrt{\frac{m}{n+m}}$, einer der Ganzen incommensurabelen Linie, und die Ganze A ist eine Rationallinie.

53. Die fünfte Apotome zu finden (Satz 90).

Nimm 2 Quadratzahlen n^2, m^2, deren Summe $m^2 + n^2$ keine Quadratzahl ist.

Setze $n^2 : n^2 + m^2 = A^2 : X^2$

und es ist $L = X - A = A\sqrt{\frac{n^2+m^2}{n^2}} - A$ die fünfte Apotome.

Denn nach No. 40 ist L eine Apotome; ferner ist

$$\left(A\sqrt{\frac{n^2+m^2}{n^2}}\right)^2 - A^2 = \left(\frac{m}{n}A\right)^2$$

D. h. die Ganze potenzirt über die Angefügte um das Quadrat einer der ersten incommensurabelen Linie $\frac{m}{n}A$, und die angefügte Linie ist rational.

54. Die sechste Apotome zu finden (Satz 91).

Nimm 3 Zahlen m, n, p die keine Quadratzahlen sind. Setze

$$m : n = A^2 : X^2$$
$$n : p = X^2 : Y^2$$

so ist $L = X - Y = A\sqrt{\frac{n}{m}} - A\sqrt{\frac{p}{m}}$ die sechste Apotome. Denn L ist nach No. 40 eine Apotome, ferner weder die Ganze noch die Angefügte rational und die Ganze potenzirt über die angefügte um das Quadrat einer Linie $\left(A\sqrt{\frac{n-p}{m}}\right)$ welche der Ganzen in Länge incommensurabel ist.

55. Den unter einer Rationallinie (R) und der ersten Apotome $\left(A - A\sqrt{\frac{n^2-m^2}{n^2}}\right)$ enthaltenen Raum potenzirt eine Apotome (Satz 92).

Der euklidischen Construction zufolge, wenn x eine Hülfslinie ist entsteht folgendes Calcül:

$$(A - X)X = \left(\tfrac{1}{2}A\sqrt{\frac{n^2-m^2}{n^2}}\right)^2$$

woraus $$X = \tfrac{1}{2}A\left(1 - \frac{m}{n}\right)$$

$$A - X = \tfrac{1}{2}A\left(1 + \frac{m}{n}\right)$$

Die potenzirende Linie ist

$$L = \sqrt{\tfrac{1}{2}AR\left(1 + \frac{m}{n}\right)} - \sqrt{\tfrac{1}{2}AR\left(1 - \frac{m}{n}\right)}$$

Sie ist der Form nach eine Apotome und ihr Quadrat ist = dem Rectangel $AR\left(1 - \sqrt{\frac{n^2-m^2}{n^2}}\right)$.

56. Den unter einer Rationallinie (R) und der zweiten Apotome $\left(A\sqrt{\frac{n^2}{n^2-m^2}} - A\right)$ enthaltenen Raum potenzirt die erste Medialapotome (Satz 93).

Hier hat man

$$\left(A\sqrt{\frac{n^2}{n^2-m^2}} - X\right)X = \tfrac{1}{2}A^2$$

woraus $$X = \tfrac{1}{2}A\frac{n-m}{\sqrt{n^2-m^2}}$$

$$A - X = \tfrac{1}{2}A\frac{n+m}{\sqrt{n^2-m^2}}$$

Die potenzirende Linie

$$L = \sqrt{\tfrac{1}{2}AR\frac{n+m}{\sqrt{n^2-m^2}}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}AR\frac{n-m}{\sqrt{n^2-m^2}}}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}AR}\sqrt{\frac{n+m}{n-m}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}AR}\sqrt{\frac{n-m}{n+m}}$$

also wie No. 32 ist

$$L = \sqrt{\tfrac{1}{2}AR}\left[\sqrt[4]{pq} - \frac{1}{p}\right]\sqrt{\frac{p^2}{q}}\Big]$$

$$L = \sqrt{\tfrac{1}{2}AR}\left[\sqrt[4]{\frac{n+m}{n-m}} - (n-m)\sqrt[4]{\left(\frac{1}{n-m}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{n+m}\right)}\right]$$

oder $$L = \sqrt{\tfrac{1}{2}AR}\left[\sqrt[4]{\frac{n+m}{n-1}} - \frac{1}{n+m}\sqrt{(n+m)^2(n-m)}\right]$$

L ist also nach No. 46 eine erste Medialapotome (s. No. 46).

Die Form No. 46 für die erste Medialapotome ist die einfachste. Hier in der so eben entwickelten Formel hat die zweite Wurzel der Klammergröfse noch einen Factor; man übersieht aber und kann sich durch Versuch überzeugen, dafs die Formel allen Anforderungen von No. 41 entspricht.

57. Den unter einer Rationallinie (R) und der dritten Apotome $\left(A\sqrt{\frac{n^2}{p}} - A\sqrt{\frac{n^2-m^2}{p}}\right)$ enthaltenen Raum potenzirt die zweite Medialapotome (Satz 94).

Hier hat man

$$\left(A\sqrt{\frac{n^2}{p}} - X\right)X = \tfrac{1}{2}A^2\frac{n^2-m^2}{p}$$

woraus

$$X = \tfrac{1}{2}A\frac{n-m}{\sqrt{p}} \text{ und } A - X = \tfrac{1}{2}A\frac{n+m}{\sqrt{p}}$$

Die potenzirende Linie

$$L = \sqrt{\tfrac{1}{2}AR\frac{n+m}{\sqrt{p}}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}AR\frac{n-m}{\sqrt{p}}}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}AR}\left(\frac{\sqrt{n+m}}{\sqrt[4]{p}} - \frac{\sqrt{n-m}}{\sqrt[4]{p}}\right)$$

Dieser Ausdruck potenzirt die gegebene dritte Apotome. Die Linie L hat alle die Eigenschaften vermöge deren sie nach No. 41 die 2te Medialapotome ist. Um ihn in die Form (No. 46):

$$L = A\sqrt[4]{MN} - A\sqrt{MN^2}$$ zu bringen setze man $M = \frac{(n+m)^2}{p(n-m)}$ und $N = \frac{n-m}{n+m}$ so erhält man die Klammergröfse

$$= \sqrt[4]{\frac{(n+m)^2}{p(n-m)}} \cdot \frac{n-m}{n+m} - \sqrt[4]{\frac{(n+m)^2}{p(n-m)}} \cdot \left(\frac{n-m}{n+m}\right)^2$$

58. Den unter einer Rationallinie (R) und der vierten Apotome $\left(A - A\sqrt{\frac{m}{n+m}}\right)$ enthaltenen Raum potenzirt die kleinere Irrationale (Satz 95).

Hier hat man

$$(A-X)X = \tfrac{1}{4}A^2\frac{m}{n+m}$$

woraus $$X = \tfrac{1}{2}A\left(1 - \sqrt{\frac{m}{n+m}}\right)$$

$$A - X = \tfrac{1}{2}A\left(1 + \sqrt{\frac{m}{n+m}}\right)$$

Die potenzirende Linie ist

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}AR\left(1+\sqrt{\frac{m}{n+m}}\right)} - \sqrt{\tfrac{1}{2}AR\left(1-\sqrt{\frac{m}{n+m}}\right)}$$

Diese Linie ist nach No. 46 die kleinere Irrationale, und sie potenzirt den gegebenen Raum $R\left(A - A\sqrt{\frac{n}{n+m}}\right)$ (Satz 96).

59. Den unter einer Rationallinie (R) und der fünften Apotome $\left(A\sqrt{\frac{n^2+m^2}{n^2}} - A\right)$ enthaltenen Raum potenzirt die mit einem Rationalen ein mediales Ganze Gebende

Hier hat man

$$\left(A\sqrt{\frac{n^2+m^2}{n^2}} - X\right)X = \tfrac{1}{4}A^2$$

woraus $$X = \tfrac{1}{2}A\left(\sqrt{\frac{n^2+m^2}{n^2}} - \frac{m}{n}\right)$$

$$A - X = \tfrac{1}{2}A\left(\sqrt{\frac{n^2+m^2}{n^2}} + \frac{m}{n}\right)$$

Die potenzirende Linie ist

$$L = \sqrt{\tfrac{1}{2}AR\left(\sqrt{\frac{n^2+m^2}{n^2}} + \frac{m}{n}\right)} - \sqrt{\tfrac{1}{2}AR\left(\sqrt{\frac{n^2+m^2}{n^2}} - \frac{m}{n}\right)}$$

Diese Linie ist nach No. 44 die verlangte Irrationallinie. Um sie in die Form No. 46 zu bringen, multiplicire in jeder der beiden Wurzelgröfsen vor der Klammer mit $\sqrt{\frac{n^2+m^2}{n^2}}$ und di vidire mit derselben in der Klammer, erhält man

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}AR}\sqrt[4]{\frac{n^2+m^2}{n^2}}\sqrt{1+\sqrt{\frac{m^2}{n^2+m^2}}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}AR}\sqrt[4]{\frac{n^2+m^2}{n^2}}\sqrt{1-\sqrt{\frac{m^2}{n^2+m^2}}}$$

60. Den unter einer Rationallinie (R) und der sechsten Apotome $\left(A\sqrt{\frac{n}{m}} - A\sqrt{\frac{p}{m}}\right)$ enthaltenen Raum potenzirt die mit einem Medialen ein mediales Ganze Gebende (Satz 97).

Hier hat man

$$\left(A\sqrt{\frac{n}{m}} - X\right)X = \tfrac{1}{4}A^2\frac{p}{m}$$

woraus $$X = \tfrac{1}{2}A\left(\sqrt{\frac{n}{m}} - \sqrt{\frac{n-p}{m}}\right)$$

und $$A - X = \tfrac{1}{2}A\left(\sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{n-p}{m}}\right)$$

Die potenzirende Linie ist

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}AR\left(\sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{n-p}{m}}\right)} - \sqrt{\tfrac{1}{2}AR\left(\sqrt{\frac{n}{m}} - \sqrt{\frac{n-p}{m}}\right)}$$

ese Linie ist nach No. 45 die angte Irrationallinie. Um sie in die Form No. 46 zu bringen, verfährt man wie No. 59, und man erhält

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}AR}\cdot\sqrt[4]{\frac{n}{m}}\sqrt{1+\sqrt{\frac{n-p}{n}}}-\sqrt{\tfrac{1}{2}AR}\sqrt[4]{\frac{n}{m}}\sqrt{1-\sqrt{\frac{n-p}{n}}}$$

. Die sechs Sätze 98 bis 103 lauten nmengezogen wie folgt: ıs an einer Rationallinie (R) entworfene Rectangel wenn es gleich ist

Quadrat	hat zur Breite
Apotome	die erste Apotome
ersten Medialapotome	die zweite „
zweiten Medialapotome	die dritte „
kleineren Irrationale	die vierte „
mit einem Rationalen ein mediales Ganze Gebenden	die fünfte „
mit einem Medialen ein mediales Ganze Gebenden	die sechste „

ı sind diese Sätze die umgekehrten ıe der Sätze 92 bis 97, No. 55 bis 60; ın Formeln sind mit den hierher ge-gen dieselben. Wenn man jedesmal zuletzt erhaltene Formel für L qua-t, so ersieht man links das Quadrat jedesmal potenzirenden Linie und hts das Rectangel zwischen R und der reffenden Irrationale.

2. Nun folgen fünf Sätze (Satz 104 108): Jede Linie, welche in Länge mmensurabel ist irgend einer r hier genannten Apotomen ist ch dieselbe Apotome.

lgebraisch geht die Richtigkeit der ze unmittelbar aus den für die Linien gestellten Formeln hervor: die ersten ormeln sind in No. 46 zusammenge-llt; die Apotomen der 6 Ordnungen d:

e erste Apotome ist $A-A\sqrt{\frac{n^2-m^2}{n^2}}$

e zweite „ „ $A\sqrt{\frac{n^2}{n^2-m^2}}-A$

e dritte „ „ $A\sqrt{\frac{n^2}{p}}-A\sqrt{\frac{n^2-m^2}{p}}$

e vierte „ „ $A-A\sqrt{\frac{n}{n+m}}$

e fünfte „ „ $A\sqrt{\frac{n^2+m^2}{n^2}}-A$

e sechste „ „ $A\sqrt{\frac{n}{m}}-A\sqrt{\frac{p}{m}}$

ei der wesentlichen Verschiedenheit Form jeder einzelnen Linie von jeder aller übrigen sind die vorstehenden Sätze unmittelbar als richtig anzuerkennen.

Die Beweise Euklids sind algebraisch ausgedrückt folgende.

I. Es sei $A\sqrt{n}-A\sqrt{m}$ die Apotome; hieran fügt sich (nach No. 47) die Linie $A\sqrt{m}$, die Ganze wird $A\sqrt{n}$ und $A\sqrt{n}$ mit $A\sqrt{m}$ sind $\cup$. Ist nun $C-D\cap A\sqrt{n}-A\sqrt{m}$ so soll $C-D$ eine Apotome mit $A\sqrt{n}-A\sqrt{m}$ von derselben Ordnung sein, also $C\cup D$.

Mache

$A\sqrt{n}-A\sqrt{m}:C-D=A\sqrt{n}:D$

so ist auch $A\sqrt{n}:C=A\sqrt{n}-A\sqrt{m}:C-D$

Nun folgt aus $C-D\cap A\sqrt{n}-A\sqrt{m}$

$C\cap A\sqrt{n}$ und $D\cap A\sqrt{m}$

Da nun A rational und $A\sqrt{n}\cup A$ so ist auch C rational und $D\cup C$, folglich ist $C-D$ eine Apotome.

Ist $A\sqrt{n}-A\sqrt{m}$ die erste oder zweite oder dritte Apotome, so dafs im ersten Fall n, im zweiten $m=1$ oder eine Quadratzahl, im dritten Fall weder n noch m eine Quadratzahl ist, so ist in allen 3 Fällen $(A\sqrt{n})^2-(A\sqrt{m})^2=(E\sqrt{n})^2$, nämlich $E\sqrt{n}\cap A\sqrt{n}$. Ist $A\sqrt{n}-A\sqrt{m}$ die vierte, oder fünfte oder sechste Apotome, so finden dieselben 3 Fälle statt und $(A\sqrt{n})^2-(A\sqrt{m})^2=(E\sqrt{p})^2$ nämlich $(A\sqrt{n})\cup E\sqrt{p}$.

Da nun in allen Fällen die Linie $C\cap$ der Linie $A\sqrt{n}$, so ist sie in allen 6 Fällen = einer Linie $F\sqrt{n}$, desgleichen ist D in allen sechs Fällen = einer Linie $G\sqrt{m}$. Demnach sind in den ersten 3 Fällen $C^2-D^2=(H\sqrt{n})^2$ und in den letzten 3

Fällen $= (J\sqrt{p})^2$. Mithin in jedem einzelnen Fall eine Apotome derselben Ordnung.

II. Ist gegeben die erste Medialapotome also von der Form $A\sqrt[4]{mn} - A\sqrt[4]{\frac{n^2}{m}}$ und $\cap$ einer Linie $C - D$, so ist $C \cap A\sqrt[4]{mn}$ und $D \cap A\sqrt[4]{\frac{n^2}{m}}$. Nun erweist Euklid durch Proportionen, daſs C die Form haben muſs $E\sqrt[4]{mn}$ und D die Form $F\sqrt{\frac{n^2}{m}}$, woraus hervorgeht, daſs $C + D$ die erste Medialapotome ist.

III. Dieselbe Form und derselbe Gang des Beweises findet für alle übrigen dahin gehörigen Rationallinien statt.

63. Wird von einem Rationalen (AR) ein Mediales $(RA\sqrt{n})$ weggenommmen, so wird die den Rest $RA(1 - \sqrt{n})$ potenzirende eine der beiden Irrationallinien, entweder die Apotome oder die kleinere Irrationale (Satz 109)

Es ist $A \cap R$, $A\sqrt{n} \cup A$, mithin ist nach No. 40 $A - A\sqrt{n}$ eine Apotome, an welche $A\sqrt{n}$ sich anfügt. Nun ist A rational, also nach No. 48 die Linie $A - A\sqrt{n}$ entweder die erste oder die 4te Apotome. Ist sie die erste Apotome, so ist $A^2 - A^2n = E^2$, indem $E \cap A$ ist. Ist sie die vierte Apotome, so ist $A^2 - A^2n = E^2n$ indem $E\sqrt{n} \cup A$ werden muſs.

Im ersten Fall, wenn also $A - A\sqrt{n}$ die erste Apotome ist, hat man nach No. 55 $\sqrt{R(A - A\sqrt{n})}$ = einer Apotome.

Im zweiten Fall, wenn also $A = A\sqrt{n}$ die vierte Apotome ist, hat man nach No. 58 $\sqrt{R(A - A\sqrt{n})}$ = einer kleineren Irrationale.

64. Wird von einem Medialen $(AR\sqrt{n})$ ein Rationales AR weggenommen, so entstehen zwei andere Irrationallinien, entweder die erste Medialapotome oder die mit einem Rationalen ein Mediales Ganze Gebende (Satz 110).

Es ist die Differenz beider Rectangel $RA\sqrt{n} - RA = R(A\sqrt{n} - A)$. Demnach ist $A\sqrt{n} \cup A$ und nach No. 40 $A\sqrt{n} - A$ eine Apotome, an die A sich fügt. Und da die angefügte A rational ist, so ist nach No. 48 die Linie entweder eine zweite oder eine fünfte Apotome.

Ist $A^2n - A^2 = E^2n$, indem $E\sqrt{n} \cap A\sqrt{n}$, so ist sie die zweite Apotome und man hat nach No. 56 $\sqrt{R(A\sqrt{n} - A)}$ = einer ersten Medialapotome.

Ist $A^2n - A^2 = E^2$, indem $E \cup A\sqrt{n}$ so ist nach No. 59 $\sqrt{R(A\sqrt{n} - A)}$ = einer mit einem Rationalen ein mediales Ganze Gebende.

65. Wird von einem Medialen $RA\sqrt{n}$ ein demselben incommensurabeles Mediales $RA\sqrt{m}$ weggenommen, so entstehen die beiden übrigen Irrationallinien, entweder die zweite Medialapotome oder die mit einem Medialen ein mediales Ganze Gebende (Satz 111).

Es ist die Differenz beider Rectangel $RA\sqrt{n} - RA\sqrt{m}$, mithin $A\sqrt{n} - A\sqrt{n}$ nach No. 48 entweder die dritte oder die sechste Apotome. Ist $A^2n - A^2n = E^2n$, indem $E\sqrt{n} \cap A\sqrt{n}$, so ist sie die dritte Apotome und man hat nach No. 57 $\sqrt{R(A\sqrt{n} - A\sqrt{m})}$ = einer zweiten Medialapotome. Ist $A^2n - A^2n = E^2n$, indem $E\sqrt{p} \cup A\sqrt{n}$ so ist $A\sqrt{n} - A\sqrt{n}$ die sechste Apotome und man hat nach No. 60: $\sqrt{R(A\sqrt{n} - A\sqrt{m})}$ = einer mit einem Medialen ein mediales Ganze Gebende.

66. Die Apotome ist von der Binomiale unterschieden (Satz 112).

Der Beweis im Euklid ist sehr weitläufig und soll hier zusammengezogen werden. (Die in solcher Klammer [ ] stehenden beiden Buchstaben sind die Linien in Euklids Figur).

Es sei die Linie $L[AB]$ eine Apotome $A - A\sqrt{n}$ (1)

Ist $R[CD]$ eine Rationallinie, und ist

$$R \cdot C[CD \times DE] = (A - A\sqrt{n})^2 \quad (2)$$

so ist nach No. 61 die Linie $C[DE]$ die erste Apotome $B - B\sqrt{\frac{n^2 - m^2}{n^2}}$ (3)

und es ist $B \cap B\sqrt{\frac{n^2 - m^2}{n^2}}$ (4)

Wäre nun zugleich $L[AB]$ eine Binomiale $D + D\sqrt{m}$ oder für den günstigsten Fall der Uebereinstimmung $= D + D\sqrt{n}$ (5)

Dann ist $RC[CD \times DE] = (D + D\sqrt{n})^2$ und nach No. 31 ist $C[DE]$ die erste Binomiale $E + E\sqrt{\frac{n^2 - m^2}{n^2}}$ (6)

und $E \cap E\sqrt{\frac{n^2 - m^2}{n^2}}$ (7)

Es ist also nach Gleichung 3 und 6

$$C[DE] = B - B\sqrt{\frac{n^2 - m^2}{n^2}} = E + E\sqrt{\frac{n^2 - m^2}{n^2}} \quad (8)$$

$$\text{Hieraus}\quad B-E=E\sqrt{\frac{n^2-m^2}{n^2}}+B\sqrt{\frac{n^2-m^2}{n^2}}=(B+E)\sqrt{\frac{n^2-m^2}{n^2}} \tag{9}$$

Nun ist $B \cap R$ und $E \cap R$ also auch
$B-E \cap R$ (10)

Nach Gleichung 4 und 7 aber ist
$B\sqrt{\frac{n^2-m^2}{n^2}} \cap$ mit B, also nach Gleichung
0 auch $\cup$ mit R
nd $E\sqrt{\frac{n^2-m^2}{n^2}} \cap$ mit E, also nach Glei-
hung 9 auch $\cap$ mit R

Demnach auch $(B+E)\sqrt{\frac{n^2-m^2}{n^2}} \cap$ mit
l und mit $B-E$

Es kann also Gleichung 9 nicht bestehen, und folglich kann eine Linie, welche Apotome ist, nicht zugleich Binomiale sein.

67. Das dem Quadrat einer Rationallinie gleiche, an einer Binomiale entworfene Rectangel hat zur Breite eine Apotome, deren Namen den Namen der Binomiale commensurabel und in demselben Verhältnifs sind und die mit der Binomiale auch von einerlei Ordnung ist (Satz 113).

In No. 37 sind sämmtliche Binomialen und in No. 63 sämmtliche Apotomen zusammen gestellt. Man ersieht, dafs wenn das von zweien dieser Linie zu bildende Rectangel rational sein soll, eine der Binomialen die eine und eine der Bimedialen die andere Seite sein mufs.

Ist nun die Länge des Rectangels die erste Bimediale, so ist unter allen Binomialen nur die erste, welche das Rectangel rational macht nämlich

$$\left(A-A\sqrt{\frac{n^2-m^2}{n^2}}\right)\left(A+A\frac{n^2-m^2}{n^2}\right)=\left(\frac{m}{n}A\right)^2$$

Eben so enthält die zweite Apotome nur mit der zweiten Bimediale ein Rationales.

$$\left(A\sqrt{\frac{n^2}{n^2-m^2}}-A\right)\left(A+A\sqrt{\frac{n^2}{n^2-m^2}}\right)=\left(\frac{m}{n-m}A\right)^2$$

u. s. w.

68. Das dem Quadrat einer Rationallinie gleiche, an einer Apotome entworfene Rectangel hat zur Breite eine Binomiale, deren Namen den Namen der Apotome commensurabel und in demselben Verhältnifs sind, und die mit der Apotome auch von einerlei Ordnung ist (Satz 114).

Derselbe Beweis wie No. 67.

69. Jedes unter einer Apotome und einer Binomiale, deren Namen den Namen der Apotome commensurabel und proportionirt sind, enthaltene Rectangel wird von einer Rationale potenzirt (Satz 115).

Derselbe Beweis wie No. 67 und 68.

Irrationale Linien und Flächen sind solche, die gegen eine als rational angenommene Linie und Fläche kein gemeinschaftliches Maafs haben: In einem Quadrat von rationaler Seite A ist die Diagonale irrational $= A\sqrt{2}$. Das Quadrat von A ist rational, die Kreisebene vom Durchmesser A ist irrational $= \frac{1}{4}\pi A^2$.

Irrationales Verhältnifs, s. u. „Irrational".

Irrationale Zahlen, s. u. „Irrational".

Irregulär nennt man Figuren, wenn diese ungleiche Seiten und Winkel haben; Körper, wenn sie ungleiche Begrenzungsebenen, Flächenwinkel und Ecken haben; Curven, wenn deren Bildung keine Coordinatengleichung zu Grunde liegt. Irreguläre Ecken in einem Krystall s. u. „Ecken".

Isagonisch, s. v. w. gleichwinklig.

Isochronisch, s. v. w. gleichzeitig.

Isometrisches Krystallisationssystem ist das reguläre System. (Von ἴσος gleich und μετρεῖν messen, weil alle Axen gleiches Maafs haben.) S. „Axensysteme der Krystalle", pag. 260 zu Anfang.

Jahr, s. „Astronomisches Jahr und Chronologie".

Jahrbücher, s. „Astronomische Jahrbücher".

Jahreszeiten, s. „Astronomische Jahreszeiten".

Jovicentrisch ist was sich auf den Mittelpunkt des Planeten Jupiter bezieht. Was in dem Art. „Geocentrisch" von der Erde gesagt worden, gilt auch für den Jupiter, wenn man Fig. 656, pag. 148 für *E* (Erde) den Buchstaben *J* (Jupiter) und in dem Text für Erde und geocentrisch die Worte Jupiter und jovicentrisch setzt.

Jungfrau (♍) (s. „Absteigendes Zeichen mit Fig. 19) ist das sechste und letzte Himmelszeichen der nördlichen Halbkugel. Es erstreckt sich, wie jedes Zeichen auf 30 Grad Länge, und zwar vom Ende des Zeichens Löwe (60 Grad vom Sommerwendepunkt) bis zum Anfang des Zeichens Waage (90° vom Sommerwendepunkt), dem Herbstpunkt.

Juno (⚵) ist einer der 4 kleinen oberen Planeten (Planetoiden) Vesta, Juno, Ceres, Pallas, zwischen Mars und Jupiter, wurde am 1. September 1804 von Harding entdeckt. Juno ist der dritte der oberen Planeten (Mars, Vesta, Juno, Ceres u. s. w.), deren kleinste Entfernung von der Sonne ist 41, deren gröfste 69 Millionen Meilen, deren mittlere 55 Millionen Meilen. Sie hat daher die stärkste Excentricität von allen Planeten = 0,259875 der halben grofsen Axe, in Länge cc. 14 Millionen Meilen. Deren geringste Entfernung von der Erde 21, deren gröfste 90 Millionen Meilen; Neigung der Bahn gegen unsere Ekliptik = 13° 3′ 28″, tropische Umlaufszeit um die Sonne ist 1592,1 Tage = 4 Jahr 131,1 Tage, Länge des aufsteigenden Knotens 171° 11′ 2″, Länge des Perihels 53° 15′ 18″. Der wirkliche Durchmesser der Juno wird 300 Meilen angegeben, deren scheinbarer Durchmesser 2,4 bis 2,6 Secunden.

Jupiter (♃) ist der sechste der oberen Planeten (wird die Asträa hinzugerechnet, der siebente), der gröfste und uns glänzendste Planet, er übertrifft an körperlichem Inhalt und Masse alle übrigen Planeten zusammengenommen. Dessen kleinste Entfernung von der Sonne ist 102345000 Meilen, deren gröfste 112705000 Meilen, dessen mittlere also 107525000 Meilen; dessen Excentricität, die halbe grofse Axe der Bahn = 1 gesetzt, = 0,0481784 sind 5180000 Meilen. Dessen kleinster Abstand von der Erde beträgt cc. 82000000 Meilen, dessen gröfster Abstand cc. 133000000 Meilen. Dessen siderische Umlaufszeit (Rückkehr des J. bei seinem Umlauf um die Sonne zum nämlichen Fixstern 4332,58 Tage = 11 Jahr 314 Tage 20 Stunden 2 Minuten 7 Secunden, dessen tropische Umlaufszeit (Rückkehr zur nämlichen Nachtgleiche) nur 11 Jahr 312 Tage 20 Stunden 14 Minuten 10 Secunden. Länge des aufsteigenden Knotens 98° 25′ 36″, Länge des Perihels 11° 8′ 30″. Die Neigung seiner Bahn gegen unsre Ekliptik ist = 1° 18′ 52″. Bei seiner gröfsten Erdnähe ist sein scheinbarer Durchmesser 45 Secunden, bei seiner gröfsten Erdferne 30 Secunden; demnach hat der Durchmesser des J. etwa 11,23 Erddurchmesser = 19300 Meilen. Daher der Umfang seines Aequators 62700 Meilen; seine Oberfläche cc. 1200 Millionen Quadratmeilen, also etwa das 120fache der Erdoberfläche; aus seinem Volumen können cc. 1300 Erdkugeln geschnitten werden. Seine Abplattung ist sehr bedeutend: wenn sein scheinbarer Durchmesser im Aequator 38,44 Secunden beträgt, so beträgt sein Durchmesser durch die Pole 35,64 Secunden, Unterschied 2,80 Secunden, gilt eine Abplattung von $\frac{38{,}44}{2{,}80} = \frac{1}{13{,}73}$ mit cc. 1400 Meilen, während die Abplattung unsrer Erde nur zwischen 5 und 6 Meilen beträgt. Dieser grofse Weltkörper macht die Umdrehung um seine Axe in 9 Stunden 56 Minuten, so dafs der Jupiteraequator eine 27 mal schnellere Bewegung hat als der Erdaequator und in 1 Minute cc. 100 Meilen zurücklegt, etwa eben so viel als er in seiner Bahn zurücklegt. Seine Dichtigkeit ist etwa 4 mal geringer als die der Erde, so dafs das 1300fache Volumen das nur 325fache der Erdmasse ausmacht. Aus diesem Grunde beträgt die Schwere auf der Jupiteroberfläche gegen die unserer Erde das $\frac{325}{11{,}23^2}$ = das $2\frac{1}{4}$fache, 1 Centner Gewicht würde auf dem J. $2\frac{1}{4}$ Centner betragen und ein Körper fällt dort in der ersten Secunde $2\frac{1}{4} \times 15 = 37\frac{1}{4}$ pariser Fufs. Während die Schiefe unserer Ekliptik etwa $23\frac{1}{4}$° beträgt ist sie beim J. kaum 3°, so dafs die Sonne fast senkrecht auf der Rotationsaxe verbleibt und die Wendekreise dort nur 6° von einander entfernt sind.

Jupitersmonde, vier an der Zahl sind von Galilei entdeckt. Seine siderische Umlaufszeit macht der erste Mond in 1 Tag 18 Stunden 18 Minuten, der zweite Mond in 3 Tagen 13 Stunden 14 Minuten,

ritte Mond in 7 Tagen 3 Stunden
inuten, der vierte in 16 Tagen 16
len 43 Minuten. Der Abstand vom
punkt des J. der erste Mond 57300
n, der zweite Mond 91100 Meilen,
itte Mond 145300 Meilen, der vierte
255600 Meilen.

Durchmesser der Monde sind nach
e: der des ersten Mondes 532 Mei-
ler des zweiten 477 Meilen, der des dritten 780 Meilen, der des vierten 667 Meilen.

Die Massen in Verhältnifs zur Masse des J. sind:

Die des ersten Mondes = 0,000017328
„ „ zweiten „ = 0,0000232355
„ „ dritten „ = 0,0000884972
„ „ vierten „ = 0,000042659

Inhaltsverzeichnifs und Sachregister.

Die Gegenstände als Ueberschriften der Artikel sind gesperrt gedruckt.

A.

Aberration, sphärische 255.
Aequinoctialpunkte 21.
Aequinoctium 21.
Analysis, geometrische 145.
Anomalie, wahre 51.
Apparat 291.
Auflösung, geometrische 145.

B.

Bahn, Neigung derselben 37.
Bahnelemente 36.
Benennung, höhere, niedere 253.
Bewegung, indirecte, retrograde, rückläufige 289.
Beweis, geometrischer 145.
Bimediale, erste, zweite 378.
Binomiale, erste, zweite 378—379.
Bogen, hoher elliptischer 253.
Brennstrahlen der Hyperbel, zusammengehörige 270.
Buchstaben, gestrichelte 155.

C.

Combination der Krystalle 15.
Oommensurabel nach Euklid 374.
Constanten der Integrale 292.
Cylindroid, hyperbolisches 277.

D.

Durchschnittsfläche 105.

E.

Ebene, schiefe 71, neutrale 84.
Ecke 98, erhabene oder mit ausspringenden Winkeln 6, hohle oder mit einspringenden Winkeln 6, deren Bestimmungsstücke 10 bis 12, deren geometrische Construction aus gegebenen Bestimmungsstücken 12 bis 14; reguläre, symmetrische, gleiche, ungleiche, irreguläre, unsymmetrische 14.
Ecken der Krystalle 14.
Einheit, concrete, abstracte 16.
Einschattige 245.
Ekliptik, Schiefe derselben, wahre oder scheinbare und mittlere 22.
Elasticität, vollkommene, unvollkommene 23.
Elasticitätsmodul 23, Verzeichnifs der Modul für mehrere feste Körper 24.
Ellipse, allgemeine Coordinatengleichung 4, Erklärung deren Coefficienten 42, deren Brennpunkte 45, Zeichnung der E. 45, Rectification 47, Quadratur 49, Cubatur 52, Umdrehungsflächen 51.
Endecken 14.
Erdfernrohr 79.
Ergänzungsecke 8.
Erklärung, genetische 143.
Excentricität der Hyperbel 270.

F.

Fallhöhe 247.
Festigkeit, absolute, rückwirkende 80, relative oder respective 80 und 82.
Figur, ebene, unebene 97, geradlinige, krummlinige, gemischtlinige, krummflächige, dreiseitige, vielseitige, gleichseitige, ungleichseitige, regelmäfsige, congruente, ähnliche 98.
Fläche etc. 105.
Flüssigkeiten, elastische 25.
Folgesatz 60.
Form, einaxige, einfache, zusammengesetzte 15.
Frühlingsnachtgleiche 21.
Functionen, goniometrische 220.
Fufspunkt einer geraden Linie 1.

G.

Geschwindigkeiten bei verschiedenen Bewegungen 153.
Gleichungen, Gauls'sche 137.
Glieder, gleichstellige 196.
Grammengewicht 157.

n, endliche 53, 283, incomplexe
eingebildete, imaginäre, unmög-
s.

H.

htmalachtflächner 244.
ächner 111.
rennpunkt — Focus 254.
materieller, Statik desselben,
gewicht für die Drehung 237.
arm der Kraft 239.
und Keilwirkung bei Ge-
en vereinigt 175.
irkung beim Gewölbe 166,
is 173.
ositetraeder 233.
trakisoctaeder 233.
nachtgleiche 21.
lsaxe- und Pole 246.
messung mit Stäben und
Winkelinstrumenten 248.
ntalschub für die Keilwir-
beim Gewölbe 169 und 171.

J.

nensurabel bei Euklid 374,
enz 289.
l 291, Einführung neuer Ver-
ichen 295.
lformeln von algebrai-
Gröfsen 330, von rationalen
n 331, von irrationalen Gröfsen
on transcendenten Gröfsen und
on Exponentialgröfsen 342, von
hmischen Gröfsen 343, von tri-
etrischen Gröfsen 344.
rung algebraischer Func-
n und zwar rationaler 295,
aler 305, in Reihen 320, trans-
ter Functionen, und zwar Expo-
lfunctionen 322, logarithmischer
igonometrischer Functionen 326.
liren 16.
e 372.
ion 372.
e Refraction 372.
al 373 bis 393.
algröfsen nach Euklid 378

iale Linien und Flächen

iales Verhältnifs 393.
iale Zahlen 393.
är 393.
sch 393.
nisch 393.
isches Krystallisations-
n 393.
.
her 394.
eiten 394.
trisch 394.
u 394.
Juno 394.
Jupiter 394.
Jupitersmonde 394.

K.

Kanten einer Ecke 6.
Kegel, gerader 152.
Keilwirkung beim Gewölbe 160.
Knotenlinie 37.
Körperdreiecke 6.
Kolurus der Nachtgleichen- und Sonnenstillstandspunkte 21.
Kraft, impulsive 288.
Kreis, excentrischer 64.
Kreisbogengewölbe als Zahlenbeispiel 184.
Krystallflächen, gleichnamige, ungleichnamige, zusammengehörige, gleiche, drei- vier- vielseitige, Seitenflächen, Scheitelflächen 105.
Krystallformen, einfache, zusammengesetzte, Kernformen, Grundformen, abgeleitete, einaxige, vielaxige, homoedrische, hemiedrische 111.
Kuppelgewölbe, deren Statik 193.

L.

Länge, geographische 144.
Leere, Guerick'sche 229.
Lehrsatz, Harriots 234.
Leucitoeder 282.
Libbra 156.
Linie, schiefe, schräge 1, gerade 152, gebrochene 137, elastische 25, evolvirende 64.
Linien (nach Euklid), in Länge commensurabele 374, in Potenz commensurabele 375, 376, in Potenz incommensurabele, mediale 374 bis 376, die ein Rationales und die ein Mediales enthalten 375.
Logarithmen, hyperbolische, Grund des Namens 273.

M.

Maschine, hydraulische 260.
Mediale 374.
Meile, geographische 145.
Methode der Alten, geometrische 146.
Mittel, geometrisches 147.
Moment der Kraft 239.

N.

Nachtgleichen 20.
Namen der Irrationalen 379.
Neigung der Bahn eines Planeten 36.
Neigungswinkel zweier Ebenen 5.
Neuneck 53.
Nordpunkt 246.
Nutation der Ekliptik 22.

O.

Operationen, entgegengesetzte 54.
Ort, geometrischer 147.

P.

Parallaxe 251.
Parallelebenen 5.
Parallelepiped 152.
Parallelkreise 246.
Parallelogramm, gerades 152.
Pendel, einfaches, Theorie 72.
Pentagondodekaeder 233.
Planeten, deren Bahnelemente 36.
Polarkreise 21.
Polhöhe 247.
Polyedralzahlen 100.
Polygonalzahlen 98.
Postulat 111.
Potenzexponent 66.
Pound 157.
Presse, hydraulische 260.
Projection einer schrägen Linie auf einer Ebene 1.
Proportion, geometrische 147, harmonische 233.
Proportionale geometrische 148.
Punkte, feste 80.
Pyramidentetraeder 233.

R.

Rational 374.
Rationallinie 374.
Rectangel, rationales, irrationales 374, mediales 375.
Regel, goldene 199; guldinsche 229.
Reihe, geometrische 151, harmonische 234, hypergeometrische 277.
Rifs, geometrischer 151.
Rolle, feste 70.

S.

Säule, hexagonale, sechsseitige 245.
Scheitelecke im Krystall 14.
Scheitelfläche im Krystall 105.
Scheitelspannung beim Tonnengewölbe 160 bis 169, wirkliche eines Gewölbes für Hebelwirkung 171 bis 173, wirkliche 174.
Schritte, geometrische 151.
Schwingung eines Pendels 75.
Schwingungsbogen 75.
Sechsmalachtflächner 245.
Secundenpendel 75.
Seitenecke am Krystall 14.
Seitenfläche am Krystall 105.
Seitenkante am Krystall 53.
Solstitialpunkte 21 und 247.
Sommersolstitium 247.
Sommerstillstandspunkte, — Wendepunkte 21 und 247.
Sonne, deren scheinbare Bewegung 21.
Sonnenbahn 20.
Sonnenstillstands- — Wendepunkte 21.
Spiegel, elliptischer 254, parabolischer 253, sphärischer 254.
Spitze einer Ecke 6.
Standpunkt einer geraden Linie 1.
Südpunkt 246.
Supplementsecke 8.

T.

Tagekreise 206.
Theaterperspectiv 79.
Theiler, gemeinschaftlicher 142.
Theilung, harmonische 230.
Theorem 60.
Thierkreis 123.
Tonnengewölbe, deren Statik 166.
Torsionsfestigkeit 94.
Torsionsmodul 97.
Trapezoeder 282.

U.

Unmefsbar 288.

V.

Verdrehen 80.
Verhältnifs, geometrisches 151.
Verschoben 152.
Viertelflächner 111.
Vollflächner 111.
Vorzeichen, deren Folgen 109.

W.

Weltaxe 246.
Weltpole 246.
Wendekreise 21.
Wendepunkte 247.
Werkzeug 291.
Widderpunkt, Widdernullpunkt 123.
Winkel einer Ecke 6, parallaktischer 251.
Winterstillstandspunkt 21—247.
Winterwende 247.
Wurzeln algebraischer Gleichungen nach Fourier aufzufinden 112.
Wurzelexponent 68.

Z.

Zahl, gerade 152.
Zahlen, dreieckige, vier- vieleckige, figurirte 98.
Zahlensystem, enneadisches 153, hexadisches 245.
Zeichen, himmlische, Folgen derselben 110.
Zerbrechen, zerquetschen, zerreifsen 80.
Zerstreuungspunkt 78.
Zusatz 60.

Berlin, Druck von Gebr. Unger, Königl. Hofbuchdrucker.

Berichtigungen zum ersten Bande.

Pg. 51 links, Z. 7 v. u. lies ax^3 statt ax
Z. 6 v. u. lies ax^2 statt ax
„ 235 links, Z. 16 v. u. statt $\alpha a) h$ lies: $\alpha)' h$
„ 281 links, Z. 5 v. u. statt $a - a_{m-1}$ lies $a_m - a_{m-1}$
„ 288 links, Z. 11 v. u. statt 41,96556 lies: 2,96556
„ 309 Fig. 192 fehlt an dem links aufrecht stehenden Pfeil der Buchstabe Q
„ 311 links, Z. 1 v. u. statt $-(Q + Q' + Q'' + Q''' + W)$
lies: $(-Q + Q' + Q'' + Q''' + W)$
„ 327 links, Z. 9 v. u. statt $+\frac{1}{2}(b-1)^3 + \ldots$.
lies: $+\frac{1}{2}(b-1)^3 - \ldots$.
„ 341 rechts, Z. 3 v. u. statt AGA lies: AGF
„ 362 links, Z. 5 v. u. statt C setze: v
„ 362 rechts, Z. 19 v. u. setze hinter die Formel für v^2 die Zahl (5)
„ 363 links, Z. 9 v. o. statt $\left[1 - \frac{1}{e^{A\Delta s}}\right]$ lies:

$$v^2 = \frac{G}{A}\left[1 - \frac{1}{e^{A\Delta s}}\right]$$

„ 411 links, Z. 13 v. u. statt $e^b tg\,\alpha$ lies: $e^b tg\,\phi$
„ 432 rechts, Z. 3 v. u. lies 262 statt 264
Z. 12 v. u. lies 262 statt 264

Berichtigungen zum zweiten Bande.

Pg. 19. rechts, Z. 11 v. u. statt Aequator 15,054 pariser Fuſs lies: Aequator 36,60385 pariser Zoll für $g = 15{,}054$ pariser Fuſs.
„ 19 rechts, Z. 8 v. u. statt an den Polen 15,132 pariser Fuſs lies: an den Polen 36,79382 pariser Zoll für $g = 15{,}132$ pariser Fuſs.
„ 29 links, Z. 31 v. o. statt $\pi\varepsilon\tau\varrho\varepsilon\iota\nu$ lies: $\mu\varepsilon\tau\varrho\varepsilon\iota\nu$
„ 35 links, Z. 29 v. o. statt *abc*, *abd*; lies *abc*, *abd*, *acd*;
„ 36 bis 41 statt Fig. 300, 301, 302, ... 307 lies überall:
Fig. 301, 302, 303, ... 308
„ 44 bis 46 statt Fig. 314, 315, 316 lies überall:
Fig. 315, 316, 317
„ 45 rechts, Z. 22 v. o. hinter „aufzuweisen“, schalte ein: „auf welchem die gleichen entgegengesetzten Ordinaten normal sind; sämmtliche der Axe Parallelen sind Durchmesser, die von diesen halbirten Doppelordinaten sind ∥ der in dem Endpunkt des jedesmaligen Durchmessers an die Parabel gezogenen Tangente.
Die Parabel hat keinen Mittelpunkt aufzuweisen,“

Pag. 46 Fig. 317 fehlt in dem Durchschnittspunkt zwischen JO und dem Bogen AD der Buchstabe H

„ 47 statt Fig. 314, 316, 317 lies überall: Fig. 316, 318, 319.

„ 100 links, Z. 20 v. u. statt $\angle CDG + 2\angle CDG$ lies: $\angle DCG + 2\angle CDG$

„ 100 links, Z. 19 v. u. statt $2\angle DCG$ lies: $2\angle CDG$

„ 139 rechts, Z. 1 v. u. statt $2\cos\alpha$ lies: $2\cos\beta$

„ 146 links, Z. 23 v. o. statt $2\,cosv\,\alpha$ lies: $2 - cosv\,\alpha$

„ 147 rechts, Z. 6 v. u. statt $(2 - sinv^2\alpha)$ lies: $(2 - sinv\,\alpha)$

5 v. u. statt $(2 - cosv^2\alpha)$ lies: $(2 - cosv\,\alpha)$

„ 148 rechts, Z. 1 v. u. statt $\cot^2\alpha = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}\right)$

lies: $\cot^2\alpha = 1 + \frac{2\cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$

„ 172 rechts, Z. 3 v. o. in der Gleichung (1) lies dy statt dx.

„ 177 links, Z. 4 v. o. statt Fig. 516 lies Fig. 515

Z. 14 v. u. statt $c\sin\delta$ lies $h\sin\delta$

„ 178 rechts, Z. 3 v. o. statt p lies $p - g$

„ 199 rechts, Z. 12 v. o. statt Flächenstück ACV lies: Flächenstück ALV

„ 202 links, Z. 19 v. o. statt Bogen LCD lies: Bogen LCO

„ 213 links, Z. 6 v. u. statt $HAMLG$ lies: $HAMLS$

„ 289 Z. 10 v. u. statt $\left[\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right]_0 \frac{x^n}{(x)}$ lies: $\left[\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right]_0 \frac{x^n}{(n)}$

MATHEMATHISHES

WÖRTERBUCH

ALPHABETISCHE ZUSAMMENSTELLUNG

SÄMMTLICHER

DIE MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN GEHÖRENDER GEGENSTÄNDE IN ERKLÄRENDEN UND BEWEISENDEN SYNTHETISCH UND ANALYTISCH BEARBEITETEN ABHANDLUNGEN

VON

LUDWIG HOFFMANN
BAUMEISTER IN BERLIN.

IV. BAND
K—P.

BERLIN
VERLAG VON WIEGANDT UND HEMPEL
1864.

K.

Kalender ist Maafsstab für die bürgerhe Zeit und Zeitrechnung. Die Maafsheit gibt uns die Natur unmittelbar, lem die Erde in constant bleibendem itabstande um ihre Axe und in einem enfalls constant bleibenden Zeitabstande n die Sonne sich dreht. Beide Zeitaafseinheiten sind allen Erdbewohnern ne Ausnahme gleich zugänglich, daher an sie schon in dem grauesten Alterhum und auf allen Orten der Erdoberiche als Maafseinheiten anerkannt fint, indem bei Jedermann das Bedürfnifs r Zeitmessung mit seinem ganzen Len verwebt ist.

Ungeachtet man nur nöthig hat, den heinbaren Gang der Sonne zu beobachn um das Zeitmaafs zu erhalten, wird ch die Zeitmessung dadurch zusammensetzt und schwierig, dafs es dem Schöer gefallen hat, beide Zeitabstände, den die Drehung der Erde um ihre Axe d den für den Umlauf der Erde in der liptik, nämlich die Zeit eines Tages d die Zeit eines Jahres mit einander ommensurabel zu machen. Beider lürfen wir aber, denn wir haben tägh wiederkehrende und jährlich wiederhrende Lebensverhältnisse, Verrichtunn, solche die nach Theilen des Tages d solche, die nach Theilen des Jahres gemessen werden. Der Naturforscher ilt nach Secunden, der Geschichtsforer nach Jahren und nach Perioden n Jahrhunderten.

Der künstliche Maafsstab für den Tag d die Theile des Tages ist die Uhr, für das Jahr und die Theile des Jahder Kalender, allein Uhrmacher und endermacher haben nie Hand in Hand en können und sie können es heut h nicht. Beide haben uns mit richtiger bürgerlicher Zeit zu versehen; der Uhrmacher kümmert sich aber nur um den constanten Tag und seine Theile, der Kalendermacher dagegen hat die bürgerliche Zeit mit der astronomischen in Eintracht zu bringen.

Man theilt den Tag in 24 Stunden, die Stunde in 60 Minuten, die Minute in 60 Secunden. Das tropische Jahr, welches unserer bürgerlichen Zeit zu Grunde liegt, wird durch die Zeit bestimmt, in welcher die Erde von dem Frühlingspunkt der Ekliptik ab fortgeht bis sie wiederum auf den Frühlingspunkt trifft. Da aber dieser Frühlingspunkt alle Jahr um 50,1 Bogensecunden der Erde entgegen kommt, so beschreibt die Erde nur einen Bogen von $360° - 50{,}1''$ und die Zeit, in der dies geschieht, beträgt 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten und 51 Secunden, diese Secunden noch mit Decimalen.

Es ist möglich, dafs wenn man die Zeitsecunde in 60 Terzien, diese in 60 Quarten, diese in 60 Quinten u. s. w. eintheilt, das tropische Jahr mit dem Tage commensurabel wird; es ist jedoch zu erwägen, dafs das tropische Jahr durch Beobachtung mit Winkelinstrumenten ermittelt ist und dafs diese, so aufserordentlich scharf sie schon ausgeführt, wenn sie noch schärfer sollten hergestellt werden können, immer als Menschenwerk unvollkommen bleiben werden, so dafs man mit der eben angeführten Zeit des Jahres, als sehr nahe der wirklichen wird zufrieden bleiben müssen.

Die Geschichte des Kalenders ist weitläufig und ich will nur einige Perioden, die auf unseren heutigen Kalender influiren, kurz aufführen.

Im Alterthum suchte man den Mondlauf mit dem Sonnenlauf in Uebere-

stimmung zu bringen; man hatte ein Jahr zu 12, das folgende zu 13 Monaten. Da aber der Mond unbekümmert um die Sonne seinen eigenen Gang geht, so entstand bald Verwirrung. Hierauf nahm man 50 Monate auf 4 Jahr; auch dies hielt nur eine Weile aus. Solon endlich fand sich veranlafst, die Sonne ganz zu ignoriren und nur nach Monden zu rechnen, von denen immer einer 29, der folgende 30 Tage hatte, was natürlich auch nicht lange Stich halten konnte. Ueber diese Verwirrung macht Oristophanes einen Witz: Diana, die Göttin des Mondes klagt, dafs die Menschen an ihr Erscheinen nicht mehr sich kehrten und die Götter, welche zu der Zeit sich versammelten, um die von den Athenern ihnen gebührenden Opfermahle einzunehmen, müfsten halb verhungert in den Olymp zurückkehren.

Nach manchen Abänderungen durch Schaltmonate, wie später auf Mosis Geheifs die Juden nur Mondenjahre haben durften, in welche zur Uebereinstimmung mit den Sonnenjahren Monate eingeschaltet wurden, erfand Meton, Athenischer Astronom, 400 Jahr v. Chr. die berühmte 19jährige Periode, in welcher 12 Jahre aus 12 Monaten und 7 Jahre aus 13 Monaten, also 19 Jahre aus 235 Monaten, 125 zu 30 und 110 zu 29 Tagen bestanden. Zu Ende solcher Periode von 19 Jahren geht der Sonnenlauf mit dem Mondlauf um noch nicht ganz 2 Stunden auseinander, und somit dauerte diese Zeitrechnung 102 Jahre, wo sie von Kalippus dahin verbessert wurde, dafs er 4 Meton'sche Perioden von 27760 Tagen um einen Tag verkürzte und sie auf 27759 Tage reducirte. Die Kalipp'sche Periode ist also der Meton'schen, was später der Gregoriansche Kalender dem Julianschen wurde. Hieraus kommt, dafs mit Kalippus das Jahr 365 Tage 6 Stunden erhielt, dafs also 300 Jahre später die Kalippsche Zeitrechnung dem Julianschen Kalender die Norm gab.

Romulus hatte das Jahr auf nur 304 Tage festgesetzt und diese in 10 Monate, 6 zu 30 und 4 zu 31 Tagen getheilt. Den ersten Monat widmete er dem Mars, daher sein Name Martius, unser heutiger März; die letzten, October, November, December von den Zahlen octo, novem, decem. Der erste März war der Tag der Frühlingsnachtgleiche, an dem man anfing die Felder zu bestellen.

Dafs die im Jahr fehlenden 61 bis 62 Tage bald sich geltend machten ist klar, und schon sein Nachfolger Numa setzte 50, später noch einen Tag, also 51 Tage in 2 Monaten Januarius und Februarius hinzu, und hatte somit ein Jahr von 355 Tagen mit 12 Monaten geschaffen.

Die Folge von diesem Kalender war, dafs von Jahr zu Jahr die Nachtgleiche immer später kam als sie im Kalender stand, und dafs man endlich das Feld ohne Kalender bestellen mufste. 700 Jahre nach Erbauung Roms war ungeachtet noch vieler inzwischen geschehenen Einschaltungen von Tagen die Nachtgleiche bis in den Mai des Kalenders gerückt.

Julius Caesar, um die allgemein gefühlte Verwirrung zu beseitigen, berief den aegyptischen Astronom Sosigenes, die Kalippus'sche Periode wurde zu Grunde gelegt, nach welcher das Jahr 365¼ Tage hat, das Jahr 709 nach Erbauung Roms, 45 Jahr vor Chr. Geburt sollte mit dem Wintersolstitium (heut der 21te December) anfangen; allein 8 Tage später traf Neumond ein, auf welchen damals Gewicht gelegt wurde, das Neujahr fing daher mit dem 1ten Januar, 8 Tage später an, das Wintersolstitium blieb auf den 24ten December, die Frühlingsnachtgleiche fiel auf den 24ten März, und um dies möglich zu machen, erhielt das Jahr vorher zu der Numa'schen Zeit von 355 Tagen noch 90 Tage hinzu, im Ganzen also 445 Tage, woher es das Annus confusionis genannt wurde, besser aber, da alle Confusion mit ihm aufhörte, auch den Namen annus confusionis ultimus erhielt.

Das tropische Jahr hat aber nicht volle 365 Tage 6 Stunden, es fehlen noch 11 Minuten 9 Secunden daran; daher fiel etwa alle 120 Jahr die Frühlingsnachtgleiche wieder einen Tag vor die des Kalenders. Nun war aber zum Aerger der christlichen Geistlichen öfter passirt, dafs die Juden mit den Christen auf einerlei Tag das Osterfest feierten und die hohen Würdenträger der Kirche beriethen in einem Concilium zu Nicäa, im Jahr 325, also 370 Jahre nach Einführung des Kalenders wie dem Uebelstand abzuhelfen wäre.

Da nun das Osterfest mit der Nachtgleiche Zusammenhang hat, so mufste nothwendig zur Sprache kommen, dafs die Frühlings-Nachtgleiche schon am 21ten März, also 3 Tage vor der Kalendernachtgleiche eintrete. Es geschah nun zwar keine Reformation des Kalenders, aber seit dieser Zeit hat es ab und zu gegen denselben ernste Angriffe gegeben, bis im 16ten Jahrhundert Pabst Gregor XIII. der sich gar zu gern berühmt machen wollte, eine wirkliche Reformation des Kalenders veranstaltete.

Nun war aber Julius Cäsar ein Heide und dem christlichen Oberhirten war es nicht zuzumuthen, seine heidnische Zeitrechnung herzustellen, woher denn der Kalender eingeführt wurde, wie er im Jahre 325 des Nicäer Conciliums hätte sein sollen, und wir haben demnach heut die Frühlingsnachtgleiche nicht auf den 24ten sondern auf den 21ten März.

In dem Jahr 1582 nämlich, wo die wirkliche Nachtgleiche schon auf den 11ten März fiel, zählte man auf den 4ten October nicht den 5ten, sondern sogleich den 15ten October und machte das Jahr um 10 Tage kürzer.

Nach Julius Cäsar war jedes Jahr, dessen Zahl durch 4 ohne Rest theilbar ist, ein Schaltjahr, wie der Kalender noch heut in Rufsland alten Styls derselbe ist. Nach Gregor aber fallen alle Jahre, deren Zahlen ein Vielfaches von 400 ausdrücken, wieder als Schaltjahre aus und sind Gemeinjahre, und so wird auch der Februar des Jahres 2000 nur 28 Tage haben.

Es werden demnach von 400 Jahren des Julianischen Kalenders 3 Tage fortgenommen und der Fehler, der hiermit wieder begangen wird, beträgt innerhalb 4000 Jahren einen Tag, der zu wenig fortgenommen ist, so dafs alle 4000 Jahre noch ein Tag, indem ein Schaltjahr zum Gemeinjahr gemacht wird, fortzunehmen ist.

Es hat demnach Jahrtausende gedauert, ehe wir die von dem Schöpfer uns vor Augen gelegten beiden Zeiteinheiten richtig zu würdigen verstanden und einen gestempelten richtigen Kalender erhalten haben.

Kalenderjahr. Das Jahr von 365 Tagen heifst Gemeinjahr, das von 366 Tagen Schaltjahr. Julius Cäsar setzte unter Zuziehung des ägyptischen Mathematiker Sosigenes alle 4 Jahr diesen Schaltag ein, so dafs jedes Jahr durchschnittlich 365 Tage 6 Stunden hatte (Julianischer Kalender). Aber das Sonnenjahr, die Zeit von dem Stande der Sonne in dem Frühlingspunkt bis zum nächst folgenden Eintritt derselben in den Frühlingspunkt, besteht nicht aus 365 Tagen 6 Stunden, sondern es ist 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten 51 Secunden = 365,242256944... Tage lang, also um 11 Minuten 9 Secunden kürzer. Daher beträgt der alle 4 Jahr eingeschaltete Tag zu viel und dies betrug von Julius Cäsar bis Gregor dem 13ten schon 13 Tage, oder vielmehr, da schon unter Augustus bei wahrgenommenem Irrthum eine Rectification von 3 Tagen erfolgt war, 10 Tage.

Gregor setzte nun auf das Gutachten und den Vorschlag des Astronom Aloys Lilias im Jahr 1582 statt des 5ten Octobers den 15ten October und verordnete dafs die Schalttage beibehalten würden, dafs auch das Jahr 1600 noch ein Schaltjahr sein solle, dafs aber die Jahre 1700, 1800, 1900 wieder Gemeinjahre würden, und dafs dieselbe Ordnung in jedem folgenden Cyclus von 400 auf einander folgenden Jahren statt fände. Unter der Voraussetzung also, dafs der bürgerliche Tag am 15ten October 1582 mit dem astronomischen Tag übereinstimmte, hat man alle 400 Jahre eine constante Differenz zwischen wahrer Zeit und Kalenderzeit gegen den vorhergegangenen Cyclus wiederholt.

Das 1te Säculum vom 15ten October 1582 bis zum 15ten October 1682 hatte

25 Schaltjahre zu 366 Tagen, sind	9150 Tg.	
75 Gemeinjahre zu 365 Tagen, sind	27375 „	
Summa die ersten 100 Jahr	36525 Tg.	
Nach wahrer mittlerer Zeit gerechnet 100 Jahre zu 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten 51 Secunden	36524 Tg.	5 St. 25 Min.
Differenz in den ersten 100 Jahren zwischen wahrer Sonnenzeit und Kalenderzeit		18 St. 35 Min.

Dem Kalender nach waren, während die Sonne 100mal ihre Bahn vollständig durchlaufen hatte 36525 Tage zu 24 Stunden verflossen. In Wahrheit aber hatte die Sonne 18 Stunden 35 Minuten weniger dazu gebraucht, sie war also 18 Stunden 35 Minuten weiter vorgerückt und das Kalenderjahr 1682 war mithin gegen das astronomische Jahr um 18 Stunden 35 Minuten zurückgeblieben.

2 Säcula vom 15ten October 1582 bis zum 15ten

October 1782 enthielten 49 Schaltjahre und 151 Gemeinjahre mit	73049 Tg.
Die wahre Sonnenzeit 200×365 Tg. 5 St. 48 Mn. 51 Sc.	73048 Tg. 10 St. 50 Min.
Differenz in den ersten 200 Jahren zwischen wahrer Sonnenzeit und Kalenderzeit	13 St. 10 Min.

Die Kalenderzeit hatte in den zweiten 100 Jahren die wahre Zeit wieder um 5 Stunden 25 Minuten eingeholt und das Kalenderjahr 1782 war nur um 13 Stunden 10 Minuten gegen das astronomische Jahr zurückgeblieben.

3 Säcula vom 15ten October 1582 bis zum 15ten October 1882 enthalten 73 Schaltjahre und 227 Gemeinjahre mit	109573 Tg.
Die wahre Sonnenzeit 300×365 Tg. 5 St. 49 Mn. 51 Sc.	=109572 Tg. 16 St. 15 Min.
Differenz in 300 Jahren zwischen wahrer Sonnenzeit und Kalenderzeit	7 St. 45 Min.

Die Kalenderzeit wird also im Jahre 1882 der wahren Sonnenzeit abermals um 5 St. 15 Min. sich nähern und das Jahr 1882 nur noch um 7 St. 45 Min. zurück sein.

4 Säcula endlich bis zum 15ten October 1982 enthalten 97 Schaltjahre und 303 Gemeinjahre mit	146007 Tg.
Die wahre Sonnenzeit 400×365 Tg. 5 St. 48 Mn. 51 Sc.	146096 Tg. 21 St. 40 Min.
Differenz in 400 Jahren zwischen wahrer Sonnenzeit und Kalenderzeit	1 St. 20 Min.

Das letzte der 400 Jahre bleibt also gegen das 400te astronomirte Jahr nur um 2 Stunden 20 Minuten zurück.

In dem folgenden Cyclus von 400 Jahren werden die Differenzen zwischen wahrer Zeit und Kalenderzeit um diese 2 St. 20 Min. größer:

Das Jahr 2082 ist gegen wahre Zeit an Kalenderzeit zurück:

								18 St.	35 Min. + 2 St. 20 Min. = 20 St. 55 Min.
Das Jahr 2182	13	„	10	„	+ 2	„	20	„	= 15 „ 30 „
Das Jahr 2282	7	„	45	„	+ 2	„	20	„	= 10 „ 5 „
Das Jahr 2382	2	„	20	„	+ 2	„	20	„	= 4 „ 40 „

400 Kalenderjahre enthalten 146094 Tage, mithin das Kalenderjahr im Mittel 365,2425 Tage zu 24 Stunden = 365 Tg. 5 St. 49 Min. 12 Sec.

Es ist mithin gegen das tropische Sonnenjahr um 21 Secunden zu groß.

In Betreff des Cyclus von 4 auf einander folgenden Jahren hat man:

Am 15ten Oct. 1583 waren vergangen . . .	365 Tg.
Das astronomische Jahr hatte	365 Tg. 5 St. 48 Min. 51 Sec.
Das Jahr 1583 war also voraus um	5 St. 48 Min. 51 Sec.
Am 15ten Oct. 1584 waren vergangen . .	731 Tg.
2 astronomische Jahre betrugen	730 Tg. 11 St. 37 Min. 42 Sec.
Das Jahr 1584 war also zurück um	12 St. 22 Min. 18 Sec.
Am 15ten Oct. 1585 waren vergangen . .	1096 Tg.
3 astronomische Jahre betrugen	1095 Tg. 17 St. 26 Min. 33 Sec.
Das Jahr 1585 war also zurück um	6 St. 33 Min. 27 Sec.
Am 15ten Oct. 1586 waren vergangen . .	1461 Tg.
4 astronomische Jahre betrugen	1460 Tg. 23 St. 15 Min. 24 Sec.
Das Jahr 1586 war also nur noch zurück um .	44 Min. 36 Sec.

Die Differenz zwischen den Jahren 1583 und 1584 betrug 18 St. 11 Min. 9 Sec.
„ „ „ „ „ 1584 „ 1585 „ 5 „ 48 „ 51 „
„ „ „ „ „ 1585 „ 1586 „ 5 „ 48 „ 51 „

Im von den 15ten Octobern auf die ten Januare zu kommen, hat man bei constanten Differenz von 2 auf einler folgenden 4jährigen Cykeln mit 44 Min. 36 Sec., da das Jahr 1600 ein Schaltjahr und das Jahr 1700 ein Gemeinjahr gewesen ist.

Vom 15ten October 1582 bis zum 15ten Oct. 18, 29 Cyclus zu 44 Min. 36 Sec. Differenz. Das ir 1698 war also zurück um 29 · (44 Min. 36 Sec.) =	21 St. 33 Min. 24 Sec.
Vom 15ten Oct. 1698 bis 1ten Januar 1701 d 2 Jahr 77 Tage, sind 807 Tage, nach dem lender zu 24 Stunden, nach wahrer Zeit = $\frac{1}{3}$ × (365 Tg. 5 St. 48 Min. 51 Sec.) also voraus $\frac{1}{3}$ (5 St. 48 Min. 51 Sec.)	12 St. 45 Min. 4 Sec.
Mithin war der erste Januar 1701 zurück um	8 St. 48 Min. 20 Sec.
Vom 1ten Januar 1701 bis zum 1. Jan. 1861 d, da das Jahr 1800 ein Gemeinjahr war, 39 Schaltjahre zu 366 Tagen . . 14274 Tg. 125 Gemeinjahre zu 365 Tagen . . 45625 „	
164 Jahre zusammen mit	59899 Tg.
Die astronomische Zeit beträgt 164 Jahre zu 5 Tg. 5 Std. 48 Min. 51 Sec.	58890 Tg. 17 St. 31 Min. 24 Sec.
Der 1te Januar 1861 wird also um den 1ten nuar 1701 voraus sein an Kalenderzeit gegen e astronomische Zeit um	17 St. 31 Min. 24 Sec.
Der 1te Januar 1701 war an Kalenderzeit gen die astronomische Zeit zurück um	8 St. 48 Min. 20 Sec.
Folglich ist der 1te Januar 1861 an Kalenderit gegen astronomische Zeit voraus um . . .	8 St. 43 Min. 4 Sec.

Aus der obigen Berechnung, dafs nach 400 Jahren das Kalenderjahr gegen s astronomische Jahr um 2 Stunden Minuten zurückbleibt, geht hervor, dafs r Differenz beider Jahre von einem ge $\frac{24}{2\frac{1}{2}} \times 400 = 4100$ Jahre gehören. Nach 00 Jahren also mufs ein neues Schalt- r zum Gemeinjahr werden.

Calotte, s. „Calotte“.

Kalte Zonen sind die beiden Theile Erdoberfläche als Calotten von den ndekreisen ab, in deren Scheitel die e liegen; so genannt wegen der dort rschenden kältesten Temperatur gegen anderen Zonen der Erde. Bedeutet . 267, Bd. II., pag. 2: *AB* den Aequa- *EF* einen Polarkreis, *D* den Pol, so die Calotte *EDF* eine der beiden kal- Zonen.

Von der Abplattung der Erde an den en abgesehen ist eine kalte Zone $\pi \cdot CD \cdot DH$.

Es ist $DH = CD\,(1 - \cos \angle DCF)$

Mithin die Zone $2\pi\, CD^2 \times (1 - \cos \angle DCF)$

Nun ist $\angle DCF = 23\frac{1}{2}$ Grad

Daher die Zone $= 2 \cdot 0{,}08294 \cdot \pi\, CD^2$

Mithin verhält sich eine kalte Zone zur Erdoberfläche wie $0{,}08294 : 2 = 1 : 24$ so dafs beide kalte Zonen etwa den 12ten Theil der gesammten Erdoberfläche ausmahhen.

Kammlinie. Hierunter versteht man die Linien, nach welchen die Räderkämme geformt werden. Es sind diese die Cycloide, die Epicycloide und die Hypocycloide. Erstere gibt die vortheilhafteste Form für Kämme, wenn ein Stirnrad in eine gezahnte Stange greift. Die zweite für Kämme, wenn Kammrad und Getriebe zusammen greifen und für Kämme der gewöhnlichen aufserhalb in einander greifenden Stirnräder; letztere für die selten in Anwendung kommenden Stirnräder, von denen das eine innerhalb des Kranzes gezahnt ist. Der Vortheil in jedem einzelnen Fall besteht darin, dafs je zwei zusammengreifenden

Kämme in jeder noch so kleinen Zeit gleich grofse Wege zurücklegen.

Kanalwaage, s. „Canalwaage."

Kanten (Stereom und Kryst.) sind die Durchschnittslinien zweier Flächen; beim Krystall sind diese Flächen immer Ebenen, die Kanten also gerade Linien.

Die Kanten werden unterschieden 1, nach der Gröfse des Neigungswinkels beider die Kante bildenden Flächen, Kantenwinkel genannt. Kanten heifsen nämlich stumpf, wenn deren Kantenwinkel stumpf; scharf, wenn deren Kantenwinkel spitz (scharf) sind. Kanten in demselben Krystall heifsen gleich, wenn deren Kantenwinkel gleich sind, sonst ungleich.

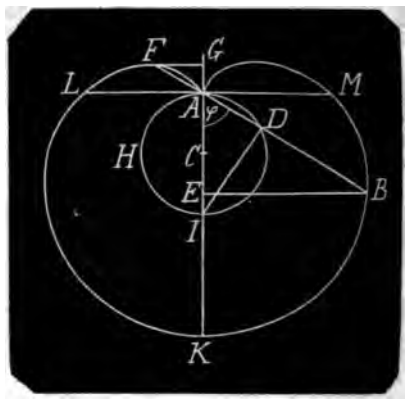
Die Kanten eines Krystalls werden 2, unterschieden nach deren Lage: Kanten heifsen Scheitelkanten, wenn sie in einem Endpunkt der Normalaxe des Krystalls endigen, wenn sie also von zwei Scheitelflächen gebildet werden; Randkanten, wenn sie von einer Scheitelfläche und einer Seitenfläche oder von einer Endfläche und einer Seitenfläche gebildet werden.

Kantenwinkel sind die Neigungswinkel zweier in einer geraden Linie, einer Kante sich schneidenden Ebenen mit einander.

Kardioide (καρδια Herz) eine herzförmigz Linie der 4ten Ordnung also eine Curve der 3ten Klasse, weil sie durch eine Gleichung vom 4ten Grade bestimmt wird. Die Construction der Linie ist einfach:

Man nehme einen beliebigen Kreis, den Grundkreis ADH vom Halbmesser AC, ziehe von dem Endpunkt A desselben lauter Sehnen, wie AD, verlängere diese zu beiden Seiten, trage vom zweiten Endpunkt D der Sehne auf derselben nach beiden Seiten hin Stücke DB, DF, so sind B, F Punkte der Kardioide. In dem verlängerten Durchmesser sind K in Entfernung von 2 Kreisdurchmessern AJ von A und der Punkt A selbst die Curvenpunkte, AK die Mittellinie, und von diesen aus die Curve zu beiden Seiten congruente Hälften.

Fig. 725.



2. Um die rechtwinklige Coordinatengleichung zu erhalten, fälle die Normale BE, ziehe die Sehne DJ, so ist $\triangle ADJ \sim \triangle AEB$

Daher $AJ : AD = AB : AE$

Setzt man nun den Halbmesser AC des Grundkreises $= r$, für den Curvenpunkt B die Abscisse $AF = x$, die Ordinate $BE = y$, so hat man

$$AB = \sqrt{x^2+y^2};\quad AD = \sqrt{x^2+y^2} - 2r$$

also $2r : \sqrt{x^2+y^2} - 2r = \sqrt{x^2+y^2} : x$

woraus die rechtwinklige Coordinatengleichung für den Punkt B, dessen Radiusvector AB durch den Grundkreis liegt.

$$y^4 - 2(2r^2 + 2rx - x^2)y^2 - 4rx^3 + x^4 = 0 \quad (1)$$

3. Für den Punkt F hat man, wenn AF der Radiusvector, FG die Ordinate, AG die Abscisse ist

$$AJ : AD = AF : AG$$

Hier $AG = x_1$; $FG = y_1$ gesetzt

$$AF = \sqrt{x_1^2+y_1^2};\quad AD = DF - AF = 2r - \sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

Mithin $2r : 2r - \sqrt{x_1^2+y_1^2} = \sqrt{x_1^2+y_1^2} : x$

woraus die rechtwinklige Coordinatengleichung für den Curvenpunkt F, dessen Radiusvector AF aufserhalb des Grundkreises liegt:

$$y_1^4 + 2(-2r^2 + 2rx_1 + x_1^2)y_1^2 + 4rx_1^3 + x_1^4 = 0 \quad (2)$$

Zu dieser Gleichung kommt man auch, wenn man $-2r$ für $2r$ in die erste Coordinatengleichung setzt.

Zieht man durch den Punkt A eine Linie LM normal dem Durchmesser AF, so gilt die erste Coordinatengleichung für die Kardioidenpunkte, welche unterhalb LM, die zweite für die Punkte, welche oberhalb LM liegen.

4. Für die Kardioide gibt es eine ein-

:he Polargleichung. Nimmt man den $\angle EAB = \varphi$ zur Polarabscisse, so ist der diusvector

$$AB = AD + DB = AJ \cos\varphi + DB = 2r\cos\varphi + 2r$$
$$= 2r(1+\cos\varphi) = s \quad (3)$$

d $$AF = DF - AD = 2r(1-\cos\varphi) = s, \quad (4)$$

Für $x = 0$ wird $s = 4r$ (AK); $s_1 = 0$

Für $x = 90°$ wird $e = 2r$; $s_1 = 2r$ (AM und AL)

Um zu erfahren, unter welchem Winser Linie am entferntesten, ist hat man
l x der Kardioidenpunkt über LM diedessen Höhe über LM

$$= h = s_1 \times \sin(90° - \varphi) = 2r(1-\cos\varphi)\cos\varphi \quad (5)$$

h wird also ein Maximum für $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ also $h = \frac{1}{2}r$ (6)

Die Ordinate y (wagrechte Entfernung von AK ist $= 2r(1-\cos\varphi)\sin\varphi = \frac{1}{2}r\sqrt{3}$ (7)

5. Um die obigen Coordinatengleichungen mit den Polargleichungen in Verbindung zu bringen hat man

$x = s\cos\varphi = 2r(1+\cos\varphi)\cos\varphi$

$x_1 = s_1\cos\varphi = 2r(1-\cos\varphi)\cos\varphi$
$y = s\sin\varphi = 2r(1+\cos\varphi)\sin\varphi$
$y_1 = s_1\sin\varphi = 2r(1-\cos\varphi)\sin\varphi$

$$\cos\varphi = \tfrac{1}{2}\left(-1+\sqrt{\frac{r+2x}{r}}\right) = \tfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{r-2x_1}{r}}\right)$$

Aus Gleichung 6 ersieht man, dafs x, im Maximo $= \frac{1}{2}r$ ist.

$$\cos^4\varphi + 2\cos^3\varphi - 2\cos\varphi - \frac{4r^2-y^2}{4r^2} = 0$$

6. Nach dem Art. Curvenlehre pag. 186 mit Fig. 537 hat man

$$Subtangente\ CJ = \frac{s^2}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)}$$

Also für einen Punkt unter LM:

$$Subtg = \frac{4r^2(1+\cos\varphi)^2}{-2r\sin\varphi} = -4r\cot\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

Für einen Punkt über LM:

$$Subtg = \frac{4r^2(1-\cos\varphi)^2}{2r\sin\varphi} = +4r\,tg\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

$$Tangente\ BJ = \frac{s}{\left(\frac{\partial s}{\partial\varphi}\right)}\sqrt{s^2+\left(\frac{\partial s}{\partial\varphi}\right)^2}$$

Also für einen Punkt unter LM:

$$Tg = \frac{2r(1+\cos\varphi)}{-2r\sin\varphi}\sqrt{4r^2(1+\cos\varphi)^2+4r^2\sin^2\varphi} = -4r\cdot\cos\frac{\varphi}{2}\cot\frac{\varphi}{2}$$

Für einen Punkt über LM:

$$Tg = \frac{2r(1-\cos\varphi)}{2r\sin\varphi}\sqrt{4r^2\cdot(1-\cos\varphi)^2+4r^2\sin^2\varphi} = 4r\sin\frac{\varphi}{2}\,tg\frac{\varphi}{2}$$

$$Subnormale\ CN = \frac{\partial s}{\partial\varphi}$$

Für einen Punkt unter LM:

$$Subn = -2r\sin\varphi$$

Für einen Punkt über LM:

$$Subn = 2r\sin\varphi$$

$$Normale\ BN = \sqrt{s^2+\left(\frac{\partial s}{\partial\varphi}\right)^2}$$

Für einen Punkt unter LM:

$$Norm = \sqrt{4r^2(1+\cos\varphi)^2+4r^2\sin^2\varphi} = 2r\sqrt{2(1+\cos\varphi)} = 4r\cdot\cos\frac{\varphi}{2}$$

Für einen Punkt über LM:

$$Norm = \sqrt{4r^2(1-\cos\varphi)^2+4r^2\sin^2\varphi} = 2r\sqrt{2(1-\cos\varphi)} = 4r\cdot\sin\frac{\varphi}{2}$$

Katadioptrisch ist jedes Vergrößerungswerkzeug, es mag die Eigenschaft der Vergrößerung durch Brechung der Lichtstrahlen (dioptrisch) oder durch Zurückwerfung derselben (katoptrisch) erlangt haben.

Katakaustische Linie, s. den Art. „Brennlinie“ mit Fig. 251.

Kathete ist in jedem rechtwinkligen (geradlinigen und sphärischen) jede der beiden den rechten Winkel einschließenden Seiten. In einem sphärischen Dreieck mit 2 rechten Winkeln ist jede der 3 Seiten eine Kathete und 2 Seiten sind zugleich Hypotenusen; in einem sphärischen Dreieck mit 3 rechten Winkeln ist jede Seite Kathete und zugleich Hypotenuse.

Katoptrik ist die Disciplin der optischen Wissenschaften, welche mit der Zurückwerfung der Lichtstrahlen durch Spiegel sich beschäftigt.

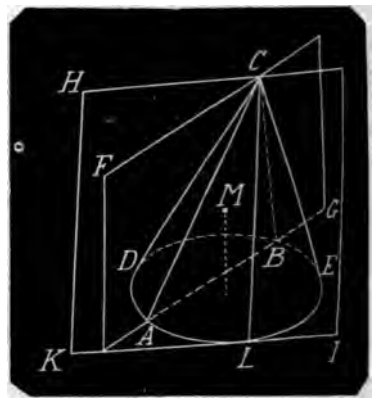
Kaustische Linie, s. v. w. „Brennlinie“.

Kegel ist ein Körper, der begrenzt ist von einer Kreisebene und einer Fläche, die so beschaffen ist, daß sich in ihr ein Punkt befindet, welcher mit jedem anderen Punkt derselben und einem Punkte des Kreisumfangs immer in einer und derselben geraden Linie liegt. Dieser Punkt heißt die Spitze des Kegels, jeder Kreis die Grundfläche oder der Grundkreis; die zweite begrenzende Fläche der Kegelmantel, die gerade Verbindungslinie der Spitze mit dem Mittelpunkt des Grundkreises die Axe des Kegels; eine gerade Linie, welche die Spitze des Kegels mit einem Punkt des Grundkreises verbindet eine Seite des Kegels und der Abstand der Spitze von der Grundfläche die Höhe des Kegels. In Figur 726 ist *ABDE* der Grundkreis, *C* die Spitze, die geraden Linien *CA*, *CB*, *CD*, *CE* sind Seiten des Kegels.

2. Aus der Erklärung des Kegels geht hervor, daß jede aus der Spitze nach dem Kreisumfang gezogene gerade Linie mit allen ihren Punkten in dem Kegelmantel liegt. Hieraus folgt, daß jede von der Spitze aus durch den Kegel gelegte Ebene wie *FG* den Kegel in einem geradlinigen Dreieck *CAB* durchschneidet.

3. Eine Ebene *HJ*, welche durch die Spitze *C* eines Kegels und durch eine Tangente *JK* seiner Grundfläche gelegt wird, hat nur eine einzige gerade Linie, nämlich die gerade Verbindungslinie der Spitze *C* mit dem Berührungspunkt *L*

726.

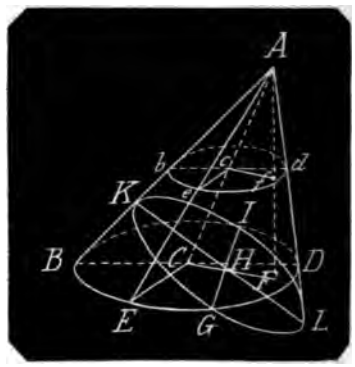


zwischen Tangente und Kreisumfang mit dem Kegel gemein; alle übrigen Punkte der Ebene, wie z. B. *M* liegen außerhalb des Kegels.

Schneidet eine dem Grundkreis parallele Ebene den Mantel eines Kegels, so ist die Durchschnittslinie eine Kreislinie, deren Mittelpunkt in der Axe des Kegels liegt. Sein Umfang verhält sich zum Umfang des Grundkreises, wie der Abstand der Spitze von der Durchschnittsebene zu dem Abstand der Spitze von der Grundfläche; die Flächen dieser Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze.

Es sei Fig. 727 *ABD* der Kegel, *C* der Mittelpunkt seines Grundkreises, also *AC* seine Axe; *bedf* sei die von dem Kegel-

Fig. 727.



mantel mit der ∓ der Grundfläche durch den Kegel gelegten Ebene gebildete Durchschnittslinie und *c* der Durchschnittspunkt

me mit der Axe *AC*. Ziehe
pitze *C* zwei Linien *AB*, *AE*
Umfangspunkten *B* und *E* des
es: *b*, *e* seien die Durchschnitts-
esser Linien mit der Durch-
ie *bedf*. Lege durch die Linien
AE und *AC* zwei Ebenen; *bc*,
deren Durchschnittslinien mit
gelegten Ebene,

= *BC* und *ec* ∓ *EC* (s. „Ebene“
t Fig. 589)

∆ *Abc* ∞ ∆ *ABC*
∆ *Aec* ∞ ∆ *AEC*
bc : *BC* = *Ac* : *AC*
ec : *EC* = *Ac* : *AC*

bc : *BC* = *ec* : *EC*

C der Mittelpunkt des Grund-
, so sind *BC* und *EC* als Ra-
ader gleich, folglich ist auch
a nun *b* und *e* beliebige Punkte
lgt daraus, dafs auch alle übri-
te des Umfangs *bedf* gleichen
on *c* haben, dafs daher *bedf*
linie mit dem Mittelpunkt *c* ist.

lle aus der Spitze *A* auf die
ie das Loth *AF*, und dies treffe
gelegte Ebene in den Punkt *f*.
n nun die Linien *CF* und *cf*,
diese in der Ebene *ACF*, sind
erhalten sich wie *AF* : *Af* und
ie *EC* : *ec* = *BC* : *bc*. Die Kreis-
erhalten sich aber wie die ihnen
n Halbmesser, folglich verhal-
ie Kreisumfänge *bed* : *BED* wie
ugehörigen Höhen *bf* : *BF*, und
lächen wie die Quadrate ihrer
r, also wie die Quadrate der
n Kegelhöhen.

Kegel, dessen Axe senkrecht
undfläche steht, heifst ein ge-
egel, oder auch weil seine
en Seiten einander gleich sind,
hseitiger Kegel. Ein Ke-
n Axe schief auf der Grund-
t (Fig. 727) heifst ein schiefer
er auch ein ungleichseiti-
el. Aehnliche Kegel, s. u.
ch“. Die Namen stumpf-
, spitzwinklige, recht-
Kegel erhalten die Kegel von
affenheit ihres Winkels an der

er Kegel ein schiefer Kegel, so
ifser dem System der mit dem
se parallelen Durchschnittskreise
zweites System von parallelen
ittsebenen, welche auch Kreise
Wechselschnitte des Kegels
Deren Durchmesser in dem nor-
mal auf der Grundfläche befindlichen Axendurchschnitt sind antiparallel.

Durch einen beliebigen Punkt *H* in dem Durchmesser *BD* einer der Grundfläche parallelen Durchschnittsebene *BED*, wenn ∆ *ABD* der normale Axenquerschnitt des Kegels ist, ziehe die Linie *KL* antiparallel mit *BD*, so dafs also ∠ *AKL* = ∠ *ADB* und ∠ *ALK* = ∠ *ABD*, und lege durch *KL* eine der Axe *AC* normale Ebene *KGLJ*, so ist diese Ebene eine Kreisebene und die Durchschnittslinie *GJ* beider Ebenen steht auf dem Axendreieck *ABD* normal, folglich auch normal auf den beiden im Axendreieck *ABD* befindlichen Linien *BD* und *KL* in dem allen dreien Linien gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt *H*.

Da nun *BJDG* ein Kreis ist, so hat man

$$GH^2 = BH \times DH$$

Nun ist $\angle DLH = \angle KBH$
hierzu $\angle DHL = \angle BHK$
daher $\triangle DHL \infty \triangle KHB$
woraus $DH : LH = KH : BH$
oder $LH \times KH = BH \times DH$
mithin $LH \times KH = GH^2$

Mithin ist, weil der Punkt *H* ein in dem Durchmesser *BD* ganz willkührlich angenommener Punkt ist die Ebene *KGLJ* ein dem Kreise *BEDJ* congruenter Kreis.

7. Der Mantel eines geraden Kegels ist so grofs als ein Dreieck, dessen Grundlinie dem Umfang des Grundkreises und dessen Höhe der Seite des Kegels ist.

Man beschreibe in und um den Grundkreis des Kegels zwei einander ähnliche Vielecke, die Seiten des inneren Vielecks einzeln ∓ den Seiten des äufseren Vielecks. Erstere sind Sehnen im Grundkreise, letztere Tangenten an dem Grundkreise. Nun bilde man zu diesen Seiten als Grundlinien Dreiecke, deren gemeinschaftliche Spitze die Spitze des Kegels ist, so fallen alle Dreiecke über dem inneren Polygon innerhalb, alle Dreiecke über dem äufseren Polygon aufserhalb des Kegelmantels; die inneren Dreiecke unter sich und die äufseren Dreiecke unter sich sind congruent und gleichschenklig. Das Loth aus der Spitze auf jede der inneren Grundlinien gefällt, d. h. die Höhe jedes der inneren Dreiecke, sei *h*, das Loth auf die äufseren Grundlinien ist die Seite *l* des Kegels, die Seiten selbst seien *a* und *A* so hat man die Summe der inneren Dreiecke = $\frac{1}{2}nah$, die der äufseren = $\frac{1}{2}nAl$. Zwischen beiden Flächenräumen ist offenbar der von ihnen

eingeschlossene Kegelmantel begriffen. Ist dieser = M, so hat man

$$\tfrac{1}{2}nah < M < \tfrac{1}{2}nAl$$

Ist ferner U der Umfang des Grundkreises, so hat man, da dieser von beiden Polygonen eingeschlossen ist

$$na < U < nA$$

und da $h < l$, so hat man hieraus

$$\tfrac{1}{2}nah < \tfrac{1}{2}Ul < \tfrac{1}{2}nAl$$

Mit dem beliebigen Wachsthum von n kommen die Polygonumfänge dem Kreisumfang und die Höhe h der Seite l immer näher, mithin kommen beide Dreieckssummen $\frac{1}{2}nah$ und $\frac{1}{2}nAl$ sowohl dem Kegelmantel m als auch der Fläche $\frac{1}{2}Ul$ beliebig nahe und sowohl M als $\frac{1}{2}Ul$ sind deren Grenzwerthe und einander gleich.

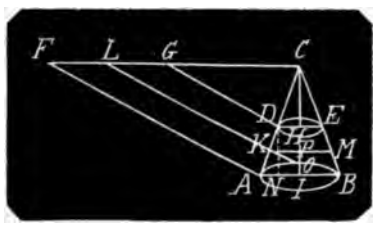
Da nun $\frac{1}{2}Ul$ der Inhalt eines Dreiecks ist, dessen Grundlinie der Umfang des Grundkreises und dessen Höhe die Seite des Kegels ist, so ist der Kegelmantel diesem Dreiecke gleich.

8. Wenn man durch einen Kegel eine mit der Grundfläche parallele Ebene führt und den oberen Theil fortnimmt, so heißt der zurückgebliebene mit zwei Endflächen versehene Theil des Kegels abgekürzter oder abgestumpfter Kegel. Ist die durchgeführte Ebene ∓ der Grundfläche so ist der Kegel gerade abgekürzt, ist sie der Grundfläche nicht ∓, schief abgekürzt.

Der Mantel eines geraden und gerade abgekürzten Kegels ist gleich einem Trapez, dessen parallele Seiten den Umfängen der beiden Endkreise gleich sind und welches das zwischen den beiden Endkreisen begriffene Stück der Seite des Kegels zur Höhe hat.

An der Seite CA des ganzen geraden Kegels errichte in A die Normale AF = dem Umfange des Grundkreises AB, ziehe die gerade Linie CF, so ist $\triangle CFA$ = dem ganzen Kegelmantel. Ziehe $DG \mp AF$,

Fig. 728.



so hat man, wenn CJ die Axe des Kegels ist, und H der Punkt, in welchem sie die obere Endfläche DE s

Umfang AB : Umfang D

aber auch AC : CI

folglich Umfang AB : Umfang D

Da nun AF = Umfang AC

so ist DG = Umfang DE

daher $\triangle CDG$ = Kegelmantel

folglich ist das Trapez $ADGF$ gelmantel $ABDE$.

10. Der Mantel eines gerad ten geraden Kegels ist gle Rechteck, dessen Grundlinie Umfange des in der Mitte b kreise ihnen ∓ durchgelegt und dessen Höhe die Seite des ten Kegels ist.

Durch die Mitte K der Seite den Durchschnitt $KM \mp$ beide sen AB und DE und errichte Normale KL auf AC, so ist (n KL = dem Umfange des Kreis

Nun ist aber das Rechtec Grundlinie KL und der Höhe Trapez $ADFG$, folglich ist d wiesen.

11. Der Mantel eines gera ist gleich dem Mantel eines der den halben Durchmesser grundfläche zum Durchmesse Seite des Kegels zur Höhe ha

Ist (Fig. 728) $CH = \frac{1}{2}CJ$, s $DE = \frac{1}{2}AB$ und Umfang $DE = \frac{1}{2}$U Da nun der Kegelmantel n $= \frac{1}{2}$ · Umfang AB mal AC, so i gelmantel auch = Umfang D also = dem Mantel eines Cyli dem Durchmesser DE und de

12. Der Mantel eines gerad CAB ist gleich dem Mantel ei ders dessen Höhe die Höhe C gels ist und dessen Grundflä der Mitte D der Seite auf de zur Axe CJ errichtete Normal Halbmesser hat.

Es sei, Fig. 729, CAB der schnitt eines geraden Kegels Höhe, $CH = \frac{1}{2}CJ$, $DE \mp AB$. normal AC,

so ist $\triangle CAJ \sim \triangle DOH$

weil deren Seiten gegenseitig der normal stehen.

Hieraus folgt $CA : DO = CJ :$ und wenn man DH und DO messer von Kreisen ansieht,

CA : Umf. $DO = CJ$: I

woraus $CA \times$ Umf. $DH = CJ \times$

Fig. 729.

un ist aber $CA \times$ Umf. DH (nach Satz gleich dem Kegelmantel und $CJ \times$ fang DO ist gleich dem Cylindermanvom Halbmesser DO des Grundkreiund der Höhe CJ des Kegels.

3. Der Mantel eines gerade abgekürzgeraden Kegels ist gleich dem Maneines geraden Cylinders, dessen Höhe Seite des abgekürzten Kegels und en Grundfläche gleich der in der e der Höhe genommenen mit den flächen parallelen Durchschnittsfläche

er Satz ist mit dem Satz 10 erwiesen.

4. Der Mantel eines gerade abgekürzgeraden Kegels ist gleich dem Maneines geraden Cylinders von einerlei e mit dem abgekürzten Kegel, dessen ndkreis aber die in der Mitte der e auf der Kegelseite bis in die Axe chtete Normale zum Halbmesser hat.

t (Fig. 721) $DEAB$ der abgekürzte el, KM in der Mitte zwischen AB DE parallel, P deren Durchschnittskt mit der Axe, KO normal AC, so das Loth DN und man hat wie 12

$$\triangle DAN \sim \triangle KOP$$

er $DN : KP = AD : KO$

der $HJ : KP = AD : KO$

auch $HJ :$ Umf. $KP = AD :$ Umf. KO

$HJ \times$ Umf. $KO = AD \times$ Umf. KP

a nun (nach No. 10) $AD \times$ Umfang KP lem abgekürzten Kegelmantel und $\times$ Umfang KO der im Satz bezeichCylindermantel ist, so sind beide tel einander gleich.

5. Die Oberflächen gerader schief abumpfter und schiefer Kegel sind nur h höhere Analysis zu finden möglich, Endformeln srnd nur durch Reihen ntegriren.

6. **Ist der Halbmesser der Grundfläche eines geraden Kegels $= R$, seine Höhe H seine Seite L**

so ist die Grundfläche $= \pi R^2$

der Umfang derselben $= 2\pi R$

der Inhalt des Kegelmantels $= \pi RL$

die Seite $L = \sqrt{H^2 + R^2}$

also der Inhalt des Kegelmantels auch $= \pi R \sqrt{H^2 + R^2}$

Ist der Halbmesser der zweiten Endfläche eines gerade abgestumpften geraden Kegels $= r$, seine Seite l, seine Höhe h, so ist

der Umfang des oberen Endkreises $= 2\pi r$

der Mantel $= \pi (R + r) l$

die Seite $l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$

der Mantel auch $= \pi (R + r) \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$

17. Der körperliche Inhalt eines Kegels ist so grofs als eine Pyramide von gleich grofser Grundfläche und Höhe.

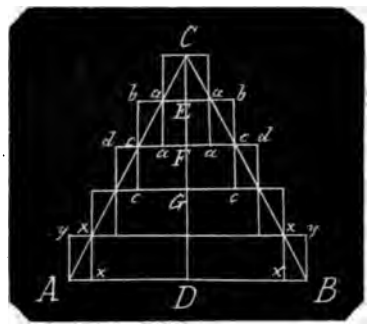
Man beschreibe in und um den Grundkreis zwei ähnliche reguläre Vielecke, betrachte diese als Grundebenen von Pyramiden, die ihre Spitze in der Kegelspitze haben, so ist der Kegel zwischen beiden Pyramiden begriffen. Eine Pyramide, deren Grundfläche gleich grofs ist mit dem Grundkreis des Kegels und die mit demselben einerlei Höhe hat, ist ebenfalls zwischen jenen beiden Pyramiden begriffen.

Nun aber ist der Unterschied der inneren und der äufseren Pyramide gleich der Pyramide von derselben Höhe, die den Unterschied der Grundflächen jener beiden zur Grundfläche hat. Der Unterschied dieser Grundflächen kann aber durch Vermehrung der Seitenzahl beider Polygone beliebig klein werden, also auch der Unterschied der Pyramiden, und daher müssen die zwischen ihnen begriffenen Körper, der gegebene Kegel und die Pyramide von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe mit ihm gleich grofs sein.

18. Der körperliche Inhalt eines Kegels ist $=$ dem dritten Theil eines Cylinders von derselben Grundfläche und derselben Höhe.

Es sei CAB der gegebene Kegel im Axenquerschnitt, AB der Durchmesser $= 2AD = 2R$ der Grundfläche, CD seine Höhe H. Theile diese Höhe von der Spitze C herab in m gleiche Theile, wie CE, EF, FG ..., bezeichne diese Höhen mit h so ist $mh = H$. Führe durh jeden Theilpunkt eine Ebene $\parallel$ der Grundfläche und construire in und um den Kegel Cylinder von der Höhe h. Der

Fig. 730.



erste äufsere Cylinder von der Höhe $CE = h$ hat die Grundfläche vom Durchmesser aa, und die Höhe $EC = h$, der zweite äufsere Cylinder die Grundfläche vom Durchmesser cc und die Höhe $FE = h$, der $m$te äufsere Cylinder hat die Grundfläche von Durchmesser AB und die Höhe $Ay = h$.

Bezeichnet man den Halbmesser der Grundfläche aa mit r, die Grundfläche selbst also mit πr^2, so ist die Grundfläche $cc = 4\pi r^2$, die folgende $9\pi r^2$, u. s. w. Die $m$te $AB = m^2\pi r^2$. Sämmtliche Cylinder umschliefsen den Kegel und deren Summe

$$\pi r^2 h + 4\pi r^2 h + 9\pi r^2 h + \ldots . m^2\pi r^2 h = \tfrac{1}{6} m\,(m+1)\,(2m+1)\,\pi r^2 h$$

ist gröfser als der Kegel.

Der erste innere Cylinder besteht in der Axe CE und ist = 0, der zweite hat die Grundfläche aa, der dritte die Grundfläche $cc \ldots$, der $m$te die Grundfläche xx, sämmtliche Cylinder haben die Höhe h, sie werden von dem Kegel eingeschlossen, und deren Summe

$$\pi r^2 h + 4\pi r^2 h + 9\pi r^2 h + \ldots ., (m-1)^2\pi m^2 h = \tfrac{1}{6}(m-1)\,m\,(2m-1)\,\pi r^2 h$$

ist kleiner als der Kegel. Hieraus hat man

$$\tfrac{1}{6} m\,(m+1)\,(2m+1)\,\pi r^2 h > \text{Kegel} > \tfrac{1}{6}(m-1)\,m\,(2m-1)\,\pi r^2 h$$

Bei beliebigem Wachsthum vom m verschwindet die Einheit immer mehr und mehr gegen m und beide den Kegel einschliefsenden Gröfsen nähern sich beliebig dem Körper

$$\tfrac{1}{3} m \cdot m \cdot 2m \cdot \pi r^2 h = \tfrac{1}{3} m^3 \pi r^2 h$$

Nun ist nach Voraussetzung $mr = AD = R$, also $m^2\pi r^2 = \pi R^2$, und $mh = CD = H$.

Demnach ist der Inhalt des Kegels $= \tfrac{1}{3}\pi R^2 H$. D. h. = dem dritten Theil eines Cylinders von der Grundfläche und der Höhe des Kegels.

Durch Integralrechnung erhält man das Resultat einfacher:

Nimmt man CD zur Abscissenlinie, C zum Anfangspunkt der Abscissen, setzt $CF = x$, $Fc = y$, so hat man

$$CF : Fc = CD : DB$$

oder $$x : y = H : R$$

woraus $$y = \frac{R}{H}\,x$$

Nun ist die Cubaturformel für Umdrehungskörper, indem nämlich das ΔCDB um CD sich umdrehend den Kegelraum beschreibt:

$$Fx = \text{Kegel } Ccc = \pi \int y^2\,\partial x + C = \pi \cdot \int \frac{R^2}{H^2}\,x^2\,\partial x + C = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2}{H^2}\,x^3 + C$$

Für $x = 0$ fällt der Kegel in die Spitze C zusammen, wird = 0 und folglich wird auch $C = 0$. Mithin ist

$$\text{der Kegel } Ccc = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2}{H^2} \cdot x^3$$

Setzt man für CF die Höhe CD, also H für x, so erhält man

$$\text{den Kegel } CAB = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2}{H^2} H^3 = \tfrac{1}{3}\pi R^2 H$$

19. Der körperliche Inhalt eines gerade abgekürzten geraden Kegels ist gleich dreien vollständigen Kegeln von einerlei Höhe mit dem abgekürzten, deren Grundflächen der Reihe nach der untere, der obere und das Mittel beider Endkreise sind.

Ein Kegel ist gleich einer Pyramide von gleicher Grundfläche und Höhe; führt man durch beide Körper parallel mit den Grundflächen genommene Durchschnittsebenen in gleichen Abständen von der Spitze, so sind in beiden Körpern diese Durchschnittsflächen einander gleich. Die beiden oberen Körper sind daher einander gleich, also auch die beiden abgekürzten unteren. D. h. Ein abgekürzter Kegel ist = einer abgekürzten Pyramide

iche Endflächen und gleiche
Nun gilt aber der Satz
ürzten Pyramide also auch
ten Kegel.

ader gerade abgekürzter Ke-
l dritten Theil von dreien
lche mit dem Kegel gleiche
von denen der eine die un-
ite die obere Grundfläche
s das Mittel beider Grund-
rundfläche hat.

. 729, der Axenquerschnitt
gekürzten Kegels mit dem
ED des Ergänzungskegels,
$l = r$, $HJ = H$, so hat man
ghöhe CH aus der Pro-

$: DH = CJ : CH$

$R : r = h + CH : CH$

$h \cdot \frac{r}{R-r}$ und $CJ = h \cdot \frac{R}{R-r}$

Kegel $CAB = \frac{1}{3}\pi R^2 h \cdot \frac{R}{R-r}$

Kegel $CDE = \frac{1}{3}\pi r^2 h \cdot \frac{r}{R-r}$

bgekürzte Kegel $ABDE$

$\frac{R^3 - r^3}{R-r} = \frac{1}{3}\pi h (r^2 + rR + R^2)$

tz bewiesen ist.

l, s. u. „Kegel".

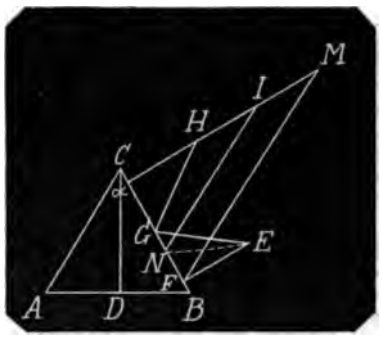
tte. Construction derselben,
„Brennpunkte der Ke-
", pag. 421 mit Fig. 257 bis
r „Brennpunkt der Pa-
416 mit Fig 253 bis 255;
kte der Ellipse", pag.
256; „Brennpunkte der
pag 420. S. ferner den
n" von No. 12, pag. 174
g. 184 mit Fig. 532 bis 535,
rein Analytische enthält;
Weltkörper" von No. 12,
Fig. 188 bis 191; „Bahn
rper, die Ellipse", pag.

l ist ein Spiegel mit ke-
berfläche. Die katoptrischen
he für die Entstehung des
hier einwirken, sind in dem
derspiegel" speciell aus-
tzt. Dieselben auf die Ke-
piegels angewendet, ergeben
örigen Resultate. Die Ge-
gelung sind wie beim ebe-
l und man hat auch beim
unkt, der einen Lichtstrahl
s den Punkt einer die Ke-
irenden Ebene zu betrachten.

Es sei CAB, Fig. 729, der Durchschnitt eines Kegels, C dessen Spitze, CD dessen Axe, also AC, BC Seiten des Kegels, so kehren die Lichtstrahlen in sich selbst zurück, die normal auf eine Seite des Kegels fallen. So z. B. tritt das Bild von dem Punkt E in der Normalen EF auf den Punkt F in FE nach E zurück; der Lichtstrahl EG dagegen reflectirt nach GH, wenn $\angle EGB = \angle HGC$ ist.

Ist also E das Auge, so empfängt es in G das Bild von H; alle innerhalb des Winkels HGE befindlichen Gegenstände werden vom Auge in E innerhalb der Linie GF gesehen. Um z. B. zu erfahren, wo der Lichtpunkt J in den Spiegel fällt, fälle aus J die Normale JL auf BC, verlängere diese rückwärts bis M, so dafs $JM = EF$, ziehe MF und $JN \parallel MF$ so ist N der verlangte Spiegelungspunkt.

Fig. 731.



Denn es ist $JM : JL = FN : NL$

oder $EF : FN = JL : NL$

mithin $\triangle EFN \sim \triangle JLN$

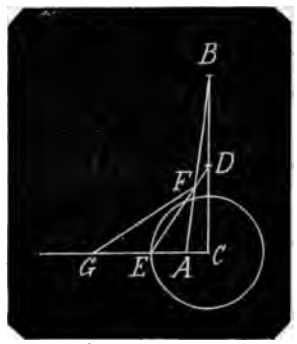
woraus $\angle ENF = JNL$

2. Um mittelst des Kegelspiegels ein bestimmtes Bild zu sehen, denn eine abzuspiegelnde Zeichnung, welche wie beim Cylinderspiegel ein Zerrbild ist, so verfährt man für Anfertigung eines solchen Bildes folgendermaafsen.

Es sei Fig. 732 der Kreis die Gröfse der Grundfläche des Kegelspiegels, so zeichne auf der Papierfläche das Bild, welches durch den Spiegel erscheinen soll. Es sei A ein Punkt des Bildes, so ziehe den Halbmesser CE mit Verlängerung EG durch den Punkt A, errichte in C ein Loth, es sei CD die Höhe der Axe des Kegels und in der doppelten Höhe CB der Ort des Auges. Ziehe ED, so ist DEC das halbe Profil des Kegelspiegels. Ziehe nun BA, welche die Ke-

gelseite DE in F schneidet, so ist F der Punkt auf der Oberfläche des Kegelspiegels, in welchem durch das in B befind-

Fig. 732.



liche Auge der Punkt A gesehen werden soll und der dem Punkt A in der Zeichnung entsprechende Punkt muſs die Lage haben, daſs seine Spiegelung in F geschieht. Demnach hat man nur nöthig an die Linie EF in F einen $\angle GFE = \angle AFE$ zu zeichnen, und man erhält in der Papierebene des zu verzeichnenden Zerrbildes G als den Punkt, der von B aus gesehen in F reflectirt.

Keil ist ein festes dreiseitiges Prisma, auf dessen Seitenflächen Kräfte wirken; er war bei den Alten die sechste Potenz. Von den drei wirkenden Kräften sind zwei gegeben, die dritte ist zu bestimmen; jene beiden sind die Widerstände des Keils, die dritte ist die Kraft des Keils. Die Seitenflächen, auf welche die Widerstände wirken, heiſsen die Seiten des Keils, die Seitenfläche auf welche die Kraft wirkt, der Rücken des Keils. In der Regel wird angenommen, daſs Kraft und Widerstände in einerlei auf den Seitenflächen normal befindlichen Ebene sich befinden. Daher nennt man auch, weil es auf die Länge der Flächen nicht ankommt, die Durchschnittslinien der drei Seitenflächen in jener normal durchgelegten Ebene Seiten und Rücken des Keils. Der Neigungswinkel der beiden Seitenflächen also der Winkel der Seiten in der Durchschnittsebene heiſst der Winkel des Keils.

2. Sind die Kraft und die Widerstände auf den Rücken und die Seiten des Keils normal wirkend, mit einander im Gleichgewicht, so verhält sich die Kraft zu den Widerständen wie der Rücken zu den Seiten des Keils.

Denn wenn 3 Kräfte mit einander im Gleichgewicht sein sollen, so ist Bedingung: Erstens, daſs sie in einerlei Ebene sich befinden und zweitens in einerlei Punkt sich schneiden. Verlängert man also die Kräfte V, P, Q bis in die Mitte des Keils, so schneiden sie sich in einem Punkt C, und deren Gleichgewicht erfordert

Fig. 733.

$$V : P : Q = \sin \angle PCQ : \sin VCQ : \sin \angle PCV$$
$$= \sin D \quad : \sin B \quad : \sin A$$

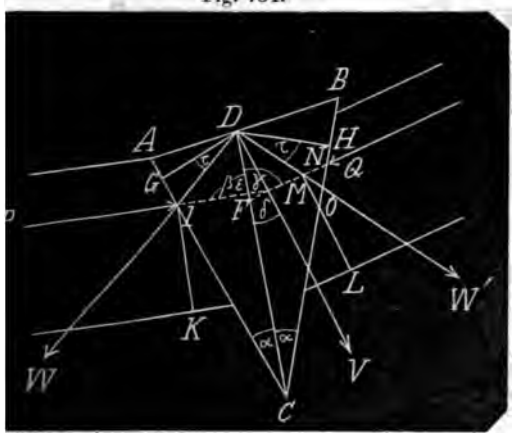
mithin sind $V : P : Q = AB : AD : BD$

3. Wenn auf die beiden Seiten des Keils unter beliebigen Winkeln Widerstände wirken, die nur ihren Richtungen nach zurückweichen können, so soll eine auf den Rücken des Keils wirkende Kraft so bestimmt werden, daſs mit Rücksicht auf die Reibung der Seiten des Keils an den Widerständen, entweder die geringste Vermehrung oder die geringste Verminderung der Kraft ein Vor- oder Rückgleiten des Keils zur Folge hat.

Es sei ABC, Fig. 725, der normale Durchschnitt des Keils, in dessen Ebene alle Kräfte gerichtet angenommen werden. Halbire den $\angle ACB$ durch CD, DV sei die Richtung der auf den Rücken AB wirkenden Kraft V, PE und QF seien die Richtungen der Widerstände P und Q, die gegen die Keilseiten so wirken, daſs sie bei Aufhebung des Gleichgewichts nur nach diesen Richtungen vor- oder rückgleiten können. Um die Lage dieser Kräfte zu bestimmen, setze $\angle DCA = \angle DCB = \alpha$, $\angle DEP = \beta$, $\angle DFQ = \gamma$, $\angle CDV = \delta$.

Wären keine Reibungswiderstände vorhanden, so würden die mit V im Gleichgewicht befindlichen Pressungen aus P und Q auf die ihnen vorstehenden Seiten AC, BC nach normal auf denselben befindlichen Richtungen GD und HD

Fig. 734.



ten und die der Kraft V gleichgel-
len auf die Wirkungen P und Q ver-
lten Seitenkräfte nach DG und DH
chtet sein.
ber von der Berührung der Gegenla-
gen mit den Keilseiten herrührenden Reibung zufolge haben die Widerstände Richtungen, die für $P+$ Reibung (R) zwischen DG und V und die für $Q+R$ zwischen DH und V liegen. Und zwar sind WD und $W'D$ diese Richtungen, und zugleich DW und DW' die Richtungen der den Widerständen $P+R$ und $Q+R$ für's Gleichgewicht entgegenwirkenden Seitenkräfte W und W' der Kraft V, wenn $\angle GDW = \angle HDW' = \varrho$ der Reibungswinkel ist.

Nun hat man für's Gleichgewicht, wenn DW' zur Momentenaxe genommen wird,

$$W \cdot \sin WDW' = V \sin VDW'$$

woraus $$W = \frac{\sin VDW'}{\sin WDW'} \cdot V$$

Nun ist

$$\angle WDW' = \angle GDH - 2\varrho = 180^\circ - 2\alpha - 2\varrho$$

$$\angle VDW' = \angle VDH - \varrho = \angle CDH - \delta - \varrho = 90^\circ - \alpha - \delta - \varrho$$

$$\text{hier } W = \frac{\cos(\alpha+\delta+\varrho)}{\sin 2(\alpha+\varrho)} \cdot V \qquad (1)$$

Eben so ist, DW zur Momentenaxe genommen,

$$= \frac{\sin VDW}{\sin WDW'} \cdot V = \frac{\sin(\angle CDG+\delta-\varrho)}{\sin 2(\alpha+\varrho)} = \frac{\sin(90^\circ+\delta-\alpha-\varrho)}{\sin 2(\alpha+\varrho)} V = \frac{\cos(\alpha+\varrho-\delta)}{\sin 2(\alpha+\varrho)} V \qquad (2$$

Die nach JW gerichtete Seitenkraft W d der nach JE gerichtete Widerstand geben nur eine Mittelkraft, welche im lle des Gleichgewichts auf der Richtung, nach welcher die Widerstände ausweichen können, normal sein muſs.

Ist also JK normal JE, so muſs JK die Richtung der Mittelkraft aus W und P sein.

Nun ist aber $\angle EJW = \angle EJC + \angle WJC = \beta - \alpha + GJD = 90^\circ + \beta - \alpha - \varrho$
d $\angle KJW = \angle EJW - \angle EJK = \beta - \alpha - \varrho$

Daher JK zur Momentenaxe genommen
$P \sin 90^\circ = P = W \sin(\beta - \alpha - \varrho)$
d $$W = \frac{P}{\sin(\beta - \alpha - \varrho)} \qquad (3)$$

Um W' zu bestimmen errichte in M, n Durchschnittspunkt zwischen den Richtungen der Kräfte Q und W' auf FQ eine Normale ML, so ist diese die Richtung der Mittelkraft zwischen diesen beiden Kräften, von welchen Q nach NF und W' nach DW' gerichtet ist; und es ist $Q \sin NML = W' \sin W'ML$

Nun ist
$FMW' = \angle FNC + \angle W'OC = \gamma - \alpha + \angle W'OC = \gamma - \alpha + \angle DON = \gamma - \alpha + 90^\circ - \varrho$
glich $\angle W'ML = \angle FMW' - FML = \gamma - \alpha - \varrho$
l $$W' = \frac{Q}{\sin(\gamma - \alpha - \varrho)} \qquad (4)$$

Werden diese Werthe von W und W' (Gl. 3 und 4) in die obigen Gleichungen nd 2 für W und W' substituirt, so erhält man

$$V = \frac{\sin 2(\alpha+\tau)}{\sin(\beta-\alpha-\tau)\cos(\alpha+\delta+\tau)} P = \frac{\sin 2(\alpha+\tau)}{\sin(\gamma-\alpha-\tau)\cos(\alpha+\tau-\delta)} Q \quad (5)$$

Aus diesem doppelten Ausdruck für V ergibt sich die Bedingungsgleichung für die Gröfsen P und Q, bei welchen das Gleichgewicht in der oben betrachteten Art allein bestehen kann, nämlich:

$$P : Q = \sin(\gamma-\alpha-\tau)\cos(\alpha+\tau-\delta) : \sin(\beta-\alpha-\tau)\cdot\cos(\alpha+\delta+\tau) \quad (6)$$

2. Es ist also im betrachteten Fall V für's Gleichgewicht mit P und Q am gröfsten, weil mit der geringsten Vermehrung von V' der Keil vorwärts getrieben wird.

Soll aber die Kraft V' blofs das Rückgleiten des Keils verhindern, so dafs bei der geringsten Verminderung von V' das Rückgleiten geschehen würde. Dann ist schon die Reibung mit ihrem Widerstande R dem Widerstand V' zu Hülfe genommen und hat einen Theil der Kraft $P+Q$ zum Rückgleiten selbst übernommen. Es ist also $V' = P+Q-R$. Aus diesem Grunde mufs in den vorigen Formeln der $\angle\tau$ subtractiv genommen werden.

Man hat demnach für diesen Fall

Für Gl. 2: $W' = \frac{\sin(90^\circ+\delta+\tau-\alpha)}{\sin 2(\alpha-\tau)} V = \frac{\cos(\alpha-\delta-\tau)}{\sin 2(\alpha-\tau)} V$ (7)

Für Gl. 3: $W = \frac{P}{\sin(\beta+\alpha-\alpha)}$ (8)

Für Gl. 4: $W' = \frac{Q}{\sin(\gamma+\tau-\alpha)}$ (9)

Für Gl. 5: $V = \frac{\sin 2(\alpha-\tau)}{\sin(\beta+\tau-\alpha)\cos(\alpha+\delta-\tau)} P = \frac{\sin 2(\alpha-\tau)}{\sin(\gamma+\tau-\alpha)\cos(\alpha-\delta-\tau)} Q$ (10)

Für Gl. 6: $P : Q = \sin(\gamma+\tau-\alpha)\cdot\cos(\alpha-\delta-\tau : \sin(\beta+\tau-\alpha)\cdot\cos(\alpha+\delta-\tau)$ (11)

3. In den gewöhnlichen Fällen der Anwendung ist $\delta = 0$, $\beta = \gamma$.

Dann wird $V = \frac{\sin 2(\alpha\pm\tau)}{\sin(\beta-\alpha\mp\tau)\cos(\alpha\pm\tau)} P = \frac{\sin 2(\alpha\pm\tau)}{\sin(\beta-\alpha\mp\tau)\cos(\alpha\pm\tau)} Q$

mithin $P = Q$

Setzt man nun $Q = P$, bringt den Sinus des doppelten Winkels im Zähler auf den einfachen Winkel, so hat man

$$V = \frac{2\sin(\alpha\pm\tau)}{\sin(\beta-\alpha\mp\tau)} P \quad (12)$$

Bringt man diese Winkel ebenfalls auf die einfachen, so erhält man

$$V = 2P\frac{\sin\alpha\cos\tau\pm\cos\alpha\sin\tau}{\sin(\beta-\alpha)\cos\tau\mp\cos(\beta-\alpha)\sin\tau} = 2P\frac{\sin\alpha\pm\cos\alpha\,tg\,\tau}{\sin(\beta-\alpha)\mp\cos(\beta-\alpha)\,tg\,\tau}$$

$$= 2P\frac{\sin\alpha\mp\mu\cos\alpha}{\sin(\beta-\alpha)\mp\mu\cos(\beta-\alpha)}$$

4. Wenn die Richtungen der Widerstände normal gegen die Seiten des Keils sind, so ist $\beta = 90^\circ+\alpha$, also

$$V = \frac{2\sin(\alpha\pm\tau)}{\sin(90^\circ\mp\tau)} P = \frac{2\sin(\alpha\pm\tau)}{\cos\tau} P = \frac{2(\sin\alpha\cos\tau\pm\cos\alpha\sin\tau)}{\cos\tau} P$$

$$= 2(\sin\alpha\pm\cos\alpha\,tg\,\tau)\,P = 2(\sin\alpha\pm\mu\cos\alpha)\,P.$$

5. Wenn die Richtungen der Widerstände normal auf die Axe oder Länge des Keils sind, so ist $\beta = 90^\circ$, also

$$V = \frac{2\sin(\alpha+\tau)}{\sin[90^\circ-(\alpha\pm\tau)]} P = \frac{2\sin(\alpha\pm\tau)}{\cos(\alpha\pm\tau)} P = 2P\,tg(\alpha\pm\tau) = 2P\frac{tg\,\alpha\pm tg\,\tau}{1\mp tg\,\alpha\,tg\,\tau} = 2P\frac{tg\,\alpha\pm\mu}{1\mp\mu\,tg\,\alpha}$$

6. Wenn V ein Minimum sein soll, so mufs der Nenner ein Maximum sein, also in Formel 12 der Nenner = 1. Dann hat man

$$\beta-(\alpha\pm\tau) = 90^\circ$$

$$\beta = 90° + \alpha \mp \tau$$

$$V = 2P \sin(\alpha \pm \tau) = 2P(\sin\alpha\cos\tau \pm \cos\alpha\sin\tau)$$

$$= 2P(\sin\alpha \pm \cos\alpha\, tg\,\tau)\cos\tau = 2P\frac{(\sin\alpha \pm \cos\alpha\, tg\,\tau)}{\sqrt{1+tg^2\tau}}$$

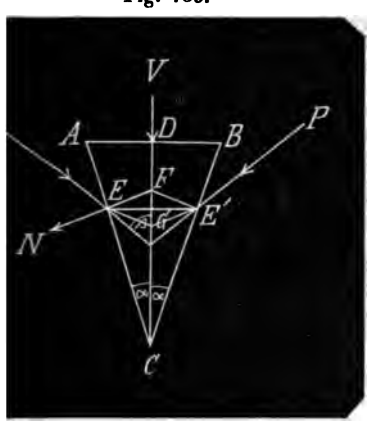
$$= 2P\frac{\sin\alpha \pm \mu\cos\alpha}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

Die Resultate des Gleichgewichts h μ ausgedrückt, werden unmittelbar nder Art gefunden. Es sei, Fig. 735, der mittlere normale Querschnitt Keils, DC die den Winkel an der te halbirende Mittellinie, auf diese e die Kraft V und die beiden glei- Widerstände P wirken unter dem mit DC.

zeichnet man den von jedem Wi- ande P auf jede Seite ausgeübten aldruck mit N, so äufsern die ein- r berührenden Flächen eine Reibung welche längs der Seiten des Kegels indernifs wirkt.

ll nun das Gleichgewicht so bestimmt en, dafs die geringste Vermehrung

Fig. 735.



V eine Fortbewegung des Keils zur e hat, so mufs V im Gleichgewicht mit den Normalpressungen N, den Seiten des Kegels von den Wider- den erleiden und mit den seine Be- ung in der Richtung DC hindernden CA und CB gerichteten Reibungen D. h. Die Normalpressungen und leibungshindernisse müssen eine nach gerichtete der V gleiche Mittelkraft n.

an bilden die Normalpressungen EF mit DC den $\angle EFC = 90° - \alpha$. Setzt man ihre Mittelkraft $FG = Q$, so ist $Q = 2 \cdot EF \sin FEE' = 2N \sin\alpha$, die Reibungen betragen zusammen $EE' = 2\mu\, EF\cos\alpha = 2\mu\, N\cos\alpha$,

mithin ist $V = 2(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)N$

Um N mit P zu vergleichen hat man dem nach PE gerichteten Widerstande entgegen den Normaldruck N gegen P in E nach der Richtung FE, welcher aus der nach DC wirkenden Kraft V sich zerlegt.

Diesem Normaldruck N entgegen wirkt nach der Richtung AC die zwischen den Berührungsflächen der Keilseiten und den von P angetriebenen Vorlagon entstehende Reibung μN. Reducirt man die Kraft und die Reibung μN auf die Richtung von P, so mufs die algebraische Summe der beiden reducirten Wirkungen $+ P = 0$ sein.

Also $N\cos PEN - \mu N\cos PEA - P = 0$

oder $N\sin(\beta - \alpha) - \mu N\cos(\beta - \alpha) - P = 0$

woraus $$N = \frac{P}{\sin(\beta-\alpha) - \mu\cos(\beta-\alpha)}$$

Diesen Werth in den obigen Ausdruck für V gesetzt, gibt

$$V = 2P \cdot \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\sin(\beta-\alpha) - \mu\cos(\beta-\alpha)}$$

8. Dieser Ausdruck ist derjenige Werth von V, dessen geringste Vermehrung eine Aufhebung des Gleichgewichts zur Folge hat, indem dann der Keil vorwärts getrieben wird. Der Ausdruck verwandelt sich unmittelbar in den für dasjenige V', welches als Minimum bei der geringsten Verminderung das Rückgleiten des Keils zur Folge hat, wenn man μ subtractiv nimmt, wie dies No. 2 für τ auseinander gesetzt ist, man hat also

$$V' = 2P\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sin(\beta-\alpha) + \mu\cos(\beta-\alpha)}$$

Keilzahlen werden bisweilen diejenigen Zahlen genannt, welche ein Product aus 3 ungleichen Zahlen sind als $5\times6\times7=210$.

Kennzahl gebräuchlicher **Kennziffer**, s. „Characteristik". Kennzahl ist jedenfalls entsprechender, denn es kann die Characteristik eine aus zwei oder mehreren Ziffern bestehende Zahl sein.

Keplers Gesetze über den Lauf der Planeten. Die frühere Planetentheorie war folgende:

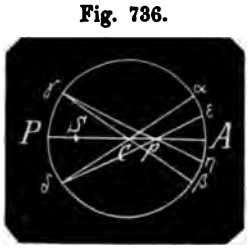
1. Die Bahnen aller Planeten sind Kreise.

2. Die Sonne befindet sich nicht in dem Mittelpunkt dieser Kreise.

3. Innerhalb des Kreises befindet sich ein Punkt, der Ausgleichungspunkt (punctum aequans), von dem aus gesehen der Planet in gleichförmiger Bewegung zu sein scheint; d. h. dafs der Planet von jedem Ort seiner Bahn aus gehend gedacht, in gleichen Zeiten gleiche Winkelgeschwindigkeiten hat und somit überall in gleichen Zeiten gleich grofse Kreisbogen zu durchlaufen scheint, wiewohl er von der Sonne aus betrachtet in ungleichförmiger Bewegung sich befindet.

Wenn der Kreis eine Planetenbahn, C dessen Mittelpunkt, S den Ort der Sonne bedeutet, so sollte dieser Punkt, der Ausgleichungspunkt für die Erdbahn im Mittelpunkt C liegen, so dafs also die

Fig. 736.



Erde eine wirklich gleichförmige Bewegung hatte, indem zu den gleichen Winkeln $\alpha C\beta$ und $\gamma C\delta$ auch gleiche Bogen $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ gehören.

Bei den anderen Planeten dagegen lag der Ausgleichungspunkt der Sonne gegenüber ebenfalls excentrisch in p, von wo aus der Planet gleiche Winkelgeschwindigkeit hatte, so dafs gleichzeitig die gleichen $\angle\, \varepsilon p\eta$ und $\gamma p\delta$ und mit ihnen die ungleichen Bogen $\varepsilon\eta$ und $\gamma\delta$ durchlaufen wurden.

Bei der Erdbahn war nun CS die Excentricität, was sie noch jetzt ist, bei den anderen Planeten war dagegen pS als Excentricität festgestellt, was sie nicht ist.

Man sieht, die Beobachtungen waren so scharf und die Schlüsse so richtig, dafs die Astronomen der Wahrheit sehr nahe kamen. Allein die Idee von den Planetenbahnen in excentrischen Kreisen hatte sich bei den Astronomen so festgesetzt, dafs sie von Copernicus und Tycho de Brahe auch auf Kepler überging und bei ihm feste Wurzel faßte. Schon Ptolemäus (150 J. n. Chr.) hatte excentrische Kreise für die Bahnen der Planeten und der Sonne, welche sich sämmtlich um die Erde drehten.

Dafs die Erde allein die Ehre hatte, gleichförmig sich zu bewegen, die anderen Planeten nicht, lag offenbar in der Beobachtung grofser Excentricitäten bei den übrigen Planeten die, mit Ausnahme der Venus, bei welcher sie kleiner ist, alle viel gröfser sind als bei der Erde. Bei dem Mars beträgt sie fast das Achtfache der der Erde und gegen $^1/_{10}$ des halben grofsen Bahndurchmessers.

Es ist übrigens klar, dafs der Punkt p dem Aphel A zu näher liegen mufs, weil dort wegen der Langsamkeit des Gestirns ein nur kleiner Bogen gegen den am Perihel bei dort grofser Geschwindigkeit in einerlei Zeit zurückgelegt wird.

Kepler bemühete sich nun, auf den excentrischen Kreis des einen oder des anderen Planeten den Ort jenes Ausgleichungspunkts zu ermitteln. Tycho hatte sich viel mit dem Mars beschäftigt und gefunden, dafs pC und $S\sigma$ verschieden seien, Kepler setzte Zweifel darein, und beschlofs, eine genaue Untersuchung nochmals selbstständig vorzunehmen, und sich auch die Frage auf, wie denn die Erde gegen alle übrigen Planeten in Betreff der Lage dieses wichtigen Punktes eine Ausnahme machen sollte.

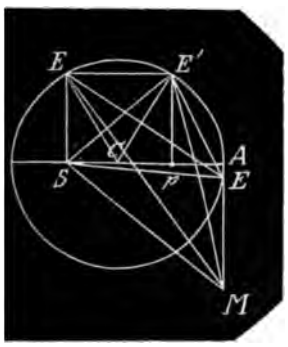
Um dies zu ermitteln war vor allen Dingen die Excentricität der Erdbahn zu bestimmen, und dies that Kepler auf folgende Weise mit Hülfe von Marsbeobachtungen.

Der Mars hat eine Umlaufszeit von 686,979.. also von 687 Tagen. Wird derselbe, wie Kepler gethan, 3 mal, das zweite Mal an dem 687ten Tage nach dem ersten, das dritte Mal an dem 687ten Tage nach dem zweiten Beobachtungstag beobachtet, so hat sich der Mars bei jeder Beobachtung in einem und demselben Punkt am Himmel befunden, und der auf die Ekliptik reducirte Ort ist jedesmal derselbe Punkt M in der Ebene der Ekliptik.

Hat die Erde bei der ersten Beobachtung in E gestanden, so ist sie in 365 Tagen wieder in E gewesen und hat nun in den nah bis zum zweiten Beobachtungstage verflossenen 322 Tagen den Bogen $PE''E'$ beschrieben und steht an

age in E'; am dritten Beobach- in E'', so dafs Bogen $EE' =$ E'. Es sei C der Mittelpunkt

Fig. 737.



tik, AP die bekannte Absiden- lie Sonne. Die Figur wird zu Berechnung verzeichnet.

n bekannten Orten M und S ist Richtung MS, die heliocentrische s Mars bekannt, die Richtungen ', $E''S$ die Längen der Sonne Richtungen EM, $E'M$, $E''M$ die schen Längen des Mars sind be-

Die $\angle ESM$, $\angle E'SM$, $\angle E''SM$ der heliocentrischen Länge des niger den Längen der Erde in kten E, E', E''. Desgleichen iessen die $\angle SEM$, $SE'M$ und

id mithin den Dreiecken SEM, id $SE''M$ sämmtliche Winkel be- id aus ihnen die relativen Grö- n Seiten, wenn man eine der- . B. MS oder AP als Einheit Bekannt sind also die Seiten , $E'S$.

n bekannten Seiten ES und $E'S$, geschlossenen $\angle ESE'$ (Unter- r Längen der Erde in den Stand- E, E') construirt nun Kepler das SE'; eben so die Dreiecke ESE'' E''; hieraus sind also auch die des neuen Dreiecks $EE'E''$ be-

eripheriewinkel $EE''E'$ ist $= \frac{1}{2}$ nkel ECE', folglich sind in dem enkligen $\triangle ECE'$ die $\angle E'EC$ C bekannt, und zwar jeder = CE' und mit diesen die Seite EC.

eite ES ist aus dem $\triangle SEM$ be- er $\angle CES = \angle SEE' - \angle CEE'$, ist das $\triangle ESC$ bekannt und mit lie verlangte Linie CS.

Die numerische Ausführung aller dieser höchst mühsamen und langwierigen Rechnungen ergab für den Halbmesser $PC = 1$ die Länge $CS = 0{,}018$. (Es ist dies die Excentricität der Erdbahn, welche in der neuesten Astronomie bei gröfseren Hülfsmitteln 0,0167.. gefunden worden ist.) Aber Tycho hatte früher schon die Entfernung (Sp) der Sonne von dem punctum aequans, für welchen er irrthümlich das Centrum C genommen hatte, $= 0{,}036$ gefunden und somit war erwiesen, dafs der Ausgleichungspunkt auf der einen und die Sonne auf der anderen Seite in gleichen Abständen von dem Mittelpunkt der Bahn entfernt sind.

Hierdurch war es möglich, den Radiusvector der Erde bei jedem beliebigen Standpunkt derselben in der Ekliptik zu finden. Denn bei vorausgesetzter Kreisform derselben hatte Kepler (s. oben) den Halbmesser $CE = CE' = CA = CP$ gefunden. Für irgend einen Standpunkt E' der Erde zog Kepler die Linie $E'p$. Da nun von p aus die Erde gleichförmig sich bewegt, so betrachtete er $\angle E'pA$ als die mittlere Anomalie, welches zwar nicht richtig (vergl. „Anomalie"), allein bei der geringen Länge von Cp gegen CA einen nur geringen Unterschied giebt. Mit dem bekannten $\angle E'pA$ ist auch sein Supplement $\angle E'pC$ bekannt, hierzu der bekannte Halbmesser CE' und Cp macht das $\triangle E'Cp$ bestimmt. Hieraus erhält man das Supplement $\angle E'CS$ von $\angle E'Cp$ und man hat in dem $\triangle E'CS$ durch den Halbmesser $E'C$, der Excentricität CS und dem eingeschlossenen $\angle E'CS$ des $\triangle E'CS$ auch den Radiusvector SE' gefunden. (Unter E' einen beliebigen, nicht den oben angeführten Beobachtungspunkt E' verstanden.)

Mit der solchergestalt festgestellten Theorie der Erdbahn konnte auch die Theorie für andere Planeten ermittelt werden, und Kepler unternahm dies für den Mars, der ihm schon für die Erdbahn gedient und für welche Tycho so sehr vor- und mitgearbeitet hatte.

Aus den bekannten Winkeln SEE' und $SE'E$ in dem berechneten $\triangle EE'S$ und den gemessenen Winkeln SEM, $SE'M$ waren die Winkel MEE' und $ME'E$ bekannt geworden; man kannte also in dem $\triangle EE'M$ die Seite EM und also in $\triangle ESM$ die Seiten ES und EM nebst dem von ihnen eingeschlossenen $\angle SEM$ und hatte somit die Seite SM, den auf die Ekliptik reducirten Radiusvector des Mars und $\angle ESM$ die heliocentrische Länge des Mars in der Ekliptik.

Wegen der den vorstehenden Berechnungen zu Grunde liegende Kreisform konnten deren Resultate mit denen aus Beobachtungen nicht genau übereinstimmen, besonders für den Mars, dessen Bahn eine so bedeutende Excentricität also eine von dem Kreise auffallend abweichende Form hat. Der Unterschied bei Winkeln betrug acht Minuten. Dies war der Grund, daſs Kepler mifstrauisch wurde, die Kreisform in Zweifel zog und daran ging die Form der Bahn am Mars genauer zu untersuchen, wonach er die Ellipse fand und somit der Urheber einer gänzlichen Umgestaltung der astronomischen Principien wurde.

Er berechnete nämlich nach der Theorie des excentrischen Kreises 3 Abstände des Mars, den einen nahe dem Peribel, die anderen beiden etwa 90° von dem ersten Abstand entfernt, also ungefähr, wo die kleine Axe der Marsbahn hintrifft, und suchte dann dieselben Abstände durch wirkliche Beobachtungen.

Die berechneten Abstände waren alle gröſser als die beobachteten: Sie waren, den mittleren Halbmesser der Erdbahn = 1 gesetzt

berechnet	1)	1,66605	2)	1,63883	3)	1,48539
beobachtet	1)	1,66255	2)	1,63100	3)	1,47750
Unterschied	1)	0,00350	2)	0,00783	3)	0,00789

Der Unterschied in der Nähe des Perihels war am geringsten, die beiden andern ziemlich gleich grofs, am gröfsten (wegen der dort hintreffenden kleinen Axe der Ellipse), und es war somit erwiesen, daſs die Marsbahn eine geschlossene Curve von ungleichen Hauptdurchmessern, und deren längerer Durchmesser die Absidenlinie ist.

Aus Tycho's ihm hinterlassenen Papieren bestimmte er des Mars

aphelische Länge	1,66780
perihelische Länge	1,38500
Unterschied	0,28280

und die Hälfte 0,14140 die Excentricität der Marsbahn. Kepler fand demnach für die Marsbahn eine ovale Curve, kam bald auf den Gedanken, daſs sie eine Ellipse, fand durch Rechnung nach der Theorie der Ellipse diese Voraussetzung sicher und nachdem Kepler dieselben Resultate einer ovalen Bahn bei noch anderen Planeten vorfand, so entstand das erste Keplersche Gesetz.

Die Bahnen sämmtlicher Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

Das zweite Keplersche Gesetz.

In gleichen Zeiten werden von dem Radiusrector ungleiche Bogen in der Bahn aber gleiche Sectoren beschrieben.

Es heifst dies, daſs die vom Radiusrector in gleichen Zeiten der Bahnebene abgeschnittene Flächenräume einander gleich sind. Dieser Satz ist in dem Art. „Bahn", pag. 272 mit Fig. 167 erwiesen,

Durch den Vergleich der Entfernungen der Planeten von der Sonne mit deren Umlaufszeiten, daſs z. B. Jupiter nur 5½ mal weiter als die Erde von der Sonne absteht und doch 11¾ Jahre, also 11¾ mal mehr Zeit als die Erde zur Umdrehung braucht, indem $(5\frac{1}{2})^3$ sehr nahe = ist $(11\frac{3}{4})^2$ brachte ihn auf die dritte Regel:

Die Quadratzahlen der Umlaufszeiten der verschiedenen Planeten verhalten sich wie die Cubikzahlen der mittleren Abstände dieser Planeten von der Sonne.

Keplers Problem, s. u. dem Art. „Anomalie" mit Fig. 66.

Kernform, (Kryst), s. v. w. „Grundform".

Kette, Mefskette, s. u. Baculometrie.

Kettenbruch ist ein Bruch, dessen Zähler eine ganze Zahl, dessen Nenner eine ganze Zahl nebst einem Bruch ist. S. den Art. „Bruch" No. 3, pag. 434. Z. B.

$$\cfrac{2}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{5+\ldots}}}$$

In der Regel ist jeder der Zähler die Einheit wie:

$$\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7}}}}$$

Ist der erste Bruch mit $\frac{1}{2}$ zu Ende, dann hat man den untersten Nenner

$\frac{3}{5} = \frac{13}{5}$; der Bruch des ersten Nen- ist also $\frac{1}{13:5} = \frac{5}{13}$ und der ganze

$$\frac{1}{3+\frac{1}{29:7}} = \frac{1}{5+\frac{1}{3+\frac{7}{29}}} = \frac{1}{5+\frac{1}{94:29}} = \frac{1}{5+\frac{29}{94}} = \frac{1}{499:94} = \frac{94}{499}$$

r Art. „Bruch", No. 5 zeigt, dafs Verwandlung eines Bruchs in einen enbruch der gröfste gemeinschaftliche ler zwischen Zähler und Nenner aus- ıfsen und der Bruch in seinen klein- Zahlen angegeben wird, sobald man Kettenbruch wieder in einen reinen h umformt.

Der Kettenbruch dient auch dazu, das Verhältnifs grofser Zahlen oder en mit vielen Decimalen näherungs-) in kleineren Zahlen auszudrücken. . Das Verhältnifs des Durchmessers

Kettenbruch $= \frac{2}{4+\frac{5}{13}} = \frac{2}{57:13} = \frac{26}{57}$

Der zweite Kettenbruch ist =

eines Kreises zu dessen Umfang ist = 1 : 3,141592653 ....

Man erhält den Kettenbruch

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}}}}$$

und hieraus die Näherungswerthe

$$\}=\frac{22}{7};\ 3+\frac{1}{7+\frac{1}{15}}=\frac{333}{106};\ 3+\frac{1}{7+\frac{1}{15+\frac{1}{1}}}=\frac{355}{113};\ 3+\frac{1}{7+\frac{1}{15+\frac{1}{1+\frac{1}{292}}}}=\frac{103993}{33102}$$

ist $\frac{22}{7} = 3{,}14285\ldots$

$\frac{333}{106} = 3{,}141509\ldots$

$\frac{355}{113} = 3{,}1415929\ldots$

eser Bruch weicht erst in der 7ten malstelle von der richtigen Zahl ab ist also ziemlich genau.

Es sei der Bruch $\frac{b}{a}$ in einen Ket- ruch zu verwandeln und man habe:

$\frac{a}{b} = m + \frac{c}{b}$; $\frac{b}{c} = n + \frac{d}{c}$;

$\frac{c}{d} = p + \frac{e}{d}$; $\frac{d}{e} = q + \frac{f}{e}$;

$\frac{e}{f} = r + \frac{g}{f}$; $\frac{f}{g} = s + \frac{h}{g}$

so entsteht der Kettenbruch für

$$\frac{b}{a}=\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{s+\ldots}}}}}}$$

Der uneigentliche Bruch

$$\frac{a}{b}=m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{s+\ldots}}}}}$$

Der Kettenbruch gibt folgende Näherungswerthe

$$m+\frac{c}{b}=m+\frac{1}{n+\frac{d}{c}}=m+\frac{1}{n+\frac{1}{p+\frac{e}{d}}}=m+\frac{1}{n+\frac{1}{p+\frac{1}{q+\frac{f}{e}}}}$$ u. s. w.

Hieraus erhält man aus den hintereinander aufgeführten Werthen von $\frac{a}{b}$

I. $mb = a - c$

Aus dem ersten und zweiten Werth entsteht

$\frac{c}{b} = \frac{c}{nc+d}$ woraus

II. $(mn+1)b = na + d$

Ferner

III. $(mnp + p + m)b = (np+1)a - c$

IV. $(mnpq + pq + mq + mn + 1)b = (npq + q + n)a + f$

4. Nimmt man den ersten Bruch $\frac{b}{a}$, so hat man denselben in seinen Werth

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{m+\frac{c}{b}} = \frac{1}{m+\frac{1}{n+\frac{d}{c}}} = \frac{1}{m+\frac{1}{n+\frac{1}{p+\frac{e}{d}}}} = \frac{1}{m+\frac{1}{n+\frac{1}{p+\frac{1}{q+\frac{f}{e}}}}}$$

$$= \frac{1}{m+\frac{1}{n+\frac{1}{p+\frac{1}{q+\frac{1}{r+\frac{g}{f}}}}}} \qquad = \frac{1}{m+\frac{1}{n+\frac{1}{p+\frac{1}{q+\frac{1}{r+\frac{1}{s+\frac{k}{g}}}}}}}$$

und in seinen Näherungswerthen

$$\frac{b}{a};\ \frac{1}{m};\ \frac{n}{mn+1};\ \frac{np+1}{mnp+p+m};\ \frac{npq+q+n}{mnpq+pq+mq+mn+1};\ \frac{npqr+qr+nr+np+1}{mnpqr+pqr+mqr+mnr+mnp+r+p+m}$$

Nun ist $\frac{b}{a} - \frac{1}{m} = \frac{1}{m+\frac{c}{b}} - \frac{1}{m} = -\frac{c}{m(mb+c)}$

$$\frac{b}{a} - \frac{n}{mn+1} = \frac{1}{m+\frac{1}{n+\frac{d}{c}}} - \frac{n}{mn+1} = \frac{nc+d}{mnc+md+c} - \frac{n}{mn+1} = +\frac{d}{(mnc+md+c)(mn}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{m+\frac{1}{n+\frac{1}{p+\frac{e}{d}}}} = \frac{npd+nn+d}{mnpd+mne+pd+md+e}$$

Mithin $\frac{b}{a} - \frac{np+1}{mnp+p+m} = -\frac{e}{[(mnp+p+m)d+(mn+1)e][mnp+p+m]}$

Von den Näherungswerthen ist also der erste zu groſs, der zweite zu klein, der dritte zu groſs, der vierte zu klein; überhaupt der ungerade Werth zu groſs, der gerade zu klein.

5. Will man einen gegebenen Bruch in einen Kettenbruch verwandeln so verfährt man am leichtesten auf die Weise wie man den gröſsten gemeinschaftlichen Theiler zweier Zahlen sucht. Z. B. der Bruch $\frac{216}{1147}$.

216	1147	5	
	1080		
67	216	3	
	201		
15	67	4	
	60		
7	15	2	
	14		
1	7	7	
	7		
	0		

Der Kettenbruch ist

$$\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\frac{1}{7}}}}}$$

6. Um die Näherungswerthe der Reihenfolge nach zu erhalten macht man folgendes Schema in drei Columnen. Die erste Columne für die durch successive Division erhaltenen Quotienten, die zweite Columne für die Zähler, die dritte für die Nenner. Für jeden Bruch ist der Bruch $\frac{0}{1}=0$ als erster Näherungswerth zu setzen und der zweite Näherungswerth ist immer 1 dividirt durch den ersten Quotient. Mit diesen beiden Näherungsbrüchen fängt man das Schema an. Jeder $n$te der folgenden Näherungsbrüche erhält zum Zähler den ihm vorstehenden Quotient multiplicirt mit dem vorhergehenden $(n-1)$ten Zähler + dem diesem vorstehenden $(n-2)$ten Zähler und zum Nenner denselben Quotient multiplicirt mit dem $(n-1)$ten Nenner + dem $(n-2)$ten Nenner:

Quotient	Zähler	Nenner
0	0	1
5	1	5
3	3× 1+ 0= 3	3× 5+ 1= 16
4	4× 3+ 1= 13	4× 16+ 5= 69
2	2×13+ 3= 29	2× 69+16= 154
7	7×29+13=216	7×154+69=1147

Die Näherungswerthe des Bruchs $\frac{216}{1147}$ sind also

$$\frac{0}{1};\ \frac{1}{5};\ \frac{3}{16};\ \frac{13}{69};\ \frac{29}{154};\ \frac{216}{1147}$$

Beispiel. Das tropische Jahr enthält 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten 51 Secunden. Das Verhältnifs eines Tages zum Jahre in annähernden Brüchen anzugeben.

Das Jahr hat $365+\frac{20931}{86400}$ Tage $=365+\frac{6977}{28800}$

Man erhält folgende Tabelle für den ächten Bruch

Quotient	Zähler	Nenner
0	0	1
4	1	4
7	7× 1+ 0= 7	7× 4+ 1= 28
1	1× 7+ 1= 8	1× 29+ 4= 33
4	4× 8+ 7= 39	4× 33+ 29= 161
1	1× 39+ 8= 47	1× 161+ 33= 194
1	1× 47+ 39= 86	1× 194+ 161= 355
1	1× 86+ 47= 133	1× 355+ 194= 549
1	1× 133+ 86= 219	1× 549+ 355= 904
3	3× 219+ 133= 790	3× 903+ 549= 3261
2	2× 790+ 219=1799	2× 3261+ 904= 7426
1	1×1799+ 790=2589	1× 7426+3261=10687
2	2×2589+1799=6977	2×10687+7426=28800

Demnach hat ein Tag die näherungsweisen Verhältnisse zum tropischen Jahr $365\frac{1}{4}$; $1:365\frac{7}{29}$; $1:365\frac{8}{33}$; $1:365\frac{47}{194}$; $1:365\frac{47}{194}$ u. s. w.

Kettenlinie ist eine vollkommen biegsame unausdehnsame Linie, die an ihren Endpunkten unbeweglich befestigt ist, in der Lage, dafs Gewichte, die auf ihr nach

irgend einem Gesetz vertheilt sind, im Gleichgewicht sich befinden. Sind die Gewichte so vertheilt, dafs auf jede noch so kleine Länge der Linie gleich grofse Gewichte kommen, so heifst die Linie eine gemeine Kettenlinie.

2. Die Bedingungen für die Gestalt einer Kettenlinie zu bestimmen.

Gewichte sind ∓ gerichtete Kräfte, es sind also alle Punkte einer Kettenlinie in einer durch die Aufhangepunkte gelegte Vertikalebene begriffen. Sind A, B die Aufhangepunkte der biegsamen Linie, C der tiefste Punkt derselben, so nehme man die durch C gerichtete Vertikallinie CJ zur Abscissenlinie und für irgend einen Punkt E der Kettenlinie seien $CD = x$ und $ED = y$ die rechtwinkligen Coordinaten. Die Länge des Bogens CE sei V, und das auf diese Länge nach irgend einem Gesetz vertheilte Gewicht $= V$. Die Tangente der Linie im Punkt E bilde mit der Horizontalen AJ den Winkel α.

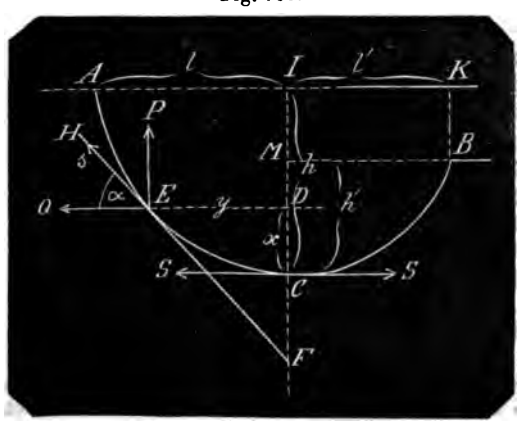
Sollte nun das Stück AE der Kettenlinie hinfort genommen werden, und dafür zwei Kräfte angebracht, die eine horizontal, die andere vertikal gerichtet, so müssen dieselben so beschaffen sein, dafs die aus ihnen hervorgehende Mittelkraft nach der Tangente EH gerichtet ist, welche der Spannung der Linie im Punkt E das Gleichgewicht hält.

Es sei diese Spannung in $E = s$, die Horizontalkraft $= Q$, die Vertikalkraft $= P$, so mufs die Mittelkraft aus P und Q nach EG gerichtet und $= s$ sein.

Folglich ist

$$P = s \sin \varphi \text{ und } Q = s \cos \varphi$$

Fig. 738.



und $P^2 + Q^2 = s^2 \sin^2\varphi + s^2 \cos^2\varphi = s^2$

woraus $s = \sqrt{P^2 + Q^2}$

Die Spannung im Scheitel C sei $= c$, so ist dieselbe nach der dort horizontalen Tangente rechts und links gerichtet. Wenn man nun den Theil BC der Linie hinfortnimmt, so mufs in C nach der Horizontalen CS rechts eine Kraft S angebracht werden, und dann wären die Kräfte P, Q, S und das Gewicht V miteinander im Gleichgewicht. Sind aber Kräfte im Raum mit einander im Gleichgewicht, so müssen sie auch mit ungeänderten Richtungen an einem Punkt angebracht das Gleichgewicht halten und daher müssen auch die Kräfte P, Q, S, V in E mit ungeänderten Richtungen angebracht im Gleichgewicht sein. Alsdann sind aber gerade entgegengesetzt P und V, Q und S; also kann das Gleichgewicht nur bestehen, wenn $P = V$ und $Q = S$.

Zerlegt man also in irgend einem Punkt E die Spannung horizontal und vertical, so ist die horizontale Seitenkraft = der Spannung S im Scheitel und die Verticale = dem auf die Kettenlinie zwischen diesem Punkt und dem Scheitel vertheilten Gewicht.

Nun war oben

$$Q = s \cos \alpha \text{ und } P = s \sin \alpha$$

folglich hat man auch

$$s \cos \alpha = S \text{ und } s \sin \alpha = V$$

Hieraus $s^2 = C^2 + V^2$

und $$s = \sqrt{c^2 + v^2} \qquad (1)$$

Dividirt man die beiden vorletzten Gleichungen durcheinander, so erhält man

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{V}{S}$$

oder $$tg\, \alpha = \frac{V}{S} \qquad (2)$$

Nun ist der Winkel, den die Tangente im Punkt E mit der Abscissenlinie CJ bildet $= 90° - \alpha$, folglich ist nach dem Art. „Curvenlehre", Formel 2, pag. 185

$$tg\,(90° - \alpha) = \frac{1}{tg\, \alpha} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

Mithin nach Gleichung 2

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{S}{V} \qquad (3)$$

Ist nun V als eine Function entweder von x oder von y gegeben, so hat man im ersten Fall das $\frac{\partial y}{\partial x}$ durch x ausgedrückt, das Integral dieses

Ausdrucks nach x wird dann $\frac{y}{\partial x}$ bestimmen und die Gleichung der Kettenlinie bekannt sein. Ist dagegen V als Function von y gegeben, so ergibt das Integral $\frac{x}{\partial y}$ die Gleichung der Kettenlinie.

Ist aber drittens V als eine Function vom Bogen v bestimmt, so muſs das Differenzial in Beziehung auf v angegeben werden. Es ist aber nach dem Art. „Curvenlehre“ V. pag. 191

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \qquad (4)$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)}$$

Mithin nach Gleichung 3 und 4

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\left(\frac{S}{V}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{S}{V}\right)^2}} = \frac{S}{\sqrt{S^2 + V^2}} \qquad (5)$$

Es ist ebenso

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}$$

folglich nach Gleichung 3 und 5

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{S}{\sqrt{S^2 + V^2}} \cdot \frac{V}{S} = \frac{V}{\sqrt{S^2 + V^2}} \qquad (6)$$

3. Die Gestalt der Kettenlinie zu bestimmen, wenn die Gewichte darauf so vertheilt sind, dafs die auf die einzelnen Theile derselben kommenden Gewichte wie die Projectionen dieser Theile auf eine Horizontale sich verhalten.

Das Gewicht, welches auf einen Bogen kommt, dessen horizontale Projection die Längeneinheit ist, sei $= p$, so ist das Gewicht des Bogens CE, weil y seine Horizontalprojection ist, $= py$. Setzt man diesen Werth für V in Gleichung 3, so erhält man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{S}{py}$$

hieraus

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} = \frac{py}{S}$$

Folglich ist $x = \int \frac{py}{S} \partial y = \frac{1}{2} \frac{p}{S} y^2$

wo die Constante wegfällt, weil für $y = 0$ auch $x = 0$ wird.

Die Gleichung für die Kettenlinie in diesem Fall ist

$$y^2 = \frac{2S}{p} x \qquad (7)$$

Folglich ist die Kettenlinie bei der angenommenen Vertheilung des Gewichts eine Parabel, deren Parameter $= \frac{2S}{p}$ ist.

Es sei c die Länge einer Linie, auf welcher ein Gewicht dergestalt vertheilt ist, dafs auf jede Längeneinheit $= p$ kommt und dies so vertheilte Gewicht sei = der Spannung im Scheitel, so ist $cp = S$. Diesen Werth von S in Gleichung 7 substituirt, ergibt

$$y^2 = 2cx \qquad (8)$$

Sind $CJ = h$ und $AJ = l$ die Coordinaten des Anfangspunkts A der Kettenlinie, so wird für $x = h$ und $y = l$

$$l^2 = 2ch$$

woraus $2c = \frac{l^2}{h}$

Diesen Werth in Gleichung 8 substituirt, gibt

$$y^2 = \frac{l^2}{h} x \qquad (9)$$

Zur Bestimmung der Länge des Bogens $CE = v$ hat man die Gleichung 4:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

also $v = \int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \partial x$

Nun ist $y = l\sqrt{\frac{x}{h}}$

folglich $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{l}{\sqrt{h}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (10)

Diesen Werth in die Integralformel substituirt, gibt

$$v = \int \sqrt{1 + \frac{l^2}{4hx}} \partial x \qquad (11)$$

Setzt man, um das zu integrirende Differenzial rational zu machen,

$$\sqrt{1 + \frac{l^2}{4hx}} = z$$

so wird $x = \frac{l^2}{4h} \cdot \frac{1}{z^2 - 1}$

und daher $\frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{l^2}{4h} \cdot \frac{2z}{(z^2 - 1)^2}$

Substituirt man diesen Werth in die Integralformel 11, so erhält man

$$v = -\frac{l^2}{2h} \cdot \int \frac{z^2 \partial z}{(z^2 - 1)^2}$$

Nun ist $\frac{s^2}{(s^2-1)^2} = \frac{s^2}{(s+1)^2(s-1)^2} = \frac{A}{(s+1)^2} + \frac{B}{(s-1)^2}$

Um die unbekannten Zähler A und B zu finden verfährt man nach dem Art. „Integral", No. 30, pag. 304 und man hat

$s^2 = A(s-1)^2 + B(s+1)^2$

Diese Gleichung geordnet und auf Null reducirt gibt

$s^2(A+B-1) - 2s(A-B) + A + B = 0$

Für $s=0$ entsteht $A=-B$

Setzt man diesen Werth in dieselbe Gleichung so ist $A+B=0$ und es entsteht

$-s^2 - 4As = 0$

woraus mit s dividirt

$A = -\frac{1}{4}s$; mithin $B = +\frac{1}{4}s$

Demnach ist

$$\frac{s^2}{(s+1)^2(s-1)^2} = -\frac{\frac{1}{4}s}{(s+1)^2} + \frac{\frac{1}{4}s}{(s-1)^2}$$

und

$$\int \frac{s^2\,\partial s}{(s^2-1)^2} = -\frac{1}{4}\int \frac{s\,\partial s}{(s+1)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{s\,\partial s}{(s-1)^2}$$

Schreibe

$$-\frac{1}{4}\int \frac{s+1}{(s+1)^2}\cdot \partial s + \frac{1}{4}\int \frac{\partial s}{(s+1)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{s-1}{(s-1)^2}\cdot \partial s + \frac{1}{4}\int \frac{\partial s}{(s-1)^2}$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{\partial s}{s+1} + \frac{1}{4}\int \frac{\partial s}{(s+1)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{\partial s}{s-1} + \frac{1}{4}\int \frac{\partial s}{(s-1)^2}$$

$$= -\frac{1}{4}ln(s+1) - \frac{1}{4}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{4}ln(s-1) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{s-1}$$

daher $$v = -\frac{l^2}{2k}\int \frac{s^2\,\partial s}{(s^2-1)^2} = \frac{l^2}{8k}\left[ln\frac{s+1}{s-1} + \frac{2s}{s^2-1}\right] + C$$

Nun ist $s = \sqrt{1 + \frac{l^2}{4kx}}$

Diesen Werth in die letzte Formel für v gesetzt, $ln\frac{s+1}{s-1}$ verwandelt in $ln\frac{(s+1)^2}{s^2-1}$

gibt $$v = \frac{l^2}{8k}ln\frac{8kx + l^2 + 4\sqrt{kx(4kx+l^2)}}{l^2} + \frac{\sqrt{kx(4kx+l^2)}}{2k} + C \qquad (12)$$

Für $x=0$ wird $v=0$ mithin hat man $0 = \frac{l^2}{8k}ln\,1 = 0$ und $C=0$.

Ist die Länge AC des Bogens $=L$, so ist $x=k$, und

$$L = \frac{l^2}{8k}ln\frac{8k^2 + l^2 + 4k\sqrt{4k^2+l^2}}{l^2} + \frac{1}{2}\sqrt{4k^2+l^2} \qquad (13)$$

4. Die Gestalt der Kettenlinie zu bestimmen, wenn die Gewichte auf die Kettenlinie selbst gleichmäfsig vertheilt sind, oder die Gleichung der gemeinen Kettenlinie zu finden.

Setzt man wiederum das Gewicht, welches auf die Längeneinheit der Kettenlinie selbst kommt $=p$, so wird $V=pv$.

Mithin nach No. 2, Gleichung 5 und 6

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{S}{\sqrt{S^2+v^2}} = \frac{S}{\sqrt{S^2+p^2v^2}} \qquad (1)$$

und $$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{pv}{\sqrt{S^2+p^2v^2}} \qquad (2)$$

Aus der zweiten Gleichung hat man

$$x = \int \frac{pv}{\sqrt{S^2+p^2v^2}}\,\partial v = \frac{1}{2p}\int (S^2+p^2v^2)^{-\frac{1}{2}}\,2p^2v\,\partial v$$

$$x = \frac{1}{p}\sqrt{S^2+p^2v^2} + C \qquad (3)$$

Für $x=0$ wird auch $v=0$, mithin hat man

$0 = \frac{S}{p} + C$; mithin vollständig

$$x = \frac{1}{p}\left(\sqrt{S^2+p^2v^2} - S\right) \qquad (4)$$

woraus durch Umformung

$$p^2x^2 + 2pSx = p^2v^2 \qquad (5)$$

Ist c die Länge eines Theils der Kettenlinie, deren Gewicht = der Spannung

am Scheitel, so ist $pc = S$, und diesen erth in die letzte Gleichung substituirt, bt dieselbe

$$x^2 + 2cx = v^2 \qquad (6)$$

Es läfst sich also, wenn v bekannt ist, r jede Länge v eines Bogens der Ketnlinie vom Scheitel abgerechnet die Abisse x des Endpunkts dieses Bogens stimmen.

Setzt man nun den Werth $S = pc$ in ıs Differenzial von y, Gleichung 1, so erhält man

$$\frac{\delta y}{\delta v} = \frac{pc}{p\sqrt{c^2 + v^2}} = \frac{c}{\sqrt{c^2 + v^2}}$$

Also

$$y = c\int \frac{\delta v}{\sqrt{c^2 + v^2}} = c\,ln\,(v + \sqrt{c^2 + v^2}) + C$$

Nun ist für $v = 0$ auch $y = 0$; gibt $C = -c\,ln\,c$

Daher vollständig

$$y = c\left[ln\,(v + \sqrt{c^2 + v^2}) - ln\,c\right] = c\,ln\,\frac{v + \sqrt{c^2 + v^2}}{c} \qquad (7)$$

Nun ist aus Gleichung 6:

$$v = \sqrt{2cx + x^2}$$

Diesen Werth in Gleichung 7 substituirt, gibt

$$y = c\,ln\,\frac{c + x + \sqrt{2cx + x^2}}{c}$$

elches die gesuchte Gleichung der geeinen Kettenlinie ist.

Ist die Lage des Scheitels und der Aufangepunkte der Kettenlinie gegeben, so ien h und l die Coordinaten des einen ufhangepunkts, den Scheitel wiederum ls Anfangspunkt der Coordinaten genommen; alsdann mufs S so beschaffen sein, dafs wenn man $x = h$ setzt, y dadurch $= l$ werde, deshalb hat man zur Bestimmung von c die Bedingungsgleichung:

$$l = c\,ln\,\frac{c + h + \sqrt{2ch + h^2}}{c}$$

Dividirt man beiderseits mit c und geht zur Exponentialgröfse über, so erhält man

$$e^{\frac{l}{c}} = \frac{c + h + \sqrt{2ch + h^2}}{c}$$

oder $\sqrt{2ch + h^2} = ce^{\frac{l}{c}} - c - h$

der $$2ch + h^2 = c^2 e^{\frac{2l}{c}} + c^2 + h^2 - 2c^2 e^{\frac{l}{c}} - 2che^{\frac{l}{c}} + 2ch$$

olglich reducirt und mit c^2 dividirt:

$$e^{\frac{2l}{c}} - 2e^{\frac{l}{c}} - \frac{2h}{c}e^{\frac{l}{c}} + 1 = 0$$

elches zur Bestimmung von c die Exponentialgleichung ist, welches nur durch roberechnungen geschehen kann.

Man pflegt daher behufs der Anwenung der Kettenlinie die entgegengesetzte Bestimmung zu machen, nämlich ir h auf einander folgende Vielfache von anzunehmen und dadurch zu bestimıen, welches Vielfaches h von c ist. lan erhält nämlich aus der letzten Gleihung

$$\frac{h}{c} = \tfrac{1}{2}e^{\frac{l}{c}} + \tfrac{1}{2}e^{\frac{-l}{c}} - 1$$

Setzt man nun $\frac{l}{c} = m$, so findet man urch diese letzte Gleichung unmittelbar ür $\frac{h}{c}$ eine bestimmte Zahl; diese sei n, o dafs man hat $h = nc$ und $l = mc$; daher $\frac{l}{h} = \frac{m}{n}$

Setzt man nun für m nach einander die Werthe 0,1; 0,2 u. s. w. so bestimmen sich hierdurch entsprechende Werthe für n und auch für $\frac{m}{n} = \frac{l}{h}$. Bringt man nun diese zusammengehörigen Werthe in eine Tabelle, die, so weit fortgesetzt wird, dafs die Werthe von $\frac{l}{h}$ alle diejenigen Fälle begreifen, welche in der Ausübung für das Verhältnifs von h und l vorkommen, so darf man in einem besonderen Fall wo h und l gegeben sind, nur den Quotient $\frac{l}{h}$ bestimmen, diesen in der Tabelle aufsuchen, so findet man die ihm entsprechenden Werthe von m und n. Oder

$$l = mc \text{ und } h = nc$$

Dividirt man nun l durch m oder h durch n, so erhält man für den vorliegenden Fall den erforderlichen Werth

von c und dann ist vermöge der obigen Gleichung auch für jeden Werth von x der zugehörige Werth von y bestimmt.

Die Länge der Kettenlinie vom Scheitel bis zum Aufhangepunkt ergibt sich dann auch unmittelbar durch die obige Gleichung 6: $v = \sqrt{2cx + x^2}$, wenn man darin h statt x setzt.

Auch die Spannung der Kette läfst sich in jedem Punkt bestimmen, denn es war im Allgemeinen nach No. 2

$$s = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{S^2 + V^2}$$

Folglich im gegenwärtigen Fall

$$s = \sqrt{p^2c^2 + p^2v^2} = p\sqrt{c^2 + 2cx + x^2} = p(c+x)$$

Die Spannung s wächst also vom Scheitel, wo sie $= pc$ ist bis zum Aufhängepunkt, wo sie den Werth $= p(c+h)$ erhält, wo also die Gefahr des Zerreifsens am gröfsten ist.

5. Die Gleichung einer Kettenlinie zu bestimmen, wenn auf dieselbe ein zweifaches Gewicht, das eine gleichmäfsig nach der Länge derselben, das andere aber nach der horizontalen Projection vertheilt ist.

Es sei das auf die Längeneinheit der Kette kommende Gewicht $= p$, das proportional ihrer horizontalen Projection vertheilte Gewicht auf jede Längeneinheit $= q$, so ist das auf den Bogen v vom Scheitel ab gerechnet kommende Gewicht $= pv + qy$, letzteres weil die Projection des Bogens v die Ordinate seines Endpunkts ist. Man hat also nach der bisherigen Bezeichnung

$$V = pv + qy \qquad (1)$$

Nun war allgemein, nach No. 2, Gleichung 5 und 6

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{S}{\sqrt{S^2 + V^2}} \qquad (2)$$

und

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{V}{\sqrt{S^2 + V^2}}. \qquad (3)$$

Es ist aber nach Gleichung 1

$$v = \frac{V}{p} - \frac{q}{p}y \qquad (4)$$

also

$$\frac{\partial v}{\partial V} = \frac{1}{p} - \frac{q}{p} \cdot \frac{\partial y}{\partial V} \qquad (5)$$

aber

$$\frac{\partial y}{\partial V} = \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial V} \qquad (6)$$

Setzt man für beide Differenziale ihre obigen Werthe aus Gleichung 2 und 5, so erhält man aus Gleichung 6:

$$\frac{\partial y}{\partial V} = \frac{S}{\sqrt{S^2 + V^2}}\left(\frac{1}{p} - \frac{q}{p} \cdot \frac{\partial y}{\partial V}\right)$$

und hieraus das Differenzial entwickelt

$$\frac{\partial y}{\partial V} = \frac{S}{qS + p\sqrt{S^2 + V^2}} \qquad (7)$$

Um dies Differenzial rational zu machen setze man $\sqrt{S^2 + V^2} = s + V$

so entsteht quadrirt $S^2 = s^2 + 2sV$

und

$$V = \frac{S^2 - s^2}{2s} \qquad (8)$$

mithin

$$\frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{S^2 + s^2}{2s^2} \qquad (9)$$

und

$$\sqrt{S^2 + V^2} = s + \frac{S^2 - s^2}{2s} = \frac{S^2 + s^2}{2s} \qquad (10)$$

Da nun

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial s} = \frac{S}{qS + p\frac{S^2 + s^2}{2s}} \times \left(-\frac{S^2 + s^2}{2s^2}\right)$$

oder

$$\frac{\partial y}{\partial s} = -\frac{S(S^2 + s^2)}{s(ps^2 + 2qSs + pS^2)} \qquad (11)$$

so ist

$$y = -\int \frac{\frac{1}{p} f(S^2 + s^2)\,\partial s}{s\left(s^2 + \frac{2q}{p} fs + S^2\right)}$$

Setzt man den trinomischen Factor des Nenners $= 0$, so erhält man zwei Wurzeln α und β der Klammergröfse.

$$\alpha = -\frac{S}{p}\left(q - \sqrt{q^2 - p^2}\right) \qquad (12)$$

$$\beta = -\frac{S}{p}\left(q + \sqrt{q^2 - p^2}\right) \qquad (13)$$

folglich

$$y = -\int \frac{\frac{1}{p} f(S^2 + s^2)\,\partial s}{s(s - \alpha)(s - \beta)} \qquad (14)$$

Setzt man

$$\frac{S^2 + s^2}{s(s - \alpha)(s - \beta)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - \alpha} + \frac{C}{s - \beta}$$

so erhält man

$$A = \frac{S^2}{\alpha\beta};\quad B = \frac{S^2 + \alpha^2}{(\alpha - \beta)\alpha};\quad C = \frac{S^2 + \beta^2}{(\beta - \alpha)\beta}$$

Diese Werthe in die Integralgleichung substituirt, gibt

$$y = -\frac{AS}{p}\int \frac{\partial s}{s} - \frac{BS}{p}\int \frac{\partial s}{s - \alpha} - \frac{CS}{p}\int \frac{\partial s}{s - \beta}$$

$$y = -\frac{AS}{p} ln\, s - \frac{BS}{p} ln\,(s-\alpha) - \frac{CS}{p} ln\,(s-\beta) + C \qquad (15)$$

$x = 0$ wird $y = 0$ und $v = 0$ $x = 0$ auch $V = 0$, also für $x = 0$ wird
ı ist $s = \sqrt{S^2 + V^2} - V$ und $V = pv + qy$ $s = \sqrt{S^2} = S$
glich wird nach Gleichung 1 für Man erhält also zur Bestimmung der Constante die Gleichung:

$$0 = -\frac{AS}{p} ln\, S - \frac{BS}{p} ln\,(S-\alpha) - \frac{CS}{p} ln\,(S-\beta) + C$$

lithin vollständig

$$y = \frac{AS}{p} ln\, \frac{S}{s} + \frac{BS}{p} ln\, \frac{S-\alpha}{s-\alpha} + \frac{CS}{p} ln\, \frac{S-\beta}{s-\beta} \qquad (16)$$

, nun ebenso eine Gleichung zur
nmung von x zu erhalten, hat man
ıten beiden allgemeinen Gleichun-
, No. 2 und 7, No 5

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)} = \frac{S}{V}$$

$$\frac{\partial x}{\partial V} = \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial V} = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial V}\right)}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} = \frac{S}{qS + p\sqrt{S^2 + V^2}} \times \frac{V}{S} = \frac{V}{qS + p\sqrt{S^2 + V^2}}$$

Setzt man hier wiederum, um das Differenzial rational zu machen,

$$\sqrt{S^2 + V^2} = s + V$$

hält man, wie vorher die Integrale zur Bestimmung von x:

$$V = \frac{S^2 - s^2}{2s}; \quad \sqrt{S^2 + V^2} = \frac{S^2 + s^2}{2s}; \quad \frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{S^2 + s^2}{2s^2}$$

$$\frac{x}{s} = \frac{\partial x}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial s} = \frac{\frac{S^2 - s^2}{2s}}{qS + p\frac{S^2 + s^2}{2s}} \times \left(-\frac{S^2 + s^2}{2s^2}\right) = -\frac{S^4 - s^4}{2s^2(2sqS + pS^2 + ps^2)}$$

Mithin $x = -\frac{1}{2p} \int_s^S \frac{(S^4 - s^4)\,\partial s}{s\left(s^2 + \frac{2qS}{p} s + S^2\right)}$

Für $\frac{-s^4}{s^4 + \frac{2qS}{p} s^3 + S^2 s^2}$ schreib $\frac{-s^4 - \frac{2qS}{p} s^3 - S^2 s^2}{s^4 + \frac{2qS}{p} s^3 + S^2 s^2} + \frac{\frac{2qS}{d} s^3 + S^2 s^2}{s^4 + \frac{2qS}{p} s^3 + S^2 s^2}$

$$= -1 + \frac{\frac{2qS}{p} s^3 + S^2 s^2}{s^2\left(s^2 + \frac{2qS}{p} s + S^2\right)}$$

Dann hat man $x = -\frac{1}{2p} \int_s^S \left[-1 + \frac{\frac{2qS}{p} s^3 + S^2 s^2 + S^4}{s^2\left(s^2 + \frac{2qS}{p} s + S^2\right)}\right] \partial s$

Setzt man nun $\frac{\frac{2q}{p} Ss^2 + S^2 s^2 + S^4}{s^2\left(s^2 + \frac{2q}{p} Ss + S^2\right)} = \frac{A'}{s-\alpha} + \frac{B'}{s-\beta} + \frac{C'}{s^2} + \frac{D'}{s}$

und entwickelt wie vorher, so erhält man

$$A' = \frac{\frac{2qS}{p}\alpha^3 + S^2\alpha^2 + S^4}{\alpha^2(\alpha-\beta)}$$

$$B' = \frac{\frac{2qS}{p}\beta^3 + S^2\beta^2 + S^4}{\beta^2(\beta-\alpha)}$$

$$C' = \frac{S^4}{\alpha\beta}$$

$$D' = -\frac{2q}{p}\cdot\frac{S^5}{\alpha^2\beta^2}$$

Oder wenn man bemerkt, daſs $\alpha\beta$ als letztes Glied in dem Product $(s-\alpha)(s-\beta)$ = dem letzten Gliede S^2 des Trinoms, so hat man

$$C' = \frac{S^4}{S^2} = S^2$$

und $$D' = -\frac{2q}{p}\cdot S$$

Behält man die unbestimmten Coefficienten vorläufig bei, und integrirt

$$x = -\frac{1}{2p}\int\left[-1 + \frac{A'}{s-\alpha} + \frac{B'}{s-\beta} + \frac{C'}{s^2} + \frac{D'}{s}\right]\partial s$$

so hat man $$x = -\frac{1}{2p}\left[-s + A'ln(s-\alpha) + B'ln(s-\beta) - \frac{C'}{s} + D'ln\,s\right] + C$$

Zur Bestimmung der Constante hat man für $x = 0$, am Scheitel $v = 0$ also $s = S$

Also $$0 = -\frac{1}{2p}\left[-S + A'ln(S-\alpha) + B'ln(S-\beta) - \frac{C'}{S} + D'ln\,S\right] + C$$

also vollständig $$x = -\frac{1}{2p}\left[s - S + A'ln\frac{S-\alpha}{s-\alpha} + B'ln\frac{S-\beta}{s-\beta} + \frac{C'}{s} - \frac{C'}{S} + D'ln\frac{S}{s}\right] \quad (17)$$

Es bleibt nun noch übrig in den Ausdrücken für y und x für α, β, A, B... ihre Werthe einzuführen.

Nun ist $A = \frac{S^2}{\alpha\beta} = 1$

$$B = \frac{S^2-\alpha^2}{\alpha(\alpha-\beta)} = \frac{-q}{\sqrt{q^2-p^2}}$$

$$C = -\frac{S^2+\beta^2}{\beta(\alpha-\beta)} = \frac{q}{\sqrt{q^2-p^2}}$$

$$A' = \frac{\frac{2qS}{p}\alpha^3 + S^2\alpha^2 + S^4}{\alpha^2(\alpha-\beta)} = \frac{S^4 + S\alpha^2\left(\frac{2q}{p}\alpha + S\right)}{\alpha^2(\alpha-\beta)} = \frac{S^4-\alpha^4}{\alpha^2(\alpha-\beta)} = \frac{(S^2+\alpha^2)(S^2-\alpha^2)}{\alpha^2(\alpha-\beta)}$$
$$= \frac{(\alpha\beta+\alpha^2)(\alpha\beta-\alpha^2)}{\alpha^2(\alpha-\beta)} = \frac{(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)}{\alpha-\beta} = -(\alpha+\beta) = \frac{2qS}{p}$$

$$B' = \frac{\frac{2qS}{p}\beta^3 + S^2\beta^2 + S^2}{\beta^2(\beta-\alpha)} = \frac{(S^2+\beta^2)(S^2-\beta^2)}{\beta^2(\beta-\alpha)} = -(\alpha+\beta) = \frac{2qS}{p}$$

$C = S^2$ und $D' = -\frac{2q}{p}S$

Diese Werthe in beide Formeln für y und x substituirt, gibt aus Gl. 16 u. 17

$$y = \frac{S}{p}\left[ln\frac{S}{s} - \frac{q}{\sqrt{q^2-p^2}}ln\frac{S-\alpha}{s-\alpha} + \frac{q}{\sqrt{q^2-p^2}}ln\frac{S-\beta}{s-\beta}\right]$$

$$x = \frac{1}{2p}\left(s - S + \frac{2qS}{p}ln\frac{S-\alpha}{s-\alpha} + \frac{2qS}{p}ln\frac{S-\beta}{s-\beta} + \frac{S^2}{s} - S - \frac{2qS}{p}ln\frac{S}{s}\right)$$
$$= \frac{S-s}{s} + \frac{qS}{p^2}ln\frac{(S-\alpha)(S-\beta)s}{(s-\alpha)(s-\beta)S}$$

Da es nun im Allgemeinen nicht möglich ist, s zwischen beiden Gleichungen von y und x zu eliminiren, so muſs man sich damit begnügen, für s aufeinander folgende Werthe zu setzen und daraus die zusammengehörigen Werthe von x und y zu berechnen.

Da $s = \sqrt{S^2 + V^2} - V$, so ist s immer kleiner als S. Man wird daher, weil auch die Spannung S am Scheitel noch un-

mmt ist, auf einander folgende gehene Vielfache von S für s annehn, indem man von den Zehntheilen ngt, dann Hunderttheile u. s. w. setzt. Formeln in den obigen Gleichungen, on die Logarithmen zu nehmen sind, len dann unabhängig von S, weil α und β, S als Factor enthalten.

ie Logarithmen lassen sich daher volldig bestimmen und man wird für Substitution für x und y Vielfache S erhalten.

ntwirft man nun, wie bei der gemei- Kettenlinie, eine Tafel der so ltenen verschiedenen Werthe von x y, indem man darin theils x theils Vielfache von S, und dann auch er die Quotienten von $\frac{x}{y}$, welche lute von S unabhängige Zahlen sein len, und es ist dann in einem beren Falle das Verhältniſs der Coorten des Aufhangepunkts gegeben, so t man den Verhältnisnamen unter Quotienten von x und y auf und findet daneben zugleich auch, welche fache diese Coordinaten von S sind. n man daher alsdann diese Coordin mit den Vervielfältigungzahlen irt, so ergibt sich der für diesen Fall hörige Werth von S.

ettenmessung, s. „Baculometrie".

ettenrechnung ist eine Rechnung in m Ansatz von eigenthümlicher Form, Kettenansatz, Kettensatz, so annt, weil der Ansatz in beliebig vie- Sätzen besteht, von denen jeder Satz dem Hintergliede des ihm vorhergeden Satzes als Vorderglied wieder an- t, so daſs der ganze Rechnungsansatz Aehnlichkeit mit einer Aneinanderung von Kettengliedern hat.

Wenn das Verhältniſs zweier Gröſsen B gesucht wird, so kann man dasselbe en, wenn das Verhältniſs beider Gröſsen mit anderen Gröſsen, mit Zwischensen gegeben ist. Wenn z. B. $A:C = m:n$, $B:D = p:q$, $C:D = r:s$ gegeben . Alsdann hat man den Ansatz in portionen

$$A:C = m:n$$
$$D:B = q:p$$
$$C:D = r:s$$

woraus $A:B = mqr:nps$

Es kommt nur darauf an, daſs die vermittelnden Gröſsen in den ersten und den zweiten Gliedern so vertheilt werden, daſs sie sich bei der Multiplication der gleichnamigen Glieder einander aufheben.

Der Kettensatz entsteht nun, wenn statt der Proportionen Producte genommen werden und zwar in der Ordnung, daſs das Hinterglied jedes Satzes mit dem Vorderglied des folgenden gleichnamig wird. Mit dem Frageglied wird als Vorderglied des ersten Satzes angefangen und das Hinterglied des letzten Satzes ist mit demselben gleichnamig.

Das obige Beispiel würde ein Kettensatz sein in der Form

$$?xB = A$$
$$nA = mC$$
$$sC = rD$$
$$pD = qB$$

hieraus $x \cdot nsp = mqr$

Da nun $x \cdot B = A$

so ist $B = \frac{A}{x} = \frac{nsp}{mqr} A$ oder $A = \frac{mqr}{nsp} B$

Die Kettenrechnung ist eine Rechnungsart, die bei den complicirtesten Verhältnissen bei nur geringer Aufmerksamkeit keinen Irrthum im Ansatz zuläſst. Ueberlegungen für etwaniges Vorhandensein umgekehrter Verhältnisse, die in Elementarschulen früher den Gegenstand einer höheren Rechnungsart, der umgekehrten Regeldetrie ausmachten, kommen hier nicht vor, und daher ist den Rechnungsmännern, den Kaufleuten dieser Kettenansatz das einfachste und sicherste Rechnenmittel.

Beispiel. Wie viel an preuſsischem Courant sind 300 oldenburger Pistolen, wenn 35¼ Stück derselben auf 1 Mark bei 21½ Karat fein kommen, wenn 35 preuſsische Friedrichsd'or auf 1 Mark bei 21 Karat 8 Grän fein kommen und wenn 1 preuſsischer Friedrichsd'or 5 Thlr. 20 Sgr. Courant gilt?

Ketten-Ansatz

Wie viel (x) preuſs. Thaler (sind) = 300 oldenb. Pist.
(wenn) 35¼ Pistolen = 21½ Karat
(wenn) 21½ Karat = 35 Friedrichsd'or
(und wenn) 1 Friedrichsd'or = 5⅓ Thaler

Hieraus $\frac{800 \cdot 21\frac{1}{2} \cdot 35 \cdot 5\frac{1}{3}}{35\frac{1}{4} \cdot 21\frac{1}{2}}$ preuſs. Thaler = 559 Thlr. 19 Sgr. 3,82 Pfennige.

Kettenregel ist die Regel, nach welcher beim Ansatz und der Ausrechnung eines Kettenrechnungsexempels verfahren wird.

Kettensatz, s. u. „Kettenrechnung."

Kettenstab, s. u. „Baculometrie."

Kettenstange, eben daselbst.

Kippregel ein Winkelmaafsinstrument besteht in einem metallenen Lineal mit senkrechtem Ständer in dessen Mitte, in welchem ein Gradbogen in einer senkrecht auf dem Lineal befindlichen Ebene auf und nieder bewegt werden kann um Höhenwinkel zu messen. Der Gradbogen ist zu diesem Behuf entweder mit Dioptern oder einem Fernrohr in Verbindung gebracht.

Klammern. Die Anwendung derselben für Gröfsen complexer Form, deren Bedeutung s. den Art.: „Algebraische Zeichen", pag. 62, rechts.

Klammergröfse heifst jeder in einer Klammer eingeschlossene complexe Ausdruck.

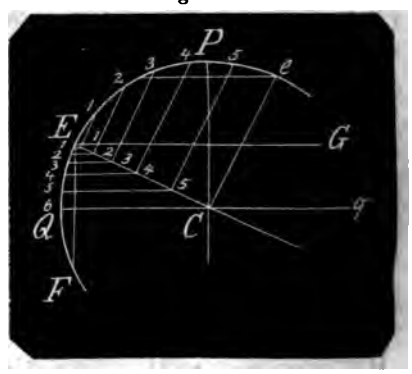
Kleinstes, s. „Gröfstes und Kleinstes", mit Fig. 678 bis 680.

Klima. Hierunter verstanden die älteren Geographen eine Zone auf der Erdoberfläche zwischen zweien Parallelkreisen, von denen in dem einen der längste Tag $\frac{1}{2}$ Stunde länger ist als in dem anderen. Sie theilten nämlich jede der beiden Halbkugeln vom Aequator bis zum Polarkreise in 24 Klimate. Am Aequator und auf beiden Zonen vom Aequator bis zu jedem Wendekreise ist der längste Tag 12 Stunden am Polarkreis ist der längste Tag 24 Stunden und man hatte also zwischen dem Aequator und jedem Polarkreis 24 Klimate. Von den Polarkreisen bis zum Nordpol wurden noch Klimate angeordnet, die alle so unterschieden waren, dafs in dem ersten Parallelkreis der längste Tag einen Monat, in dem zweiten zwei Monat u. s. w. bis zum sechsten, dem Pol wo der längste Tag sechs Monate dauert.

Die geometrische Construction dieser klimatischen Theillinien ist in dem Art. „Breite, geographische" mit Fig. 214 gezeigt und die Richtigkeit erwiesen. Hierbei will ich, um etwanige Täuschungen zu vermeiden, bemerken, dafs der Ort O, der in der Art beschaffen ist, dafs in ihm und dem ganzen ihm zugehörigen Parallelkreise der längste Tag 16 Stunden (Bogen $ED\pi$, der halbe Tagebogen $= \frac{16}{24} \times$ Halbkreis EDe) nicht in derselben Erdhalbkugel QDq liegt, in welcher die Construction ausgeführt ist, wo Qq der Aequator und P den Pol bedeutet, sondern in der Halbkugel Pqp. Es ist o der richtige Ort, wenn Pq Aequator, q Pol und oo' sein Parallelkreis gedacht wird.

Die sechs Klimata der kalten Zone werden auf dieselbe Weise construirt: Es sei Qq der Aequator, PC die Axe, EC der Halbmesser der Ekliptik in dem Durchschnitt mit dem Aequator, so gibt die

Fig. 739.



auf CE Normale (e) in dem Punkt e die Richtung des mit dem Aequator parallelen Polarkreises.

Theilt man den Quadrant eE in sechs gleiche Theile, fällt aus den Theilpunkten Normalen auf CE, von den dortigen Theilpunkten, die mit dem Aequator Qq parallelen 11, 22, ... ($CQ = 66$), zieht $EF \doteqdot CP$, so hat man, wenn man sich CP als Aequator, Qq als Erdaxe denkt, EF den Polarkreis, und die auf dem Bogen EQ bestimmten Theilpunkte 1 bis 6 die entsprechenden Punkte für die mit EF parallelen klimatischen Parallelkreise. Der Theilpunkt 1 bestimmt den Kreis für die Orte in welchen der längste Tag einen Monat dauert; der Punkt 2 den Kreis für 2 Monat Dauer u. s. w.

Klinobasisch (Kryst) heifst die Lage der Basis gegen die Normalaxe des Krystalls, wenn dieselbe schiefwinklig ist (s. Axensystem der Krystalle).

Klinometer ($\kappa\lambda\acute{\iota}\nu\omega$ ich neige) ist der wissenschaftliche allgemeine Name für jedes Nivellirinstrument, mit welchem man also die Neigung einer Linie oder einer Ebene gegen Horizontalen bestimmt.

Klinorhombisches Krystallisationssystem ist das 5te System, das zweiund ngliedrige System, bei welchem rei ungleichartige Axen unter schiefen inkeln sich schneiden, beide aber von r dritten ihnen ungleichartigon Axe chtwinklig geschnitten werden.

Klinorhomboidisches Krystallisationssystem ist das sechste System, das ein nd eingliedrige System, bei welem drei ungleichartige Axen unter hiefen Winkeln sich schneiden.

Knoten heifst in der Geometrie der unkt, in welchem eine Curve zum zweinmal trifft; ein Theil derselben wird n diesem Punkt zu beiden Seiten eine schlossene Rundung wie bei der unren Konchoide, Bd. II. pag. 167, Fig. 523.

Knoten in der Astronomie sind die rchschnittspunkte zweier gröfsten Kreise der Himmelskugel; besonders die rchschnittspunkte einer Planeten- oder metenbahn mit unserer Erdbahn, der diptik und ebenso die einer Mondbahn ihren Planeten. Die Durchschneiing beider Bahnen geschieht in zweien nander gegenüberliegenden Punkten, die rade Verbindungslinie beider Punkte ht durch den beiden Planeten gemeinhaftlichen Centralkörper, die Sonne. iese Verbindungslinie heifst, die Knoenlinie.

Die Ekliptik theilt die Himmelskugel zwei Hälften, die nach dem Nordpol ber uns, also sichtbare Himmelskugel eifst die obere, die uns unsichtbare ach dem Südpol hin liegende die untere lbkugel. Die Knotenlinie theilt beide ch durchschneidende Bahnen ebenfalls zwei Hälften. Die in der oberen Himelshalbkugel liegende Hälfte der Plaetenbahn heifst die obere, die in der nteren Halbkugel liegende die untere älfte. Der Knoten, in welchem der lanet in die obere Halbkugel tritt, heifst er aufsteigende Knoten, der Knoten welchem der Planet in die untere lbkugel tritt, der niedersteigende der der absteigende Knoten. Was ler von Planeten gesagt ist, gilt auch ir Cometen und unseren Mond. Beide noten sind 180° von einander entfernt.

Der Planet oder Mond hat in dem Knon keine Breite, weder geozentrische ch heliozentrische Breite, und es gibt eser Umstand das Mittel an die Hand, rch Beobachtungen des Weltkörpers n Ort seines Knotens zu ermitteln; an hat nur nöthig, ihn in zweien Orten beobachten, in welchen er gleiche Breiten hat, von welchen die eine die nördliche, die andere die südliche Breite ist, so dafs er das zweite Mal so viel über oder unter der Ekliptik sich befindet, als das erste Mal er unter oder über der Ekliptik stand. Addirt man beide beobachteten Längen und nimmt von der Summe die Hälfte, so erhält man die Länge des Knotens, indem man den Lauf des Planeten während der zwischen beiden Beobachtungen begriffenen Zeit gleichförmig annimmt.

Ist dieser Knoten der aufsteigende, von dem man bei jedem Planeten zu zählen anfängt, so hat man in dem östlichen Abstande desselben vom Frühlingspunkt die Länge des Knotens. Diese Länge wird nun auf der Planetenbahn vom Knoten aus rückwärts, also innerhalb der südlichen Halbkugel abgetragen und deren Anfangspunkt ist der Nullpunkt für die heliozentrischen Längen des Planeten in seiner Bahn. Von der bestimmt angegebenen Länge des augenblicklichen Orts eines Planeten die Länge seines Knotens abgezogen, gibt die Länge des Planeten vom Knotenpunkt, welche das Argument der Breite des Planeten, durch welche die Reduction des Planeten auf die Ekliptik ausgeführt wird.

Die Knoten der Planeten behaupten nicht fest ihren Ort in der Ekliptik, sie machen ebenso wie die Nachtgleichenpunkte, der Frühlings- und der Herbstpunkt, rückgängige Bewegungen, so dafs Längen-Abnahmen entstehen, welche eine Folge der gegenseitigen Attraction der Weltkörper sind, durch welche sie sich anziehen und früher in ihre Bahnen kommen als bei dem vorher gewesenen Umlauf. Bei den Planeten beträgt diese Rückbewegung bei jedem Umlauf etwa eine Bogenminute, bei dem Monde dagegen beträgt sie jährlich 19 Grad, so dafs die Mondknoten in $\frac{360}{19} = 19$ Jahren den Zeichen entgegen durch die ganze Ekliptik gerückt sind.

Knotenlinie, s. u. „Knoten".

Knotenmonat, s. v. wie „Drachenmonat", s. d. und „astronomischer Monat" No. 4.

Körper. Euklid sagt im 11. Buch, 1 und 2 Erklärung: Ein Körper ist was Länge, Breite und Tiefe hat. Eines Körpers Grenze ist Fläche.

Die Geometrie oder vielmehr der Theil der Geometrie, welcher sich mit den Körpern beschäftigt, die Stereometrie, hat nur den von den Grenzen einge-

schlossenen körperlichen Raum und die Grenzflächen den mathematischen Körper zum Gegenstande; mit der den körperlichen Raum ausfüllenden Masse, mit dem physischen Körper beschäftigt sich die angewandte Mathematik.

Die Art der Grenzen bestimmt den Körper. Ein Körper wird begrenzt von lauter Ebenen oder von lauter krummen Flächen oder von geraden und krummen Flächen zugleich.

Körper, die von lauter Ebenen begrenzt werden, sind entweder prismatisch oder pyramidalisch oder polyedrisch.

Prismatische Körper, Prismen sind solche Körper, die von zwei einander gegenüberstehenden congruenten Dreiecken, Vierecken oder Vielecken und von dazwischen liegenden Parallelogrammen begrenzt werden. Die ersteren beiden Figuren sind die Grund- oder Endebenen, oder die Grund- oder Endflächen, die Parallelogramme die Seitenebenen oder Seitenflächen. Der Character der Prisma ist also, dafs parallel mit einander durch die Seitenflächen gelegte Ebenen congruente Figuren geben.

Ist eine der Endflächen der anderen nicht parallel, so sind sie einander nicht congruent, die Seitenflächen sind Trapeze und das Prisma heifst ein abgekürztes Prisma.

Pyramidalische Körper, Pyramiden sind solche Körper, die ein Dreieck oder Viereck oder Vieleck zur Grundfläche haben und deren Seitenflächen alle in einem Punkt, der Spitze, Dreiecke bildend, zusammen laufen. Der Karacter der Pyramide ist also dafs parallel mit einander durch die Seitenflächen gelegte Ebenen ähnliche Figuren bilden. Hat die Pyramide statt einer Spitze eine obere Endfläche, so sind die Seitenflächen Vierecke, die Pyramide heifst abgekürzt. Ist die obere Endfläche der unteren parallel, so sind die Seitenflächen Trapeze, die Pyramide heifst gerade abgekürzt; ist die obere Endfläche der Grundfläche nicht parallel, so sind die Seitenflächen Trapezoide, die Pyramide heifst schief abgekürzt.

Eine Abart der Pyramide ist der Obelisk, nämlich ein Körper, bei dem die Seitenflächen eine solche Lage haben, dafs sie nicht in einer Spitze, sondern in einer geraden Linie, einer Schärfe endigen.

Ein polyedrischer Körper, ein Polyeder ist ein Körper, der von lauter verschiedenseitigen Figuren eingeschlossen ist. Sind die den Körper begrenzenden Figuren alle regelmäfsig und congruent, so heifst der Körper ein regelmäfsiges Polyeder. Es gibt deren nur fünf:

1. Das Tetraeder, deren Begrenzungsflächen aus 4 gleichseitigen Dreiecken bestehen.

2. Das Octaeder wird von 8 regelmäfsigen Dreiecken begrenzt.

3. Das Icosaeder wird von 20 regelmäfsigen Dreiecken begrenzt.

4. Das Hexaeder, der Würfel wird von 6 Quadraten begrenzt.

5. Das Dodekaeder wird von 12 regelmäfsigen Fünfecken begrenzt.

Die Körper, die von lauter krummen Flächen, also von mehreren krummen Flächen begrenzt werden, kommen selten zur Untersuchung vor. Körper, die von nur einer krummen Fläche begrenzt werden, sind die Kugel und alle durch Kurven gebildete Umdrehungskörper wie die Ellipsoide.

Die Körper, die von Ebenen und krummen Flächen begrenzt werden sind Cylinder und Kegel, Cylindroide und Konoide. Ein Cylinder ist ein Prisma, ein Kegel eine Pyramide mit kreisrunder Grundebene. Cylindroide sind Prismen, Konoide sind Pyramiden mit Grundebenen, die von geschlossenen aber anders als Kreise gestalteten Curven begrenzt sind.

Körperausdehnung, s. „Ausdehnung der Körper".

Körperberechnung. Geschieht die Berechnung speciell in bestimmten Zahlen, so ist sie der arithmetische Theil der Stereometrie, geschieht sie in Aufstellung von allgemein geltenden Formeln, der algebraische Theil derselben.

Jeder Körper ist in ein rechtwinkliges Parallelepiped zu verwandeln, dessen körperlicher Inhalt gleich ist dem Product seiner drei Seiten. Daher besteht auch jede Formel für den Inhalt eines Körpers, seine Gestalt sei, welche sie wolle, aus einem Product von dreien Längendimensionen.

Ist A die Grundebene eines Körpers, h dessen Höhe, J der Inhalt,

so ist J des Prisma $= Ah$

J des Cylinders $= Ah = \pi r \cdot r \cdot h = \pi r^2 h$

wenn r den Halbmesser der Kreisgrundebene bedeutet.

J des schief abgekürzten dreiseitigen Prisma $= \frac{a+b+c}{3} \cdot A$

wenn a, b, c die Seitenkanten, A den Inhalt des normal auf die Kanten genommenen Querschnitts bedeutet.

J einer Pyramide ist $= \frac{1}{3}Ah$

J eines Kegels ist $\frac{1}{3}Ah = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

J einer gerade abgekürzten Pyramide $= \frac{1}{3}(A + \sqrt{AB} + B)h$

wenn B der Inhalt der zweiten Endfläche ist.

J eines gerade abgekürzten geraden Kegels $= \frac{1}{3}(A^2 + \sqrt{AB} + B^2)h$

$$= \frac{\pi}{3}(r^2 + r\varrho + \varrho^2)h$$

wenn ϱ den Halbmesser der zweiten Endfläche des Kegels bedeutet.

J einer Kugel ist $\frac{4}{3}\pi r^3$

Einer der wichtigsten Sätze als Hülfssatz zur Beweisführung stereometrischer Lehrsätze ist folgender:

Sind zwei Körper zwischen zwei parallelen Ebenen begriffen und so beschaffen, dafs die mit diesen Ebenen parallel genommenen Durchschnitts-Ebenen denselben immer dasselbe Verhältnifs zu einander haben, so stehen die Inhalte beider Körper in demselben Verhältnifs.

Denn man theile den Abstand der parallelen Endebenen beider Körper, oder wenn diese in Spitzen oder Rundungen ausgehen, die parallelen Ebenen, welche die beiden Körper zwischen sich begreifen, in eine beliebige Anzahl gleicher Theile und führe durch die Theilpunkte Ebenen, die mit jenen parallel laufen.

Zwischen je zwei nächsten Durchschnittsebenen construire man um jeden Körper zwei normale Mäntel, von denen der eine über dem Umfang des einen aufwärts, der andere unter dem Umfang des anderen abwärts gerichtet ist, so wird in jedem Körper der von dem einen Umfang eingeschlossene Körper gröfser, der von dem anderen Umfang eingeschlossene Körper kleiner sein, als der zwischen beiden Durchschnittsebenen befindliche Theil der zu vergleichenden beiden Körper.

Nun verhalten sich aber prismatische Körper (also auch die construirten) von gleicher Höhe wie ihre Endflächen, daher haben diese Körper, deren Endflächen dieselben Durchschnittsebenen der gegebenen Körper sind, immer ein und dasselbe Verhältnifs. Folglich werden auch die Summen aller inwendigen Körper, so wie die aller auswendigen bei beiden zu vergleichenden Körper immer dasselbe Verhältnifs haben.

Da man nun durch Vermehrung der Theile in dem Abstande beider zuerst genannten Parallelebenen den Unterschied der Summen der inwendigen und auswendigen Körper beliebig klein machen kann, so folgt, dafs auch die zwischen begriffenen Körper dasselbe Verhältnifs wie jene Summen haben müssen. D. h. wie die Durchschnitte dieser Körper mit Ebenen, die den begrenzenden Parallelebenen parallel laufen.

Hieraus folgt, dafs wenn in beiden Körpern die im Satz gedachten Durchschnittsebenen in beiden Körpern einzeln gleich grofse Durchschnitte bilden, die Körper selbst einander gleich sind.

Ferner, dafs wenn drei Körper zwischen zwei Parallelebenen begriffen sind und eine solche Gestalt haben, dafs wenn man dieselben mit einer jenen Ebenen parallelen Ebene schneidet, der Durchschnitt in dem einen Körper immer gleich ist der Summe der Durchschnitte in den beiden anderen Körpern, alsdann auch jener Körper gleich ist der Summe der beiden anderen Körper.

Dieser Hülfssatz heifst nach seinem Urheber der Cavallerische Grundsatz, weil Cavalleri ihn ohne Beweis aufgestellt und angewendet hat.

Körperdreieck, s. v. w. „dreiseitige Ecke," s. „Ecke" No. 1, Erklärung, die übrigen No. 2 bis 18 Lehrsätze, No. 19 bis 26 Aufgaben und Construktionen; mit Fig. 590 bis 599. S. „Körpertrigonometrie."

Körperecke, s. v. w. Ecke, s. „Ecke".

Körpermaafs, s. v. w. „Cubikmaafs", s. d.

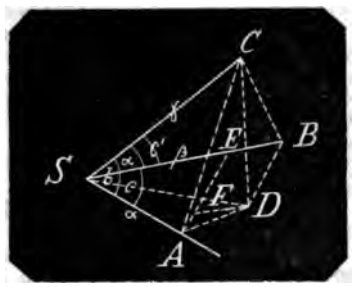
Körpertrigonometrie ist die Bestimmung des Zusammenhangs zwischen den Seiten und Winkeln der Körperdreiecke durch Anwendung der Lehren der ebenen Trigonometrie. Die Körpertrigonometrie unterscheidet sich von der ebenen, dafs die in Betracht kommenden Winkel der ebenen Dreiecke, welche zu einem Körperdreieck gehören, nicht in einer Ebene liegen.

Anmerk. In den folgenden Untersuchungen ist zu Erleichterung des Verständnisses die Anordnung getroffen, dafs bei Bezeichnung einer Körperecke (Fig. 738)

1) Die 3 Buchstaben, welche die Vorderpunkte der drei Kanten bezeichnen

vorangestellt werden, und dafs der an der Spitze befindliche Buchstabe *S* der vierte wird.

Fig. 740.



2) Die mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichneten Seiten entsprechen den grofsen Buchstaben der gegenüberliegenden Kanten (Seite *a* der Kante *AS*, Seite *b* der Kante *BS* und Seite *c* der Kante *CS* gegenüberliegend).

3) Die Winkel, welche durch die sie bildenden Seiten bezeichnet werden müssen, erhalten die ihrer Kante zugehörigen Buchstaben in der Mitte: der durch die Seiten *ASC* und *ASB* gebildete Winkel wird bezeichnet $\angle CASB$ oder $\angle BASC$. Sonst werden diese Winkel mit nur einem Buchstaben bezeichnet. Nämlich

4) Die Winkel der Ecke werden auch mit griechischen Buchstaben bezeichnet und entsprechen den vorderen Buchstaben der den Winkel bildenden Kante. $\angle \alpha$ = dem Winkel, der von den beiden Seiten *BAS* und *CAS* mit der Kante *AS* gebildet wird.

1. In einem Körperdreieck verhalten sich die Sinus der Seiten wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel, oder was dasselbe ist, in einem und demselben Körperdreieck sind die Quotienten der Sinus der einzelnen Seiten, durch die Sinus der gegenüberliegenden Winkel dividirt alle einander gleich.

Denn in dem Körperdreieck *ABSC* sei die Seite $BSC = a$, Seite $ASC = b$, $ASB = c$; die gegenüberliegenden Winkel seien α, β, C. Von einem beliebigen Punkt *C* der Kante *CS* fälle man auf die Ebene der Seite *ASB* und auf deren Kanten die Lothe *CD*, *CA*, *CB*, ziehe *AD* und *BD*, so ist $\angle CAD = \alpha$, $\angle CBD = \beta$. Man hat daher in dem bei *A* rechtwinkligen Dreieck *ACS*, $AC = CS \sin b$, und in dem $\triangle ACD$ ist

$$CD = AC \cdot \sin \alpha = CS \cdot \sin b \cdot \sin \alpha$$

Eben so ist in dem bei *B* rechtwinkligen Dreieck *BCS*, $BC = CS \sin a$, und in dem rechtwinkligen $\triangle BCD$ ist $CD = BC \cdot \sin \beta = CS \sin a \cdot \sin \beta$

Daher ist

$$CS \cdot \sin b \cdot \sin \alpha = CS \cdot \sin a \cdot \sin \beta \quad (1)$$

woraus $\sin a : \sin b = \sin \alpha : \sin \beta$

Eben so findet man

$$\sin a : \sin c = \sin \alpha : \sin \gamma \quad (2)$$

daher

$$\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma \quad (3)$$

Aus Gleichung 1 findet man, wenn man mit $CS \sin \alpha \cdot \sin \beta$ dividirt

$$\frac{\sin b \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{\sin a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

oder $\frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin a}{\sin \alpha}$ und ebenso $= \frac{\sin c}{\sin \gamma}$ (4)

2. In einem Körperdreieck ist der Cosinus einer Seite = dem Produkt aus den Sinus der beiden anderen Seiten mal dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels + dem Product aus den Cosinus dieser beiden Seiten. — Und der Cosinus eines Winkels = dem Product aus den Sinus der beiden anderen Winkel mal dem Cosinus der von ihnen eingeschlossenen Seite — dem Product aus den Cosinus dieser beiden Winkel.

Denn construirt man wie im vorigen Satz, so hat man

$$AS = CS \cos b;\ AC = CS \sin b;\ AD = AC \cos \alpha = CS \sin b \cos \alpha$$

Man fälle von *A* auf *BS* das Loth *AE* und von *D* auf *AE* das Loth *DF*, so ist $\angle DAE = \angle ASB = c$, weil deren Schenkel wechselsweise auf einander normal stehen.

Man hat daher

A) $BE = DF = AD \sin c = CS \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha$

Ferner ist $ES = AS \cos c = CS \cos b \cdot \cos c$

daher $BS = BE + ES = CS \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha + CS \cos b \cdot \cos c$

Aber $BS = CS \cos a$

daher $CS \cos a = CS \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha + CS \cos b \cdot \cos c$

oder $\cos a = \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha + \cos b \cdot \cos c$

Eben so beweist sich der Satz für $\cos b$ und $\cos c$. Durch Vertauschung der Buchstaben, welche die Seiten und Winkel bezeichnen, hat man demnach drei Gleichungen, die den Zusammenhang der drei Seiten mit jedem der 3 Winkel darstellen

$$\cos a = \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha + \cos b \cdot \cos c \quad (1)$$
$$\cos b = \sin a \cdot \sin c \cdot \cos \beta + \cos a \cdot \cos c \quad (2)$$
$$\cos c = \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma + \cos a \cdot \cos b \quad (3)$$

B) Es ist Gleichung 1, 2 und 3

1. $\cos a = \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha + \cos b \cdot \cos c$
2. $\cos b = \sin a \cdot \sin c \cdot \cos \beta + \cos a \cdot \cos c$
3. $\cos c = \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma + \cos a \cdot \cos b$

$\cos b$ aus 2 in 1 und in 3 gesetzt, gibt

4. $\cos a = \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos c \cdot \cos \beta + \cos a \cdot \cos^2 c$
5. $\cos c = \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos a \cdot \cos \beta + \cos c \cdot \cos^2 a$

Setzt man nun $1 - \sin^2 c$ für $\cos^2 c$ und $1 - \sin^2 a$ für $\cos^2 a$, so hat man

6. $0 = \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos c \cdot \cos \beta - \cos a \cdot \sin^2 c$
7. $0 = \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos a \cdot \cos \beta - \cos c \cdot \sin^2 a$

Gleichung 6 durch $\sin c$, Gleichung 7 durch $\sin a$ dividirt:

8. $0 = \sin b \cdot \cos \alpha + \sin a \cdot \cos c \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin c$
9. $0 = \sin b \cdot \cos \gamma + \sin c \cdot \cos a \cdot \cos \beta - \cos c \cdot \sin a$

oder

10. $\sin b \cdot \cos \alpha = \cos a \cdot \sin c - \sin a \cdot \cos c \cdot \cos \beta$
11. $\sin b \cdot \cos \gamma = \cos c \cdot \sin a - \sin c \cdot \cos a \cdot \cos \beta$

Die letzte Gleichung mit $\cos \beta$ multiplicirt

12. $\sin b \cdot \cos \gamma \cdot \cos \beta = \cos c \cdot \sin a \cdot \cos \beta - \sin c \cdot \cos a \cdot \cos^2 \beta$

Gleichung 10 und 12 addirt:

13. $\sin b \,(\cos \alpha + \cos \beta \cdot \cos \gamma) = \sin c \cdot \cos a \cdot \sin^2 \beta$

Nun ist aber $\sin b \cdot \sin \gamma = \sin \beta \cdot \sin c$, also

$$\sin b \,(\cos \alpha + \cos \beta \cdot \cos \gamma) = \sin b \cdot \sin \gamma \cdot \cos a \cdot \sin \beta$$

folglich

$$\cos \alpha = \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos a - \cos \beta \cdot \cos \gamma \quad (4)$$

Eben so

$$\cos \beta = \sin \alpha \cdot \sin \gamma \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \gamma \quad (5)$$
$$\cos \gamma = \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \gamma - \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (6)$$

Da nun jede dieser drei Gleichungen sechs Bestimmungsstücke des Körperdreiecks enthalten, und aus drei Gleichungen sich immer drei unbekannte Größen bestimmen lassen, so sind die vorstehenden drei Gleichungen die Fundamentalgleichungen der Körpertrigonometrie, denn es lassen sich vermittelst derselben aus drei gegebenen Bestimmungsstücken eines Körperdreiecks immer die drei übrigen berechnen, und da sich aus drei Gleichungen immer zwei darin vorkommende Größen eliminiren lassen, so lassen sich daraus auch alle Gleichungen ableiten, welche den Zusammenhang zwischen vier Bestimmungsstücken des Körperdreiecks darstellen. So z. B. ergibt sich der Zusammenhang zwischen zwei Seiten und den beiden gegenüberliegenden Winkeln eines Körperdreiecks aus der ersten Gleichung:

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} \quad (7)$$

hieraus

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{(\cos a - \cos b \cdot \cos c)^2}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 b \cdot \sin^2 c - \cos^2 a - \cos^2 b \cdot \cos^2 c + 2 \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 c - \cos^2 b - \cos^2 a + 2 \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}}{\sin b \cdot \sin c}$$

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{1-\cos^2 c-\cos^2 b-\cos^2 a+2\cos a\cdot\cos b\cdot\cos c}}{\sin a\cdot\sin c}$$

Durch Division beider letzten Gleichungen erhält man

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin a}{\sin b} \qquad (8)$$

3. Den trigonometrischen Zusammenhang zwischen zwei Seiten und zwei Winkeln zu finden, wenn einer der Winkel von den Seiten eingeschlossen ist.

Soll der Zusammenhang der Seiten b, c mit den Winkeln α, β, von welchen α der von b und c eingeschlossene ist, bestimmt werden, so hat man aus dem vorigen Satz

$\cos b = \sin a\cdot\sin c\cdot\cos\beta+\cos a\cdot\cos c$ (1)

$\cos a = \sin b\cdot\sin c\cdot\cos\alpha+\cos b\cdot\cos c$ (2)

Um die verlangte Gleichung zu erhalten, mufs die Seite a eliminirt werden.

Vorerst also $\cos a$ aus der zweiten Gleichung in die erste gesetzt, gibt

$$\cos b = \sin a\cdot\sin c\cdot\cos\beta+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos c\cdot\cos\alpha+\cos b\cdot\cos^2 c$$

Hieraus $\cos b(1-\cos^2 c)=\sin a\cdot\sin c\cdot\cos\beta+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos c\cdot\cos\alpha$

oder $\cos b\cdot\sin^2 c=\sin a\cdot\sin c\cdot\cos\beta+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos c\cdot\cos\alpha$

oder mit $\sin c$ dividirt

$$\cos b\cdot\sin c=\sin a\cdot\cos\beta+\sin b\cdot\cos c\cdot\cos\alpha$$

Nun ist aber nach No. 1, Formel 3

$$\sin a:\sin\alpha=\sin b:\sin\beta$$

mithin $$\sin a=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\sin b$$

Diesen Werth in die letzte Gleichung substituirt gibt

$$\cos b\cdot\sin c=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\sin b\cdot\cos\beta+\sin b\cdot\cos c\cdot\cos\alpha$$

folglich $$\sin c\cdot\cot b=\sin\alpha\cdot\cot\beta+\cos c\cdot\cos\alpha \qquad (3)$$

welches die verlangte Gleichung ist.

4. In einem Körperdreieck verhält sich der Cosinus der halben Summe zweier Seiten zum Cosinus ihrer halben Differenz, wie die Cotangente des halben von den Seiten eingeschlossenen Winkels zur Tangente der halben Summe der gegenüberliegenden Winkel; und der Sinus der halben Summe zweier Seiten zum Sinus ihrer halben Differenz wie die Cotangente des halben eingeschlossenen Winkels zur Tangente der halben Differenz der gegenüberliegenden Winkel.

Es seien a, b die Seiten, also γ der eingeschlossene, α, β die beiden den Seiten gegenüberliegenden Winkel.

Man hat aus No. 2

$\cos a = \sin b\cdot\sin c\cdot\cos\alpha+\cos b\cdot\cos c$ (1)

$\cos c = \sin a\cdot\sin b\cdot\cos\gamma+\cos a\cdot\cos b$ (2)

Der letzte Werth von $\cos c$ in die erste Gleichung substituirt gibt nach den wie im vorigen Satz vorgenommenen Reductionen

$$\cos a\cdot\sin b=\sin c\cdot\cos\alpha+\sin a\cdot\cos b\cdot\cos\gamma \qquad (3)$$

woraus $$\sin c\cdot\cos\alpha=\cos a\cdot\sin b-\sin a\cdot\cos b\cdot\cos\gamma \qquad (4)$$

Vertauscht man in dieser Gleichung α und β und demgemäfs auch a und b, so erhält man

$$\sin c\cdot\cos\beta=\cos b\cdot\sin a-\sin b\cdot\cos a\cdot\cos\gamma \qquad (5)$$

Beide Gleichungen 4 u. 5 addirt geben:

$$\sin c(\cos\alpha+\cos\beta)=\cos a\cdot\sin b+\cos b\cdot\sin a-(\sin a\cdot\cos b+\sin b\cdot\cos a)\cdot\cos\gamma$$

$$=\sin(a+b)-\sin(a+b)\cos\gamma=\sin(a+b)(1-\cos\gamma) \qquad (6)$$

Nun ist $\sin a:\sin\alpha=\sin b:\sin\beta=\sin c:\sin\gamma$

Also $\sin a+\sin b:\sin\alpha+\sin\beta=\sin c:\sin\gamma$

oder $$\sin c(\sin\alpha+\sin\beta)=\sin\gamma(\sin a+\sin b)$$

Dividirt man diese Gleichung durch die obige, so erhält man

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\frac{\sin\alpha+\sin b}{\sin(\alpha+b)}\cdot\frac{\sin\gamma}{1-\cos\gamma} \quad (7)$$

Nun ist

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha+\sin b=2\sin\frac{\alpha+b}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-b}{2}$$

$$\sin(\alpha+b)=2\sin\frac{\alpha+b}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+b}{2}$$

$$\sin\gamma=2\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$1-\cos\gamma=2\sin^2\frac{\gamma}{2}$$

Substituirt man alle diese Werthe in die letzte Gleichung, so erhält man, geboben

$$\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha-b}{2}}{\cos\frac{\alpha+b}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \quad (8)$$

woraus reducirt

$$tg\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha-b}{2}}{\cos\frac{\alpha+b}{2}}\cdot\cot\frac{\gamma}{2} \quad (9)$$

und die verlangte Proportion

$$\text{I.}\quad \cos\frac{\alpha+b}{2}:\cos\frac{\alpha-b}{2}=\cot\frac{\gamma}{2}:tg\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Aus der Proportion

$$\sin a:\sin\alpha=\sin b:\sin\beta=\sin c:\sin\gamma$$

ist

$$\sin a-\sin b:\sin\alpha-\sin\beta=\sin c:\sin\gamma$$

also

$$\sin c(\sin\alpha-\sin\beta)=\sin\gamma(\sin a-\sin b)$$

ferner war oben

$$\sin c(\cos\alpha+\cos\beta)=(1-\cos\gamma)\sin(\alpha+b)$$

daher beide letzten Gleichungen durch einander dividirt

$$\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\frac{\sin\gamma}{1-\cos\gamma}\cdot\frac{\sin a-\sin b}{\sin(\alpha+b)}$$

Nun ist

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\cdot\sin\frac{a-b}{2}$$

Diese und die obigen Werthe für $\cos\alpha+\cos\beta$ u. s. w. in die letzte Gleichung substituirt und gehoben gibt

$$\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}$$

oder

$$tg\frac{\alpha-\beta}{2}=\cot\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}} \quad (10)$$

und die verlangte Proportion

$$\text{II.}\quad \sin\frac{a+b}{2}:\sin\frac{a-b}{2}=\cot\frac{\gamma}{2}:tg\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Die beiden gefundenen Proportionen heifsen nach ihrem Erfinder die Neperschen Analogien.

5. In einem Körperdreieck ist der Cosinus eines Winkels gleich dem Product aus den Sinus der beiden anderen Winkel und dem Cosinus der dem ersten Winkel gegenüberliegenden Seite weniger dem Product der Cosinus eben dieser Winkel.

Denn es seien α, β, γ die 3 Winkel und a die dem ersten Winkel gegenüberliegende Seite. Man denke sich zu dem Dreieck die Supplementarecke construirt (s. „Ecke", No. 5, pag. 7 mit Fig. 592), so sind die Seiten derselben $180°-\alpha$, $180°-\beta$, $180°-\gamma$; der der ersten Seite gegenüberliegende Winkel $=180°-a$. Daher hat man für die Supplementarecke nach No. 2

$$\cos(180°-\alpha)=\sin(180°-\beta)\cdot\sin(180°-\gamma)\cdot\cos(180°-a)+\cos(180°-\beta)\cdot\cos(180°-\gamma)$$

Es ist aber $\cos(180°-x)=-\cos x$

$$\sin(180°-x)=+\sin x$$

Daher ist die letzte Gleichung identisch mit

$$-\cos\alpha=-\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos a+\cos\beta\cdot\cos\gamma$$

oder

$$\cos\alpha=\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos a-\cos\beta\cdot\cos\gamma \quad (1)$$

Auflösung rechtwinkliger Körperdreiecke.

6. In einem rechtwinkligen Körperdreieck aus zwei Seiten die dritte zu bestimmen.

Sind a, b, c die Seiten eines rechtwinkligen Körperdreiecks, in welchem der Seite c der rechte Winkel γ gegenüber liegt, so hat man in der allgemeinen Gleichung

$$\cos c=\sin a\cdot\sin b\cdot\cos\gamma+\cos a\cdot\cos b$$

$\gamma=90°$ gesetzt

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b \qquad (I)$$

woraus sich jede Seite aus zwei gegebenen Seiten findet.

7. Von einem rechtwinkligen Körperdreieck sind zwei Seiten gegeben, die Winkel zu bestimmen.

Schliefsen die Seiten a und b den rechten Winkel ein, liegt also die Seite c dem rechten Winkel gegenüber, so hat man zur Bestimmung des $\angle \alpha$, welcher zwischen den gegebenen Seiten b, c liegt aus der allgemeinen Gleichung 3, No. 3,

$$\sin b \cdot \cot c = \sin \alpha \cdot \cot \gamma + \cos b \cdot \cos \alpha$$

Nun ist $\gamma = 90°$, also $\cot \gamma = 0$ und es ist

$$\sin b \cdot \cot c = \cos b \cdot \cos \alpha$$

$$\text{woraus } \cos \alpha = \operatorname{tg} b \cdot \cot c = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c} \qquad (II)$$

Zur Bestimmung des anliegenden $\angle \beta$ durch die Proportion

$$\sin c : \sin b = \sin 90° : \sin \beta$$

$$\text{woraus } \sin \beta = \frac{\sin b}{\sin c} \qquad (III)$$

Sind die den rechten Winkel einschliefsenden Seiten a, b gegeben, und sollen die Winkel α, β gefunden werden, so hat man nach der allgemeinen Gleichung 3, No. 3: zur Bestimmung des $\angle \alpha$

$$\sin b \cdot \cot a = \sin 90° \cdot \cot \alpha + \cos b \cdot \cos 90°$$

woraus $\cot \alpha = \sin b \cdot \cot a$

$$\left.\begin{aligned} \text{und} \quad & \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b} \\ \text{ebenso} \quad & \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin a} \end{aligned}\right\} \qquad (IV)$$

8. Von einem rechtwinkligen Körperdreieck sind eine Seite und ein Winkel gegeben, die übrigen Stücke zu finden.

Ist erstens die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite und der anliegende $\angle \beta$ gegeben, so hat man die diesem Winkel gegenüberliegende Seite b aus der Proportion

$$\sin 90° : \sin \beta = \sin c : \sin b$$

$$\text{woraus } \sin b = \sin c \cdot \sin \beta \qquad (V)$$

Die dem gegebenen Winkel β anliegende Seite a bestimmt sich aus der allgemeinen Gleichung 3 No. 3:

$$\sin a \cdot \cot c = \sin \beta \cdot \cot 90° + \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\text{woraus } \operatorname{tg} a = \frac{\cos \beta}{\cot c} = \operatorname{tg} c \cdot \cos \beta \qquad (VI)$$

Für den $\angle \alpha$ hat man die allgemeine Gleichung 1, No. 5

$$\cos 90° = \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos c - \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\text{woraus } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\cot \beta}{\cos c} \qquad (VII)$$

hieraus folgt auch

$$\cos c \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = 1 \qquad (VIII)$$

Ist zweitens die dem rechten Winkel anliegende Seite a und der ihr gegenüberliegende Winkel α gegeben, so hat man für die Seite c

$$\sin a : \sin \alpha = \sin c : \sin 90°$$

$$\text{woraus } \sin c = \frac{\sin a}{\sin \alpha} \qquad (IX)$$

Für die Seite b hat man die Gleichung 3, No. 3

$$\sin b \cdot \cot a = \sin 90° \cdot \cot \alpha + \cos b \cdot \cos 90°$$

$$\text{woraus } \sin b = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} \alpha} \qquad (X)$$

Für den Winkel β hat man

$$\sin a : \sin \alpha = \sin b : \sin \beta$$

$$\text{also } \sin \beta = \frac{\sin \alpha}{\sin a} \sin b$$

und nach Formel X $= \dfrac{\sin \alpha}{\sin a} \cdot \dfrac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} \alpha} = \dfrac{\cos a}{\cos a}$

$$\text{mithin } \sin \beta = \frac{\cos \alpha}{\cos a} \qquad (XI)$$

9. In einem rechtwinkligen Körperdreieck sind aufser dem rechten Winkel noch die beiden anderen Winkel gegeben, die Seiten zu finden.

Die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite c hat man nach Formel VII.

$$\cos c = \frac{\cot \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \cot \alpha \cdot \cot \beta \qquad (XII)$$

Die dem rechten Winkel anliegende Seite nach Formel XI:

$$\cos a = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}; \quad \cos b = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \qquad (XIII)$$

Auflösung schiefwinkliger Dreiecke.

10. Von einem Körperdreieck sind die drei Seiten gegeben, einen Winkel zu finden.

Um aus den Seiten a, b, c den der Seite a gegenüberliegenden $\angle \alpha$ zu finden hat man aus No. 2, Formel 1.

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

hieraus

$$2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} = \frac{\sin b \cdot \sin c + \cos b \cdot \cos c - \cos a}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$= \frac{\cos (b - c) - \cos a}{\sin b \cdot \sin c} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} (a + b - c) \sin \frac{1}{2} (a - b + c)}{\sin b \cdot \sin c}$$

hieraus $$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{a+b-c}{2}\cdot\sin\frac{a-b+c}{2}}{\sin b\cdot\sin c}} \qquad (I)$$

Für eine Formel $\cos\frac{\alpha}{2}$ hat man $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$, daher

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\frac{\cos a-\cos b\cdot\cos c}{\sin b\cdot\sin c}=\frac{\sin b\cdot\sin c-\cos b\cdot\cos c+\cos a}{\sin b\cdot\sin c}$$

$$=\frac{\cos a-\cos(b+c)}{\sin b\cdot\sin c}=\frac{2\sin\frac{a+b+c}{2}\cdot\sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin b\cdot\sin c}$$

woraus $$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{a+b+c}{2}\cdot\sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin b\cdot\sin c}} \qquad (II)$$

Gleichung I durch II dividirt gibt

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{a+b-c}{2}\cdot\sin\frac{a-b+c}{2}}{\sin\frac{a+b+c}{2}\cdot\sin\frac{-a+b+c}{2}}} \qquad (III)$$

Multiplicirt man I und II und nimmt das Product doppelt, so erhält man

$$\sin\alpha=\frac{2}{\sin b\cdot\sin c}\sqrt{\sin\frac{a+b+c}{2}\cdot\sin\frac{a+b-c}{2}\cdot\sin\frac{a+c-b}{2}\cdot\sin\frac{b+c-a}{2}} \qquad (IV)$$

11. In einem Körperdreieck sind zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel gegeben, die übrigen Stücke zu finden.

Sind die Seiten a, b und der der Seite a gegenüberliegende $\angle\alpha$ gegeben, so hat man für die dritte Seite c die Formel 1 No. 2

$\cos\alpha=\sin b\cdot\sin c\cdot\cos\alpha+\cos b\cdot\cos c$

Dividirt man beiderseits mit $\sin b\cdot\cos\alpha$, so hat man

$$\frac{\cos\alpha}{\sin b\cdot\cos\alpha}=\sin c+\frac{\cot b}{\cos\alpha}\cdot\cos c$$

Man setze nun $\frac{\cot b}{\cos\alpha}$ = der Tangente eines leicht zu bestimmenden Winkels μ, welches zulässig ist, weil die Tangente der Winkel von 0 bis 180° alle reellen positiven und negativen Werthe von 0 bis ∞ begreift. Setze also

$$\frac{\cot b}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\mu \qquad (1)$$

so ist $$\frac{\cos\alpha}{\sin b\cdot\cos\alpha}=\sin c+\operatorname{tg}\mu\cos c=\sin c+\frac{\sin\mu}{\cos\mu}\cos c=\frac{\sin(c+\mu)}{\cos\mu}$$

woraus $$\sin(c+\mu)=\frac{\cos a\cdot\cos\mu}{\sin b\cdot\cos\alpha}$$

$\cos\alpha$ aus Gl. 1 entwickelt und hierein gesetzt, gibt für die dritte Seite c die Bestimmungsgleichung

$$\sin(c+\mu)=\frac{\cos a\cdot\cos\mu}{\sin b\cdot\cot b\cdot\cot\mu}=\frac{\cos a\cdot\sin\mu}{\cos b}\operatorname{tg}\mu=\frac{\cot b}{\cos\alpha} \qquad (V)$$

Zur Bestimmung des zweiten der gegebenen Seite b anliegenden Winkels β hat man:

$\sin a:\sin b=\sin\alpha:\sin\beta$

woraus $$\sin\beta=\frac{\sin b}{\sin a}\sin\alpha \qquad (VI)$$

Für den dritten $\angle\gamma$ hat man nach No. 3, Formel 3

$\sin b\cdot\cot a=\cos b\cdot\cos\gamma+\sin\gamma\cdot\cot\alpha$

Beiderseits mit $\cot\alpha$ dividirt, gibt

$\sin b\cdot\cot a\cdot\operatorname{tg}\alpha=\cos b\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\gamma+\sin\gamma$

Setze $\cos b\cdot\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\psi$, so wird die Gleichung

$$\sin b\cdot\cot a\cdot\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\psi\cdot\cos\gamma+\sin\gamma=\frac{\sin\psi}{\cos\psi}\cdot\cos\gamma+\sin\gamma=\frac{\sin(\psi+\gamma)}{\cos\psi}$$

woraus $\sin(\psi+\gamma)=\sin b\cdot\cot a\cdot tg\,\alpha\cdot\cos\psi$

Aus der Hülfsgleichung ist $tg\,\alpha=\frac{tg\,\psi}{\cos b}$

folglich $\sin(\psi+\gamma)=\sin b\cdot\cot a\cdot\frac{tg\,\psi}{\cos b}\cdot\cos\psi=\cot a\cdot tg\,b\cdot\sin\psi$

Zur Bestimmung des von den gegebenen Seiten eingeschlossenen $\angle\gamma$ hat man demnach

$$\left.\begin{aligned}\sin(\psi+\gamma)&=\cot a\cdot tg\,b\cdot\sin\psi\\ tg\,\psi&=\cos b\cdot tg\,a\end{aligned}\right\}\quad\text{(VII)}$$

12. In einem Körperdreieck sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben, die übrigen Stücke zu finden.

Sind die Seiten a, b und der von ihnen eingeschlossene $\angle\gamma$ gegeben, so hat man für Bestimmung der dritten Seite c

$$\cos c=\sin a\cdot\sin b\cdot\cos\gamma+\cos a\cdot\cos b\quad\text{(VIII)}$$

Um die Formel zum Rechnen mit Logarithmen umzuformen, schreibe

$$\cos c=\cos a\,[tg\,a\cdot\sin b\cdot\cos\gamma+\cos b]$$

Setze nun $tg\,a\cdot\cos\gamma=\cot\varphi$,

so erhält man

$$\cos c=\cos a\,(\sin b\cdot\cot\varphi+\cos b)=\cos a\,\frac{\sin(b+\varphi)}{\sin\varphi}$$

Die beiden Gleichungen zur Bestimmung von c sind daher

$$\left.\begin{aligned}\cos c&=\frac{\cos a\cdot\sin(b+\varphi)}{\sin\varphi}\\ \cot\varphi&=tg\,a\cdot\cos\gamma\end{aligned}\right\}\quad\text{(IX)}$$

Zur Bestimmung der beiden unbekannten Winkel α, β hat man aus den Neperschen Analogien I und II, No. 4

$$\left.\begin{aligned}tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}&=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{\gamma}{2}\\ tg\,\frac{\alpha-\beta}{2}&=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cot\frac{\gamma}{2}\end{aligned}\right\}\quad\text{(X)}$$

13. Von einem Körperdreieck sind eine Seite, ein dieser Seite gegenüberliegender Winkel und ein derselben anliegender Winkel gegeben, die übrigen Stücke zu bestimmen.

Ist die Seite a, der $\angle\alpha$ und der $\angle\beta$ gegeben, so hat man für die dem Winkel β gegenüberliegende Seite b,

$$\sin b=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\sin a\quad\text{(XI)}$$

Für die dem unbekannten Winkel γ gegenüberliegende Seite c betrachte man die Supplementsecke (s. „Ecke“, No. 5 mit Fig. 592), so sind darin gegeben: die Seiten $180^\circ-\alpha$, $180^\circ-\beta$ und der der ersten Seite gegenüberliegende Winkel $180^\circ-\alpha$. Man hat demnach den gesuchten von beiden Sätzen eingeschlossenen Winkel $180^\circ-c$ nach No. 11, Formel VII:

$tg\,\psi=\cot(180^\circ-\beta)\,tg\,(180^\circ-a)=\cos\beta\cdot tg\,a$

$$\sin(180^\circ-c+\psi)=\cot(180^\circ-\alpha)\,tg\,(180^\circ-\beta)\cdot\sin\psi$$

hieraus

$$\left.\begin{aligned}\sin(c-\psi)&=\cot\alpha\cdot tg\,\beta\cdot\sin\psi\\ tg\,\psi&=tg\,a\cdot\cos\beta\end{aligned}\right\}\quad\text{(XII)}$$

Aus den in der Supplementarecke gegebenen Seiten $(180^\circ-\alpha)$, $(180^\circ-\beta)$ und dem gegenüberliegenden $\angle(180^\circ-a)$ hat man nun aus Formel 1, No. 11

$$tg\,\mu=\frac{\cot(180^\circ-\beta)}{\cos(180^\circ-a)}=\frac{\cot\beta}{\cos a}$$

oder $\cot\mu=\frac{\cos\alpha}{\cot\beta}=\cos a\cdot tg\,\beta$

und aus Formel V.

$$\sin(180^\circ-\gamma+\mu)=\frac{\cos(180^\circ-\alpha)\sin\mu}{\cos(180^\circ-\beta)}$$

oder $\sin(\gamma-\mu)=\frac{\cos\alpha\cdot\sin\mu}{\cos\beta}$

hierzu $tg\,\mu=\frac{\cot\beta}{\cos a}$

$$\quad\text{(XIII)}$$

14. Von einem Körperdreieck sind eine Seite und die daran liegenden Winkel gegeben, die übrigen Stücke zu bestimmen.

Sind die Seite a und die anliegenden Winkel β, γ gegeben

dann sind in der Supplementarecke gegeben

die Seiten $(180^\circ-\beta)$, $(180^\circ-\gamma)$ und der von ihnen eingeschlossene Winkel $(180^\circ-a)$.

Die gesuchten Stücke sind

Seite $(180^\circ - a)$, die Winkel $(180^\circ - b)$ und $(180^\circ - c)$

Es ist nach den Neperschen Analogien

$$\cos\frac{180^\circ-\beta+180^\circ-\gamma}{2} : \cos\frac{(180^\circ-\beta)-(180^\circ-\gamma)}{2} = \cot\frac{180^\circ-a}{2} : tg\,\frac{180^\circ-b+180^\circ-c}{2}$$

und

$$\sin\frac{180^\circ-\beta+180^\circ-\gamma}{2} : \sin\frac{(180^\circ-\beta)-(180^\circ-\gamma)}{2} = \cot\frac{180^\circ-a}{2} : tg\,\frac{(180^\circ-b)-(180^\circ-c)}{2}$$

oder

$$\cos\left(180^\circ-\frac{\beta+\gamma}{2}\right) : \cos\frac{\gamma-\beta}{2} = \cot\left(90^\circ-\frac{a}{2}\right) : tg\left(180^\circ-\frac{b+c}{2}\right)$$

$$\sin\left(180^\circ-\frac{\beta+\gamma}{2}\right) : \sin\frac{\gamma-\beta}{2} = \cot\left(90^\circ-\frac{a}{2}\right) : tg\,\frac{c-b}{2}$$

Für das gegebene Körperdreieck erhält man also die Proportionen

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{\beta+\gamma}{2} : \cos\frac{\gamma-\beta}{2} &= tg\,\frac{a}{2} : tg\,\frac{b+c}{2}\\ \sin\frac{\beta+\gamma}{2} : \sin\frac{\gamma-\beta}{2} &= tg\,\frac{a}{2} : tg\,\frac{c-b}{0}\end{aligned}\right\} \quad \text{(XIV)}$$

Diese beiden Proportionen rühren ebenfalls von Neper her und werden daher ebenfalls Nepersche Analogien genannt.

Es werden aus beiden Proportionen $\frac{b+c}{2}$ und $\frac{b-c}{2}$ gefunden, woraus b und c hervorgehen.

Denn es ist $\frac{b+c}{2} + \frac{b-c}{2} = b$

und $\frac{b+c}{2} - \frac{b-c}{2} = c$

Nach No. 12, Formel IX. hat man zur Bestimmung der dritten Seite $(180^\circ - a)$ in der Supplementarecke

$$\cos(180^\circ - a) = \frac{\cos(180^\circ - \beta)\cdot\sin(180^\circ - \gamma + \varphi)}{\sin\varphi}$$

$$\cot\varphi = tg(180^\circ - \beta)\cdot\cos(180^\circ - a)$$

Hieraus

$$-\cos a = \frac{-\cos\beta\cdot\sin(\gamma-\varphi)}{\sin\varphi}$$

und $\cot\varphi = tg\,\beta\cdot\cos a$

folglich hat man in dem gegebenen Dreieck zur Bestimmung des der gegebenen Seite gegenüberliegenden Winkels die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\cos a &= \frac{\cos\beta\cdot\sin(\gamma-\varphi)}{\sin\varphi}\\ \cot\varphi &= \cos a\cdot tg\,\beta\end{aligned}\right\} \quad \text{(XV)}$$

15. Von einem Körperdreieck sind die drei Winkel gegeben, die drei Seiten zu finden.

Man hat nach No. 5

$\cos a = \sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos a - \cos\beta\cdot\cos\gamma$

hieraus

$$\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cdot\cos\gamma}{\sin\beta\cdot\sin\gamma} \quad \text{(XVI)}$$

Um eine Formel für a zu finden, die sich bequem mit Logarithmen rechnen läfst, hat man in der Supplementarecke nach No. 10, Formel I.

$$\sin\frac{180^\circ-a}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{180^\circ-\alpha+180^\circ-\beta-(180^\circ-\delta)}{2}\cdot\sin\frac{180^\circ-\alpha-(180^\circ-\beta)+180^\circ-\gamma}{2}}{\sin(180^\circ-\beta)\cdot\sin(180^\circ-\gamma)}}$$

oder

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}} \quad \text{(XVII)}$$

Ferner nach No. 10, Formel II.

$$\cos\frac{180^\circ-a}{2} = \sqrt{\frac{\sin\frac{3\cdot180^\circ-(\alpha+\beta+\gamma)}{2}\cdot\sin\frac{180^\circ-\beta-\gamma+\alpha}{2}}{\sin(180^\circ-\beta)\cdot\sin(180^\circ-\gamma)}}$$

woraus $$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}} \qquad \text{(XVIII)}$$

In dem Art. Ecke ist erwiesen, dafs die Summe sämmtlicher Winkel in einer $n$seitigen Ecke gröfser ist als $(2n-4)$ und kleiner als $2n$ rechten Winkeln.

In einem Körperdreieck ist also die Summe der drei Winkel kleiner als 6 und gröfser als 2 rechten Winkeln.

Daher ist $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}>90°<3\cdot90°$

folglich $\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ immer negativ

Ferner sind 2 Seiten eines Körperdreiecks immer gröfser als die dritte Seite. (S. Ecke No. 2). Nun sind die Seiten der Supplementsecke $180°-\alpha$, $180°-\beta$, $180°-\gamma$;

daher $180°-\gamma+180°-\beta>180°-\alpha$

woraus $180°>\beta+\gamma-\alpha$

also $90°>\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$

folglich ist $\cos\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$ immer positiv, und daraus folgt, dafs die Gröfse unter dem Wurzelzeichen stets positiv ist.

Hieraus folgt, dafs wenn drei gegebene Winkel wirklich einem Körperdreieck zukommen sollen, so mufs nicht allein ihre Summe zwischen 2 und 6 Rechten begriffen sein, sondern je zwei derselben zusammen genommen müssen den dritten Winkel immer um weniger als 180° übertreffen.

Anwendungen.

16. In einem Körperdreieck, wovon 2 Seiten gegeben sind ist die Summe der drei Winkel am gröfsten, wenn der eingeschlossene Winkel den anderen beiden zusammen genommen gleich ist.

Denn sind a, b die gegebenen Seiten, γ der eingeschlossene Winkel, sind also α, β die den Seiten gegenüber liegenden Winkel, so hat man nach der Neperschen Analogie I.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{\gamma}{2}$$

hieraus

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}=\frac{\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1-\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{\gamma}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{a-b}{2}\cot\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{a+b}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}-\cos\frac{a-b}{2}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{a+b}{2}\cdot\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{a+b}{2}-\cos\frac{a-b}{2}\right)}$$

$$=\frac{\cos\frac{a-b}{2}\cdot\frac{1+\cos\gamma}{2}+\cos\frac{a+b}{2}\cdot\frac{1-\cos\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\cos\gamma}{2}\cdot\left(\cos\frac{a+b}{2}-\cos\frac{a-b}{2}\right)}$$

$$=\frac{\cos\frac{a-b}{2}+\cos\frac{a+b}{2}+\left(\cos\frac{a-b}{2}-\cos\frac{a+b}{2}\right)\cos\gamma}{\sin\gamma\left(\cos\frac{a+b}{2}-\cos\frac{a-b}{2}\right)}$$

Nun ist $$\cos\frac{a-b}{2}+\cos\frac{a+b}{2}=2\cos\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{b}{2}$$

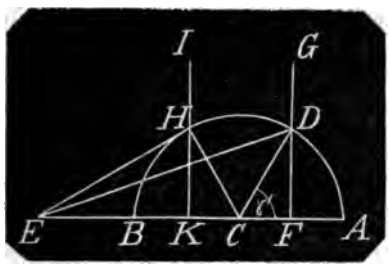
$$\cos\frac{a-b}{2}-\cos\frac{a+b}{2}=2\sin\frac{a}{2}\cdot\sin\frac{b}{2}$$

Diese Werthe substituirt entsteht

$$g\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\frac{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos\gamma}{-2\sin\frac{a}{2}\cdot\sin\frac{b}{2}\sin\gamma}=-\frac{\cot\frac{a}{2}\cdot\cot\frac{b}{2}+\cos\gamma}{\sin\gamma}$$

Nun beschreibe man einen Halbkreis mit dem Halbmesser = 1 aus C über AB, trage an AC einen Winkel $ACD=\gamma'$, nehme auf der verlängerten AB die

Fig. 741.



Länge $CE=\cot\frac{a}{2}\cdot\cot\frac{b}{2}$, fälle das Loth DF auf AB, ziehe DE, so ist $DF=\sin\gamma'$ $CF=\cos\gamma'$,

folglich $EF=\cot\frac{a}{2}\cdot\cot\frac{b}{2}+\cos\gamma'$

Mithin ist

$$tg\,EDF=\frac{EF}{DF}=\frac{\cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}+\cot\gamma'}{\sin\gamma'}$$

Eben so groſs ist $tg\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$, nur dem Vorzeichen nach entgegengesetzt: Daher ergänzen sich die Winkel $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ und EDF zu zwei Rechten.

Verlängert man daher FD über D hinaus nach G, so ist

$$\angle\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\angle EDG=\angle EFD+\angle DEF$$
$$=90^\circ+\angle DEF.$$

Daher wird $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$, also auch $(\alpha+\beta+\gamma)$ ihren gröſsten Werth haben, wenn $\angle DEF$ ein Maximum ist. Nun ist aber $\angle DEF$ ein Maximum, wenn DE den Halbkreis berührt. Zieht man also von E eine Tangente EH an den Halbkreis, zieht den Halbmesser CH, so wird für $\gamma'=\angle ACH$ der $\angle AEH$ und mit diesem die Summe $(\alpha+\beta+\gamma)$ ein Maximum. Alsdann aber ist $\angle AEH=\angle ACH-\angle CHE=\gamma'-90^\circ$, folglich $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\angle EAJ=\gamma$

Aus $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\gamma$ folgt $\alpha+\beta=\gamma$. D. h. Die Summe der anliegenden Winkel = dem eingeschlossenen Winkel.

1. Zusatz. Wäre $\cot\frac{a}{2}\cdot\cot\frac{b}{3}\gtrless 1$, so fiele der Punkt E entweder in B oder zwischen B und C und der $\angle EDF=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ und die Summe $(\alpha+\beta+\gamma)$ der Winkel würde immer gröſser werden, je näher der Punkt D an B rückt und ein Maximum für $\gamma=180^\circ$, wo kein Dreieck mehr statt findet. Soll also ein Maximum der Winkelsumme statt finden können, so muſs $\cot\frac{a}{2}\cdot\cot\frac{b}{2}>1$ sein, folglich $\cot\frac{a}{2}>tg\frac{b}{2}$, oder $tg\left(90^\circ-\frac{a}{2}\right)>tg\frac{b}{2}$ oder $90^\circ-\frac{a}{2}>\frac{b}{2}$ oder $180^\circ>a+b$; d. h. es muſs die Summe beider Seiten kleiner als 2 rechte Winkel sein.

2. Zusatz. Ist $ABCS$ ein Körperdreieck aus den gegebenen Seiten a, b der von diesen eingeschlossene Winkel γ so groſs als die beiden anderen Winkel α, β zusammengenommen, also die Summe $\alpha+\beta+\gamma$ der Winkel ein Maximum, und man legt durch die Kante CS eine Ebene CSD so, daſs der Winkel, den diese Ebene mit der Seite ASC bildet, dem $\angle\alpha=$ ist, so ist der Winkel zwischen derselben Ebene und der Seite $BSC=\beta$.

Schneidet diese Ebene die Seite ASB in der Linie DS, so bilden sich zwei Körperdreiecke $ACDS$ und $BCDS$, worin in jedem zwei Winkel für sich gleich, und also auch die diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten einander gleich sind.

Man hat also Seite $ASD=CSD$

und Seite $BSD=CSD$

woraus Seite $ASD=BSD$

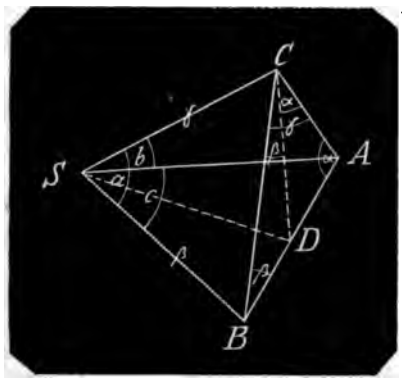
Nimmt man auf den Kanten von S aus gleiche Stücke $AS=BS=CS$ und zieht die Geraden AB, AC, BC, wo AB die DS in D schneidet und zieht nach CD so ist $\triangle ASD\cong\triangle CSD$

also auch $AD = CD$

Eben so ist $\triangle BSD \cong \triangle CSD$

also auch $BD = CD$

Fig. 742.



Beschreibt man daher aus D in der Ebene ABC aus D einen Kreis, so trifft dieser den Punkt C und folglich ist $\angle ACB$ ein Winkel im Halbkreis $= 90°$.

Hieraus läfst sich der $\angle\gamma$ durch eine Construction in der Ebene finden. Denn da $\angle BCS = 90° - \frac{a}{2}$, $\angle ACS = 90° - \frac{b}{2}$ und $\angle ACB = 90°$, so construire mit diesen drei Winkeln als Seiten (s. Ecke No. 19 mit Fig. 597) die Körperecke $ABSC$ und man hat den der Seite $ACB = 90°$ gegenüberliegenden Winkel $ACSB = \gamma$.

Da der $\angle ACB$ ein rechter ist, so ist das Dreieck ABC das gröfste, welches unter den Seiten AC und BC gebildet werden können. Die Winkelsumme in dem Körperdreieck ist also ein Maximum, wenn das ebene Dreieck, dessen Spitzen auf den Kanten gleichweit vom Scheitel liegen ein Maximum ist.

Alle Sätze, welche über das Maximum der Fläche geradliniger Figuren in der ebenen Geometrie vorkommen, entsprechen ähnlichen Sätzen über das Maximum der Winkelsumme der mehrseitigen Körperecken. Nimmt man z. B. auf der Kante einer Ecke vom Scheitel aus gleiche Stücke und verbindet die Eckpunkte der letzteren durch gerade Linien die in die Seiten der Ecke fallen, so läfst sich erweisen, dafs die Winkelsumme der Körperecke, wenn alle Seiten gegeben sind, ein Maximum ist, wenn das geradlinige Vieleck die möglich gröfste Fläche hat; d. h. wenn die Endpunkte der auf den Kanten gleich genommenen Stücke Punkte eines und desselben Kreisumfangs sind.

Von den Kantenwinkeln.

17. Fig. 740 (pag. 36) ist von dem Punkt C der Kante CS das Loth CD auf die Seite ASB (c) gefällt. Durch CSD eine Ebene gelegt erzeugt den Winkel CSD der Kante CS mit der Seite ASB (c), den Kantenwinkel CSD, welcher mit c' bezeichnet werden soll.

Eben so würde ein Loth von A auf die Seite BSC (a) den Kantenwinkel a', das Loth von B auf die Seite ASC (b) den Kantenwinkel b' erzeugen.

In No. 1 (pag. 35) hat man die Höhe $CD = CS \cdot \sin b \cdot \sin\alpha = CS \cdot \sin a \cdot \sin\beta$

Eben so würde sein die Höhe von A auf die Seite a
$= AS \cdot \sin c \cdot \sin\beta = AS \cdot \sin b \cdot \sin\gamma$

und die Höhe von B auf die Seite b
$= BS \cdot \sin c \cdot \sin\alpha = BS \cdot \sin a \cdot \sin\gamma$

18. Aus gegebenen 3 Seiten a, b, c die drei Kantenwinkel a', b', c' zu finden.

Es ist $\sin a' = \sin b \cdot \sin\gamma = \sin b \cdot \sqrt{1 - \cos^2\gamma} = \sin b \cdot \sqrt{(1+\cos\gamma)(1-\cos\gamma)}$

Oder nach Formel 4 (pag. 38)

$$\sin a' = \sin b \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{\cos c + \cos a \cdot \cos b}{\sin b \cdot \sin c}\right)\left(1 - \frac{\cos c + \cos a \cdot \cos b}{\sin b \cdot \sin c}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sin c}\sqrt{1 - [\cos c - \cos a \cdot \cos b]^2}$$

$$= \frac{1}{\sin c}\sqrt{[\cos c - \cos(a+b)]\,[\cos(a-b) - \cos c]}$$

$$\text{I. } \sin a' = \frac{2}{\sin a}\sqrt{\sin\frac{a+b+c}{2} \cdot \sin\frac{a+b-c}{2} \cdot \sin\frac{a+c-b}{2} \cdot \sin\frac{b+c-a}{2}}$$

$$\text{II. } \sin b' = \frac{2}{\sin b}\sqrt{\sin\frac{a+b+c}{2} \cdot \sin\frac{a+b-c}{2} \cdot \sin\frac{a+c-b}{2} \cdot \sin\frac{b+c-a}{2}}$$

$$\text{III. } \sin c' = \frac{2}{\sin c}\sqrt{\sin\frac{a+b+c}{2} \cdot \sin\frac{a+b-c}{2} \cdot \sin\frac{a+c-b}{2} \cdot \sin\frac{b+c-a}{2}}$$

19. Aus zwei Seiten a, b und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel γ die 3 Kantenwinkel a', b', c' zu finden.

Man hat die drei Gleichungen

$$\sin a' = \sin b \cdot \sin \gamma$$
$$\sin b' = \sin a \cdot \sin \gamma$$
$$\sin c' = \sin a \cdot \sin \beta$$

Nun ist β unbekannt und durch a, b, γ auszudrücken.

Es ist nach No. 2 Formel 4

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

Aus No. 1, Formel 3

$$\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c} \sin \gamma$$

Beide Gleichungen durch einander dividirt, gibt

$$\cot \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} \cdot \frac{\sin c}{\sin a \cdot \sin \gamma} = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin b \cdot \sin \gamma}$$

Und nun $\cos c$ fortzuschaffen nach No. 2, Formel 3

$$\cot \alpha = \frac{\cos a - \cos b (\sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma + \cos a \cdot \cos b)}{\sin a \cdot \sin b \cdot \sin \gamma}$$
$$= \frac{\cos a \cdot \sin b - \sin a \cdot \cos b \cdot \cos \gamma}{\sin a \cdot \sin \gamma}$$

Mit Verwechselung der Buchstaben also

$$\cot \beta = \frac{\cos b \cdot \sin a - \sin b \cdot \cos a \cdot \cos \gamma}{\sin b \cdot \sin \gamma}$$

20. Es sind 2 Seiten a, b und ein gegenüberliegender Winkel etwa α gegeben, die Kantenwinkel a', b', c' zu finden.

Man hat $\sin a' = \sin b \cdot \sin \gamma$

wo $\sin \gamma$ aus No. 11, Formel VII. erst zu ermitteln ist.

Man hat ferner $\sin b' = \sin b \cdot \sin \gamma$

desgleichen $\sin \gamma$ wie für $\sin a'$ zu ermitteln.

Endlich einfach $\sin c' = \sin b \cdot \sin \alpha$

21. Es sind eine Seite (a) und die anliegenden Winkel β und γ gegeben, die Kantenwinkel zu finden.

Es ist $\sin a' = \sin b \cdot \sin \gamma$
$\sin b' = \sin a \cdot \sin \gamma$
$\sin c' = \sin a \cdot \sin \beta$

In der ersten Formel findet man die unbekannte b, wenn man die Formel für $\cot \beta$, No. 19, durch $\sin b$ wirklich dividirt; man erhält

$$\sin \gamma \cdot \cot \beta = \cot b \cdot \sin a - \cos a \cdot \cos \gamma$$

woraus $\cot b = \dfrac{\cot \beta \cdot \sin \gamma + \cos a \cdot \cos \gamma}{\sin a}$

Man kann auch um mit Logarithmen bequem zu rechnen, nach Formel XIV. die Neperschen Analogien benutzen, indem man $\frac{b+c}{2}$ und $\frac{b-c}{2}$ ermittelt.

Es ist dann

$$tg \frac{b+c}{2} = tg \frac{a}{2} \cdot \frac{\cos \frac{\gamma - \beta}{2}}{\cos \frac{\gamma + \beta}{2}}$$

$$tg \frac{c-b}{2} = tg \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\gamma - \beta}{2}}{\sin \frac{\beta + \gamma}{2}}$$

$$\frac{b+c}{2} - \frac{c-b}{2} = b$$

22. Es ist eine Seite a, der ihr gegenüberliegende Wiekel α und ein ihr anliegender β, die Kantenwinkel zu finden.

Es ist wieder $\sin a' = \sin c \cdot \sin \beta$
$\sin b' = \sin a \cdot \sin \gamma$
$\sin c' = \sin a \cdot \sin \beta$

Nun ist nach No. 13, Formel XII.

$$\sin (c - \psi) = \cot \alpha \cdot tg \beta \cdot \sin \psi$$

nach No. 13, Formel VIII.

$$\sin (\gamma - \mu) = \frac{\cos \alpha \cdot \sin \mu}{\cos \beta}$$

23. Es sind die 3 Winkel α, β, γ gegeben, die Kantenwinkel a', b', c' zu finden.

In No. 15 hat man sehr bequem zu rechnende Formeln, aber nur für die Sinus der halben Seiten, welche hier nicht passen.

Entwickelt man wie No. 18, so erhält man

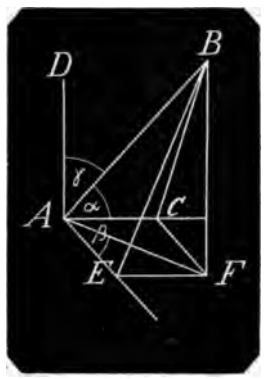
$$\sin a' = \frac{2}{\sin \alpha} \sqrt{\sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \cdot \sin \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} \cdot \sin \frac{\alpha + \gamma - \beta}{2} \cdot \sin \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2}}$$

und so für die beiden anderen Kantenwinkel.

24 Werden von einem Punkt einer geraden Linie drei unter sich normale Linien gezogen, so ist die Summe der Quadrate der Cosinus von den Winkeln, welche die erstgenannten Linie mit den 3 Normalen macht, = 1. .

Aus dem Punkt A der Geraden AB seien die unter sich Normalen AC, AD, AE gezogen, so dafs $\angle CAD = \angle CAE = \angle DAE = R$. $\angle BAC = \alpha$, $\angle BAE = \beta$, $\angle BAD = \gamma$. Von einem Punkt B der

Fig. 743.



Geraden AB fälle auf die Ebene CAE die Normale BF und auf die Geraden AC, AE die Normalen BC, BE. Zieht man dann die Verbindungslinien CF, EF, so ist $ACEF$ ein Rechteck. Zieht man noch AF, so ist auch $\angle AFB$ ein rechter und $\angle ABF = \gamma$. Man hat also

$$AC = AB\cos\alpha$$
$$AE = AB\cos\beta$$
$$BF = AB\cos ABF = AB\cdot\cos\gamma$$

Nun ist

$$AF^2 = AC^2 + AE^2 = AB^2\cdot\cos^2\alpha + AB^2\cdot\cos^2\beta$$
$$= AB^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta)$$

woraus

$$AB^2 = AF^2 + BF^2 = AB^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta) + AB^2\cdot\cos^2\gamma$$

folglich $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

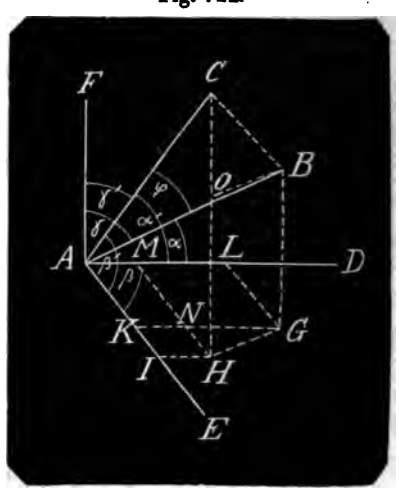
Sind die Winkel α, β, γ stumpf, so verlängere man die Normalen AC, AD, AE über den Punkt A hinaus, so entstehen unterhalb spitze Winkel $180° - \alpha$, $180° - \beta$, $180° - \gamma$. Für die Cosinus dieser Winkel gilt dann der eben geführte Beweis. Nun ist aber $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ u. s. w. Folglich $\cos^2(180° - \alpha) = \cos^2\alpha$ u. s. w. Folglich gilt der Satz auch für stumpfe Winkel.

25. Werden durch den Durchschnittspunkt zweier Geraden drei unter sich normale Linien gezogen, so ist die Summe der Producte der Cosinus von den Winkeln, welche die beiden erst genannten Geraden mit jeder der Normalen machen, gleich dem Cosinus des von den beiden Geraden unter sich bildenden Winkels. D. h. Wenn die eine Gerade mit den drei Normalen die Winkel α, β, γ, die andere Gerade mit denselben Normalen die Winkel α', β', γ' bildet und der Winkel zwischen beiden Geraden $= \varphi$ ist, so hat man

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cdot\cos\alpha' + \cos\beta\cdot\cos\beta' + \cos\gamma\cdot\cos\gamma'$$

AB und AC sind die beiden Geraden, deren Winkel $= \varphi$, AD, AE, AF die drei unter sich Normalen; $\angle BAD = \alpha$, $\angle BAE = \beta$, $\angle BAF = \gamma$; $\angle CAD = \alpha'$, $\angle CAE = \beta'$, $\angle CAF = \gamma'$. Man nehme auf AB, AC zwei Stücke $AB = AC$ fälle von B und C auf die Ebene DAE die Lothe BG und CH, von G und H auf AE die Lothe GK und HJ und auf AD die Lothe GL und HM, ziehe $BO \fallingdotseq GH$. Dann hat man im $\triangle ABC$

Fig. 744.



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cos\varphi$$

oder da $AB = AC$

$$BC^2 = 2AB^2(1 - \cos\varphi)$$

Ferner ist

$$BG = AB\cdot\cos ABG = AB\cdot\cos\gamma$$
$$CH = AC\cdot\cos\gamma' = AB\cdot\cos\gamma'$$

hieraus $CO = CH - BG = AB(\cos\gamma' - \cos\gamma)$

BG normal der Ebene DAE, GL AD, und GK normal AE, so sind iecke BAL und BAK bei L und twinklig.

hat daher $AL = AB \cdot \cos\alpha$

$AK = AB \cdot \cos\beta$

demselben Grunde ist

$AM = AC \cdot \cos\alpha' = AB \cdot \cos\alpha'$

$AJ = AC \cdot \cos\beta' = AB \cdot \cos\beta'$

Da nun $\angle DAE = R$, so ist $\triangle GHN$ bei N rechtwinklig, und man hat

$GN = LM = AL - AM = AB(\cos\alpha - \cos\alpha')$

$HN = KJ = AJ - AK = AB(\cos\beta' - \cos\beta)$

daher

$$GH^2 = GN^2 + HN^2 = AB^2(\cos\alpha - \cos\alpha')^2 + AB^2(\cos\beta' - \cos\beta)^2$$

eraus wieder

$$GO^2 + CO^2 = AB^2(\cos\alpha - \cos\alpha')^2 + AB^2(\cos\beta' - \cos\beta)^2 + AB^2(\cos\gamma' - \cos\gamma)^2$$

$$= AB^2[\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' - 2\cos\alpha \cdot \cos\alpha' - 2\cos\beta \cdot \cos\beta' - 2\cos\gamma \cdot \cos\gamma']$$

in ist nach Satz No. 24

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 = \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma'$$

wird

$$BC^2 = 2AB^2(1 - \cos\alpha \cdot \cos\alpha' - \cos\beta \cdot \cos\beta' - \cos\gamma \cdot \cos\gamma')$$

eser Werth dem obigen für BC^2 gleich gesetzt gibt die Gleichung

$$1 - \cos\alpha \cdot \cos\alpha' - \cos\beta \cdot \cos\beta' - \cos\gamma \cdot \cos\gamma' = 1 - \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \cos\alpha \cdot \cos\alpha' + \cos\beta \cdot \cos\beta' + \cos\gamma \cdot \cos\gamma'$$

e Gleichung bleibt allgemein gülche Werthe die Winkel α, α' u. wischen 0 und 180° auch haben wofern man nur die Cosinus dienkel mit ihren zugehörigen Vorin Rechnung bringt. Ist z. B. stumpfer Winkel, so fällt AL auf rlängerung der Linie AD über A AL wird $AB\cos(180° - \alpha)$, ML $AM = AB[\cos\alpha' + \cos(180° - \alpha)]$ $\cos(180° - \alpha) = -AB(\cos\alpha - \cos\alpha')$, nth, der sich von dem oben beWerth nicht an Grösse, sonam Vorzeichen unterscheidet. der Werth von ML zur Bestimvon $\cos\varphi$ quadrirt wird, so fällt er Unterschied der Vorzeichen fort, bleibt das Endresultat dasselbe es gilt für alle übrigen Winkel.

ein rechter Winkel, so ist $\cos\varphi$ kan hat also den Satz: Wenn 2 n, mit drei unter sich Norbeliebige Winkel und unter inen rechten Winkel bilden, die Summe der Producte aus Cosinus je zweier Winkel, e jede der drei unter sich alen mit jenen Linien bil0.

erzahl, s. v. w. „Cubikzahl."

erzone ist ein Theil der Kugel, n zwei parallelen Kreisebenen und ischen befindlichen Zone begrenzt

erlich ist alles, was sich auf den bezieht; s. v. w. „cubisch".

Körperlicher Winkel, s. v. w. „Ecke, Körperecke."

Koluren sind die beiden auf der Himmelskugel durch die Pole geführten gröfsten Kreise, von denen der eine durch die beiden Nachtgleichenpunkte, der andere durch die Wendepunkte trifft; ersterer heifst der Kolurus der Nachtgleichen, letzterer der Kolurus der Sonnenwenden. [Der Name Kolur soll herkommen von κολουρις, abgestutzt, verstümmelt, nach Kepler, weil der Kreis immer nur theilweise, also verstümmelt, ohne sein südliches Ende zu sehen ist.]

Kometen. (κομη das Haar, κομητης αστηρ behaarter Stern.) Sie sind offenbar Weltkörper, die wie die Planeten in Ellipsen um die Sonne sich bewegen; dagegen sind ihre Bahnen sehr gestreckt, von grofser Excentricität. Wenn sie in unsern Gesichtskreis kommen, so sind sie in der Nähe ihres Perihels, ihr Durchgang durch dasselbe ist uns sichtbar, desgleichen sind es die Knoten ihrer Bahn mit unserer Ekliptik, und dies macht es den Astronomen möglich ihren Lauf zu berechnen.

Bis jetzt sind schon mehr als 140 Kometen entdeckt aber nur wenige von denselben nämlich nur die in der Neuzeit beobachteten, genau berechnet. Tycho de Brahe war der erste, welcher den Lauf eines 1577 erschienenen Kometen mit Aufmerksamkeit beobachtete; hierauf einen zweiten im Jahr 1585. Kepler beobachtete einen Kometen im Jahre 1618. Einer

der merkwürdigsten Kometen erschien 1680, der nach späterer Berechnung von Bessel im Perihel nur 30000 Meilen von der Sonne entfernt gewesen ist, daher von ungeheurem Glanze war und einen Schwanz von 70° in einer Länge 10 Millionen Meilen hatte. Er hatte während der Dauer seiner Sichtbarkeit die Ekliptik in zwei volle 98° auseinander liegenden Punkten durchschnitten.

Die erste Vorhersagung der sicheren Wiederkehr eines Kometen geschah von Halley, er kündigte seinen Kometen auf den Anfang des Jahres 1759 an und wurde am 25ten December 1758 zuerst gesehen. Die Unsicherheit der Widerkehr in einer Differenz von oft 100 Tagen gegen die Berechnung liegt in den Störungen, der der Komet auf seiner Bahn von ihm begegnenden grofsen Massen, wie der Jupiter z. B., durch Beschleunigungen und Verzögerungen in Folge der Attraction dieser Massen ausgesetzt ist. Die letzte Erscheinung dieser Kometen geschah bei 76jähriger Umlaufszeit im Herbst 1835 und sein Wiedererscheinen wird im Jahre 1911 stattfinden.

Der Schweif des Kometen ist von der Sonne immer abgewendet. Newton erklärt ihn als einen Dunst, der aus dem Kometen sich entwickelt, von der Sonnenwärme verflüchtigt und zugleich durch eine der Sonne inwohnende Kraft von ihr abgestofsen wird. Der Dunst wird von der Attractionskraft des Kometenkerns in der Bahn mit fortgeführt. Die beobachteten Lichtänderungen in dem Kern eines Kometen machen es nicht unwahrscheinlich, dafs der Komet ein selbst leuchtender Körper ist. Es kommt nämlich vor, dafs der Komet in grösserer Entfernung ein glänzenderes Licht zeigt als in deren grösserer Nähe.

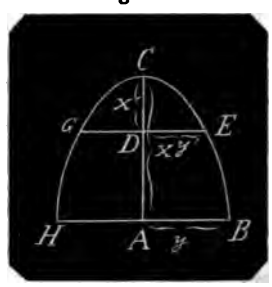
Konchoide, eine Curve, ist in dem Art. „Curven“, No. 13, pag. 165 mit Fig. 522 und 523 abgehandelt. In dem Art. „Curvenlehre“, pag. 189, Beispiel 2 sind die Gleichungen für ihre Wendungspunkte aufgestellt, untersucht und mit Zahlenbeispielen erläutert.

Konisch, s. v. w. „Kegelförmig“, sagt man besonders von Theilen an Instrumenten, Apparaten und Maschinen, die kaum sichtbar von der cylindrischen Form abweichen.

Konoid ist ein kegelförmiger Körper: er unterscheidet sich aber von dem Kegel dadurch, dafs dessen Seite keine gerade Linie, sondern eine krumme Linie ist, die sich vom Scheitel bis zur Grundlinie von der Axe immer mehr und mehr entfernt. Das Konoid ist also ein Umdrehungskörper und seine Beschaffenheit hängt allein von der Beschaffenheit dessen Seite ab. Unter allen möglichen Konoiden haben nur das parabolische und das hyperbolische Konoid Wichtigkeit.

Wenn man von dem Scheitel C einer Parabel oder einer Hyperbel auf deren Axe eine beliebige Länge CA nimmt, dort ein Loth AB bis zur Curve errichtet und den zwischen CAB begriffenen Abschnitt um die Axe AC vollständig umdreht, so entsteht ein Körper, der im

Fig. 745.



ersten Fall ein parabolisches, im zweiten Fall ein hyperbolisches Konoid ist. Ein Körper zwischen zwei Normalen AB und CD um AD gedreht ist ein abgekürztes Konoid.

2. Die allgemeine Formel für den Inhalt der konoidischen Oberfläche hat man in dem Art. Curvenlehre, pag. 194 entwickelt:

$$F = 2\pi \int y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, \partial x + C$$

worin $AC = x$, $AB = y$ ist.

Für die Parabel ist $y^2 = px$

hieraus $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}} = \frac{1}{2}\frac{p}{y}$

und $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{2y}{p}$

Demnach ist

$$F = 2\pi \int y \sqrt{1 + \tfrac{1}{4}\frac{p^2}{y^2}} \cdot \frac{\partial x}{\partial y}\, \partial y = 2\pi \int \sqrt{y^2 + \tfrac{1}{4}p^2} \cdot \frac{2y}{p}\, \partial y$$

also $$F = \tfrac{1}{3}\frac{\pi}{p}(y^2 + \tfrac{1}{4}p^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi}{6}\sqrt{p}\,(4x + p)^{\frac{3}{2}} \qquad (1)$$

und zwar für die Gesammtoberfläche des parabolischen Konoids *HCB*.

Soll die Oberfläche des abgekürzten Konoids *GEBH* bestimmt werden, so setze man die Abscisse $CD = x$, und $DE = y$,; alsdann ist für x der Werth x' oder für y den Werth y' gesetzt $F = 0$. Man hat demnach die Formel für F

$$0 = \tfrac{1}{3}\frac{\pi}{p}(y_,^2 + \tfrac{1}{4}p^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

oder $$0 = \tfrac{1}{3}\pi(4x_, + p)^{\frac{3}{2}} + C'$$

woraus nach Bestimmung von C und C'

$$\left.\begin{aligned} F' = \text{Umfang } GEBH &= \tfrac{1}{3}\frac{\pi}{p}\left[(y^2 + \tfrac{1}{4}p^2)^{\frac{3}{2}} - (y_,^2 + \tfrac{1}{4}p^2)^{\frac{3}{2}}\right] \\ &= \frac{\pi}{6}\sqrt{p}\left[(4x + p)^{\frac{3}{2}} - (4x_, + p)^{\frac{3}{2}}\right] \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

2. Für die Hyperbel ist in dem Art. **Hyperbel No. 29 mit Fig. 718** die Oberfläche eines vollständigen Konoids entwickelt wenn die halbe Hauptaxe a, die halbe Nebenaxe c und die Excentricität $e = \sqrt{a^2 - c^2}$ gegeben und die Abscisse u vom Mittelpunkt beider Hyperbeln genommen wird, die Formel für F ist Formel 75 nämlich

$$F = \pi c\left[\frac{u}{a^2}\sqrt{e^2u^2 - a^4} - c - \frac{a^2}{e}ln\frac{eu + \sqrt{e^2u^2 - a^4}}{a(e + c)}\right]$$

Man hat durch Integrirung vorher

$$\int\sqrt{e^2u^2 - a^4}\,\partial u = \frac{u}{2}\sqrt{e^2u^2 - a^2} - \frac{a^4}{2e}ln\,(eu + \sqrt{e^2u^2 - a^4}) + C$$

Für ein vollständiges Konoid wird nun die Constante bei $F = 0$ für $u = a$ und man erhält

$$C = -\frac{ac}{2} + \frac{a^4}{2e}ln\,(e + c)\,a$$

Will man ein abgekürztes Konoid haben, so setzt man $F = 0$ für $u = u$, dann ist

$$0 = \frac{u_,}{2}\sqrt{e^2u_,^2 - a^4} - \frac{a^4}{2e}ln\,(eu_, + \sqrt{e^2u_,^2 - a^4}) + C$$

und man erhält die Oberfläche des abgekürzten hyperbolischen Konoids

$$F = \frac{\pi c}{a^2}\left[u\sqrt{e^2u^2 - a^4} - u_,\sqrt{e^2u_,^2 - a^4}\right] - \frac{\pi ca^2}{e}ln\frac{eu + \sqrt{e^2u^2 - a^4}}{eu_, + \sqrt{e^2u_,^2 - a^4}}$$

4. Die allgemeine Formel für den Inhalt eines konoidischen Körpers hat man in dem Art. „Curvenlehre", VIII., pag. 195.

$$K = \pi\int y^2\,\partial x + C$$

Für die Parabel ist $y^2 = px$ u. s. w. s. No. 2).

Hieraus für den Inhalt des parabolischen Konoids *ACB*

$$K = \pi\int px\,\partial x = \tfrac{1}{2}\pi px^2$$

wo Constante fortfällt, weil für $x = 0$ auch $= 0$ wird.

Soll der Inhalt des abgekürzten Konoids *EGH* gefunden werden, so hat man

$$K = 0 \text{ für } x = x,$$

und es ist der Inhalt des abgekürzten parabolischen Konoides

$$K' = \tfrac{1}{2}\pi p(x^2 - x_,^2)$$

5. Für die Hyperbel hat man in dem Art. „Hyperbel", No. 32 den Inhalt der vollständigen Hyperbel

$$K = \tfrac{1}{3}\pi\frac{c^2}{a^2}x^2(3a + x)$$

wo c, a die Bedeutungen No. 3 haben.

Für das abgekürzte Konoid *EGHB* hat man

$$K_, = \tfrac{1}{3}\pi\frac{c^2}{a^2}\left[3a(x^2 - x_,) + x^3 - x_,^3\right]$$

Kosmisch (κοσμος die Welt) ist was die Welt betrifft. Der Aufgang und der Untergang eines Gestirns heißt kosmisch, wenn beides zugleich mit dem Aufgang der Sonne geschieht. In neuerer Zeit sind diese kosmischen Auf- und Untergänge ohne Werth. Im Alterthum dagegen waren sie wegen der damaligen

Mangelhaftigkeit des Kalenders von Wichtigkeit. Da aber solcher Aufgang wegen des Glanzes der Sonne nicht wohl zu beobachten war, so nahmen sie für ihn den leicht zu beobachtenden Aufgang in der Morgendämmerung, den heliacischen Aufgang, welcher etwa 12 Tage später eintrat als der kosmische. Den Aegyptern war der heliacische Aufgang des Sirius, da mit ihm die Nilüberschwemmungen zusammentrafen, von so hoher Bedeutung, dafs sie mit dem Tage ihr Jahr anfingen.

Kosmogomie ist die Lehre von der Entstehung der Körperwelt oder vielmehr der Weltkörper; die Lehre kann nur hypothetisch sein.

Kosmographie, Weltbeschreibung ist für den gestirnten Himmel was die Geographie für die Erde ist. Man kann auch die Geographie als einen Theil der K. betrachten.

Kosmologie, die Lehre von der Beschaffenheit der ganzen materiellen Welt, besonders der Naturgesetze.

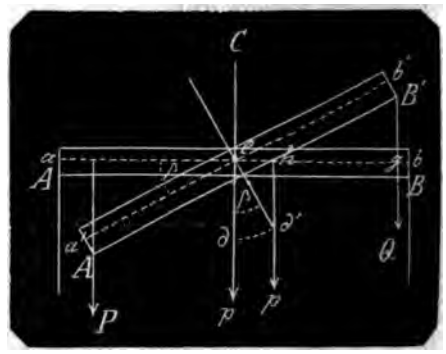
Kräfte im Gleichgewicht, s. hinter: „Kraft".

Krämerwaage, gemeine Waage ist ein zweiarmiger Hebel, dessen beide Arme gleich lang und gleich schwer sind und dient zu directer Ermittelung des Gewichts eines gegebenen Körpers oder einer Menge Stoff von verlangtem Gewicht mit Hülfe bekannter Gegengewichte, indem beide, Stoff und Gegengewicht ins Gleichgewicht gebracht werden.

Ist AB ein Waagebalken und ist derselbe mit seinem daran befindlichen Zubehör in der Mittellinie CC fest aber um einen in CC befindlichen Punkt innerhalb der lothrechten Ebene frei drehbar aufgehängt, so sollen die an die Endpunkte A und B befestigten Körper von gleichem Gewicht sein, wenn der Waagebalken in die waagerechte Lage sich versetzt hat und wenn er aus derselben herausgebracht wird, durch selbstständiges Penduliren wieder in dieselbe einspielt. soll nun diese Richtigkeit der Waage statt finden, so mufs dieselbe Bedingung auch von der unbelasteten Waage gelten, und dies gibt folgende Bedingungen:

1. Der Schwerpunkt des unbelasteten Systems darf nicht aufserhalb des durch den Drehpunkt gerichteten Loths fallen, er mufs innerhalb der Linie CC liegen. Denn fiele er zur Seite der Linie CC, so

Fig. 746.



würde nach dieser Seite so lange Drehung erfolgen, bis der Schwerpunkt lothrecht unter den Aufhängepunkt also in CC gelangt.

2. Darf der Schwerpunkt nicht über der Drehaxe liegen, denn bei der geringsten Drehung würde er zur Seite der Linie CC kommen und das ad 1 gedachte Umschlagen des Waagebalkens erfolgen.

3. Demnach hat der Schwerpunkt des unbelasteten Waagesystems seinen Schwerpunkt nur in der Mittellinie unterhalb des Drehpunkts und es ist das gesammte Gewicht des Systems in diesem Schwerpunkt als vereinigt wirkend anzusehen.

Die Bedingungen, unter welchen eine Krämerwaage anwendbar ist, ergeben sich aus folgender einzigen Untersuchung:

Der in horizontaler Lage befindliche unbelastete Waagebalken ist in seiner Unterkante mit AB, in der ihr durch den Drehpunkt $e \doteqdot AB$ gelegten Linie mit ab bezeichnet. In dem Punkt d der vertikalen Mittellinie CC befindet sich der Schwerpunkt des unbelasteten Systems, die Arme $ae = be$ haben die Länge l, die Entfernung des Schwerpunkts d von der Drehaxe sei $de = c$, das in d vereinte Gewicht des Systems $= p$. Werden nun in die an A und B befestigten Schalen Gewichte P und Q gelegt, von welchen $P > Q$ so entsteht eine Drehung des Waagebalkens um e bis das ganze belastete System unter dem $\angle ded' = aea' = \beta$ in Ruhe bleibt, indem in dieser Lage die Gewichte p und Q dem Gewicht P das Gleichgewicht halten.

Die Bedingungsgleichung für dieses Gleichgewicht ist.

$$ef \cdot P = eh \cdot p + eg \cdot Q$$

oder $(a'e \cdot \cos\beta - A'a' \cdot \sin\beta)\, P = ed' \cdot \sin\beta \cdot p + (b'e \cdot \cos\beta + B'b' \cdot \sin\beta)\, Q$

man $A'a' = B'b' = d$, so hat man

$$M) \quad \cos\beta = [pc + d(P+Q)] \sin\beta$$

$$tg\,\beta = \frac{l(P-Q)}{cp + d(P+Q)}$$

nennt bekanntlich den $\angle\beta$ den
lag der Waage, und die Waage
so empfindlicher, je gröfser bei
gleich bleibenden Umständen
chlag ist.

achtheiligsten Einfluſs auf den
g und also auf die Empfindlich-
Waage hat das zweite Glied des
, und da P und Q veränderlich
sen Factor d, d. h. die Höhe Aa.
so zweckmäſsig, die Befestigungs-
er Gewichte mit dem Drehpunkt
ben Höhe, also in den Punkten
zu nehmen, womit $d = 0$ wird.
ann $tg\,\beta = \frac{l(P-Q)}{cp}$

ämerwaagen hat man immer für
ler für P in jeder Waageschale
imum für die Abwägung. Ist

$2P$ statt $P+Q$ dieses Maximum, dann kann man die Aufhängepunkte der Schalen noch über ab nehmen; es ist dann $tg\,\beta = \frac{l(P-Q)}{cp-2dP}$. Es muſs nur $cp - 2dP$ positiv bleiben, also d kleiner sein als $\frac{cp}{2P}$.

Ferner wird der Ausschlag mit der Abnahme von p gröſser; die Waage ist also um so empfindlicher, je geringer das Gewicht derselben ist, je leichter sie gearbeitet ist. Ferner wird sie mit der Gröſse des Ausschlags empfindlicher wenn c kleiner ist, je näher also der Schwerpunkt des Systems der unbelasteten Waage dem Drehpunkt liegt. Desgleichen wird sie mit der Länge l des Waagebalkens empfindlicher. Für $P = Q$ wird $\beta = 0$; d. h. wenn der Waagebalken in der Horizontalen liegt, sind die Gewichte in beiden Waageschalen gleich groſs.

Setzt man das Uebergewicht $P - Q = q$ constant, so hat man

$$tg\,\beta = \frac{l(P-Q)}{cp + d(P+Q)} = \frac{lq}{cp + dq + 2dQ} = \frac{lq}{cp - dq + 2dP}$$

ichem Uebergewicht ist also die
m so empfindlicher je geringer
umma aufgelegten Gewichte P
nd.

thwendige Bedingung, daſs ae
wird in der Ausübung nicht
füllt, die Waage ist dann un-
Dennoch läſst sich auch mit die-
ewicht eines Körpers richtig be-

bei unbelasteten Waageschalen
ebalken horizontal, so lege man
wägenden Körper vom unbe-
Gewicht X in die eine Schale
e durch bekanntes Gewicht P,
dere Schale gelegt, das Gleich-
ieder her. Nun bringe man X
lere Schale und stelle das Gleich-
er durch ein Gewicht, welches
t. Nennt man nun die ungleich-
gearme a und b, so hat man
1 Gleichungen

$$aX = bP$$
$$bX = aP'$$
$$X = \sqrt{PP'}$$

h unmittelbar erhält man das
ewicht des abzuwägenden Kör-
n man es in eine von beiden
legt und es mit Gegengewich-
r anderen Schale ins Gleichge-
wicht bringt. Diese Gegengewichte seien bekannt oder unbekannt. Man nimmt nun den Körper heraus und legt statt dessen bekannte Gewichte bis zum Gleichgewicht ein und hat in den bekannten Gewichten das wirkliche Gewicht des Körpers.

Kraft ist eine der Natur überwiesene Aeuſserung des göttlichen Geistes als ein nach Gesetzen geregeltes Element zur Erhaltung und Regierung der Welt und deshalb in allen lebenden und leblosen Körpern deren Bestimmung gemäſs und entsprechend verbreitet.

Von den Geisteskräften und den ihnen folgsamen Muskelkräften sehen wir hier vorläufig ab und haben nur die den leblosen Körpern zuertheilten Kräfte vor Augen. Die in dem Artikel „Attraction“ No. 3 gedachte Weltbildung ist hypothetisch, also auch die darin aufgestellte Behauptung, daſs von Anfang an nur eine einzige Kraft, die Anziehungskraft der Masse zuertheilt worden sei, daſs mit dieser die Kreisbewegung entstehen müſste, und daſs die Auswerfung von Planeten Folge des Beharrungsvermögens war, daſs Massen in der einmal angenommenen Geschwindigkeit und Richtung verbleiben wollen. Wenn wir aber die jetzt vollendeten Weltkör-

per in ihren Bahnen betrachten, so sehen wir, dafs nur gegenseitige Anziehung der Weltkörper die einzige das Weltsystem regierende und erhaltende Kraft ist und dafs die vorhandene Bewegung nichts ist als Beharrungsstand in der Bewegung (s. „Bahn“ mit Fig. 165 bis 167).

Es gibt daher nichts negatives von Kräften, es gibt keine Abstofsungskraft. Es ist unrichtig die Behauptung, dafs wenn keine der unläugbaren Anziehungskraft negativ wirkende Abstofsungskraft vorhanden wäre, die ganze Welt zu einer einzigen compacten Masse vereinigt werden müfste. So wie es unrichtig ist, dafs wenn keine Anziehungskraft wäre, die Abstofsungskraft alles was Masse ist, in unendliche Verdünnung auflösen würde, weil keine Abstofsungskraft geschaffen worden und weil vor der Schöpfung nicht Abstofsung (diese war ganz überflüssig) sondern nur Gleichgültigkeit der Elemente unter einander statt fand. (Attraction No. 3.)

2. Wie für die oben betrachteten Weltkörper Anziehung des Centralkörpers auf dieselben behufs deren Ortsänderung im freien Raum allein wirksam ist, so ist für die an die Erde gebundenen Massen dieselbe Anziehung des Erdkörpers, die Schwerkraft die einzige constante natürliche Kraft für die Ortsänderung dieser Massen nach einerlei Richtung, nämlich nach der lothrechten von oben nach unten. Alle anderen Bewegungs-Richtungen, horizontal und von derselben aus aufwärts werden durch nicht permanente Kräfte hervorgebracht, entweder durch zeitweise Naturereignisse, wie der Wind, den der Mensch für Mühlen ausnutzt; oder durch schlummernde Naturkräfte, welche die menschliche Intelligenz hervorruft, wie die Kraft der Gase in Wasserdampf, im Schiefspulver, in erhitzter Luft; oder durch Muskelkräfte, die bei Menschen durch den freien Willen, bei Thieren durch Antreiben entwickelt werden.

In die Wirkungen aller dieser anderen Kräfte mischt sich die überall permanent vorhandene Schwerkraft hemmend und erzeugt mit jenen Mittelkräfte, die geneigt abwärts gerichtet sind oder eine solche Richtung erstreben, wie bei der Wurflinie, dem Pendel. Gegenseitig werden Bauwerke gefertigt, welche der Schwerkraft hemmend entgegen treten, wie schiefe Ebenen für beabsichtigte Senkung von Lasten, geneigte Gerinne für geeigneten Lauf einer Wassermasse.

3. Einen unmittelbaren Einfluſs übt die Schwere auf eine Wirkung, welche in der Mechanik die gröfste Rolle spielt, nämlich auf den Druck (s. d.): Jedes Molekül hat ein gleich grofses Bestreben, sich dem Mittelpunkt der Erde zu nähern; ruht es, so hat es nothwendig eine Unterlage und auf diese äufsert es sein Bestreben. Zwei Moleküle haben das zweifache, m Moleküle das $m$fache Bestreben dazu; zwei Massen, von denen die eine n, die andere m Moleküle enthält, äufsern sich mit Bestrebungen, die an Gröfse wie n zu m sich verhalten. Diese Bestrebungen zur Bewegung nach dem Erdmittelpunkt empfängt die Unterlage als eine Wirkung, welche man Druck nennt. Wenngleich nun diesen Massen durchaus keine Kraft innewohnt, so sieht man dennoch von der Grundursach der Wirkung, von der Schwere ab, und legt den Massen selbst die Druckkraft bei. Man sagt, die Masse A drückt mit m Pfund, die Masse B mit m Pfund, überhaupt die Druckkräfte von Massen verhalten sich wie diese Massen selbst.

4. Einen zweiten unmittelbaren Einfluſs übt die Schwere auf eine in der Mechanik nicht minder wichtige Wirkung, nämlich auf den Stofs. Dieser entsteht, wenn ein nach der Schwerlinie in Bewegung befindlicher (ein frei fallender) Körper auf einen festen Gegenstand trifft, der die Fortsetzung seiner Bewegung hindert. Die Gröfse dieses Stofses hängt von zwei Elementen ab, von der Gröfse der Masse und von der Gröfse seiner Bewegung, seiner Geschwindigkeit, mit welcher er den festen Gegenstand trifft. Nach unseren Begriffen von der Stofswirkung wird angenommen, dafs eine Masse M mit der Geschwindigkeit c die $c$fache Stofswirkung derselben Masse M mit der Geschwindigkeit 1. ausübt. Dafs ferner bei gleich grofser Geschwindigkeit c die Masse M die Mfache Stofswirkung einer Masse $= 1$ ausübt. Die Gröfse einer Stofswirkung wird daher bezeichnet mit dem Product: Masse mal Geschwindigkeit (MC). Und auch bei dem Stofs sieht man von der Urkraft der Schwere ganz ab, und legt jeder Masse M eine selbstständige Stofskraft bei, von welcher der eine Factor die Masse M ist.

5. Gehen wir nun zu den anderen Kräften über, die in den auf der Erde befindlichen leblosen Körpern in Thätigkeit sind, so haben wir vor allen anderen diejenige, welche nach der Theorie der neueren Physiker unter verschiedenen Umständen als Wärme, als Electricität

und als Magnetismus auftritt. Es steht aber nichts im Wege, diese Aeufserungen für Stoffe zu halten, welche alle Körper mehr oder weniger durchdringen, und einen nothwendigen Bestandtheil derselben ausmachen, wie z. B. die jedem Körper zukommende specifische Wärme als ein nothwendiger Bestandtheil des Körpers angesehen werden kann. Dafs die Wärme als Stoff ihrer Feinheit wegen auf Gewicht keinen Einfluſs hat kann der Annahme kein Hinderniſs sein.

Die Cohäsionskraft ist die Anziehungskraft gleichartiger Atome, die Affinität die Anziehungskraft ungleichartiger Atome (s. „Atom"). Es ist nicht nöthig, dafs man die zwischen den Atomen befindlichen leeren Räume im Körper einer Abstoſsungskraft zuschreibt: es kann die dem Körper nothwendige specifische Wärme sein, welcher die Atome Raum geben müssen, und die bei Zuführung von noch mehr Wärme noch mehr Raum geben und die bekannte Auslehnung des Körpers und höhere Aggregatzustände veranlassen.

Luftförmige Körper scheinen eine Anomalie gegen diese Behauptungen abzugeben, indem sie ein Ausdehnungsbestreben haben. Allein es scheint viel eher, dafs jeder luftförmige Körper, wie wir ihn hervorbringen, in einem seiner Natur nicht entsprechenden, in einem verdichteten Zustande sich befindet. Bei der atmosphärischen Luft ist bekannt, dafs sie ihre Dichtigkeit in der Nähe der Erdoberfläche ihrer Selbstbelastung verdankt und dafs der Zustand der ganz obersten Luft, der uns unbekannte viel dünnere Zustand ihr natürlicher Zustand ist. Wenn also luftförmige Körper, wie der Wasserdampf, durch Ausdehnung eine Kraft hervorbringen, so geschieht dies allerdings durch gegenseitige Abstoſsung ihrer einzelnen Theile, allein dies nur in Folge ihres künstlich verdichteten Zustandes, dem sie Widerstand leisten.

6. Die Massen, von deren Gröſse nach Anzahl der Molecüle wir keinen Begriff haben, sind ihren Gewichten (s. den Art. „Gewicht") proportional; man setzt also statt ihrer Masse ihr Gewicht als Druckkraft und als Factor für den Stoſs. Aus diesem Grunde werden auch Kräfte selbst durch Gewichte gemessen.

Auch die ad 5 erwähnten anderen auf der Erde zu benutzenden Kräfte können, auf Massen übergehend, Druck und Stoſs erzeugen, und zwar nach beliebigen Richtungen. Ist aber das Gewicht solcher durch eine äufsere Kraft zu Druck oder Stoſs erregten Masse $= P$, so ist der Druck nach einer nicht senkrechten Richtung nicht $= P$ und deren Stoſswirkung nicht $= P$ mal Geschwindigkeit, das Gewicht P wirkt unter allen Umständen nur senkrecht abwärts, die nach der Seitenrichtung fallende Wirkung ergibt sich aus einer statisch wissenschaftlichen Untersuchung, welche Zerlegung der Kräfte genannt wird. Folgende einfache Betrachtung wird dies anschaulich machen: Eine Masse vom Gewicht P drückt durch sich selbst die Unterlage mit dem Gewicht P, wird nun noch eine Kraft p senkrecht abwärts auf die Masse geführt, so beträgt der Druck auf die Unterlage $P+p$; wirkt die Kraft p senkrecht aufwärts, so ist der Druck auf dieselbe nur $P-p$. So wie eine Kraft p in senkrechten Richtungen auf eine Masse P keine andere Wirkung ausüben kann, als der Kraft p selbst zugehört, so kann dies auch in geneigten Richtungen nicht anders sein.

7. Ein wesentlicher Unterschied zwischen der permanenten Schwerkraft und den übrigen zerstreut befindlichen und in Thätigkeit gesetzten Naturkräften ist noch der, dafs erstere ganz selbstständig wirkt, letztere dagegen für ihre Wirkung der festen Stützen bedürfen.

Menschen und Thiere in Laufrädern, auf Tretscheiben wirken nur durch ihr Gewicht; es sind dies Einrichtungen, durch welche die mit beschleunigter Bewegung wirkende Schwerkraft zu gleichförmigem Gange verändert wird und gehören zur Schwerkraft. Zugkräfte, Stoſskräfte von Menschen und Thieren sind nur bei festem Standpunkt möglich, welcher dieselbe Zug- und Stoſswirkung nach entgegengesetzter Richtung empfängt.

Wasser in Wassersäulenmaschinen, in Gerinnen zum Betrieb von Rädern, Turbinen wirkt in Folge der nach abgeänderten Richtungen benutzten Schwerkraft, in hydraulischen Pressen dagegen geschieht die Druckwirkung nur mit Hülfe des Gegendrucks auf die feste Stirnfläche des Pumpenkolbens. Eben so wirkt der Dampf in dem Dampfcylinder gegen den Kolben nur in Folge der Stütze, welche er an dem festen Cylinderboden findet.

8. Es mufs nochmals hervorgehoben werden, dafs man die eigentlichen Naturkräfte ganz ignorirt und dafs die von denselben auf Körper übertragenen Wirkungen als Kräfte gelten, die denn auch Körperkräfte genannt und nach Gewichten gemessen werden.

Leibnitz nennt eine Kraft, die eine Bewegung hervorbringen kann, die aber in Folge von Hindernissen keine Bewegung hervorbringt, todte Kraft, die Kraft dagegen, welche wirklich Bewegung erzeugt: lebendige Kraft. Man ist von diesen Bezeichnungen zurückgekommen. Kraft definirt man ferner als die Bedingung, unter welcher einerlei Stoff zu verschiedenen Zeiten in verschiedenen Räumen sein kann. Auch sagt man Kraft ist das Sein im Werden.

9. Kraft, Körperkraft ist die Ursach zu einer Thätigkeit; jede Thätigkeit setzt ein Subject voraus das thätig ist, dies muſs also zur Thätigkeit fähig sein und die Fähigkeit hierzu heiſst Vermögen.

Aus dem Vermögen entspringt die Thätigkeit noch nicht als nothwendig, das Vermögen muſs erst zur Thätigkeit erregt werden und das zur Thätigkeit erregte Vermögen ist die Kraft.

Kraft ist mithin actives Vermögen, so wie Vermögen passive Kraft ist. Die Kraft eines Körpers kann nicht gröſser werden als dessen Vermögen ist.

Die Thätigkeit setzt ferner ein Object voraus, an welchem die Thätigkeit ausgeübt wird, die Kraft muſs auf einen Gegenstand übergehen, der ihre Einwirkung erleidet und dieser tritt in einen Zustand, in dem er vorher sich nicht befand und welcher den Erfolg der Kraftäuſserung ausmacht.

Da das Object in den neuen Zustand nicht durch sich selbst, sondern nur durch die Einwirkung eines Anderen kommen konnte, so muſste es der einwirkenden Kraft etwas entgegen zu setzten haben, er muſste der Einwirkung der Kraft widerstehen, d. h. einen Widerstand bilden.

Dieser Widerstand ist durch eine Kraft erregt worden, ohne Erregung ist er in dem Körper nichts als ein Widerstandsvermögen ein passiver Widerstand.

Der Widerstand äuſsert während der Einwirkung der Kraft auf den die Kraft äuſsernden Körper eine Rückwirkung, es müssen Kraft und Widerstand gleichartig, d. h. Widerstand muſs Kraft sein. Beide positiven Kräfte wirken in entgegengesetzten Richtungen auf einander, sie stehen also in gegenseitiger Beziehung wie positive und negative Gröſsen, d. h. sie werden activ mit der Differenz beider nach der Richtung des Ueberschusses, in gleichen Quantitäten heben sie sich einander auf. Daher geschieht es, daſs Widerstand, wiewohl unrichtig, mit negativer Kraft bezeichnet wird.

Bei Einwirkung von Kraft und Widerstand gegen einander wird das Vermögen zur Thätigkeit zum Bestreben zur Thätigkeit, der Zustand in dem beide Körper sich befinden heiſst Spannung.

In Beziehung auf gegenseitige Einwirkung kann:

1. Die Quantität des Widerstandes gröſser sein als die der Kraft; dann wird die Kraft für den Erfolg absorbirt, sie ist und bleibt gespannt. Dasselbe gilt von der mit der Kraft gleich groſsen Quantität des Widerstandes; der Ueberschuſs an Widerstand bleibt als Vermögen passiv.

2. Kann die Quantität der Kraft gröſser sein; dann wird der ganze Widerstand absorbirt. Dasselbe geschieht mit der gleich groſsen Quantität Kraft, der Ueberschuſs derselben bewirkt die Ueberwindung, die Gewältigung des Widerstandes durch Bewegung.

(S. den Art. „Gleichgewicht".)

I. Grundlehren.

Kräfte im Gleichgewicht.

Jede Kraft stellt man sich in in einer geraden Linie wirkend vor, welche zugleich ihre Richtung ist; der materielle Punkt des Körpers in welchem derselbe von der Kraft getroffen wird, heiſst der Angriffspunkt der Kraft.

Zwei Kräfte heiſsen gleich, wenn sie nach gerade entgegengesetzten Richtungen auf denselben materiellen Punkt wirkend einander das Gleichgewicht halten.

Eine Kraft heiſst die Summe zweier oder mehrerer Kräfte, wenn sie mit diesen nach entgegengesetzten Richtungen auf denselben materiellen Punkt wirkend, denselben das Gleichgewicht hält.

Eine Kraft heiſst der Unterschied zweier Kräfte, wenn sie mit der kleineren zusammengenommen der gröſseren gleich ist.

Eine Kraft heiſst das n, $n = 1, 2, 3 \ldots$ fache einer anderen Kraft, wenn n dieser letzteren gleichen Kräfte zusammen genommen der ersten Kraft gleich sind.

Eine Kraft ist $\frac{m}{n}$ einer anderen Kraft, wenn ihr m faches dem n fachen der anderen Kraft gleich ist.

Es können also Kräfte vermittelst Zahlen als Vielfache einer Kraft ausgedrückt werden, für welche dann diese Kraft die

Krafteinheit ist. Daher läfst sich das Verhältnifs von Kräften durch das Verhältnifs absoluter Zahlen, und folglich auch durch das Verhältnifs von Längen gerader Linien ausdrücken.

2. Grundsatz. Wenn Kräfte mit einander im Gleichgewicht sind, so wird dasselbe nicht gestört, wenn man ihnen ein System von Kräften zufügt, die unter sich im Gleichgewicht sind, oder wenn von ihnen ein System von Kräften, die unter einander im Gleichgewicht sind, fortnimmt.

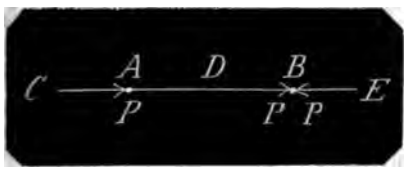
3. Sind zwei materielle Punkte fest mit einander verbunden, und wirken auf dieselben 2 gleiche Kräfte in einer durch beide Punkte gerichteten geraden Linie nach entgegengesetzten Seiten hin, so sind beide Kräfte im Gleichgewicht.

Denn gesetzt es geschehe nach einer Richtung hin Bewegung, so würde, weil nach der entgegengesetzten Richtung hin dieselben Umstände sich befinden, auch nach dieser Richtung gleichzeitig dieselbe Bewegung statt finden müssen, welches bei der festen Verbindung der beiden materiellen Punkte untereinander nicht möglich ist.

4. Die Wirkung einer Kraft auf einen materiellen Punkt bleibt ungeändert, in welchem Punkt ihrer Richtung dieselbe auch thätig sein mag, wenn nur der letzte Punkt mit dem ersten in fester Verbindung steht.

Denn wirkt auf den materiellen Punkt *A* eine Kraft *P* nach der Richtung *CA*, die mit einer anderen Kraft im Gleichgewicht ist; ist der in derselben Richtung *CA* befindliche materielle Punkt *B*

747.



mit dem Punkt *A* fest verbunden, und man bringt gegen diesen Punkt *B* zwei gleich grofse Kräfte an, die in der Richtung *CB* nach entgegengesetzten Seiten *DB*, *EB* hin wirken, so sind diese letzten beiden untereinander im Gleichgewicht und äufsern keinen Einfluſs auf die beiden gegen *A* wirkenden im Gleichgewicht befindlichen Kräfte. Nun sind aber nach dem vorigen Satz die beiden Kräfte *P* nach *CA* und *P* nach *EB* mit einander im Gleichgewicht und das Gleichgewicht bleibt ungestört, wenn diese beiden Kräfte hinfort genommen werden. Alsdann bleibt nur die auf *B* nach *DB* wirkende Kraft *P* übrig, welche also mit der, welche die nach *CA* wirkende Kraft im Gleichgewicht gehalten hat, ebenfalls im Gleichgewicht ist. Demnach ist es gleichgültig für den Zustand des Systems ob *P* auf *A* oder in derselben Richtung auf *B* wirkt.

5. Erklärung. Wenn zwei oder mehrere Kräfte anderen Kräften das Gleichgewicht halten, und eine einzige Kraft statt der ersteren Kräfte hält denselben anderen Kräften das Gleichgewicht, so heifst diese einzige Kraft die Mittelkraft der ersteren Kräfte. In Beziehung auf diese Mittelkraft heifsen jene ihr gleichgeltenden Kräfte die Seitenkräfte. Aus den Seitenkräften die Mittelkraft bestimmen heifst die Kräfte zusammensetzen; aus der Mittelkraft die ihr gleich geltenden Seitenkräfte bestimmen heifst die Mittelkraft in ihre Seitenkräfte zerlegen.

6. Wirken zwei Kräfte auf einen materiellen Punkt nach Richtungen, die nicht in eine gerade Linie fallen, so liegt deren Mittelkraft mit ihnen in derselben Ebene und theilt den von ihnen gebildeten Winkel.

Denn wenn die Mittelkraft aufserhalb derselben Ebene nach einer Seite fiele, so würde kein Grund entgegen stehen, weshalb sie nicht auch in gleicher Lage auf die andere Seite der Ebene fallen sollte; da nun beides zugleich nicht möglich ist, so geschieht keins von beiden und die Mittelkraft fällt mit beiden Kräften in dieselbe Ebene.

Beide Kräfte schliefsen nach einer Seite hin einen hohlen Winkel ein, im Fall der Bewegung würde also der materielle Punkt einen Weg nehmen, der zwischen beiden nach der hohlen Seite hingerichteten Schenkeln liegt, der also den Winkel theilt und in dieser den Winkel der Kräfte theilenden Wegerichtung liegt die Mittelkraft.

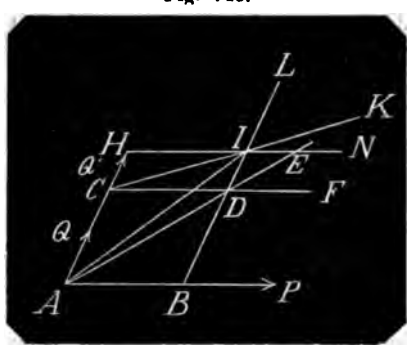
7. Sind beide Seitenkräfte (Satz 6) einander gleich, so wird deren Winkel von der Mittelkraft halbirt.

Denn wollte man annehmen, sie liegen der einen Seitenkraft näher, so hätte man denselben Grund für die Annahme, daſs sie der andern Seitenkraft eben so nahe liegt; beides aber ist nur möglich wenn sie gegen beide Seitenkräfte eine gleiche Lage hat.

8. Werden auf den Richtungen zweier auf einen materiellen Punkt wirkenden Kräfte von dem materiellen Punkt aus zwei Längen genommen, die sich wie die nach denselben Richtungen wirkenden Kräfte verhalten, und man vollendet zu diesen als anliegenden Seiten das Parallelogramm, so ist die durch den materiellen Punkt gezogene Diagonale desselben die Richtung der Mittelkraft.

Duchayla beweist diesen Satz, indem er erst zeigt, daſs wenn er gültig ist zwischen einer Kraft P und einer Kraft Q, ferner für dieselbe Kraft P und einer anderen Kraft Q', daſs er dann auch für die Kraft P und die Kraft $Q+Q'$ richtig ist.

Fig. 748.



Es wirke auf den materiellen Punkt A nach der Richtung AB die Kraft P, nach der Richtung AH die Kraft Q und die Kraft Q'; es sei ferner

$$AB : AC : CH = P : Q : Q'$$

so betrachte man zuerst die beiden Kräfte P und Q für sich allein. Man construire also das Parallelogram $ABCD$, ziehe die Diagonale AD, so ist nach Voraussetzung diese die Richtung der den Seitenkräften P und Q zugehörigen Mittelkraft M. Nun kann man statt der Kräfte P und Q die Mittelkraft M allein thätig denken, und deren Angriffspunkt A nach jedem beliebigen anderen Punkt der Linie AD, also z. B. nach D verlegen, so daſs M in D nach DE, der Verlängerung von AD wirkt. Man kann jetzt statt der Mittelkraft M wieder deren Seitenkräfte P und Q, erstere $\fallingdotseq AB$ nach DF, der Verlängerung von CD und letztere $\fallingdotseq AC$ nach DJ, der Verlängerung von BD auf den Punkt D wirken lassen und die Wirkung auf den materiellen Punkt A bleibt dieselbe wie zu Anfang.

Betrachtet man nun die beiden Kräfte P und Q' für sich allein, so kann man letztere Kraft von dem Angriffspunkt A nach dem Punkt C verlegen, und dieselbe dort nach ungeänderter Richtung CH wirken lassen; desgleichen die in B nach DF wirkende Kraft P nach denselben Punkt C mit der ungeänderten Richtung CF. Nun sind $CD : CH = P : Q'$ vollendet man also das Parallelogramm $CDHJ$, so ist der Voraussetzung nach CJ die Richtung der in dem Angriffspunkt C wirkenden beiden Kräften P und Q' zugehörigen Mittelkraft M'. Statt der beiden Kräfte P und Q' kann man deren Mittelkraft M' in C nach CJ wirken lassen und diese Kraft M' nach jedem beliebigen Punkt der Linie, also auch nach dem Punkt J verlegen und nach JH, der Verlängerung von CJ wirken lassen. Endlich kann man die in dem Punkt J wirkende Kraft M' dort wieder in ihre Seitenkräfte P, nach JN der Verlängerung von HJ gerichtet und Q' nach JL, der Verlängerung von BJ gerichtet zerlegen. Verlegt man nun noch den von der Kraft Q zuletzt behaupteten Angriffspunkt D ebenfalls nach J, so hat man in dem Angriffspunkt J nach der Richtung JN die Kraft P, nach JL die Kräfte Q und Q' wirkend. Diese 3 Kräfte in J wirkend sind aber nach und nach dahin der Art translocirt worden, daſs die Wirkung auf den anfänglichen Angriffspunkt A ungeändert geblieben ist, und aus diesem Grunde muſs die Mittelkraft der in J wirkenden Kräfte P, Q und Q' durch den Punkt A gerichtet sein; d. h. die Richtung der diesen drei Kräften gleichgeltenden Mittelkraft ist die Diagonale AJ.

Ist nun $Q = Q' = P$, so ist nach Satz 7 der Satz 8 für P und Q, so wie für P und Q' richtig, denn die die zwischen P und Q und zwischen P und Q' befindlichen Winkel halbirende Mittelkraftsrichtung ist die Diagonale. Mithin ist nach Satz 8 das Gesetz auch richtig für die Kräfte P und $Q+Q'$, d. h. für P und $2P$. Hierzu der Satz für die Kräfte P und P richtig, gibt den Schluſs, daſs der Satz auch für P und $P+2P$. D. h. für P und $3P$ u. s. w. daſs der Satz für P

nd nP richtig ist. Der Satz ist also chtig wenn die eine Kraft ein beliebig elfaches der anderen Kraft ist.

Ueberhaupt ist der Satz richtig für zwei räfte, die wie np und mp commensubel sind. Denn setzt man $P = mp$ und $= np$, so ist der Satz richtig für P und also auch für P und $p + p = 2p$, demch für P und $3p$ u. s. w.

Der Satz ist aber auch gültig, wenn und Q incommensurabel sind. Denn mmt man auf den Richtungen dieser räfte 2 Längen AB, AC, die sich wie : Q verhalten, so vollende das Parallegram $ABCD$ und ziehe die Diagonale D.

Wollte man nun annehmen, die Mitlkraft M zwischen P und Q solle nicht AD, sondern in irgend eine andere ichtung z. B. AE fallen, so theile AC in ne so grofse Anzahl gleicher Theile, dafs ır einzelne Theil kleiner ist als DE, age dieselben Theile von C aus auf CD , so wird einer der Theilpunkte zwihen E und D, etwa in F fallen. Nun

Fig 749.

nd AC und CF commensurabel, und es t $AC : CF = Q : P'$. Zieht man daher $G \parallel AC$, so ist die Diagonale AF die ichtung der Mittelkraft zwischen den räften Q und P'.

Nun ist $P > P'$ und es sei $P = P' + P''$

Nimmt man die Kräfte Q und P' fort nd setzt dafür die ihnen gleich geltende ich AF gerichtete Mittelkraft M, so hat an auf den Punkt A wirkend die nach F gerichtete Kraft M und die nach AB richtete Kraft P''. Die Mittelkraft zwihen diesen beiden Kräften ist = der ittelkraft zwischen P und Q und mufs ich Satz 6 den $\angle FAB$ theilen, mithin inn sie nicht links von AF wie nach E gerichtet sein. Ebenso wird bewiesen, dafs die Mittelkraft zwischen P und Q nicht rechts der Diagonale AD fallen kann.

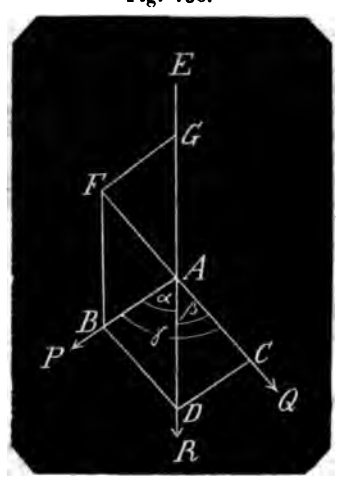
9. Aus diesem Satz geht zugleich hervor, dafs wenn man von einem Punkt H der Mittelkraft auf die Richtungen der beiden ihr zugehörigen Seitenkräfte Parallelen zieht, von diesen auf den Kräfterichtungen Stücke AJ, AK abgeschnitten werden, die von dem Angriffspunkt aus gemessen sich wie die Kräfte P, Q selbst verhalten.

10. Die im vorigen Satz gedachte Diagonale ist nicht nur die Richtung der Mittelkraft, sondern auch in Verhältnifs der die Seitenkräfte in Gröfse darstellenden Seiten des Parallelogramms die Gröfse der Mittelkraft.

Denn es seien, Fig. 750, die auf den materiellen Punkt A gerichteten Kräfte P und Q; $AB : AC = P : Q$, $ABCD$ das vollendete Parallelogramm und also AD die Richtung der Mittelkraft zwischen P und Q; deren Gröfse sei $= R$.

Verlängert man DA über A hinaus, bringt nach der Richtung AE eine Kraft $= R$ an, so besteht zwischen R, P und Q Gleichgewicht. Verlängert man CA nach F hin, so wird AF die Richtung der Mittelkraft zu P und der nach AE gerichteten Kraft R sein, weil die Kräfte

Fig. 750.



P, Q und R nur dann im Gleichgewicht sein können, wenn ihre Mittelkraft der Kraft Q gleich und ihr gerade entgegengesetzt gerichtet ist.

Macht man also $AF = AC$, verbindet B mit F
so ist $\triangle BAF \cong \triangle DCA$,
also $BF \fallingdotseq AD$
und zieht man $FG \fallingdotseq AB$, so ist nach Satz 9: $AB : AG = P : R$ und da $AG = AD$ so ist AD die Größe der zu P und Q gehörenden Mittelkraft.

11. Das Parallelogramm, welches die Größe und Richtung der Mittelkraft zweier gegebenen Seitenkräfte bestimmt, heißt das Parallelogramm der Kräfte.

12. Drei auf einen Punkt wirkende Kräfte, zwei Seitenkräfte und ihre Mittelkraft sind proportional dem Sinus der Winkel, die die jedesmaligen anderen beiden Kräfte mit einander bilden; und gleiche Producte erhält man, wenn man von 2 Kräften jede mit dem Sinus des Winkels multiplicirt, den sie mit der dritten Kraft bildet.

Bei der Bezeichnung Fig. 750 ist:
$AB : AC : AD = P : Q : R$
Nun ist
$AB : BD : AD = \sin ADB : \sin BAD : \sin ABD$
oder
$AB : AC : AD = \sin CAD : \sin BAD : \sin BAC$
also
$P : Q : R = \sin\beta : \sin\alpha : \sin\gamma$
mithin auch
$P \sin\alpha = Q \sin\beta$
$P \sin\gamma = R \sin\beta$
$Q \sin\gamma = R \sin\alpha$

13. Aus diesen drei Gleichungen lassen sich bei gegebenen 3 Stücken die übrigen drei Stücke finden.

A. Sind zwei Kräfte und ein von ihnen nicht eingeschlossener Winkel gegeben, z. B. P, Q und $\angle\alpha$
so hat man unmittelbar

$$\sin\beta = \frac{P}{Q}\sin\alpha$$

hieraus $\angle\gamma = \angle\alpha + \angle\beta$

$$R = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}Q = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}P$$

Aus P, Q und $\angle\beta$ hat man dieselbe Auflösung für α, γ und R.

Aus P, R und $\angle\beta$ oder $\angle\gamma$ dieselbe Auflösung für α, γ oder β und Q.

Aus Q, R und $\angle\alpha$ oder $\angle\gamma$ dieselbe Auflösung für β, γ oder α und P.

B. Sind 2 Seitenkräfte P, Q und der von ihnen eingeschlossene $\angle\gamma$ gegeben, so hat man in dem $\triangle ABD$:
$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos ABD$
oder
$AD^2 = AB^2 + BD^2 + 2AB \cdot BD \cdot \cos BAC$
also
$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cdot \cos\gamma$

C. Ist eine Seitenkraft P und die Mittelkraft R mit dem von ihnen eingeschlossenen $\angle\alpha$ gegeben, so hat man in dem $\triangle ABD$
$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos BAD$
oder
$Q^2 = P^2 + R^2 - 2P \cdot R \cos\alpha$

D. Aus den gegebenen Seitenkräften P, Q und dem eingeschlossenen $\angle\alpha$ hat man in dem $\triangle ABD$

$$tg\, BAD = \frac{BD \sin ABD}{AB - BD \cos ABD}$$

oder $$tg\,\alpha = \frac{Q\sin\gamma}{P + Q\cos\gamma}$$

oder $$\cot\alpha = \frac{P + Q\cos\gamma}{Q\sin\gamma} = \frac{P}{Q}\,\mathrm{cosec}\,\gamma + \cot\gamma$$

E. Aus der gegebenen Seitenkraft P, der Mittelkraft R und dem von ihnen eingeschlossenen $\angle\alpha$ hat man im $\triangle ABD$

$$tg\, ADB = \frac{BD \cdot \sin BAD}{AD - BD \cdot \cos BAD}$$

oder $$tg\,\beta = \frac{Q\sin\alpha}{R - Q\cos\alpha}$$

oder $$\cot\beta = \frac{R - Q\cos\alpha}{Q\sin\alpha} = \frac{R}{Q}\,\mathrm{cosec}\,\alpha - \cot\alpha$$

F. Um die Formeln für $\cot\alpha$ und $\cot\beta$ für Rechnung mit Logarithmen geeignet zu machen setze man $\frac{P}{Q}\,\mathrm{cosec}\,\gamma =$ der Cotangente eines Winkels μ;
also $\log\cot\mu = \log P - \log Q + \log\mathrm{cosec}\,\gamma$
Ist hiernach μ bestimmt, so hat man

$$\cot\alpha = \cot\mu + \cot\gamma = \frac{\cos\mu}{\sin\mu} + \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} = \frac{\sin(\gamma+\mu)}{\sin\gamma \cdot \sin\mu}$$

also $$\log\cot\alpha = \log\sin(\gamma+\mu) - \log\sin\gamma - \log\sin\mu$$

Ebenso hat man $\frac{R}{Q}\,\mathrm{cosec}\,\alpha = \cot\psi$ gesetzt

$$\log\cot\beta = \log\sin(\alpha - \psi) - \log\sin\psi - \log\sin\alpha$$

I. Statik des materiellen Punkts.

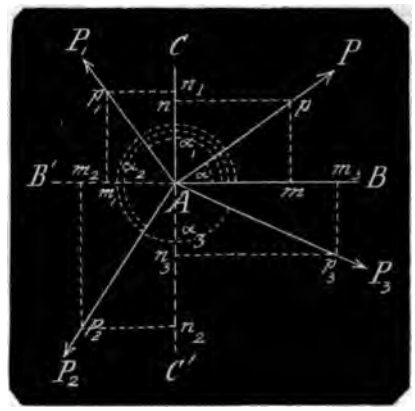
14. Auf einen materiellen Punkt wirken nach Richtungen, die alle in einer Ebene liegen, gegebene Kräfte, so bestimmt sich die Gröfse und Richtung deren Mittelkraft wie folgt.

Um zuerst die Richtungen AP; AP_1; AP_2; AP_3... der Kräfte P; P_1; P_2... zu bestimmen, nehme man eine beliebige Linie AB als gegeben an, und bezeichne die Winkel, welche die Kräfterichtungen mit derselben nach einer Seite hin von 0 bis 360° gezählt bilden, in derselben Folge mit α; α_1, α_2....

Im Punkt A errichte man auf AB das Loth AC, so fallen die Kräfte in die Linien AB, AC und deren Verlängerungen AB' und AC' oder zwischen dieselben und man kann letztere nach Satz 10 in Seitenkräfte zerlegen, welche in diese Linien AA' und BB' fallen. Aus diesem Grunde sollen diese normal auf einander befindliche Linien Axen heifsen, AB soll die Hauptaxe und AC die Nebenaxe sein.

Durch solche Zerlegung erhält man zwei Systeme von Kräften, welche den gegebenen Kräften gleich gelten und von denen sämmtliche Kräfte des einen Systems in die Axe AB und sämmtliche Kräfte des anderen Systems in die Axe AC fallen. Die Mittelkraft der Kräfte jedes einzelnen Systems ist offenbar der Ueberschufs der nach einer Seite hin wirkenden gröfseren Summe der Kräfte gegen die nach entgegengesetzter Seite hin wirkende kleinere Summe; diese beide Mittelkräfte sind gleichgeltend den ursprünglich gegebenen Kräften und setzt man sie beide zu einer neuen Mittelkraft zusammen, so ist diese die gesuchte Mittelkraft der gegebenen Kräfte.

Fig. 751.



Zerlegt man nun P durch das Parallelogramm nm in die Seitenkräfte Am und An, wenn Ap die Kraft P vertritt, so ist

$$Am = P^x = P \cos \alpha$$

$$An = P^y = P \sin \alpha$$

Diese Ausdrücke gelten für alle übrigen Kräfte P_1; P_2; P_3... P_n

Denn für P_1 ist die Richtung Am, negativ, die Richtung An, positiv, also

$$-Am_1 = P_1^x = -P_1 \cos p_1 AB' = +P_1 \cos \alpha,$$

$$An_1 = P_1^y = P_1 \sin p_1 AC = P_1 \sin \alpha,$$

Für P_2 sind die Richtungen Am_2 und An_2 negativ, also

$$-Am_2 = P_2^x = P_2 \cos p_2 AB' = -P_2 \cos (\alpha_2 - 180°) = +P_2 \cos \alpha_2$$

$$-An_2 = P_2^y = P_2 \sin p_2 AB' = -P_2 \sin (\alpha_2 - 180°) = +P_2 \sin \alpha_2$$

Für P_3 ist die Richtung Am_3 positiv, die Richtung An_3 negativ, also

$$Am_3 = P_3^x = P_3 \cos p_3 AB = P_3 \cos (360° - \alpha_3) = P_3 \cos \alpha_3$$

$$-An_3 = P_3^y = P_3 \sin p_3 AB = -P_3 \sin (360° - \alpha_3) = +P_3 \sin \alpha_3$$

Fällt die Kraft in eine der beiden Axen, so sei die Richtung der Kraft 1) nach AB gerichtet.

Dann ist $\alpha = 0$ also

$$Am = P^x = P \cos \alpha = P \cos 0 = P$$

$$An = P^y = P \sin \alpha = P \sin 0 = 0$$

Ist 2) die Richtung der Kraft nach AC, dann ist $\alpha_1 = 90°$, also

$$Am_1 = P_1^x = P_1 \cos \alpha_1 = P_1 \cos 90° = 0$$

$$An_1 = P_1^y = P_1 \sin \alpha_1 = P_1 \sin 90° = P_1$$

Ist 3) die Richtung der Kraft nach AB', dann ist $\alpha^2 = 180°$, also

$$-Am_2 = P_2^x = P_2 \cos \alpha_2 = P_2 \cos 180° = -P_2$$

$$An_2 = P_2^y = P_2 \sin \alpha_2 = P_2 \sin 180° = 0$$

Ist 4) die Richtung der Kraft nach AC', dann ist $\alpha_3 = 270°$, also

$$Am_3 = P_3^x = P_3 \cos \alpha_3 = P_3 \cos 270° = 0$$

$$An_3 = P_3^y = P_3 \sin \alpha_3 = P_3 \sin 270° = -P_3$$

Diese so erhaltenen den gegebenen Kräften gleich geltenden Seitenkräfte

setzen sich nun zu zwei Mittelkräften zusammen, deren Richtungen in BB' und CC' fallen.

Die nach AB oder AB' fallende eine Mittelkraft ist die algebraische Summe der in dieser Linie befindlichen Seitenkräfte

$$P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + \dots$$

Die nach AC oder AC' fallende zweite Mittelkraft ist die algebraische Summe der in dieser Linie befindlichen Seitenkräfte

$$P\sin\alpha + P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2 + \dots$$

Die an sich additiven Glieder beider Reihen beziehen sich auf die Richtungen AB und AC, die an sich subtractiven Glieder der Reihen beziehen sich auf die Richtungen AB' und AC'.

Beide Kräfte haben den Angriffspunkt A und bilden mit einander rechte Winkel.

Bezeichnet man deren Mittelkraft mit R, dessen Winkel, den sie mit der Axe AB bildet mit ϱ, so hat man deren Seitenkraft nach der Richtung $AB = R\cos\varrho$ und die nach der Richtung $AC = R\sin\varrho$ und es ist

$$R\cos\varrho = P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + \dots \quad (1)$$

$$R\sin\varrho = P\sin\alpha + P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2 + \dots \quad (2)$$

$$R^2 = (P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + \dots)^2 + (P\sin\alpha + P_1\sin\alpha_1 + \dots)^2 \quad (3)$$

$$\cos\varrho = \frac{1}{R}(P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + \dots) \quad (4)$$

$$\sin\varrho = \frac{1}{R}(P\sin\alpha + P_1\sin\alpha_1 + \dots) \quad (5)$$

$$tg\,\varrho = \frac{P\sin\alpha + P_1\sin\alpha_1 + \dots}{P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + \dots} \quad (6)$$

Entwickelt man in dem Ausdruck für R^2 die Quadrate der Polynome, so erhält man

$$\begin{aligned} R^2 &= P^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + P_1^2(\cos^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_1) + \dots\dots \\ &\quad + 2PP_1(\cos\alpha\cdot\cos\alpha_1 + \sin\alpha\cdot\sin\alpha_1) + 2PP_2(\cos\alpha\cdot\cos\alpha_2 + \sin\alpha\cdot\sin\alpha_2) \\ &\quad + \dots\dots + 2P_1P_2(\cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_2 + \sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2) + \dots\dots \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} R^2 &= P^2 + P_1^2 + P_2^2 + \dots\dots + 2PP_1\cos(\alpha_1 - \alpha) + 2PP_2\cos(\alpha_2 - \alpha) \\ &\quad + \dots\dots + 2P_1P_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1) + 2P_1P_3\cos(\alpha_3 - \alpha_1) + \dots\dots \\ &\quad + 2P_{n-1}P_n\cos(\alpha_n - \alpha_{n-1}) \end{aligned}$$

Nun sind $\alpha_1 - \alpha$; $\alpha_2 - \alpha \dots\dots \alpha_2 - \alpha_1$; $\alpha_3 - \alpha_1, \dots\dots \alpha_n - \alpha_{n-1}$ die Winkel, welche je zwei Kräfte P_1P; $P_2P \dots\dots P_2P_1$; $P_3P_1 \dots P_nP_{n-1}$ unter sich bilden. Man hat demnach das Quadrat der Mittelkraft gleich der Summe der Quadrate aller einzelnen Seitenkräfte plus dem doppelten Product aus je zweien dieser Kräfte mit dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Richtungswinkels multiplicirt.

15. Für Kräfte, die in einerlei Ebene liegen und sämmtlich auf einen materiellen Punkt wirken, ist demnach Gleichgewicht, wenn sie keine Mittelkraft liefern, wenn also nach der Bezeichnung No. 14:

$$P\sin\alpha + P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2 + \dots\dots = 0$$

und zugleich

$$P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + \dots\dots = 0$$

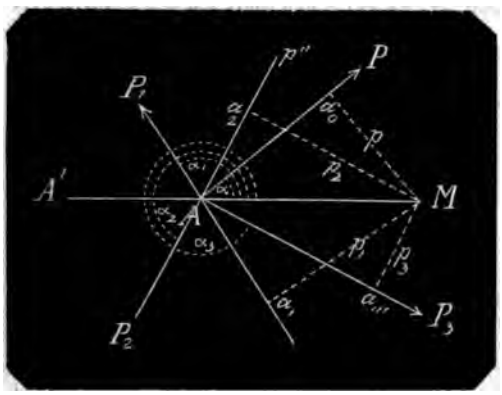
Die Kräfte sind also im Gleichgewicht, wenn sie nach zweien unter sich normalen Richtungen zerlegt nach jeder dieser Linien Seitenkräfte liefern, deren algebraische Summe = Null ist.

16. Erklärung. Das Product einer Kraft mit dem Abstand ihrer Richtung von einem Punkt heifst das Moment der Kraft in Beziehung auf diesen Punkt, welcher der Momentenpunkt heifst. Werden die Momente mehrerer Kräfte auf diesen Punkt bezogen, so heifst der Punkt Mittelpunkt der Momente.

17. Wirken mehrere Kräfte auf einen materiellen Punkt nach Richtungen, die alle in einerlei Ebene liegen, so ist das Moment deren Mittelkraft gleich der algebraischen Summe der Momente sämmtlicher gegebenen Kräfte, wenn der Momentenpunkt in derselben Ebene liegt. Zieht man durch den materiellen Punkt und den Momentenpunkt eine gerade Linie, so werden die Momente der nach entgegengesetzten Seiten dieser Linie gerichteten Kräfte entgegengesetzt in Rechnung gebracht.

Es seien Fig. 752, P; P_1; P_2; P_3 vier

Fig. 752.



Kräfte, der Allgemeinheit der Untersuchung wegen in den vier verschiedenen Quadranten belegen, alle auf den materiellen Punkt A wirkend. Der beliebig gelegene Punkt M sei der Momentenpunkt, A und M durch eine gerade Linie verbunden. Die Winkel der Kräfte mit der geraden Linie AM sind von dieser aus nach einerlei Richtung genommen mit α; α_1; α_2; α_3; Die von M auf die Kräfterichtungen gefällten Lothe mit p; p_1; p_2; p_3 bezeichnet. Setzt man die Länge $AM = a$, die Mittelkraft sämmtlicher Kräfte $= R$ unter dem $\angle \varrho$ mit AM, so hat man nach No. 15 Formel 2.

$$R \sin \varrho = P \sin \alpha + P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 + P_3 \sin \alpha_3 + \ldots. \qquad (1)$$

Nun hat man $\sin \alpha = \frac{p}{a}$

$$\sin \alpha_1 = \sin MAP_1 = \frac{p_1}{a}$$

$$\sin \alpha_2 = \sin MAP_2 = \sin (MAp'' + 180^\circ) = -\sin MAp'' = -\frac{p_2}{a}$$

$$\sin \alpha_3 = \sin (MAA' + A'AP_3) = \sin (360^\circ - MAP_3) = -\sin MAP_3 = -\frac{p_3}{a}$$

Setzt man den Abstand des Momentenpunkts von der Richtung der Mittelkraft $= r$, so hat man $\sin \varrho = \pm \frac{r}{a}$, und alle diese Werthe in Gleichung 1 substituirt entsteht die Gleichung

$$\pm \frac{r}{a} R = \frac{p}{a} P + \frac{p_1}{a} P_1 - \frac{p_2}{a} P_2 - \frac{p_3}{a} P_3 \pm \ldots..$$

oder

$$\pm rR = pP + p_1 P_1 - p_2 P_2 - p_3 P_3 \pm \ldots....$$

womit der Satz als richtig nachgewiesen ist.

18. Ist $\varrho = 0$ oder 180°, so geht die Mittelkraft durch den Momentenpunkt, $\sin \varrho$ ist $= 0$ uud $r = 0$, die algebraische Summe der Seitenkräfte ebenfalls $= 0$. Wenn daher für irgend einen Momentenpunkt die algebraische Summe der Momente der Kräfte $= 0$ wird, so kann dies daher rühren, dafs der Momentenpunkt in der Richtung der Mittelkraft liegt oder auch daher, dafs die Mittelkraft selbst $= 0$ ist, d. h. dafs die Kräfte das Gleichgewicht sich halten.

19. Wenn Kräfte in einerlei Ebene befindlich auf einen materiellen Punkt P wirken und es ist die algebraische Summe deren Momente für zwei Momentenpunkte M, M' genommen, die mit dem materiellen Punkt nicht in einer geraden Linie liegen, für jeden einzelnen $= 0$, so sind die Kräfte unter einander im Gleichgewicht.

Da die algebraische Summe der Momente sämmtlicher Kräfte in Beziehung auf den Punkt $M = 0$ ist, so kann, wenn eine Mittelkraft R existirt, diese nur nach der Linie PM gerichtet sein. Es existirt also keine durch die Linie PM' gerichtete Mittelkraft. Dasselbe findet für den Momentenpunkt M' statt und es existirt also keine Mittelkraft durch die Linie PM. Da aber beides zugleich statt finden mufste und nicht statt finden kann, nämlich dafs die Mittelkraft durch PM und zugleich durch PM' geht,

so existirt überhaupt keine Mittelkraft oder was dasselbe ist, die Mittelkraft ist $=0$.

20. Erklärung. In dem Art. Geschwindigkeit, pag. 153 am Schlufs ist virtuelle Geschwindigkeit erklärt. Sie ist eine ideelle Geschwindigkeit, eine Geschwindigkeit die aus einer Bewegung hervorgehen würde, wenn die Kräfte nicht im Gleichgewicht, nicht in der Ruhe wären.

Denkt man sich das System der Kräfte Fig. 752, in fortschreitender Bewegung und der materielle Punkt A mache mit sämmtlichen auf ihn wirkenden Kräften den Weg $AM=a$, so ist, wenn man den Weg a in der Zeiteinheit zurückgelegt denkt, a die Geschwindigkeit von A also die virtuelle G. des Punktes A.

Die Kraft P wirkt jetzt in dem Punkt M nach einer mit ihrer ursprünglichen Richtung AP parallelen Richtung, sie hat sich also ihrem nach AP gerichteten Ziele um die Länge $Aa_0 = a\cos\alpha$ genähert und die virtuelle G. von P ist $= a\cos\alpha$.

Die Kraft P_1 wirkt $\mp$ mit sich selbst in M, sie hat sich von ihrem nach AP_1 gerichteten Ziele um die Länge $Aa_1 = a\cos MAa_1 = -a\cos\alpha_1$ entfernt, d. h. um die Länge $a\cos\alpha_1$ genähert und es ist $a\cos\alpha_1$ die virtuelle G. von P_1. Desgleichen $a\cos\alpha_2$ die virtuelle G. von P_2 und $a\cos\alpha_3$ die von P_3.

Man spricht auch blofs von der virtuellen G. des materiellen Punkts, und sagt: $AM=a$ ist die virtuelle G. des materiellen Punkts A an sich. Aa_0 die virtuelle G. des materiellen Punkts nach der Richtung der Kraft P, $-Aa_1$ die nach der Richtung der Kraft P_1 u. s. w.

Stellt man sich eine drehende Bewegung vor, die in derselben Ebene der Kräfte um den Punkt M geschieht, so geschehe die Bewegung in der Zeiteinheit rechts um den Bogen φ (für den Halbmesser = 1), so ist offenbar die virtuelle G. des materiellen Punkts $A=a\varphi$; die der Kraft $P=p\varphi=a\varphi\cdot\sin\alpha$; die der Kraft $P_1=-p_1\varphi=-p\varphi\cdot\sin\alpha_1$ u. s. w.

21. Wirken mehrere Kräfte auf einen materiellen Punkt A, deren Richtungen in eine Ebene fallen, so ist das Product aus ihrer Mittelkraft R und der virtuellen G. derselben (= der virtuellen G. des materiellen Punkts auf die Richtung derselben) gleich der algebraischen Summe derselben Producte für jede der einzelnen Seitenkräfte, wenn die virtuellen G. welche in die Richtungen der Kräfte fallen, additiv und die, welche in deren Verlängerungen fallen, subtractiv in Rechnung gebracht werden.

Denn nach No. 14, Formel 1, in Beziehung auf Fig. 751 also auch auf Fig. 752 ist

$$R\cos\varrho = P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + P_3\cos\alpha_3 + \ldots. \qquad (1)$$

Setzt man wie vorher $AM=a$, die virtuelle Geschwindigkeit für die Mittelkraft $R=V$, die für P; P_1; P_2; P_3 aufeinander folgend $=v$; v_1; v_2; v_3 so ist

$V=\pm a\cos\varrho$; also $\cos\varrho=\pm\frac{V}{a}$

$v=Aa_0=a\cos\alpha$; also $\cos\alpha=+\frac{v}{a}$

$v_1=Aa_1=-a\cos\alpha_1$; also $\cos\alpha_1=-\frac{v_1}{a}$

$v_2=Aa_2=-a\cos\alpha_2$; also $\cos\alpha_2=-\frac{v_2}{a}$

$v_3=Aa_3=a\cos\alpha_3$; also $\cos\alpha_3=+\frac{v_3}{a}$

Diese Werthe in Gleichung 1 substituirt geben

$$\pm R\frac{V}{a} = P\frac{v}{a} - P_1\frac{v_1}{a} - P_2\frac{v_2}{a} + P_3\frac{v_3}{a} \pm \ldots..$$

und mit a multiplicirt:

$$\pm VR = vP - v_1P_1 - v_2P_2 + v_3P_3 \pm \ldots..$$

22. Liegt der Punkt M aufserhalb der Ebene der Kräfte, so projicire die Linie AM auf diese Ebene, diese wird AM_1 wenn M_1 die Projection des Punktes M ist, verbinde M_1 mit den Projectionspunkten a_0; a_1; a_2 .... des Punkts M auf die Kraftrichtungen, so sind die Linien M_1a_0; M_1a_1; M_1a_2 .... auf den Kraftrichtungen normal, folglich hat man den Satz No. 21 für dieselben virtuellen Geschwindigkeiten, der Punkt M mag in oder aufserhalb der Ebene der Kräfte liegen.

23. Ist ϱ (s. No. 21) $=90^\circ$, so ist $V=0$.

$-v_1P_1 - v_2P_2 + v_3P_3 \pm \ldots\ldots$

o die virtuelle G. des ma-
n Punkts an sich auf der
g der Mittelkraft normal,
e algebraische Summe der
en Geschwindigkeitspro-
Null.

mmt man zwei virtuelle
indigkeiten des materiel-
cts an sich, die beide nicht
lei geraden Linie liegen,
sind die algebraischen
der virtuellen Geschwin-
producte nach den Rich-
der Kräfte jede für sich
sind die Kräfte mit einan-
gleichgewicht.

ie algebraische Summe der vir-
Geschwindigkeitsproducte kann
sowohl weil die virtuelle G.
Richtung der Mittelkraft = 0
Mittelkraft selbst = 0 ist. Für
ommenen virtuellen G. des ma-
Punkts an sich können aber die
sprechenden virtuellen G. nach
ng der Mittelkraft nicht beide
h = 0 sein, weil sonst beide
nten virtuellen G. auf der Rich-
Mittelkraft normal sein müfsten,
icht möglich ist, weil beide vir-
. nicht in einer geraden Linie
ithin mufs nach den Bedingun-
Satzes die Mittelkraft selbst = 0
. die Kräfte halten einander das
richt.

irken auf einen materiel-
kt drei Kräfte, deren Rich-
nicht in einer Ebene lie-
l nimmt man von dem ma-
n Punkt aus auf diesen
gen Stücke, die sich wie
h ihnen wirkenden Kräfte
en, construirt dann zu die-
cken als Nebenkanten ein
lepiped, so ist die durch
teriellen Punkt liegende
gle die Richtung und in dem
nifs zu den auf den Kraft-
gen genommenen Stücken

die Gröfse der Mittelkraft der drei Seitenkräfte.

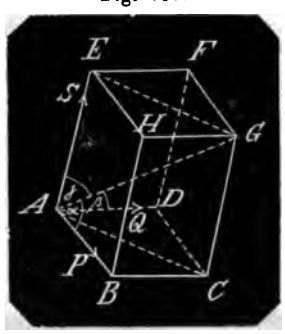
Denn wirken auf den materiellen Punkt A drei Kräfte P, Q, S nach den Richtungen AB, AD, AE und sind

$$P : Q : S = AB : AD : AE$$

so entsteht das Parallelepiped, Fig. 751, und AG ist die Diagonale, welche die Richtung und Gröfse der zu den Kräften P, Q, S gehörigen Mittelkraft sein soll.

Die Diagonale AC ist die der Richtung und Gröfse nach zu P und Q ge-

Fig. 753.



hörige Mittelkraft R_1 (s. Satz 10) und es ist

$$P : Q : R_1 = AB : AD : AC$$

Nun gibt diese Mittelkraft R_1 mit der dritten Seitenkraft S eine Mittelkraft R, welche zugleich die Mittelkraft aller drei Kräfte P, Q und S ist, und diese Mittelkraft ist nach demselben Satz 10 die Diagonale AG des Parallelogramms $ACEG$.

Es ist somit

$$P : Q : S : R = AB : AD : AE : AG$$

26. Sind die Richtungen AB, AD, AE gegenseitig auf einander normal, so hat man

$$AG^2 = AC^2 + AE^2 = AB^2 + AD^2 + AE^2$$

folglich aus der letzten Proportion

$$R^2 = S^2 + R_1^2 = P^2 + Q^2 + S^2$$

Ist $\angle GAB = \alpha$; $\angle GAD = \beta$; $\angle GAE = \gamma$, so ist

$$AB = AG \cos\alpha;\quad AD = AG\cos\beta;\quad AE = AG\cos\gamma$$

ır auch für rechtwinklig unter einander befindliche Kräfte

$$P : Q : S : R = AG\cdot\cos\alpha : AG\cdot\cos\beta : AG\cdot\cos\gamma : AG$$
$$= \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma : 1$$
$$P = R\cdot\cos\alpha;\quad Q = R\cdot\cos\beta;\quad S = R\cdot\cos\gamma$$

lso die drei Winkel bekannt, normalen Linien bildet, so erhält man
ine Kraft mit dreien unter sich die nach diesen drei Linien gerichteten

Seitenkräfte zu der gegebenen als Mittelkraft, wenn man diese mit den Cosinus der Winkel multiplicirt, die zwischen den Richtungen der Mittelkraft und den der drei unter sich normalen Linien statt finden.

Es folgt zugleich, wenn die Seitenkräfte gegeben sind

$$\cos\alpha = \frac{P}{R};\ \cos\beta = \frac{Q}{R};\ \cos\gamma = \frac{S}{R}$$

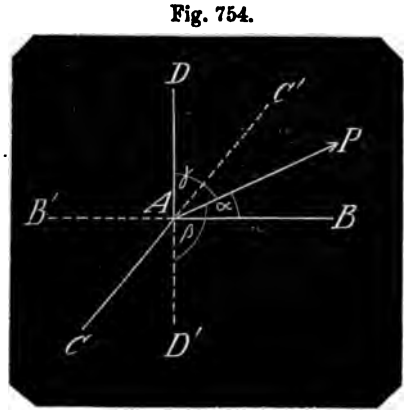
und da $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + S^2}$, so sind die Richtungswinkel der Mittelkraft gegen die Seitenkräfte bestimmt und die Mittelkraft auch ihrer Lage nach bekannt.

27. Das Parallelepipedum, welches die Gröfse und Richtung der Mittelkraft dreier auf einen Punkt wirkende in verschiedenen Ebenen liegenden Kräfte bestimmt, heifst das Parallelepipedum der Kräfte.

28. Auf einen materiellen Punkt wirken nach beliebigen Richtungen im Raum gegebene Kräfte, ihre Mittelkraft nach Gröfse und Lage zu bestimmen.

P; P_1; P_2 ..... seien die gegebenen Kräfte, A der materielle Punkt, auf den

Fig. 754.



sie wirken. Zu Bestimmung ihrer Richtungen nehme man von A aus drei beliebig gelegene aber unter sich normale Linien AB, AC, AD und bestimme die Winkel, welche jede Kraftrichtung mit diesen Normalen als Richtungsaxen macht, wobei die Winkel von 0 bis 180° gezählt werden.

Für die Kräfte P; P_1, ... seien die Richtungswinkel mit $AB = \alpha$; α_1, ... mit $AC = \beta$; β_1, ..., mit $AD = \gamma$; γ_1, ...

Sind zuerst α, β, γ spitze Winkel, so fällt die Richtung der Kraft P innerhalb der Körperecke von den Kanten AB, AC, AD, und liefert nach Satz 26 in drei in diese Kanten fallenden Seitenkräfte zerlegt nach AB die Seitenkraft $P\cos\alpha$, nach AC die Kraft $P\cos\beta$ und nach AD die Kraft $P\cos\gamma$.

Ist zweitens α stumpf und sind die beiden andern β, γ spitz, so fällt die Kraft P innerhalb der Ecke $DCB'A$, die Seitenkräfte von P sind nach AC, AD und AB' gerichtet, die Kraft P bildet mit AB' den $\angle(180° - \alpha)$ und diese Seitenkräfte sind also $-P\cos\alpha$, $P\cos\beta$ und $P\cos\gamma$, mit welchen Werthen die Richtungen der Seitenkräfte ausgesprochen sind.

Eben so verhält es sich, wenn β und γ stumpf sind, wo dann die subtractiven Vorzeichen andeuten, dafs die Seitenkräfte nach den Richtungen AC' und AD' hin liegen. Und so verhält es sich mit den übrigen Kräften P_1; P_2 ... mit den ihnen zugehörigen Winkeln α_1; α_2 ... β_1; β_2 ... γ_1; γ_2 ... Man hat demnach mit Zerlegung sämmtlicher Kräfte die Seitenkräfte nach AB und AB':

$\pm P\cos\alpha \pm P_1\cos\alpha_1 \pm P_2\cos\alpha_2 \pm \ldots$.

nach der Richtung AC, AC'

$\pm P\cos\beta \pm P_1\cos\beta_1 \pm P_2\cos\beta_2 \pm \ldots$.

nach der Richtung AD, AD'

$\pm P\cos\gamma \pm P_1\cos\gamma_1 \pm P_2\cos\gamma_2 \pm \ldots$.

Diese drei Summen geben drei Kräfte, welche die Mittelkräfte jener Seitenkräfte sind und für die gegebenen Kräfte P; P_1; P_2 ... eingesetzt dieselbe Wirkung ausüben.

Bezeichnet man diese drei Mittelkräfte mit Q; Q_1; Q_2, so setzen sich diese wieder zu einer Mittelkraft R zusammen, welche der den gegebenen Kräften zugehörigen Mittelkraft an Gröfse und Richtung identisch ist. Sind die Winkel der Mittelkraft R mit den Axen AB, AC, $AD = \alpha'$, β', γ', so hat man

$R\cos\alpha' = Q$; $R\cos\beta' = Q_1$; $R\cos\gamma' = Q_2$.

Quadrirt man diese 3 Gleichungen, so hat man

$$R^2(\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma') = Q^2 + Q_1^2 + Q_2^2 \quad (1)$$

Nun ist nach dem Art. „Körpertrigonometrie“ No. 17 mit Fig. 740, pag. 36, der Werth der Klammergröfse = 1, mithin hat man

$$R^2 = Q^2 + Q_1^2 + Q_2^2$$
$$= (P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + \ldots)^2 + (P\cos\beta + P_1\cos\beta_1 + \ldots)^2 + (P\cos\gamma + P_1\cos\gamma_1 + \ldots)^2 \quad (7)$$

Ferner hat man die Richtungswinkel der Mittelkraft R mit den Axen

$$\cos\alpha' = \frac{Q}{R} = \frac{P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + \ldots.}{R}$$

$$\cos\beta' = \frac{Q_1}{R} = \frac{P\cos\beta + P_1\cos\beta_1 + \ldots.}{R}$$

$$\cos\gamma' = \frac{Q_2}{R} = \frac{P\cos\gamma + P_1\cos\gamma_1 + \ldots.}{R}$$

29. Entwickelt man die Quadrate der Polynome von R^2, so erhält man

$$\begin{aligned}
&= P^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) + P_1^2(\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1)\\
&+ P_2^2(\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2) + \ldots + 2PP_1(\cos\alpha\cdot\cos\alpha_1 + \cos\beta\cdot\cos\beta_1 + \cos\gamma\cdot\cos\gamma_1)\\
&+ 2PP_2(\cos\alpha\cdot\cos\alpha_2 + \cos\beta\cdot\cos\beta_2 + \cos\gamma\cdot\cos\gamma_2) + \ldots.\\
&+ 2P_1P_2(\cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cdot\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cdot\cos\gamma_2) + 2P_1P_3(\cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_3 + \ldots) + \ldots\\
&+ 2P_2P_3(\cos\alpha_2\cdot\cos\alpha_3 + \ldots) \ldots.\\
&+ \ldots..\\
&+ 2P_{n-1}P_n(\cos\alpha_{n-1}\cdot\cos\alpha_n + \ldots)
\end{aligned} \qquad (1)$$

Nun ist jede der ersten Klammergrö-
en, die Summe der Quadrate von drei
sinus enthaltend, nach dem ad 27 ge-
chten Satz = 1, und nach dem folgen-
n Satz 18, die Klammergrölsen, welche
e Summe der Producte je zweier der
ei Cosinus enthalten = dem Cosinus des Winkels, den die beiden zu ihnen gehörigen Kraftrichtungen mit einander bilden. Bezeichnet man daher den Winkel je zweier solcher Kraftrichtungen mit den neben einander gestellten Kraftzeichen selbst, so hat man

$$\begin{aligned}
R^2 &= P^2 + P_1^2 + P_2^2 + \ldots.. + 2PP_1\cos(PP_1) + 2PP_2\cos(PP_2) + \ldots.\\
&+ 2P_1P_2\cos(P_1P_2) + \ldots. + 2P_{n-1}P_n\cos(P_{n-1}P_n)
\end{aligned} \qquad (2)$$

30. Die Mittelkraft mehrerer Seienkräfte multiplicirt mit der virtuellen Geschwindigkeit des Anriffspunkts der Kräfte nach der ichtung der Mittelkraft ist gleich er algebraischen Summe der Producte aus jeder Seitenkraft multiplicirt mit der nach ihr gerichteten virtuellen Geschwindigkeit es materiellen Punkts.

Der Beweis davon ist wie der No. 21. Bezeichnet auch hier V die virtuelle G. les materiellen Punkts nach der Richtung der Mittelkraft; bezeichnen ferner v; v_1; v_2 .... die virtuellen G. desselben Punkts nach den Richtungen der Kräfte P; P_1; P_2... so erhält man die Schlufsgleichung

$$VR = vP + v_1P_1 + v_2P_2 + \ldots. v_nP_n$$

31. Bei derselben Bezeichnung er Kräfte und deren Richtungsinkel sind die auf einen materiellen Punkt wirkenden Kräfte im Gleichgewicht wenn

$$\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + \ldots = 0$$
$$\cos\beta + P_1\cos\beta_1 + P_2\cos\beta_2 + \ldots = 0$$
$$\cos\gamma + P_1\cos\gamma_1 + P_2\cos\gamma_2 + \ldots = 0$$

Denn nach No. 28 sind die drei = 0 gesetzten algebraischen Summen die nach den drei gewählten Axen gerichteten Mittelkräfte der nach diesen Axen in Seitenkräfte zerlegten gegebenen Kräfte P; P_1; P_2..; sind also mit den gegebenen Kräften gleichgeltend, und es kann bei diesen nur Gleichgewicht bestehen, wenn es unter diesen drei Mittelkräften besteht. Da sich nun drei Kräfte, deren Richtungen nicht in einerlei Ebene liegen, (s. Satz 24) nach dem Parallelepipedum der Kräfte zu einer Mittelkraft zusammen setzen, so kann das System nur im Gleichgewicht sein, wenn diese Mittelkraft = 0, wenn also jede der algebraischen Summen von je in einerlei geraden Linie wirkenden Seitenkräften = 0 ist.

32. Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn deren Mittelkraft = 0 ist; daher kann man das Gleichgewicht auch ausdrücken, wenn man in No. 29, Gleichung 2, $R = 0$ setzt. Folglich besteht das Gleichgewicht zwischen den gegebenen Kräften, wenn die algebraische Summe aus den Quadraten dieser Kräfte und den doppelten Producten je zweier derselben mit dem Cosinus ihres Richtungswinkels = 0 ist.

Diese Bedingung begreift die drei Bedingungen No. 31 in sich, denn jene al-

gebraische Summe ist wie No. 29, Gleichung 1 und No. 28, Gleichung 2 be

$(P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + \ldots)^2 + (P\cos\beta + P_1\cos\beta_1 + \ldots)^2 + (P\cos\gamma + P_1\cos\gamma_1 + \ldots$

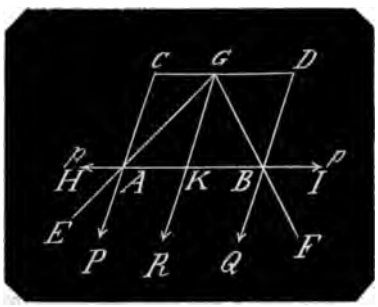
so dafs also jedes einzelne der drei Glieder = 0 sein mufs.

III. Statik der materiellen Ebenen.

33. Wirken auf zwei Punkte einer Ebene zwei Kräfte, deren Richtungen ∓ laufen, so ist ihre Mittelkraft die Summe oder der Unterschied der Seitenkräfte, je nachdem sie nach einerlei oder nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind, die Richtung der Mittelkraft ist denen der Seitenkräfte ∓ und theilt die Verbindungslinie der beiden Angriffspunkte dergestalt, dafs jede Kraft dem Theil der Verbindungslinie proportional ist, der zwischen den Richtungen der beiden übrigen Kräfte begriffen ist.

Sind A und B die beiden materiellen Punkte, auf welche die Kräfte P und Q

Fig. 755.



nach den parallelen Richtungen AP und BQ wirken, so bringe nach den Verlängerungen der Linie AB nach AH und BJ zwei gleich grofse Kräfte p, p an, so werden dadurch nach Satz 2 die Wirkungen der Kräfte P und Q nicht geändert. Nun kann man aber die auf den Punkt A wirkenden Kräfte P und p (nach No. 10) zu einer Mittelkraft zusammen setzen; deren Richtung sei AE, und eben so die auf B wirkenden Kräfte Q und p zu einer Mittelkraft, die nach BF gerichtet sein möge. AE und BF verlängere man rückwärts bis sie sich in G schneiden und wo sie nach No. 4 mit ungeänderten Richtungen wirkend gedacht werden können. Zieht man nun durch G eine Linie $CD \mp AB$ und verlängert PA und QB bis in die Linie CD, zerlegt ferner die in dem Punkt G nach GE und GF wirkenden Kräfte nach [illegible] gen GC, GD und $GK \mp CP$ [illegible] lich die Kraft GE nach GC u[illegible] die Kraft GF nach GD und G[illegible] die beiden nach GC und GD [illegible] Seitenkräfte $= p$, die sich einan[illegible] Gleichgewicht halten; es bleiben nur die nach GK zerlegten K[illegible] $P + Q = R$ übrig.

Nun ist wegen des Parallelog der Kräfte

$$p : P = CG : GK = AK : G$$

und $$Q : p = GK : GD = GK : B$$

woraus $$P : Q : R = BK : AK : A$$

Hieraus folgt umgekehrt, daf Kraft R nach zwei mit ihr pa[illegible] Richtungen in zwei Seitenkräfte si[illegible] legen läfst, deren Summe gleich de R, und die sich umgekehrt ver wie die Stücke, die zwischen ihre[illegible] tungen und der Kraft R auf eine[illegible] begriffen sind, welche die Kräfter gen schneidet.

Sind nun zweitens die Kräfte Q parallel und entgegengesetzt g[illegible] (Fig. 756) und ist $Q > P$, so kan Q als die Mittelkraft zweier Kr[illegible] und R ansehen, wo P' der Kraft P gerade entgegengesetzt ist, die a[illegible] aber die verlängerte AB in einem C durchschneidet, dergestalt dafs

$$Q : P' : R = AC : BC : AB$$

Nun ist $P' = P$, folglich halten und P' das Gleichgewicht; es ble[illegible] her statt der ursprünglich geg[illegible] Kräfte P und Q nur R als ihnen geltend übrig, wenn man statt beiden gleichgeltenden Seitenkr[illegible] und R einsetzt. Mithin ist R d[illegible] telkraft zwischen P und Q und $= P' + R = P + R$, so ist $R = Q -$

Verwandelt man die Proportion Satzes in Producte der äufseren u[illegible] Mittelglieder, so erhält man ad 1 753

$$BK \cdot R = AB \cdot P$$

$$AK \cdot R = AB \cdot Q$$

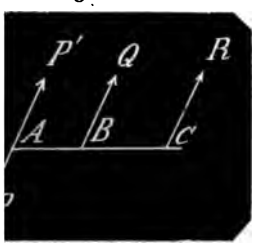
ad 2, Fig. 756

$$AC \cdot R = AB \cdot Q$$

hieraus $$AC = \frac{Q}{R}\,AB = \frac{Q}{Q - P}\,AB$$

Ist $Q = P$, so ist $AC = \frac{Q}{0}\,AB = \infty$

Fig. 756.



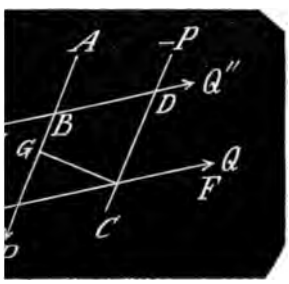
in diesem Fall keine Mitstatt.

lärung. Zwei gleiche paid entgegengesetzt wirräfte heifsen ein Kräftes Product zwischen einer n und ihrem Abstande Moment des Kräftepaars. st $P - P$ ein Kräftepaar; ist mal auf P und P', also deren o ist $CG \times P = aP$ das Moment

ei gleiche und parallel gesetzte Kräfte können r dritten Kraft nicht im wicht sein.

id AB und CD die beiden pa-

Fig. 757.



chtungen der gleichen Kräfte ", und es wäre möglich, dafs Q nach irgend einer in derne befindlichen Richtung EF n Kräften das Gleichgewicht ifst sich eine Linie $DH \neq$ der ziehen, die also dieselbe Lage gen beide Kräfte P und $-P$ s müfste ebenso gut eine Kraft r Richtung DH wirkend, mit im Gleichgewicht sein. Bringt in der Linie DH zwei Kräfte an, jede $= Q$ und entgegenrkend, so wird das Gleichgewicht wie vorher bestehen. Nun müfste aber, wie eben gesagt, auch Q' den Kräften P und $-P$ das Gleichgewicht halten, und folglich müfsten Q und Q'' mit einander im Gleichgewicht sein. Beide sind aber $\neq$ und nach einerlei Richtung, folglich haben sie nach No. 33 eine Mittelkraft $= 2Q$, es kann mithin eine einzige Kraft wie Q oder Q' den beiden Kräften P und $-P$ nicht das Gleichgewicht halten.

Ebenso wird der Beweis geführt, wenn die Kraft Q aufserhalb der Ebene der Kräfte P und $-P$ liegend angenommen wird.

36 Aus dem vorigen Satz folgt unmittelbar, dafs zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte keine Mittelkraft haben, denn gäbe es eine solche, so würde die ihr gleiche und entgegengesetzt wirkende Kraft beiden Kräften das Gleichgewicht halten, welchem Satz 35 widerspricht (ist auch No. 34 analytisch nachgewiesen).

37. Die Mittelkraft aus mehreren in einer Ebene und parallel wirkenden Kräften ist die algebraische Summe aller Seitenkräfte und das Moment der Mittelkraft = der algebraischen Summe der Momente der Seitenkräfte, wenn man diejenigen Kräfte mit entgegengesetzten Vorzeichen in Rechnung bringt, welche nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind, und eben so die Vorzeichen der vom Momentenpunkt auf entgegengesetzten Seiten liegenden Abstände entgegengesetzt nimmt.

Denn es seien

1. zwei nach einerlei Seite gerichtete Kräfte P und Q, so nehme man in der Ebene deren Richtungen aufserhalb derselben einen Punkt M zum Momentenpunkt, ziehe von M aus auf die Richtungen eine winkelrechte Linie, welche dieselben in A und B schneidet, so hat man die Mittelkraft R beider Kräfte denselben parallel, $= P + Q$ und deren Lage ist nach Satz 34 zwischen A und B in C der Art, dafs $AC \cdot R = AB \cdot Q$ oder $BC \cdot R = AB \cdot P$

Aus $R = P + Q$

folgt $AM \cdot R = AM \cdot P + AM \cdot Q$

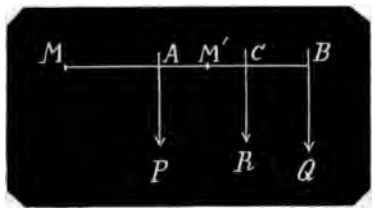
hierzu $AC \cdot R = AB \cdot Q$

gibt $(AC + AM) \cdot R = AM \cdot P + (AB + AM) \cdot Q$

oder $CM \cdot R = AM \cdot P + BM \cdot Q$ (1)

Nimmt man den Momentenpunkt M' zwischen beiden Kräften P und Q, so hat man, weil $R = P + Q$

Fig. 758.



$$MM' \cdot R = MM' \cdot P + MM' \cdot Q \quad (2)$$

Diese Gleichung von Gleichung 1 abgezogen gibt

$$(CM - M'M) \cdot R = (AM - M'M) \cdot P + (BM - M'M) \cdot Q$$

oder $$CM' \cdot R = -AM' \cdot P + BM' \cdot Q$$

Das Moment der Mittelkraft ist also = der algebraischen Summe der Momente der Seitenkräfte; die Abstände, welche auf entgegengesetzten Seiten des Momentenpunkts liegen, entgegengesetzt in Rechnung gebracht.

Wird der Momentenpunkt M' in C genommen, so ist $MC = MM'$ und $CM' = 0$, mithin nach Gleichung 2

$$0 = -AC \cdot P + BC \cdot Q$$

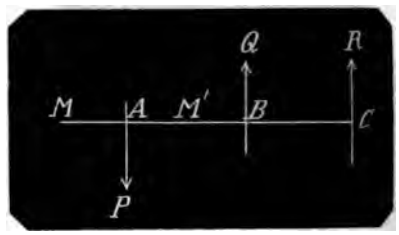
D. h. Für einen in der Richtung der Mittelkraft gelegenen Momentenpunkt ist die algebraische Summe der Momente der Seitenkräfte = 0.

Liegt der Punkt M' zwischen B und C, so wird $M'M > CM$ und dann wird $CM - M'M = -CM'$. Man hat also für diesen Fall

$$-CM' \cdot R = -AM' \cdot P + BM' \cdot Q$$

2. Sind zwei Kräfte P, Q ∓ nach entgegengesetzten Seiten gerichtet und nimmt man aufserhalb beider Kräfte in deren Ebene einen Momentenpunkt M, zieht von diesem auf die Richtungen der Kräfte

Fig. 759.



eine Normale, welche die Kräfte P und Q in A und B schneidet, so hat man, wenn $Q > P$, die Mittelkraft $R = Q - P$ und die verlängerte MB schneidet deren Richtung in einem Punkt C, so dafs $AC \cdot R = AB \cdot Q$

Aus $R = Q - P$ folgt (3)

$$AM \cdot R = AM \cdot Q - AM \cdot P$$

hierzu $$AC \cdot R = AB \cdot Q$$

gibt addirt

$$CM \cdot R = BM \cdot Q - AM \cdot P \quad (4)$$

D. h. das Moment der Mittelkraft ist = der algebraischen Summe der Momente beider Seitenkräfte, wenn man die der gröfseren Kraft Q entgegengesetzt wirkende Kraft P subtractiv in Rechnung bringt.

Nimmt man einen Momentenpunkt M' zwischen den Kräften P und Q, so hat man aus Gleichung 3

$$MM' \cdot R = MM' \cdot Q - MM' \cdot P$$

Diese von Gleichung 4 subtrahirt gibt

$$(CM - M'M) \cdot R = (BM - M'M) \cdot Q - (AM - MM') \cdot P$$

oder

$$CM' \cdot R = BM' \cdot Q + AM' \cdot P$$

Hier erscheinen die Kräfte Q und R additiv, die ihnen entgegengesetzt gerichtete Kraft P subtractiv, die Abstände BM', CM' additiv, der ihnen vom Momentenpunkt aus entgegengesetzt liegende Abstand AM' subtractiv in Rechnung gebracht.

Ist $Q < P$, so ist $R = P - Q$. Behält man aber die Gleichung $R = Q - P = -(P - Q)$, so gibt das subtractive Vorzeichen an, dafs die Mittelkraft in diesem Falle der zuerst betrachteten Kraft Q entgegengesetzt gerichtet ist. Nimmt man nun zuerst den Momentenpunkt M aufserhalb der Richtung aller drei Kräfte und verlegt ihn dann beliebig innerhalb der Richtungen, so erhält man auf dieselbe Art wie zuvor die Gleichheit zwischen den Momenten der drei Kräfte, insofern man die Vorzeichen der darin vorkommenden Gröfsen wie im ersten Fall bestimmt. In allen Fällen also, wo auch der Momentenpunkt angenommen werden mag, hat man allgemein die beiden Gleichungen

$$R = P + Q$$

$$CM \cdot R = AM \cdot P + BM \cdot Q$$

3. Sind mehrere Kräfte P, P', P''... nach einerlei Seite gerichtet und sind

"... die Abstände ihrer Richtun-
n irgend einem Momentenpunkt
; R die Mittelkraft sämmtlicher
r ihr Abstand von dem Momen-
kt, so hat man allgemein

$= P + P' + P'' + \ldots$

$= aP + a'P' + a''P'' + \ldots$

man diejenigen Abstände subtrac-
mt, die gegen den Abstand a auf
ngesetzter Seite des Momenten-
liegen.

ist R' die Mittelkraft von P und
die Mittelkraft von R' und P'' u.
nd sind die den Mittelkräften zu-
en Abstände r', r''..., so hat man

$P + P'$

$R' + P'' = P + P' + P''$

$R'' + P''' = P + P' + P'' + P'''$

.

)r

$aP + a'P'$

$r'R' + a''P'' = aP + a'P' + a''P''$

ind von den Kräften P, P', P''...
) $\mp$ entgegengesetzt gerichtet, so
man zuerst die nach einerlei Seite
nn die nach der entgegengesetzten
in gerichteten Kräfte. Ist R' die
aft der ersteren, r' deren Abstand
)mentenpunkt, R'' und r'' dieselben für die entgegengesetzten
so hat man für das ganze System

$R = R' + R''$

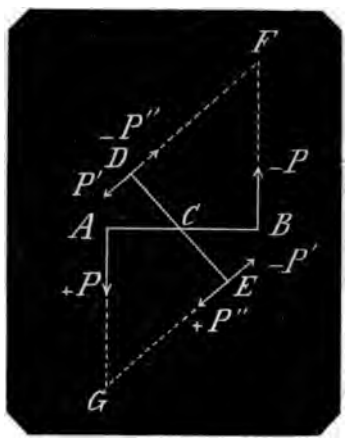
$R = r'R' + r''R''$

Zwei gleiche entgegengesetzte parallele Kräfte bleiben
er Wirkung ungeändert, wie
ichtungen in der Ebene lie-
ögen, wofern nur der Ab-
derselben von einander un-
ert bleibt.

es sei AB der Abstand der bei-
äfte P und $-P$. Ist C die Mitte
, und man nimmt

e geänderte Lage des Abstandes
rch die Mitte C von AB, so ziehe
eine beliebige gerade Linie DE,
$CD = CE = CA$, also $DE = AB$.
nd E bringe man normal auf DE
te Kräfte an, die alle einander
nd $= P$ sind, und je zwei und
1 entgegengesetzten Richtungen,
nd E die Kräfte P und $-P$ und
fte $-P''$ und P'', so werden die
gen der ursprünglichen Kräfte P
P nicht geändert. Verlängert man
ftrichtungen $D(-P')$ und $E(-P)$ bis zu ihrem Durchschnittspunkt F, so kann man beide Kräfte $-P$ und $-P'$

Fig 760.



mit ungeänderten Richtungen in F wirkend annehmen (Satz 4), wo beide zu einer Mittelkraft vereinigt werden können, die, weil $P = P''$, den $\angle DFB$ halbirt (Satz 7); d. h. die nach der Linie CF gerichtet ist.

Eben so geben die Kräfte $+P$ und $+P'$, beide mit ungeänderten Richtungen in dem Punkt G angebracht, eine nach CG gerichtete Mittelkraft, die mit CF in einerlei gerade Linie fällt, weil CF den $\angle BCD$ und CG den $\angle ACE$ halbirt.

Da nun $\mp P = \mp P''$, so sind auch beide Mittelkräfte einander gleich, gerade entgegengesetzt gerichtet, mithin heben sie sich einander auf, und folglich heben sich einander auf oder halten einander das Gleichgewicht die vier Kräfte P, $-P$, P'' und $-P''$ und die Wirkung der übrigen beiden Kräfte P' und $-P'$ haben mit den ursprünglich gegebenen beiden Kräften P und $-P$ dieselbe Wirkung.

Hieraus geht hervor, dafs man den Abstand AB um seine Mitte in der Ebene beliebig herumdrehen kann, ohne dafs die Wirkung der Kräfte dadurch geändert wird.

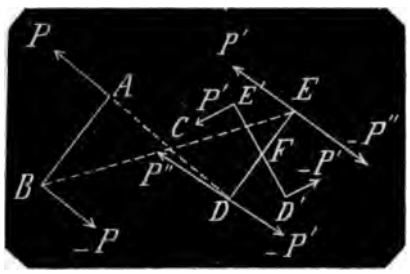
Man kann aber auch beiden Kräften in derselben Ebene eine beliebige Lage geben, ohne dafs ihre Wirkung geändert wird, wenn nur ihr Abstand dem ersten Abstand = bleibt.

Nimmt man

2. den neuen Abstand $DE \neq AB$, so

setze auf die Endpunkte D und E, normal DE zwei Paar einander entgegengesetzte und der Kraft P gleiche Kräfte

Fig. 761.



$-P'$, P'' und P', $-P''$, so werden durch diese neu hinzugekommenen Kräfte die Wirkungen der ersten Kräfte nicht geändert. Nun ziehe die beiden Geraden AD und BE, so schneiden sich dieselben als Diagonalen eines Parallelogramms in ihrem beiderseitigen Halbirungspunkt C. Die beiden gleichen Kräfte P und P'' in A und D lassen sich also zu einer durch C gerichteten, mit P und P'' parallelen Mittelkraft $= 2P$ zusammensetzen. Eben so setzen sich die beiden Kräfte $-P$ und $-P''$ zu einer durch C mit ihnen $\neq$ gerichteten Mittelkraft $-2P$ zusammen.

Aus den vier zuletzt betrachteten Kräften entstehen also zwei gleiche und gerade entgegengesetzt gerichteten Kräfte $2P$ und $-2P$, die nun mit einander im Gleichgewicht sind und die also aus dem System hinweggenommen werden können, ohne dafs die ursprünglich gegebene Wirkung gestört wird. Da nun bei solcher Hinwegnahme die beiden Kräfte P' und $-P'$ übrig bleiben, so wirken diese eben so wie die zuerst gegebenen Kräfte P und $-P$, womit der Satz erwiesen ist.

Nimmt man

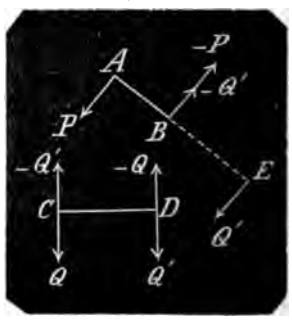
3. eine in derselben Ebene mit AB befindliche ihr gleiche Linie $D'E'$ mit den der Kraft P gleichen Kräften $P, -P$, so drehe diese Linie um deren Mitte F in die der AB parallele Lage DE, so ist nach dem ersten Theil des Satzes das an DE befindliche Kräftepaar mit dem an $D'E'$ befindlichen gleichgeltend; dieses aber nach dem zweiten Theil gleichgeltend mit dem an AB befindlichen Kräftepaar, folglich das Kräftepaar an $D'E'$ gleichgeltend mit dem an AB und somit der Satz als allgemein gültig erwiesen.

39. Zwei Kräftepaare in einerlei Ebene wirkend sind gleichgeltend, wenn das Product aus dem Abstand des einen Paars und einem seiner Kräfte dem Product derselben Factoren des anderen Paares gleich ist, und beide Paare nach derselben Seite hin nach Drehung wirken; d. h. übereinstimmend gerichtet sind; oder diese Producte, Momente der Paare genannt, wenn ihre Momente gleich sind.

Denn es sei AB (Fig. 762) der Abstand des einen Kräftepaars P und $-P$, CD der Abstand des anderen Q und $-Q$ und $AB \times P = CD \times Q$. Bringt man an die Kräfte Q und $-Q$ die ihnen gleichen Kräfte Q' und $-Q'$ entgegengesetzt, so sind diese 4 Kräfte im Gleichgewicht, und es bleibt für die Wirkung in der Ebene nur das Kräftepaar P und $-P$.

Verlängert man nun AB bis E, so dafs $BE = CD$, so kann man nach No. 38, 3 das Paar Q' und $-Q'$ so verlegen, dafs ihr Abstand BE ist; dann sind P und Q' nach einer und $-P$ und $-Q'$ nach der anderen Seite gerichtet. Da nun $Q' = Q$, $BE = CD$, und $AB \cdot P = CD \cdot Q = BE \cdot Q'$, so geht (nach Satz 37) die Mittelkraft von P und Q' durch B, ist $\neq P$ und Q' und $= P + Q'$. Dieser nun wirken gerade entgegengesetzt die Kräfte $-P; -Q' = -(P+Q')$, folglich sind die vier Kräfte P, $-P$, Q', $-Q'$ im Gleichgewicht, ändern die Wirkung der an CD befindlichen Kräfte Q und $-Q$ nicht, und folglich ist die Wirkung der Kräfte P und $-P$ an AB = der Wirkung des an CD zurückgebliebenen Kräftepaars Q und $-Q$.

Fig 762.



40. Zwei Kräftepaare in einerlei Ebene sind einem Paare gleichgeltend, dessen Moment die algebraische Summe der Momente beider ersten Paare ist, wenn man bei gleichen Richtungen der Kräfte die Momente additiv, bei entge-

gengesetzten Richtungen aber das eine Moment subtractiv in Rechnung bringt.

Es seien P und $-P$ an $AB=a$ das eine Paar, Q und $-Q$ an $CD=b$ das andere Paar; alsdann kann man nach dem vorigen Satz statt des letzten Paares ein gleichgeltendes Q' und $-Q'$, unter dem Abstand $AB=a$ anbringen, wenn $a\cdot Q'=bQ$, und das neue Paar an AB ist mit dem Paar P und $-P$ in denselben geraden Linien wirkend.

Sind diese beide Paare gleich gerichtet, so vereinigen sie sich zu einem Kräftepaare R und $-R$, wo $R=P+Q'$; sind dagegen beide Kräftepaare entgegengesetzt gerichtet, so entsteht aus ihnen ein Kräftepaar R und $-R$, wo $R=P-Q'$ also $-R=-(P-Q')$. Man hat also in beiden Fällen $R=P\pm Q'$

oder da $Q'=\frac{b}{a}Q$; $R=P\pm\frac{b}{a}Q$

oder $\quad aR=aP\pm bQ.$

41. Sind mehrere Kräftepaare $P-P$; $P'-P'$; $P''-P''$... unter den Abständen a, a', a''.... wirkend, so vereinigen sich dieselben zu einem Kräftepaar $R-R$ unter dem Abstand b, so dafs

$$bR=aP+a'P'+a''P''+\ldots..$$

Dann ergibt sich aus 2 Paaren $P-P$ und $P'-P'$ das Paar $R'-R'$ unter dem Abstand b, so hat man $bR'=aP+a'P'$. Das Paar $R'-R'$ vereinigt sich wieder mit dem Paar $P''-P''$ zu einem Paar $R''-R''$ unter demselben Abstand b und es ist

$$bR''=bR'+a''P''=aP+a'P'+a''P''$$

u. s. w.

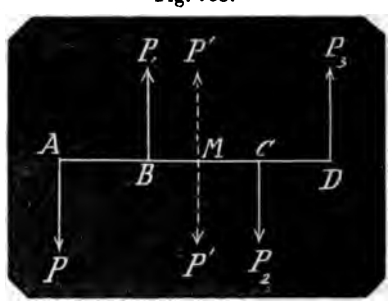
42. Mehrere in einer Ebene wirkende Kräftepaare halten einander das Gleichgewicht, wenn die algebraische Summe ihrer Momente = 0 ist.

Denn die gegebenen Kräftepaare sind nach dem vorigen Satz einem Kräftepaar gleichgeltend, dessen Moment der algebraischen Summe der Momente jener Paare gleich ist. Ist nun diese algebraische Summe = 0, so ist auch das Moment jenes Mittelpaars = 0, und da dessen Hebelsarm = b, so ist $R=0$ und $-R=0$. Oder augenfällig dargestellt: Wenn sämmtliche unter verschiedenen Abständen gegebene Kräftepaare auf den Abstand b reducirt werden, so heben sich in jedem der beiden Endpunkte die dorthin reducirten Kräfte einander auf, indem in jedem Endpunkt die nach einer Richtung hinfallenden Kräfte den ihnen gerade entgegengesetzt wirkenden Kräften gleich sind.

43. Mehrere in einer Ebene $\pm$ gerichteten Kräfte sind mit einander im Gleichgewicht, wenn die algebraische Summe derselben so wie die algebraische Summe ihrer Momente in Beziehung auf irgend einen in der Ebene befindlichen Punkt, jede für sich = 0 ist, sofern man die nach entgegengesetzten Seiten gerichteten Kräfte und ihre auf entgegengesetzten Seiten des Momentenpunkts befindlichen Abstände mit entgegengesetzten Vorzeichen in Rechnung bringt.

Fig. 763 sind die vier Kräfte P; P_1; P_2; P_3 angenommen und der Momentenpunkt M zwischen den Kräften P, und P_2. Parallel diesen Kräften denke man sich in M zwei gleiche entgegengesetzt wirkende Kräfte P' und $-P'=P$ und

Fig. 763.



$-P$ angebracht, so bleibt die Wirkung der gegebenen Kräfte dieselbe; man erhält aber ein Kräftepaar P und $-P'$ in A und M unter dem Abstand $AM=a$ und zugleich in M eine mit P gleiche und gleich gerichtete Kraft P'.

Auf eben dieselbe Art lassen sich die Kräfte P'; P_2; P_3... in gleiche und in M gleich gerichtete Kräfte P_1'; P_2'; P_3'... und in Kräftepaare P_1-P_1'; P_2-P_2'; P_3-P_3' unter den Abständen $BM=a_1$; $CM=a_2$; $DM=a_3$ verwandeln.

Man erhält hierdurch in dem Momentenpunkt M die gegebenen Kräfte unter den gegebenen Richtungen in einerlei graden Linie wirkend vereinigt, und aufserdem so viele Kräftepaare als gegebene Kräfte. Diese Kräftepaare lassen sich nun nach dem vorigen Satz zu einem einzigen Kräftepaar vereinigen, dessen Moment dann gleich ist der algebraischen

Summe der Momente sämmtlicher construirten Paare.

Wäre nun die Mittelkraft und das zusammengesetzte Kräftepaar wirklich vorhanden, so könnte nach Satz 35 kein Gleichgewicht sein; eben so wenig kann Gleichgewicht sein, wenn die in M wirkende Mittelkraft allein = 0 oder das zuletzt erhaltene Kräftepaar allein = 0 ist, weil im ersten Fall ein Kräftepaar, im zweiten Fall eine Mittelkraft existirt.

Demnach hat man als Bedingung des Gleichgewichts für parallel in einerlei Ebene gerichtete Kräfte.

1. Die Kräfte mit ungeänderten Richtungen auf einen Punkt angebracht müssen einander aufheben, d. h. die algebraische Summe der Kräfte muſs = 0 sein.

2. Die durch Verlegung der Kräfte auf einen Punkt entstehenden Kräftepaare müssen für sich im Gleichgewicht sein, d. h. die algebraische Summe ihrer Momente muſs = 0 sein.

Bringt man nun sämmtliche Kräftepaare auf den Abstand AM, so haben die Paare $P-P$ und P_2-P_2 einerlei Richtung, die Paare P_1-P_1 und P_3-P_3 die ihnen entgegengesetzte Richtung.

Demnach ist das Moment des aus ihnen zusammengesetzten Kräftepaars

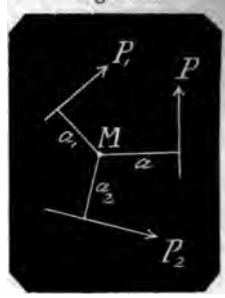
$$= aP - a_1P_1 - a_2P_2 + a_3P_3$$

Uebrigens ersieht man aus der Figur, daſs die Richtungen der Kräfte P_1 und P_3 den Richtungen der Kräfte P und P_1 entgegengesetzt sind. Eben so sind die Abstände a_2; a_3 den Abständen a und a_1 entgegengesetzt. Die Regel heiſst nun, daſs man die Momente nach den Vorschriften der Buchstabenrechnung bildet, indem man die entgegengesetzt liegenden Kräfte und Abstände als subtractiv in Rechnung bringt. Verfährt man nach dieser Regel, so hat man nicht nöthig die Kräftepaare auf einen und denselben Abstand zu reduciren. Fig. 763 enthält alle Fälle, welche in Hinsicht auf Lage von Kräften vorkommen können, und der Satz ist also allgemein gültig erwiesen.

44. Beliebig in einer Ebene gerichtete Kräfte sind mit einander im Gleichgewicht 1. wenn die Kräfte auf einen Punkt mit unveränderlichen Richtungen angebracht, einander das Gleichgewicht halten und 2. wenn die algebraische Summe der Momente der in ihren ursprünglichen Richtungen befindlichen Kräfte in Beziehung auf einen beliebigen in derselben Ebene genommenen Momentenpunkt = 0 ist, sofern die entgegengesetzt gerichteten Kräfte bei der Momentenbildung entgegengesetzt in Rechnung gebracht werden.

Es sei M der Momentenpunkt für die Kraft P; P_1; P_2 ... unter den Abständen a; a_1; a_2 ... Zerlegt man nun nach dem vorigen Satz jede der Kräfte in eine ihr gleiche und durch den Momentenpunkt

Fig. 764.



ihr ± gerichtete Kraft und in ein Kräftepaar unter dem jeder Kraft zugehörigen Abstande von M, so erhält man die den gegebenen Kräften gleiche und parallel in M wirkende Kräfte und die Kräftepaare, deren Momente = aP; a_1P_1; a_2P_2 .... sind.

Sollen also die Kräfte P; P_1; P_2 ... mit einander im Gleichgewicht sein, so müssen

1. nach Satz 15 die auf den Punkt M reducirten Kräfte im Gleichgewicht sein; sie dürfen nämlich keine Mittelkraft liefern;

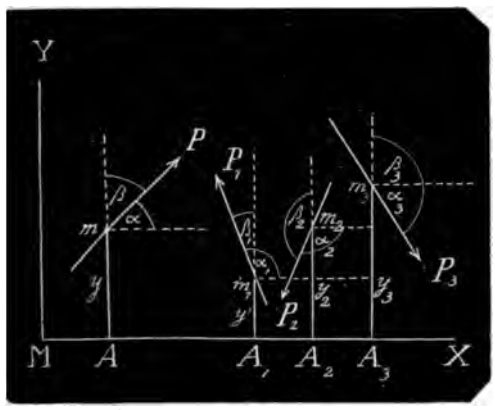
2. muſs nach Satz 43 die algebraische Summe ihrer Momente $aP + a_1P_1 + a_2P_2$ .... = 0 sein.

45. Die Bedingungen des Gleichgewichts zu finden für Kräfte, die nach beliebigen Richtungen in einer und derselben Ebene sich befinden.

Zu allgemeiner Untersuchung und Auffindung des allgemeinen Gesetzes für die Bedingung sind Fig. 765 vier Kräfte genommen, welche nach Richtungen wirken, die in den vier verschiedenen Quadranten belegen sind. Die Angriffspunkte der Kräfte P; P_1; P_2; P_3 sind mit m; m_1; m_2; m_3 bezeichnet.

MX, MY sind zwei unter sich normale Coordinatenaxen und deren Durchschnitts-

Fig. 765.



ınkt *M* der Anfangspunkt der Coordi-
ıten, durch welche die Lagen der An-
ıffspunkte mit Hülfe der von denselben
ıf *MX* gefällten Lothe $mA = y$; m_1A_1
y_1 u. s. w. und der Abscissen $MA = x$;
$A_1 = x_1$ u. s. w. bestimmt werden.

Um die Lagen der Kräfte zu bestim-
en, ziehe man aus jedem der Angriffs-
ınkte Parallelen mit *MX* und *MY* und
ızeichne die Winkel zwischen den Kraft-
chtungen und den ersten dieser Paral-
len mit α; α_1; α_2; α_3 . . und die zwi-
:hen den Kraftrichtungen und den zwei-
n Parallelen mit β; β_1; β_2; β_3 . . . .;
ımmtliche Winkel bis 180° gemessen.

Zerlegt man nun jede Kraft ∓ mit den
oordinatenaxen, so erhält man ∓ mit
ər Axe der *X* die Seitenkräfte $P\cos\alpha$;
$P_1\cos\alpha_1$ u. s. w. und ∓ mit der Axe der
die Seitenkräfte $P\cos\beta$; $P_1\cos\beta_1$ u.
w., und je nachdem diese Ausdrücke
ositiv oder negativ sind, haben diese
eitenkräfte die Richtung nach den Axen
der deren Verlängerungen.

Bringt man nun diese Seitenkräfte mit
ngeänderten Richtungen auf den Punkt
f, so erhält man zwei Systeme von Kräf-
en, deren jedes nach einer der Axen
der nach deren rückwärtiger Verlänge-
ung gerichtet ist. Nun findet aber für
iese beiden Systeme nur Gleichgewicht
tatt, wenn es in jedem von beiden für
ich statt findet; folglich ist die erste
3edingung des Gleichgewichts

I. $P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + \ldots = 0$

II. $P\cos\beta + P_1\cos\beta_1 + \ldots = 0$

Um die dritte Bedingung des Gleich-
gewichts, nämlich die Momentengleichung
:u erhalten, kann man statt der gegebe-
ıen Kräfte deren so eben gefundene Sei-
tenkräfte nehmen, und da es gleichgültig ist, in welchem Punkt ihrer Richtung eine Kraft angreift, so kann man den Angriffspunkt jeder einzelnen Seitenkraft in demjenigen Punkt der Axe annehmen, in welchem die Richtung der Seitenkraft dieselbe schneidet.

Für die ∓ mit *MX* gerichteten Seitenkräfte $P\cos\alpha$; $P_1\cos\alpha_1$, ... sind dann deren Abstände von *M* die Ordinaten y; y_1,...; für die mit *MY* ∓ gerichteten $P\cos\beta$, $P_1\cos P_1$,... sind deren Abstände von *M* die Abscissen x; x_1, ...

Folglich sind die Momente der ersten dieser Seitenkräfte $yP\cos\alpha + y_1P_1\cos\alpha_1$ u. s. w. und die der letzten Seitenkräfte $xP\cos\beta + x_1P_1\cos\beta_1$ u. s. w.

Sind nun α, β spitze Winkel und betrachtet man die Seite nach welcher die Seitenkraft $P\cos\alpha$ in Beziehung auf den Punkt *M* gerichtet ist (in der Figur die Drehung um *M* von links nach rechts oberhalb *M* oder von *Y* rechts nach *X* hin) als positiv, so ist die Richtung der Kraft $P\cos\beta$ der ersteren entgegengesetzt, also negativ; nämlich von *A* aus links über *M* oder von *X* links nach *Y* hin. Demnach ist die algebraische Summe der Momente dieser beiden Kräfte

$$= yP\cos\alpha - xP\cos\beta$$

In der Figur ist α_1 stumpf, β_1 spitz. Demnach ist die Kraft $P_1\cos\alpha_1$ der Kraft $P\cos\alpha$ entgegengesetzt, folglich mufs das Moment $y_1P_1\cos\alpha_1$ subtractiv in Rechnung kommen. Dieses subtractive Vorzeichen ergibt sich aber schon von selbst für einen stumpfen Winkel; das Moment der Kraft $P_1\cos\beta_1$ ist wie das von $P\cos\beta$ subtractiv, mithin hat man die algebraische Summe der Momente der bis jetzt betrachteten vier Kräfte

$$= yP\cos\alpha - xP\cos\beta + y_1P_1\cos\alpha_1 - x_1P_1\cos\beta_1$$

Man ersieht, dafs $P_2\cos\alpha_2$ der Kraft $P\cos\alpha$ entgegen wirkt, aber α_2 ist stumpf und $\cos\alpha_2$ an sich negativ. $P_2\cos\alpha_2$ wirkt wieder mit der Kraft $P\cos\alpha$ übereinstimmend, aber α_2 ist auch spitz und demnach $\cos\alpha_2$ positiv. Man hat demnach für alle Lagen der Kräfte P; P_1; P_2... die Seitenkräfte $P\cos\alpha$; $P_1\cos\alpha_1$, ... positiv zu nehmen.

Desgleichen ersieht man, dafs die Seitenkraft $P_2\cos\beta_2$ der Kraft $P\cos\beta$ entgegen wirkt, es ist aber auch β spitz und β_2 stumpf; das Entgegengesetzte wird also durch die beiden Cosinussen zukom-

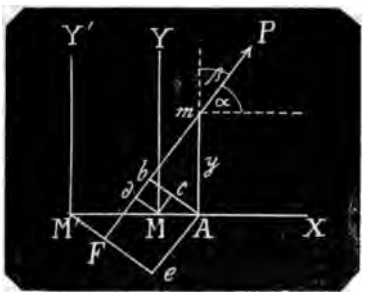
menden entgegengesetzten Vorzeichen ausgedrückt. Dasselbe findet mit der Kraft $P_2 \cos\beta_2$ statt. Demnach hat man für alle Lagen der Kräfte P; P_1; P_2 u. s. w.

$$\text{III} \quad P(y\cos\alpha - x\cos\beta) + P_1(y_1\cos\alpha_1 - x_1\cos\beta_1) + \ldots\ldots = 0$$

Anmerk. Bei Aufstellung der Momentengleichungen sind sowohl die Abscissen als die Ordinaten auf einerlei Seite der Coordinatenaxen genommen. Liegt eine Ordinate auf der entgegengesetzten Seite der Axe, während die Kraft dieselbe Richtung behält, so erhält das Moment dieser Kraft das entgegengesetzte Vorzeichen, weil die Kraft die entgegengesetzte Wirkung thut, indem sie in Beziehung auf den Momentenpunkt die entgegengesetzte Drehung verursacht.

46. Die in der Momentengleichung III. des vorigen Satzes vorkommenden binomischen Factoren sind die Abstände der ihnen zugehörigen Kraftrichtungen vom Momentenpunkt M, welche in Satz 44, Fig. 764, mit a; a_1; a_2 bezeichnet sind und zugleich bestimmt der Vorzeichen

Fig. 766.



jedes der Factoren die Richtung der Kraft in Beziehung auf den Momentenpunkt.

Um dies nachzuweisen, sei Fig. 766 der

die Seitenkräfte $P\cos\beta$; $P_1\cos\beta_1$ u. s. w. subtractiv in Rechnung zu bringen. Die allgemeine dritte Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht der Kräfte ist demnach

Theil der Figur 766, der sich auf die eine Kraft P bezieht, so ist

$$Am\cos\angle mAb = y\cos\alpha = Ab$$
$$AM\cos\angle MAb = x\cos\beta = Ac$$

Mithin $y\cos\alpha - x\cos\beta = Ab - Ac = bc = Md$ = dem Abstande der Kraft P von dem Momentenpunkt M.

2. Liegt M auf der entgegengesetzten Seite der Richtung von P, z. B. in M' und ist $M'Y'$ die Ordinatenaxe, so bleibt $Ab = y\cos\alpha$.

Nun ist aber $AM' = x'$

und $AM'\cos\angle AM'e = AM'\cos\beta = M'e$

folglich $y\cos\alpha - x'\cos\beta = Ab - M'e = -M'f$

Es hat aber die Kraft P gegen den Momentenpunkt M' das Bestreben zur entgegengesetzten Drehung im Vergleich gegen den Punkt M und demnach muß das Moment $M'e \times P$ selbst negativ in Rechnung kommen, folglich bestimmt das subtractive Vorzeichen des Abstandes, nach den Regeln der Buchstabenrechnung angewendet, das erforderliche Vorzeichen des Moments.

3. Sind beide Winkel α und β stumpf (Fig. 765 bei P_2), so bleiben die Abstände der Kraft von den Punkten M oder M' dieselben, allein die Richtung der Kraft P_2 ist der der Kraft P entgegengesetzt, folglich sind auch beide Bestrebungen zur Drehung um diese Momentenpunkte einander einzeln entgegengesetzt. Demnach wird für P_2 der Abstand Md negativ, der Abstand $M'e$ positiv.

Dies ergiebt sich auch aus den so eben synthetisch gefundenen Formeln (No. 2)

$$P(y\cos\alpha - x\cos\beta) \text{ und } -P(y\cos\alpha - x'\cos\beta)$$

Denn setzt man statt α und β deren Supplemente, so erhält man die entgegengesetzten Vorzeichen und man hat die Momente von P_2

$$-P_2(y\cos\alpha - x\cos\beta) \text{ und } P_2(y\cos\alpha - x'\cos\beta)$$

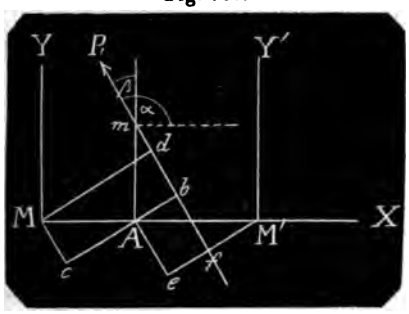
4. Ist α stumpf, β spitz (Fig. 765 bei P_1) so ist der Abstand der Kraft vom Momentenpunkt M nämlich $Md = Ab + Ac$

Nun ist $Ab = Am\cdot\cos\angle mAb = Am\cdot\cos(180^\circ - \angle mAc)$
$= y\cos(180^\circ - \alpha)$

$Ac = AM\cos\angle MAc = x\cos\beta$

Mithin $Md = y\cos(180^\circ - \alpha) + x\cos\beta$

Fig. 767.



Aber die Kraft P, ist in Beziehung auf den Punkt M gegen die Kraft P entgegengesetzt gerichtet, mithin mufs der Abstand MD entgegengesetzt genommen werden und es ist

$$Md = -y\cos(180^\circ - \alpha) - x\cos\beta$$
$$= y\cos\alpha - x\cos\beta$$

welcher letztere Ausdruck der allgemein gültige ist.

5. Ist M' der Momentenpunkt, so ist die Kraft P' in ihrer Wirkung gegen den Punkt M entgegengesetzt. Deren Abstand ist $M'f$.

Nun ist $M'f = M'e - Ab$,

Es ist

$$M'e = AM'\cos\angle AM'e$$
$$= AM'\cos\beta = x'\cos\beta$$

Nun ist die Abscisse $AM' = x'$ in Beziehung auf den Momentenpunkt M' gegen die Abscisse x in Beziehung auf den Punkt M entgegengesetzt gerichtet, mithin hat man x' subtractiv in Rechnung zu bringen und es ist

$$M'e = -x'\cos\beta$$

Ab bleibt $y\cos(180^\circ - \alpha) = -y\cos\alpha$

Demnach ist $M'f = -x'\cos\beta + y\cos\alpha$ und auch hier also der Abstand der Kraft von dem Momentenpunkt in der allgemein gültigen Formel ausgedrückt.

6. Ist endlich die Kraft der Kraft P, Fig. 767 gerade entgegengesetzt gerichtet, (Fig. 763 bei P_2) so bleiben die Abstände derselben von den Punkten M und M' dieselben, allein da die Richtung der Kraft P_2 der der Kraft P, entgegengesetzt ist, beide Kräfte also auch in Beziehung auf Bestrebung zur Drehung um die Momentenpunkte entgegengesetzt sind, so wird der Abstand von P_2 der entgegengesetzte von P, mithin $= -(y\cos\alpha - x\cos\beta)$ und da P_3 mit P, entgegengesetzt ist, so hat man das Moment

$$P_2(y\cos\alpha - x\cos\beta)$$

wie in allen vorangegangenen Lagen der Kräfte.

47. Es sind Kräfte, deren Richtungen alle in einerlei Ebene liegen, ihrer Gröfse und Richtung nach und deren Angriffspunkte gegeben, es soll deren Mittelkraft nach Gröfse und Richtung bestimmt werden.

Mit Beibehaltung der Bezeichnung im vorigen Satz sei R die Mittelkraft, ϱ und ϱ' seien die Winkel ihrer Richtung mit den Coordinatenaxen der X und der Y, x' und y' seien die Coordinaten irgend eines Punkts ihrer Richtung. Da die gegebenen Kräfte zusammen wie ihre Mittelkraft wirken, so wird eine der Mittelkraft gleiche und ihr gerade entgegengesetzt wirkende Kraft jenen Kräften das Gleichgewicht halten. Die Richtungswinkel dieser Kraft mit den Coordinatenaxen sind dann $180^\circ - \varrho$ und $180^\circ - \varrho'$. Man hat demnach aus dem vorigen Satz die drei Bedingungen des Gleichgewichts

1. $R\cos(180^\circ - \varrho) + P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + \ldots = 0$
2. $R\cos(180^\circ - \varrho') + P\cos\beta + P_1\cos\beta_1 + P_2\cos\beta_2 + \ldots = 0$
3. $R[y'\cos(180^\circ - \varrho) - x'\cos(180^\circ - \varrho')] + P(y\cos\alpha - x\cos\beta)$
$+ P_1(y_1\cos\alpha_1 - x_1\cos\beta_1) + \ldots = 0$

Oder:

1. $-R\cos\varrho + P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + \ldots = 0$
2. $-R\cos\varrho' + P\cos\beta + P_1\cos\beta_1 + \ldots = 0$
3. $R(-y'\cos\varrho + x'\cos\varrho') + P(y\cos\alpha - x\cos\beta) + \ldots = 0$

Setzt man

$P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + \ldots = X$
$P\cos\beta + P_1\cos\beta_1 + \ldots = Y$
$P(y\cos\alpha - x\cos\beta) + \ldots = M$

So hat man aus den letzten drei Gleichungen

4. $R\cos\varrho = X$
5. $R\cos\varrho' = Y$
6. $R(y'\cos\varrho - x'\cos\varrho') = M$

oder wenn man in die letzte Gleichung für $R\cos\varrho$ und $R\cos\varrho'$ die Werthe X und Y aus den beiden vorherstehenden Gleichungen 4, 5 setzt

7. $Xy' - Yx' = M$

Quadrirt man die Gleichungen 4 und 5 und addirt, so erhält man, weil $\cos^2\varrho + \cos^2\varrho' = 1$ ist

$$R^2 = X^2 + Y^2$$

woraus

8. $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$

9. $\cos\varrho = \frac{X}{R} = \frac{X}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

10. $\cos\varrho' = \frac{Y}{R} = \frac{Y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Die Gleichung 7 ist in Beziehung auf die Coordinaten x' und y' unbestimmt, weil sie die Lage eines beliebigen Punkts der Mittelkraftsrichtung angibt. Nimmt man für x' einen bestimmten Werth, so erhält man den zugehörigen Werth von y' für den zu x' gehörigen Punkt in der Richtung der Mittelkraft.

Die Lage der Mittelkraft ist ferner bestimmt, wenn man die Punkte kennt, in welchen sie die Coordinatenaxen schneidet.

Für den Durchschnittspunkt zwischen der Mittelkraft und der Axe der X ist $y' = 0$, folglich hat man aus Gleichung 7:

$$-Yx' = M \text{ oder } x' = -\frac{M}{Y}$$

Der Durchschnittspunkt mit der Axe der X liegt also in diesem Abstande vom Anfangspunkt der Coordinaten entweder in der Axe selbst oder in deren rückwärtigen Verlängerung, je nachdem M und Y verschiedene oder gleiche Vorzeichen haben.

Für den Durchschnittspunkt zwischen der Mittelkraft und der Axe der Y ist $x' = 0$, folglich ist aus Gleichung 7:

$$Xy' = M \text{ oder } y' = \frac{M}{X}$$

In diesem Abstande vom Anfangspunkt der Coordinaten liegt also der Durchschnittspunkt der Mittelkraft mit der Axe der Y oder in deren Verlängerung, je nachdem M oder X gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben.

Die Lage der Mittelkraft aus den letzten Bestimmungen ist unabhängig von den Winkeln ϱ und ϱ'. Soll dagegen die Seite bestimmt werden, nach welcher in dieser Richtung die Mittelkraft wirkt, so sind die Winkel ϱ und ϱ', also auch die Ausdrücke für $\cos\varrho$ und $\cos\varrho'$ aus Gl. 9 und 10 erforderlich.

48. Die Bedingung, unter welcher wirklich eine Mittelkraft statt findet, ist dafs in Gleichung 7 nicht X und Y zugleich 0 sind. Sind aber X und Y beide $= 0$ und auch $M = 0$, so ist Gleichgewicht vorhanden. Ist bei $X = Y = 0$, M nicht $= 0$, so existirt ein Kräftepaar.

Um in einem speciellen Fall dies Kräftepaar zu finden hat man $X = Y = 0$ also auch $R = 0$; es existirt keine Mittelkraft. Demnach findet man aus Gleichung 1 und 2, wenn man das Positive mit dem ihm gleichen Negativen zusammen stellt; die beiden $\mp$ der Axe der X wirkenden Kräfte aus Gl. 1

$$P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + \ldots = 0 = Q - Q$$

Die beiden der Axe der Y $\mp$ wirkenden Kräfte aus Gleichung 2

$$P\cos\beta + P_1\cos\beta_1 + P_2\cos\beta_2 + \ldots = 0 = V - V$$

Diese beiden Kräfte zusammen gesetzt ergeben $\pm R = \pm\sqrt{Q^2 + V^2}$ als eine ganz bestimmte Gröfse.

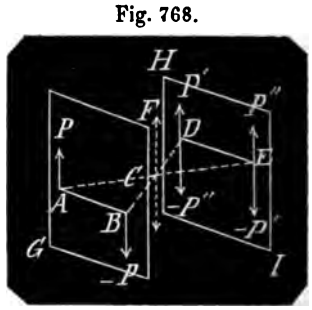
Da nun $R = 0$ ist, so ist das erste Glied in Gleichung 3 ebenfalls $= 0$ und man erhält in der Summe der übrigen Glieder das Moment des Kräftepaars $= M$, woraus der Abstand des Kräftepaars

$$+\sqrt{Q^2 + V^2} - \sqrt{Q^2 + V^2} = \frac{M}{\sqrt{Q^2 + V^2}}$$

IV. Statik des materiellen Körpers.

49. Die Wirkung eines Kräftepaars bleibt ungeändert, wenn man dasselbe in eine Ebene verlegt, die mit der Ebene, in der es thätig ist, $\mp$ läuft und wenn beide Ebenen fest mit einander verbunden sind.

Fig. 768.



FG und HJ seien die beiden paralle-

len und fest verbundenen Ebenen. In FG wirke das Kräftepaar $P - P$ unter dem Abstand AB; in HJ sei DE = und ∓ AB. Auf den Punkt D versetze die beiden Kräfte P' und $-P'$, auf den Punkt E die Kräfte P' und $-P'$, die alle unter sich und mit P gleich sind, sämmtlich normal DE, also ∓ unter einander, so besteht noch die Wirkung von $P - P$ ungeändert.

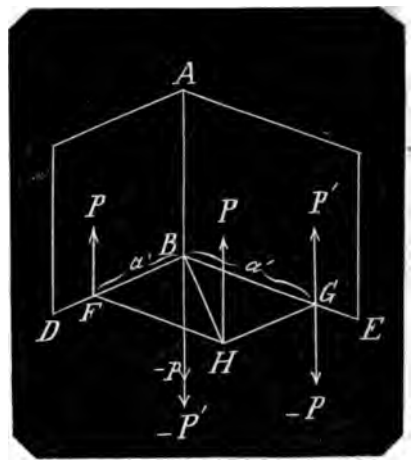
Ziehe AE und BD, so halbiren sich diese beiden Linien gegenseitig in C, folglich setzen sich die beiden Kräfte P in A und P' in E zu einer Mittelkraft $P + P'$ in C ∓ mit P und P' zusammen. Eben so geben die beiden Kräfte $-P$ und $-P'$ eine in C mit ihnen ∓ gerichtete Mittelkraft $-(P + P')$. Nun sind die Mittelkräfte $P + P'$ und $-(P + P')$ gerade entgegengesetzt gerichtet, einander gleich, sie heben sich auf, und man kann sie, ohne eine Aenderung der ursprünglichen Wirkung hervorzubringen, aus dem System entfernen. Alsdann aber bleiben nur die Kräfte P' an D und $-P'$ an E übrig und folglich sind $P - P$ an DE mit $P - P$ an AB gleichgeltend.

50. Mehrere Kräftepaare, die in verschiedenen unter einander parallelen und fest verbundenen Ebenen wirken, können also zu einem Mittelpaar zusammengesetzt werden, indem man sie alle in eine Ebene und dort unter denselben Abstand verlegt, wie No. 41 dazu Anweisung gibt. Beliebig viele Kräftepaare in verschiedenen parallelen Ebenen halten einander das Gleichgewicht, wenn sie kein Mittelpaar liefern.

51. Wenn zwei Ebenen AD, AE, von welchen jede ein Kräftepaar enthält, sich schneiden, und man nimmt auf den Schenkeln BD, BE eines beliebigen Neigungswinkels der Ebenen Stücke BF, BG, die sich wie die Momente der Kräftepaare verhalten, vollendet das Parallelogramm $BFHG$ zu diesen Stücken, zieht die Diagonale BH durch die Spitze des Neigungswinkels, so ist die durch AB und BH gelegte Ebene die Ebene des Mittelpaares, und dessen Moment verhält sich zu den Momenten der Seitenpaare wie die Diagonale BH zu den Seiten BF und BG des Parallelogramms.

Es seien $P - P$ und $Q - Q$ unter den Abständen a und b die in den Ebenen AD und AE wirkenden Kräftepaare. Man verwandle das zweite Paar in ein gleichgeltendes, dessen Kräfte $P' - P'$, jede = P sind, deren Abstand sei a', also $a'P' = bQ$. Nimm nun $BF = a$, $BG = a'$ und verlege

Fig. 769.



beide Kräftepaare auf BF und BG (s. Satz 38) nach den in der Figur angegebenen Richtungen, vollende das Parallelogramm $BFGH$.

Die durch die Kraftrichtung GP' und die Seite GH zu denkende Ebene ist ∓ der Ebene AD; man kann also das Kräftepaar $P - P$ aus FB in GH verlegen. Alsdann wirken in G zwei gleiche Kräfte $P' - P$ einander gerade entgegen, heben einander auf und es verbleibt nur die Kraft P in H und die Kraft $-P'$ in B wirkend, also ein Kräftepaar $P - P$ in dem Abstand BH, welches den beiden Kräftepaaren $P - P$ in BF und $P' - P'$ in BG wirkend zusammengenommen gleichgeltend ist.

$P - P$ in BH ist also das Mittelpaar zwischen $P - P$ in dem Abstand $BF = a$ + $P - P$ in dem Abstand $BG = a'$. Es sind also

$BH \cdot P$, $BF \cdot P$ und $(BG \cdot P = bQ)$ die drei Momente, der Mittelkraft und der beiden Seitenkräfte und sie verhalten sich zu einander wie $BH : BF : BG =$

Zwei sich schneidende Ebenen haben zwei Neigungswinkel, die sich zu 180° ergänzen. Aus dem vorstehenden Satz mit Fig. 769 geht hervor, dafs die Construction innerhalb desjenigen Neigungswinkels vorgenommen werden mufs, bei welchem, wenn er mit allmählicher Verminderung auf 0 gebracht wird, so dafs BE mit BD zusammen fällt, beide Kräftepaare in Beziehung auf den ihnen ge-

meinschaftlichen Punkt B einerlei Richtung haben. Wäre also die in G fallende Kraft des Kräftepaars $P' - P'$ senkrecht abwärts gerichtet, $= -P'$, so würde die Construction in dem Nebenwinkel des Winkels DBE ausgeführt werden müssen.

52. Es lassen sich, Satz 51 zufolge, Kräftepaare eben so zusammensetzen, wie einfache Kräfte, und man erhält für die Paare dieselbe Gleichung, welche für die einfachen Kräfte gefunden worden, wofern man für die einfachen Kräfte die Momente der Paare und für die Richtungswinkel der einfachen Kräfte die Neigungswinkel der den Kräftepaaren zugehörigen Ebenen setzt.

Bezeichnet man daher $\angle FBH$ mit α, $\angle GBH$ mit β, $\angle FBG$ mit γ, die Momente der Kräfte P, Q, R mit aP, bQ, cR, so hat man

$$aP : bQ : cR = \sin\beta : \sin\alpha : \sin\gamma$$

Also hat man auch

$$aP \sin\alpha = bQ \sin\beta$$

$$aP \sin\gamma = cR \sin\beta$$

$$bQ \sin\gamma = cR \sin\alpha$$

$$c^2R^2 = a^2P^2 + b^2Q^2 + 2ab\,PQ\cos\gamma$$

53. Die Bedingungen für das Gleichgewicht von Kräften zu bestimmen, die auf ein System fest mit einander verbundener materieller Punkte nach beliebigen Richtungen im Raum wirken.

1. Um die Lage der Angriffspunkte zu bestimmen, auf welche die Kräfte wirken nehme man drei unter sich normale Ebenen (Coordinatenebenen) und bestimme von jedem angegriffenen Punkt den Abstand von jeder dieser drei Ebenen, indem man zugleich die Lage der Abstände zu beiden Seiten jeder Ebene durch positive und negative Vorzeichen unterscheidet.

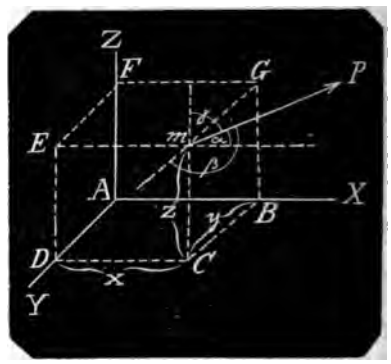
Um die Richtungen der Kräfte zu bestimmen, ziehe man durch ihre Angriffspunkte Parallelen zu den drei Durchschnittslinien der Coordinatenebenen (zu den Coordinatenaxen) und zwar nach den Richtungen, nach welchen die Axen von ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt (dem Anfangspunkt der Coordinaten) auf der positiven Seite der Coordinatenebenen hin liegen und bezeichne nun die Winkel, welche die Richtuug jeder Kraft mit der durch ihren Angriffspunkt mit jeder der Parallelen macht, indem man die Winkel von 0 bis 180° zählt.

2. Es seien hiernach AX, AY, AZ die Coordinatenaxen; m, m', m'' u. s. w. die Angriffspunkte der Kräfte P; P_1; P_2..; die Abstände dieser Punkte von den drei Coordinatenebenen seien gleich mit den Axen bezeichnet, mit denen sie $\mp$ laufen: Für den Punkt m mit x, y, z; für m' mit x_1; y_1; z, u. s. w. Die Winkel der Kräfterichtungen mit den Parallelen zur Axe X seien α; α_1; α_2... zu der Axe $Y = \beta$; β, β_2... und zu der Axe $Z = \gamma$; γ_1; γ_2 u. s w.

Nun zerlege man nach No. 44 jede Kraft in eine durch den Anfangspunkt A gehende, ihr gleiche und gleichgerichtete Kraft und in ein Kräftepaar, indem man in A $\mp$ mit P zwei ihr gleiche und entgegengesetzte Kräfte anbringt. Alsdann wird das Gleichgewicht nur bestehen, wenn es sowohl für die auf A gebrachten und den gegebenen Kräften gleich gerichteten und gleichen Kräfte als auch für das System der Kräftepaare bei jedem System für sich besteht

Denn bestände das Gleichgewicht nicht für das erste System, so würde sich aus demselben eine Mittelkraft ergeben, die für den Fall, dafs das zweite System ein

Fig. 770.



Mittelpaar ergibt nach Satz 35 mit demselben kein Gleichgewicht halten kann.

3. Um nun diese Bedingung durch die gegebenen Gröfsen auszudrücken, zerlege jede Kraft $\mp$ zu den Coordinatenaxen in drei Seitenkräfte. Dann sind die $\mp$ mit AX gerichteten $= P\cos\alpha$; $P_1\cos\alpha_1$; $P_2\cos\alpha_2$ u. s. w. Die $\mp$ mit $AY = P\cos\beta$; $P_1\cos\beta_1$; $P_2\cos\beta_2$ u. s. w. Die $\mp$ mit $AZ = P\cos\gamma$; $P_1\cos\gamma_1$; $P_2\cos\gamma_2$ u. s. w.

Jede dieser Seitenkräfte zerlege man wieder in eine durch A $\mp$ gerichtete gleiche Kraft und in das zugehörige Kräftepaar, so erhält man an dem Punkt A drei Systeme von Kräften, die nach den drei Axen gerichtet sind, die im Gleich-

gewicht sein müssen, so dafs also jedes einzelne System für sich im Gleichgewicht ist. Aus dieser Bedingung entstehen also folgende drei Gleichungen:

I. $P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + \ldots = 0$

II. $P\cos\beta + P_1\cos\beta_1 + P_2\cos\beta_2 + \ldots = 0$

III. $P\cos\gamma + P_1\cos\gamma_1 + P_2\cos\gamma_2 + \ldots = 0$

4. Ferner zerlege man jedes Kräftepaar in 2 Seitenpaare, die in den Coordinatenebenen liegen, mit welchen die Richtungen der Kräfte ∓ laufen.

Betrachtet man zuerst das senkrecht aufwärts gerichtete Kräftepaar $P\cos\gamma$ $-P\cos\gamma$ von dem Abstande AC, der Diagonale des Rechtecks $ADCB$, so ist dies gleichgeltend zweien Kräftepaaren in den Ebenen XAZ und YAZ, deren Abstände $AB = x$ und $AD = y$ sind. Deren Momente sind (s. Satz 44) $xP\cos\gamma$ und $yP\cos\gamma$. Eben so liefern die übrigen gleich gerichteten Seitenpaare in denselben Coordinatenebenen, deren Momente $x, P, \cos\gamma$, und $y, P, \cos\gamma$, ; $x_2 P_2 \cos\gamma_2$ und $y_2 P_2 \cos\gamma_2$ u. s. w.

Behandelt man ebenso die Kräftepaare, die mit AY ∓ gerichtet sind, so erhält man Seitenpaare in den Ebenen YAZ und YAX; deren Momente sind $zP\cos\beta$ und $xP\cos\beta$; $z, P, \cos\beta$, und $x, P, \cos\beta$, u. s. w. Endlich liefern die mit AX ∓ gerichteten Paare die Seitenpaare in den Ebenen XAY und XAZ: deren Momente sind $yP\cos\alpha$ und $zP\cos\alpha$; $y, P, \cos\alpha$, und $z, P, \cos\alpha$, u. s. w.

Demnach erhält man aus jeder der gegebenen Kräfte in jeder Coordinatenebene zwei Paare, und nach dem Obigen müssen sämmtliche in einer Ebene befindliche Paare für sich im Gleichgewicht, d. h. die algebraische Summe ihrer Momente 0 sein.

5. Um nun die Momente der aus einer Kraft P für jede Ebene hervorgehenden beiden Seitenpaare mit den erforderlichen Vorzeichen in die Formel zu bringen betrachte Folgendes:

Man geht wie früher von spitzen Winkeln aus, deren Cosinus positiv sind und betrachtet die Drehung um den Momentenpunkt (A) nach einer bestimmten Seite hin als positiv. Nun sind α, β beide spitz, man hat also zunächst die aus P für die Ebene XAZ hervorgehenden Kräftepaare zu betrachten, von denen die negative Kraft jedesmal in dem Anfangspunkt A der Coordinaten wirkt.

Das mit dem Abstand z in den Punkten m und C horizontal wirkende Kräftepaar $P\cos\alpha$ wird von m und C auf G und B und von dort auf F und A reducirt; $P\cos\alpha$ hat die Richtung FG und ihr Moment ist $zP\cos\alpha$.

Das mit dem Abstand x in den Punkten m und E vertikal wirkende Kräftepaar $P\cos\gamma$ wird von m und E auf G und F und von dort auf B und A reducirt; $P\cos\gamma$ hat die Richtung BG und ihr Moment ist $xP\cos\gamma$. Die Richtungen FG und BG sind aber in Bezug auf Drehung um den Punkt A einander entgegengesetzt, mithin kommt hier die Differenz beider Momente in Rechnung, und da $\cos\alpha$ und $\cos\gamma$ beide positiv sind, so hat man die Wirkung der Momente beider aus der Kraft P auf die Ebene ZAX entstandenen Kräftepaare $zP\cos\alpha - xP\cos\gamma$.

Diese Differenz findet also für jede zwei in einerlei Ebene fallende aus einer gegebenen Kraft hervorgebrachte Seitenkräftepaare statt, wenn die Richtungswinkel der Kraft mit den zu dieser Ebene gehörenden Coordinatenaxen beide spitz sind.

6. Es soll dieselbe Untersuchung für den Fall statt finden, dafs ein Winkel spitz, der andere stumpf ist; also für α und β oder für γ und β. Für den ersten Fall hat man die in die Ebene XAY fallenden Kräftepaare:

Das eine Seitenpaar $P\cos\alpha$ wirkt in den Punkten m und G, wird reducirt auf C und B und von hier auf D und A. Die positive Kraft $P\cos\alpha$ hat also die Richtung DC mit dem Abstande $AD = y$.

Das andere Seitenpaar $P\cos\beta$ wirkt in den Punkten m und E, wird reducirt auf C und D und von hier auf B und A; die positive Kraft $P\cos\beta$ wirkt also nach der Richtung CB mit dem Abstand $AB = x$.

Die Richtungen DC und CB sind in Beziehung auf den Punkt A übereinstimmend, folglich hat man die in Rechnung zu bringenden Momente $yP\cos\alpha + xP\cos\beta$.

Nun ist aber β stumpf, der Cosinus von β also und mit ihm der letzte Summand an sich negativ. Setzt man daher für $\cos\beta$ seinen negativen Werth, so hat man $xP\cos\beta = -xP\cos(180^\circ - \beta)$ also das Moment $yP\cos\alpha - xP\cos(180^\circ - \beta)$. Es ist dies aber unrichtig, weil der Figur nach der zweite Summand eine additive Gröfse sein mufs; demnach hat man statt der obigen Momentensumme zu schreiben

$$yP\cos\alpha - xP\cos\beta.$$

7. Der Fall, dafs beide Winkel stumpf sind, ist in Figur 770 nicht vorhanden. Denkt man sich aber, dafs in dem Fall 6 der $\angle\alpha$ stumpf $= 180^\circ - \alpha$ wäre, so hätte

man den $\angle CmP$ in derselben Gröfse links von Cm mit derselben Spitze m; von dem Seitenpaar $P\cos\alpha$, welches in den Punkten m und G wirkt und auf D und A reducirt wird, hat dann die positive Kraft die Richtung CD mit demselben Abstand $AD = y$ und die Richtungen CD und CB sind einander entgegengesetzt. Da nun die Richtung CB die positive ist, so hat man die in Rechnung zu bringenden Momente $xP\cos\beta - yP\cos\alpha$ unter der Voraussetzung, dafs beide Glieder an und für sich positiv sind. Es sind aber $\cos\beta$ und $\cos\alpha$ beide negativ, folglich mufs, damit das erste Glied additiv, das zweite subtractiv bleibt geschrieben werden $-xP\cos\beta + yP\cos\alpha$. Folglich erhält man auch für diesen Fall die allgemein geltende Form

$$yP\cos\alpha - xP\cos\beta$$

Man hat also die letzten drei Bedingungsgleichungen, wenn man der Ordnung der Buchstaben wegen die erste Gleichung negativ nimmt

IV. Für die Ebene XAZ

$$P(x\cos\gamma - z\cos\alpha) + P_1(x_1\cos\gamma_1 - z_1\cos\alpha_1) + \ldots = 0$$

V. Für die Ebene XAY

$$P(y\cos\alpha - x\cos\beta) + P_1(y_1\cos\alpha_1 - x_1\cos\beta_1) + \ldots = 0$$

VI. Für die Ebene YAZ

$$P(z\cos\beta - y\cos\gamma) + P_1(z_1\cos\beta_1 - y_1\cos\gamma_1) + \ldots = 0$$

54. Im Fall die Kräfte der vorigen Aufgabe die Bedingung des Gleichgewichts nicht erfüllen, die Bedingungen anzugeben, unter welchen sie eine Mittelkraft geben und wenn diese erfüllt sind, die Mittelkraft nach Gröfse und Richtung zu bestimmen.

Eine Mittelkraft der gegebenen Kräfte mufs nach entgegengesetzter Richtung angebracht das Gleichgewicht herstellen. Diese Bedingung drückt man durch Gleichungen aus, wenn man die 6 Bedingungsgleichungen des vorigen Satzes dazu benutzt.

Setzt man die Mittelkraft $= R$, die Coordinaten eines beliebigen Punkts ihrer Richtung auf die Axen mit denselben gleichnamig x', y', z', die Winkel ihrer Richtung mit denselben Axen α', β', γ' und man bringt nun dieses R gerade entgegengesetzt gerichtet an, so sind die Richtungswinkel $180° - \alpha'$, $180° - \beta'$, $180° - \gamma'$ und daher hat man statt der ersten 3 Bedingungsgleichungen des vorigen Satzes

$$R\cos(180° - \alpha') + P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + \ldots = 0$$

oder

1. $-R\cos\alpha' + P\cos\alpha + \ldots = 0$

Ebenso

2. $-R\cos\beta' + P\cos\beta + \ldots = 0$
3. $-R\cos\gamma' + P\cos\gamma + \ldots = 0$

Für die Momente

4. $-R(x'\cos\gamma' - z'\cos\alpha') + P(x\cos\gamma - z\cos\alpha) + \ldots = 0$
5. $-R(y'\cos\alpha' - x'\cos\beta') + P(y\cos\alpha - x\cos\beta) + \ldots = 0$
6. $-R(z'\cos\beta' - y'\cos\gamma') + P(z\cos\beta - y\cos\gamma) + \ldots = 0$

Setzt man der Abkürzung wegen die Werthe der 6 Gleichungen des vorigen Satzes nach einander A; A_1; A_2 · M; M_1; M_2 so hat man

7. $R\cos\alpha' = A$
8. $R\cos\beta' = A_1$
9. $R\cos\gamma' = A_2$
10. $M - A_2x' + Az' = 0$
11. $M_1 - Ay' + A_1x' = 0$
12. $M_2 - A_1z' + A_2y' = 0$

Bestehen nun diese Gleichungen unter der obigen Bedingung, dafs A; A_1; A_2 nicht einzeln $= 0$ sind, so gibt es eine Mittelkraft. Den Gleichungen 7 bis 9 geschieht immer Genüge, denn quadrirt und addirt man sie, so hat man

$$R^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = A^2 + A_1^2 + A_2^2$$

Es ist aber nach dem Art. Körpertrigonometrie No. 17 die Klammergröfse $= 1$; deshalb ist

$$R^2 = A^2 + A_1^2 + A_2^2$$

Ist hieraus R bestimmt, dann hat man

Gleichung 7 bis 9

$$\cos\alpha' = \frac{A}{R};\quad \cos\beta' = \frac{A_1}{R};\quad \cos\gamma' = \frac{A_2}{R}$$

ultiplicirt man Gl. 10 mit A, Gl. 11
A_2 und addirt beide, so entsteht

$$AM + A_2M_1 - AA_2y' + AA_1z' = 0$$

ultiplicirt man Gleichung 12 mit A,
rhält man

$$AM_2 - AA_1z' + AA_2y' = 0$$

eide addirt entsteht

$$AM_2 + A_1M + A_2M_1 = 0 \qquad (13)$$

ie Abstände x', y', z' fallen hier ganz
, sind also unbestimmte Längen, wie
icht anders sein kann, weil sie zu
m beliebigen Punkt der Mittel-
trichtung die Coordinaten sind.
ur Bestimmung der Abstände genü-
gen also 2 Gleichungen, indem die dritte, aus den ersten beiden hergeleitet, die letzte auf Null reducirte Gl. 13 ergibt, welche keinen Abstand enthält. Geht man nun auf Gl. 10 und 11 zurück, so kann man x' beliebig wählen und man erhält dann bestimmte Werthe für y' und z'.

55. Auf ein System fest verbundener materieller Punkte wirken nach parallelen Richtungen Kräfte, die Bedingungen ihres Gleichgewichts anzugeben.

Nimmt man wieder drei unter sich normale Coordinatenebenen, behält die Bezeichnung des vorigen Satzes bei, so sind die Winkel, welche die Kraftrichtungen mit jeder der drei Axen für sich genommen machen, einander gleich oder ergänzen sich zu zwei Rechten. Es ist also

α entweder $= \alpha$, oder $= 180° - \alpha$, $= \alpha_1$ oder $= 180° - \alpha_1$ u. s. w.
β entweder $= \beta$, oder $= 180° - \beta$, u. s. w.
γ entweder $= \gamma$, oder $= 180° - \gamma$, u. s. w.

us den ersten drei Bedingungen des
ichgewichts No. 53 (Gl. I., II., III.) er-
man demnach

$$(P + P_1 + P_2 + \ldots)\cos\alpha = 0$$
$$(P + P_1 + P_2 + \ldots)\cos\beta = 0$$
$$(P + P_1 + P_2 + \ldots)\cos\gamma = 0$$

iese drei Gleichungen bestehen nur,
n

$$P + P_1 + P_2 + \ldots\ldots = 0$$

Denn da $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ ist, so können die 3 Cosinus nicht zugleich $= 0$ sein. Daher reduciren sich die 3 Bedingungsgleichungen auf die eine:

I. $P + P_1 + P_2 + \ldots = 0$

D. h. die algebraische Summe der Kräfte muſs $= 0$ sein.

Die drei Momentengleichungen IV, V, VI, No. 53 verändern sich hier in

$$P(x\cos\gamma - z\cos\alpha) + P_1(x_1\cos\gamma - z_1\cos\alpha) + \ldots = 0$$
$$P(y\cos\alpha - x\cos\beta) + P_1(y_1\cos\alpha - x_1\cos\beta) + \ldots = 0$$
$$P(z\cos\beta - y\cos\gamma) + P_1(z_1\cos\beta - y_1\cos\gamma) + \ldots = 0$$

n diesen Gleichungen erhält die ent-
engesetzt gerichtete Kraft das Minus-
eichen.

Man kann die letzten drei Gleichungen auch in folgender Form schreiben:

$$(Px + P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots)\cos\gamma - (Pz + P_1z_1 + P_2z_2 + \ldots)\cos\alpha = 0$$
$$(Py + P_1y_1 + P_2y_2 + \ldots)\cos\alpha - (Px + P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots)\cos\beta = 0$$
$$(Pz + P_1z_1 + P_2z_2 + \ldots)\cos\beta - (Py + P_1y_1 + P_2y_2 + \ldots)\cos\gamma = 0$$

s ist leicht zu ersehen, daſs jede die-
drei Gleichungen eine Folgerung der
len anderen ist. Denn multiplicirt
men z. B. die erste Gleichung mit $\cos\beta$, die zweite Gleichung mit $\cos\gamma$, addirt und dividirt mit $\cos\alpha$ so erhält man

$$-(Pz + P_1z_1 + \ldots)\cos\beta + (Py + P_1y_1 + \ldots)\cos\gamma = 0$$

die dritte Gleichung.
an hat demnach für die Bedingungen
Gleichgewichts paralleler Kräfte im
am nur drei Gleichungen: eine Kräf-
tegleichung und zwei Momentengleichungen. Um diese kurz ausdrücken zu können, nenne man das Product einer Kraft mit dem Abstand ihres Angriffspunkts

von einer Ebene das Moment dieser Kraft in Beziehung auf diese Ebene, welche dann die Momentenebene ist. Hiernach lassen sich die beiden Momentengleichungen so bestimmen, dafs man die beiden Momentenebenen ⊥ den Kräften und rechtwinklig unter einander nimmt. Betrachtet man dieselben als Coordinatenebenen, so dafs die dritte Ebene von den Kräften normal getroffen wird, so hat man, wenn letztere die Ebene XAY, Fig. 768 ist, den $\angle\gamma = 0$, die $\angle\alpha = \beta = 90°$ und die Abstände von den Momentenebenen sind $y; y_1; y_2 \ldots$ und $x; x_1; x_2 \ldots$ Demnach reduciren sich die letzten Momentengleichungen, von welchen die mittelste als $0 = 0$ fortfällt, auf folgende

II. $Px + P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots = 0$

III. $Py + P_1y_1 + P_2y_2 + \ldots = 0$

Es besteht mithin Gleichgewicht zwischen parallelen im Raum wirkenden Kräften, wenn ihre algebraische Summe $= 0$ und die Summen ihrer Momente auf zwei unter sich normale mit den Kräften parallel laufende Ebenen ebenfalls $= 0$ sind.

56. Die Bedingungen zu bestimmen, unter welchen parallele Kräfte eine Mittelkraft haben und diese Mittelkraft nach Gröfse und Richtung zu bestimmen.

Nach dem vorigen Satz sind parallele Kräfte im Gleichgewicht, wenn die algebraische Summe der Kräfte gleich 0 ist. Demnach entsteht die Bedingung für das Vorhandensein einer Mittelkraft aus Gleichung I des vorigen Satzes

$$P + P_1 + P_2 + \ldots \lesseqgtr 0$$

Ist R die Mittelkraft, so ist

$$R = P + P_1 + P_2 + \ldots$$

deren Lage ist ⊥ den gegebenen Kräften.

Eine weitere Bedingung ist nicht erforderlich; denn existirt eine Kraft R, so hat sie auch in Bezug auf einen gegebenen materiellen Punkt ein Moment; und hat sie kein Moment, d. h. ist ihr Moment $= 0$, so fällt R in den Momentenpunkt.

Nimmt man mit dem vorigen Satz zwei unter sich und mit den Kräfterichtungen normale Axen, bezeichnet die Abstände der Mittelkraft R von der Axe der Y mit x', von der Axe der X mit y', so ist $y'R = 0$, wenn R unter dem Abstand x' von A in AX fällt; ist $x'R = 0$, so fällt R in die Axe AY unter dem Abstande y' von A. Ist $x'R = y'R = 0$, so fällt R in den Anfangspunkt A beider Axen.

Um die Lage der Mittelkraft gegen den Momentenpunkt A mit Hülfe der gegebenen Axen AX, AY zu finden hat man

$$Px + P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots = Rx'$$
$$Py + P_1y_1 + P_2y_2 + \ldots = Ry'$$

woraus

$$x' = \frac{Px + P_1x_1 + \ldots}{R} = \frac{Px + P_1x_1 + \ldots}{P + P_1 + \ldots}$$

$$y' = \frac{Py + P_1y_1 + \ldots}{R} = \frac{Py + P_1y_1 + \ldots}{P + P_1 + \ldots}$$

57. Ein System fest verbundener Punkte, auf welches Kräfte nach beliebigen Richtungen im Raum wirken, begreift einen unverrückbaren Punkt um den sich dasselbe nach allen Seiten hin frei drehen kann. Die Bedingungen des Gleichgewichts anzugeben.

Das Gleichgewicht gegen Drehung kann nur dann statt finden, wenn aus dem Systeme eine Mittelkraft hervorgeht, deren Richtung durch den unverrückbaren Punkt A liegt, und der seiner Unverrückbarkeit wegen mit dem System durch die Mittelkraft nicht fortbewegt werden kann. Wenn man nun jede einzelne Kraft in eine ihr gleichgerichtete und gleiche auf den Punkt A wirkende Kraft und in ein Kräftepaar zerlegt (Satz 44), so müssen ferner sämmtliche Kräftepaare unter einander im Gleichgewicht sein, weil sonst aus ihrer Zusammensetzung ein Mittelpaar entstände, welches das System um A innerhalb der Richtung seiner Ebene herumdrehen würde.

Mithin sind die Bedingungen des Gleichgewichts dieselben der Kräftepaare, und die Kräfte wirken im Fall des Gleichgewichts auf den Punkt A, als wenn sie mit ungeänderten Richtungen unmittelbar darauf angebracht wären. Nimmt man daher drei unter sich normale Richtungsaxen, die sich in A schneiden und bestimmt in Beziehung auf diese sowohl die Lage der Angriffspunkte der Kräfte als auch die Richtungen derselben wie No. 53, so geben die dortigen drei Momentengleichungen die genügenden und nothwendigen Bedingungen des Gleichgewichts für den hier vorliegenden Fall.

58. Die Bedingungen des Gleichgewichts eines Systems fest verbundener materieller Punkte zu bestimmen, wenn zwei Punkte des Systems längs der durch sie hindurch gehenden geraden Linie verrückbar sind und die übrigen Punkte um diese Gerade sich frei drehen können.

Man nehme die gedachte Gerade, die Drehaxe des Systems zur Richtungsaxe der Z (die AZ Fig. 770) und in irgend einem Punkt A derselben normal darauf und unter sich normal die Axen

der X und der Y. Zerlegt man nun die Kräfte wie No. 53 in Beziehung auf Fig. 770, so erhält man die zerlegten Kräfte mit ungeänderten Richtungen nach den drei Axen mit A als Angriffspunkt und für jede gegebene Kraft in jeder Coordinatenebene ein Kräftepaar.

Kräfte, die auf die Axe der Z normal wirken, haben keinen Einfluſs auf die Gleitung der Axe, sie haben also keinen Einfluſs auf die Wirkung der übrigen Kräfte und auf die Bedingungen des Gleichgewichts des Systems. Es sind dies die Kräftesysteme

$$P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + \ldots.$$
$$P\cos\beta + P_1\cos\beta_1 + \ldots.$$

Erstere in der Axe AX, letztere in der Axe AY wirkend.

Die nach der Axe der Z gerichteten Kräfte aber müssen im Gleichgewicht sein, weil eine aus ihnen hervorgehende Mittelkraft die Axe AZ nach ihrer Richtung verschieben würde. Demnach ist die erste Bedingung des Gleichgewichts

$$\text{I.}\quad -P\cos\gamma + P_1\cos\gamma_1 + P_2\cos\gamma_2 + \ldots. = 0$$

Die Kräftepaare in den Ebenen XAZ und YAZ haben keinen Einfluſs auf die Drehung der Axe AZ und da sie normal auf der Axe stehen, auch keine Wirkung auf Verschiebung der Axe AZ. Diese Paare haben also auch keinerlei Einfluſs auf die Wirkung der übrigen Kräftepaare. Das einzige System der Kräftepaare, welches auf Drehung um die Axe AZ wirken kann, ist das der in der Ebene XAY befindlichen Paare. Deren Momente sind $P(y\cos\alpha - x\cos\beta)$ und man hat noch eine zweite Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht

$$\text{II.}\quad P(y\cos\alpha - x\cos\beta) + P_1(y_1\cos\alpha_1 - x_1\cos\beta_1) + \ldots = 0$$

59. Kann ein System von Kräften um eine Axe sich bloſs drehen ohne längs derselben gleiten zu können, so fällt die erste Bedingungsgleichung fort und es bleibt bloſs die zweite Gleichung, die Momentengleichung als Bedingung übrig.

60. Ein Körper, auf welchen Kräfte nach beliebigen Richtungen im Raum wirken, wird von einer festen unverrückbaren Ebene, die von dem Körper in einem oder in mehreren Punkten berührt wird, im Gleichgewicht erhalten; die Bedingungen dieses Gleichgewichts aufzustellen.

Wird ein Körper durch eine Kraft gegen eine unverrückbare Ebene gedrückt und die Bewegung des Körpers durch die Ebene verhindert, so muſs die Kraft gegen die Ebene normal gerichtet sein, weil sie sich sonst in zwei Kräfte zerlegen läſst, von welchen die eine Kraft der Ebene normal, die andere mit ihr ≠ gerichtet ist. Die erste Seitenkraft bringt keine Bewegung hervor, die zweite dagegen wird durch nichts aufgehoben, sofern der Körper längs der Ebene ohne Hinderniſs gleiten kann und die Bewegung wird längs der Ebene wirklich erfolgen. Die Aufhebung einer Kraft durch eine feste Ebene ist aber dieselbe Wirkung mit einer der Kraft gerade entgegengesetzt wirkenden gleichen Kraft, folglich läſst sich der Widerstand der Ebene immer als eine solche Kraft betrachten und demgemäſs die Bedingungen für's Gleichgewicht aufsuchen.

1. Berührt nun der Körper die feste Ebene nur in einem Punkt, so nehme man diesen Punkt (A Fig 770) zum Anfangspunkt der Coordinaten und die Axen der X und Y in dieser Ebene, so ist die Axe der Z auf dieser Ebene normal und zugleich die Richtung des Widerstandes W. Denkt man sich also statt der Ebene eine Kraft W nach der Richtung der Axe AZ auf den Körper wirkend, so besteht das Gleichgewicht auch ohne Einwirkung der Ebene und folglich nach den Bedingungen, die Satz 53 und 54 aufgestellt sind. Man hat also nach dortiger Bezeichnung, sofern man noch die Kraft W einführt, die weil sie durch den Anfangspunkt der Coordinaten geführt ist, kein Kräftepaar liefert; $W + R\cos\gamma' = W + A_3 = 0$.

Ferner sind für diesen speciellen Fall $R\cos\alpha' = R\cos\beta' = 0$ und alle Momente $= 0$; d. h. die gegebenen Kräfte dürfen nur eine einzige Mittelkraft liefern, welche durch den Berührungspunkt des Körpers mit der Ebene geht und auf dieser senkrecht steht.

2. Berührt der Körper die Ebene in zwei Punkten, so nehme man den einen dieser Punkte zum Anfangspunkt A der Coordinaten, die Axe der X so, daſs sie durch den zweiten Punkt geht und die Axe der Z normal auf der Ebene. Die

Druckwirkungen der beiden Berührungspunkte gegen die Ebene, welche dem Obigen nach normal auf dieselbe erfolgen, seien auf den Anfangspunkt $A = w$, auf den zweiten Punkt $B = w'$. Bringt man den Pressungen gerade entgegengesetzt zwei ihnen gleiche Kräfte an, so besteht wieder das Gleichgewicht auch ohne die feste Ebene, und folglich müssen diese beiden Kräfte und die gegebenen den Bedingungen des Gleichgewichts genügen. Da nun w in der Axe AZ und w' mit ihr ∓ in den Abstand $AB = a$ gerichtet ist, so sind diese Bedingungen $R\cos\alpha' = 0$; $R\cos\beta' = 0$; $R\cos\gamma' + w + w' = 0$; ferner die drei Momente in den 3 Coordinatenebenen = 0.

Die Kraft w in der Axe AZ hat kein Moment, mithin hat man die Momentengleichung für die Ebene XAZ

$$x' \cdot R\cos\gamma' + a \cdot w' = 0$$

Nun ist $R = -(w + w')$

folglich $x' = \dfrac{aw'}{R\cos\gamma'}$

Ferner ist das Moment der auf die Coordinatenebene YAZ reducirte Seitenkraft der Mittelkraft $= y'R\cos\beta' = 0$ weil nach dem Obigen $R\cos\beta' = 0$ sein muſs, mithin ist $y = 0$ und die Mittelkraft liegt in der Ebene XAZ und läuft mit der Axe AZ unter dem Abstand x' parallel.

3. Berührt endlich der Körper die Ebene in drei oder mehreren Punkten, welche darauf die normalen Pressungen w, w', w''... ausüben, so wird das Gleichgewicht eines freien Körpers entstehen, wenn man auf denselben diesen Pressungen gerade entgegengesetzt wirkende Kräfte anbringt. Man nehme den Punkt für die Kraft w zum Anfangspunkt A der Coordinaten und die Axe der X so, daſs sie durch einen der übrigen Punkte (z. B. w') geht, während alle übrigen Punkte auf einer und derselben Seite dieser Linie liegen. Der Abstand des Punkts für w' von A sei a'. Nimmt man nun die Axe der Z auf der Ebene normal, so fällt die Axe der Y in die Ebene und es seien die Coordinaten der übrigen Berührungspunkte des Körpers mit der Ebene für die Kraft w'', w'''... nach der Axe der $X = a''$, a'''..., nach der Axe der $Y = b''$, b'''... dann sind die Bedingungen des Gleichgewichts, weil die Kräfte w, w', w''... mit der Axe der Z ∓ laufen:

$$P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + \ldots = 0$$
$$P\cos\beta + P_1\cos\beta_1 + \ldots = 0$$
$$P\cos\gamma + P_1\cos\gamma_1 + \ldots - (w + w' + w'' + \ldots) = 0$$

oder

$$R\cos\gamma' - (w + w' + w'' + \ldots) = 0$$

Ferner sind die drei Momentensysteme, deren Abstände in den Axen AX, AY, AZ liegen, einzeln = 0.

Nämlich 1. das System in der Coordinatenebene XAZ nach Gleichung 10, No. 54:

$$-x'R\cos\gamma' + z'R\cos\alpha' + M = 0$$

2. In der Coordinatenebene YAZ nach Gleichung 12, No. 54:

$$-z'R\cos\beta' + y'R\cos\gamma' + M_2 = 0$$

Die dritte Momentengleichung in der Ebene XAY ist an sich = 0, weil $R\cos\alpha' = R\cos\beta' = 0$ ist. Aus diesem Grunde vereinfachen sich auch die beiden ersten Momentengleichungen in folgende:

$$-x'R\cos\gamma' + M = 0$$
$$y'R\cos\gamma' + M_2 = 0$$

Hieraus ist

$$x' = \frac{M}{R\cos\gamma'} \text{ und } y' = -\frac{M_2}{R\cos\gamma'}$$

Nun ist nach Obigem, der dritten auf Null reducirten Gleichung:

$$R\cos\gamma' = w + w' + w'' + \ldots$$

M = der Momentensumme der in der Ebene XAZ wirkenden Kräftepaare

$$= a'w' + a''w'' + a'''w''' + \ldots$$

M_2 = der Momentensumme der in der Ebene YAZ wirkenden Kräftepaare

$$= b''w'' + b'''w''' + \ldots$$

folglich

$$x' = \frac{a'w' + a''w'' + a'''w'''}{w + w' + w'' + \ldots}$$

$$y' = -\frac{b''w'' + b'''w''' + \ldots}{w + w' + w'' + \ldots}$$

Dieses Minuszeichen kann nicht auffallen, wenn man Gleichung IV. und VI. (die Werthe von M und M_2) mit einander vergleicht; es ergibt sich nämlich, daſs beide der Form nach einander entgegengesetzt sind.

4. Aus der vorstehenden Untersuchung ergibt sich, daſs nur drei Bedingungsgleichungen für's Gleichgewicht aufgestellt werden können; daher können auch nur drei Pressungen bestimmt werden.

Berührt der Körper die Ebene in mehr als drei Punkten, so sind die Druckwirkungen w, w', w'', w'''... nicht zu bestimmen. Ueberdies dürfen die drei Berührungspunkte auch nicht in einer und derselben geraden Linie liegen, denn alsdann würden b, b', b''... einzeln = 0; es blieben zur Bestimmung der Druckwirkungen nur zwei Gleichungen übrig und

es wären nur 2 Kräfte w und w' zu finden möglich. In diesem allgemeinen Fall ist nur die Summe der senkrecht abwärts wirkenden Kräfte zu bestimmen und sie ist $= R \cos \gamma'$.

Krebs (♋) (s. „Absteigendes Zeichen" mit Fig. 19) ist das vierte Himmelszeichen der nördlichen Halbkugel. Es erstreckt sich, wie jedes Zeichen auf 30 Grad Länge und zwar vom Ende des Zeichens der Zwillinge im Sommerwendepunkt bis zum Anfang des Löwen.

Kreis. Der Kreis ist Kreislinie und Kreisfläche. Eine Kreislinie ist eine in einer Ebene liegende, in sich geschlossene Linie, deren jeder einzelne Punkt von einem innerhalb der Linie in derselben Ebene liegenden Punkt gleich weit entfernt ist.

Eine Kreislinie entsteht durch den beschreibenden Endpunkt einer geraden Linie, wenn diese um ihren zweiten festen Endpunkt innerhalb einer Ebene herumgedreht wird.

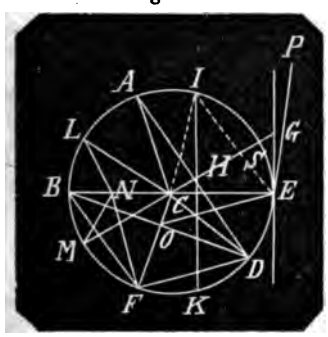
Der feste Endpunkt heifst der Mittelpunkt, das Centrum des Kreises, die beschreibende Linie der Halbmesser, der Radius des Kreises.

Die Kreisfläche oder Kreisebene ist der von der Kreislinie eingeschlossene Ebene Raum.

Nennt man Kreis die Kreisfläche, so heifst die Kreislinie auch Kreisumfang, Peripherie.

In Fig. 771 ist $ABDE$ eine Kreislinie, C ihr Mittelpunkt, AC, BC, EC sind

Fig. 771.



Halbmesser. Die Linie BE, welche aus zwei Halbmessern besteht ist ein Durchmesser des Kreises. Ein Durchmesser oder Diameter eines Kreises ist die Verbindungslinie zweier Peripheriepunkte, wenn sie zugleich durch den Mittelpunkt geht. Geht die gerade Verbindungslinie zweier Peripheriepunkte nicht durch den Mittelpunkt wie BD, so heifst sie Sehne oder Chorde. Jeder Theil einer Kreislinie wie AB, ABD, BD heifst Bogen, Kreisbogen. Jeder Theil einer Kreisebene, der von einer Sehne und einem Kreisbogen eingeschlossen wird, wie BDF, $BDAE$, heifst Kreisabschnitt oder Segment. Jede Sehne theilt die Kreislinie in zwei Bogen und die Kreisebene in zwei Abschnitte; der Durchmesser theilt den Kreis in zwei Abschnitte (Halbkreise) mit zwei Bogen (Halbkreisbogen). Der Theil der Kreislinie, welcher von zwei Halbmessern und dem zwischen liegenden Bogen eingeschlossen wird, wie ACB, heifst Kreisausschnitt, Sector. Jede zwei Halbmesser theilen den Kreis in zwei Kreisausschnitte; liegen die beiden Halbmesser in einerlei geraden Linie, machen sie einen Durchmesser aus, dann werden die Ausschnitte zu zwei gleichen Abschnitten, zu Halbkreisen. Der Winkel, der von zwei Radien gebildet wird, wie ACB heifst Winkel am Mittelpunkt, Mittelpunktswinkel, Centriwinkel; der Winkel, den zwei Sehnen bilden, wie $\angle ADB$ heifst Umfangswinkel, Peripheriewinkel.

Euklid, Buch III. hat noch

Erkl. 7. Der Winkel des Abschnitts ist der von der Grundlinie (der Sehne) und dem Umkreise eingeschlossene, wie $\angle BDKF$, $\angle DBMF$. (Es sind dies gemischtlinige einander gleiche Winkel)

Erkl. 8. Der Winkel im Abschnitt ist derjenige, welchen die geraden Linien (Sehnen) einschliefsen, die von irgend einem Punkt auf dem Umkreise des Abschnitts nach den Endpunkten der Grundlinie gezogen sind (Peripheriewinkel BFD im Abschnitt DBF).

Erkl. 9. Wenn die den Winkel einschliefsenden geraden Linien ein Stück des Umkreises (einen Bogen) abschneiden, so sagt man, der Winkel stehe auf dem Bogen ($\angle BFD$ steht auf dem Bogen $BAED$).

Erkl. 11. Aehnliche Kreisabschnitte sind, welche gleiche Winkel fassen oder in denen die Winkel beiderseits gleich sind.

Ueber die Aehnlichkeit der Kreise und deren Theile kann man folgende Erklärungen aufstellen:

Alle Kreise sind einander ähnlich.

Kreisbogen, die zu verschiedenen

Kreisen gehören sind ähnlich, wenn sie gleiche aliquote Theile der ihnen zugehörigen Kreislinien sind; d. h. also wenn sie gleichen Centriwinkeln angehören.

Kreisabschnitte sind ähnlich, wenn sie von ähnlichen Bogen begrenzt werden.

3. Das vierte Buch des Euklid, welches 16 Constructions-Aufgaben in Beziehung auf den Kreis begreift, beginnt mit sieben Erklärungen, von denen die letzten fünf den Kreis betreffen. Nämlich:

Erkl. 3. Eine geradlinige Figur heifst in einen Kreis beschrieben, wenn jeder Winkel (sollte heifsen: Ecke oder Winkelspitze) der eingeschriebenen Figur des Kreises Umring trifft.

Erkl. 4. Eine geradlinige Figur heifst um einen Kreis beschrieben, wenn jede Seite der umschriebenen Figur des Kreises Umring berührt.

Erkl. 5. Ein Kreis heifst gleichermafsen in eine geradlinige Figur beschrieben, wenn des Kreises Umring jede Seite der Figur, in welche er beschrieben, berührt.

Erkl. 6. Ein Kreis heifst um eine geradlinige Figur beschrieben, wenn des Kreises Umring jeden Winkel (soll heifsen: Winkelspitze) der Figur, um welche er beschrieben ist, trifft.

Erkl. 7. Eine gerade Linie heifst in einen Kreis eingetragen, wenn ihre Endpunkte in des Kreises Umringe sind.

Die siebente Erklärung hätte, da sie den einfachsten Gegenstand begreift, die erste der vorstehenden Erklärung sein sollen.

Für die übrigen Erklärungen gehörten wohl folgende Vorerklärungen:

In jedem Kreisumfang können beliebig viele Punkte gewählt werden; wenn man jede zwei nebeneinander liegende dieser Punkte durch eine gerade Linie verbindet, so entsteht eine geradlinige drei- oder mehrseitige Figur innerhalb des Kreises, deren Ecken in dem Umkreis liegen. Man sagt von solcher Figur, sie liege in dem Kreise, oder der Kreis liege um die Figur.

Wenn man durch die gewählten Punkte an den Kreis Berührungslinien zieht und diese verlängert bis sie sich schneiden, so entsteht eine drei- oder mehrseitige Figur aufserhalb des Kreises, deren Seiten sämmtlich Tangenten sind. Man sagt von solcher Figur, sie liege um den Kreis, oder der Kreis liege in der Figur.

Ferner ist noch zu erklären:

Zwei Kreise in einer Ebene von demselben Mittelpunkt heifsen concentrische Kreise; zwei Kreise von verschiedenen Mittelpunkten excentrische Kreise. Die gerade Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier excentrischer Kreise heifst die Centrale.

Die Bogen und Ausschnitte eines Kreises, deren Centriwinkel gleich einem rechten Winkel (= 90°) sind, heifsen Quadranten; die Sehnen bilden ein Quadrat.

Die Bogen und Ausschnitte eines Kreises, deren Centriwinkel gleich ⅔ eines rechten Winkels (= 60°) sind, heifsen Sextanten; die Sehnen bilden ein regelmäfsiges Sechseck.

Die Bogen und Ausschnitte eines Kreises, deren Centriwinkel gleich einem halben rechten Winkel (= 45°) sind, heifsen Octanten; die Sehnen bilden ein regelmäfsiges Achteck.

4. Eine merkwürdige Eigenschaft des Kreises ist noch im Voraus zu erwähnen, nämlich die mit der geraden Linie gemeinschaftliche Eigenschaft, dafs die gleichen an einander liegenden Theile einerlei Lage neben einander haben; wiewohl die gerade Linie diese Eigenschaft in noch allgemeinerem Sinne hat, nämlich dafs auch die von einander entfernten, abgesonderten Theile einerlei Lage mit einander haben.

Man kann demgemäfs auch sagen, eine gerade Linie und eine Kreislinie sind durch das kleinste Stück ihrer Länge vollkommen bestimmt oder gegeben.

Die gemeinschaftliche Eigenschaft von gerader Linie und Kreis, dafs gleiche gerade Linien und gleiche Kreise auch congruent sind, kommt auch den regelmäfsigen Figuren und Körpern zu.

5. Die wichtigsten Sätze aus den Elementen der Lehre vom Kreise hat Euklid in seinem Buch III. zusammengestellt, welche unter Zufügung seiner Beweise, diese möglichst abgekürzt, in Folgendem, jedoch mit Hinfortlassung der Aufgaben, nämlich Satz 1, 17, 25, 30, 33, 34, wiedergegeben werden.

Euklid Erklärung 1. Gleiche Kreise sind, in denen die Durchmesser oder die Halbmesser gleich sind. Dieser Satz wird jetzt als Lehrsatz aufgestellt und durch Deckung bewiesen. Dasselbe gilt von den Halbkreisen, den Bogen und den Ebenen, und beide Lehrsätze sind in der Regel die ersten des Lehrsystems.

Erkl. 2. Von einer geraden Linie wird

gesagt, sie berühre den Kreis, wenn sie ihn trifft und verlängert ihn nicht schneidet.

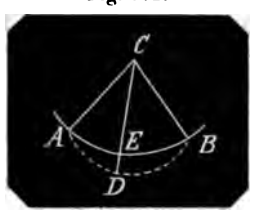
Diese Erklärung ist nicht zu billigen, es mufs vielmehr erst die Möglichkeit einer solchen geraden Linie nachgewiesen werden, wie dies in seinem 16ten Satze inconsequenterweise wirklich geschehen ist.

Erkl. 3. Von Kreisen sagt man, sie berühren einander, wenn sie einander treffen ohne einander zu schneiden. — Ist desgleichen erst zu beweisen, dafs dies von zwei Kreisen möglich ist: der Beweis der Möglichkeit geschieht jedenfalls am einfachsten mit Hülfe der beiden Kreisen gemeinschaftlichen Tangente.

6. Euklids Lehrsätze. Lehrsatz 2. Eine gerade Linie, welche zwei beliebige Punkte B, D in dem Umfang eines Kreises verbindet, fällt innerhalb dieses Kreises.

Denn es sei ADB die gerade Linie, ziehe die beliebige CD, so ist, da $CA = CB$ auch $\angle CAD = \angle CBD$ und da

Fig. 772.



$\angle CDB$ als Aufsenwinkel $> \angle CAD$, also auch $> \angle CBD$, so ist $CB > CD$ oder $CE > CD$, welches nicht möglich ist. Folglich ist ADB keine gerade Linie.

Lehrsatz 3. Wenn im Kreise (Fig. 771) eine durch den Mittelpunkt C gehende gerade Linie CG eine andere nicht durch den Mittelpunkt gehende Linie AD in H halbirt, so schneidet sie dieselbe unter rechten Winkeln, und wenn sie dieselbe unter rechten Winkeln schneidet, so halbirt sie auch dieselbe.

Denn ad 1, zieht man die Halbmesser CA, CD, so entstehen weil drei Seiten einzeln gleich, die congruenten Dreiecke ACH, DCH, woraus $\angle AHC = \angle DHC = R\angle$.

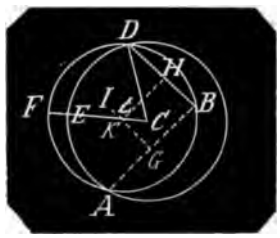
Ad 2 entstehen die congruenten Dreiecke aus zwei gleichen Seiten und dem rechten Winkel, woher $AH = DH$.

Lehrsatz 4. Wenn im Kreise (Fig. 771) zwei gerade Linien (AD, JK), die nicht durch den Mittelpunkt gehen, einander (in H) schneiden, so halbiren sie einander nicht.

Denn wäre $AH = DH$ und zugleich $JH = KH$, so halbirt auch CH beide Linien und es wäre nach dem vorigen Satz $\angle CHA = R = \angle CHJ$.

Lehrsatz 5. Zwei Kreise (Fig. 773), die einander schneiden, haben keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt.

Fig. 773.



Denn wäre C Mittelpunkt beider Kreise, so ziehe CD und die beliebige CF, so ist $CD = CE$ und zugleich $CD = CF$, also $CE = CF$.

Lehrsatz 6. Zwei Kreise, Fig. 774, deren einer den anderen inwendig berührt, haben keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt.

Denn wäre K deren gemeinschaftlicher Mittelpunkt, so hätte man im äufseren

Fig. 774.

Kreise $KJ = KM$ und im inneren $KJ = KL$, mithin $KM = KL$.

Lehrsatz 7. Nimmt man auf eines Kreises Durchmesser BE (Fig. 771) einen vom Mittelpunkt C verschiedenen Punkt N, und zieht von diesem nach dem Umkreis mehrere gerade Linien NF, NM, NL, so ist die durch den Mittelpunkt NE die gröfste, das übrige Stück NB die kleinste; unter den übrigen Linien aber

immer die der gröfsten NE nähere gröfser als die entferntere. Auch sind von solchen Linien nur je zwei auf beiden Seiten der kleinsten NB (heifst praeciser: des Durchmessers BE) einander gleich.

Denn ad 1. In dem $\triangle NCF$ ist $NC + FC > NF$, d. h. $NE > NF$.

ad 3. In den Dreiecken NCF und NCM sind $CF = CM$ und $NC = NC$ aber $\angle FCN > \angle MCN$, folglich $NF > NM$.

ad 2. Es ist $CN + MN > CM$, also auch $> CN + BN$, folglich $MN > BN$.

ad 4. Macht man $\angle BCL = \angle BCM$, so ist in den Dreiecken CLN und CMN:

$$NC = NC,\ CL = CM$$

folglich $\triangle CLN \cong \triangle CMN$

also $LN = MN$

Gesetzt es wäre nun noch eine Linie $FN = LN$, so wäre auch $FN = MN$ was gegen No. 3 des Satzes ist.

Lehrsatz 8. Nimmt man aufserhalb eines Kreises (Fig. 775) ABC einen Punkt D und zieht von ihm an den Umkreis mehrere gerade Linien, eine DA durch den Mittelpunkt M, die übrigen beliebig, so ist unter denen, welche den hohlen Umkreis treffen, DA, DE, DF, DJ, die durch den Mittelpunkt DA die gröfste; von den übrigen aber immer die der gröfsten DA nähere gröfser als die entferntere. Unter denen hingegen, welche den erhabenen Umkreis treffen, DG, DK, DL, DH ist die, welche verlängert durch den Mittelpunkt geht, DG die kleinste, von den übrigen aber immer die der kleinsten DG nähere kleiner als die entferntere. Auch sind von solchen Linien nur je zwei auf beiden Seiten der kleinsten DG einander gleich.

Denn ad 1 ist $DM + EM > DE$,
also auch $DM + AM = AD > DE$

Fig. 775.

ad 2. In den Dreiecken DME und DMF ist $DM = DM$, $ME = MF$, $\angle DME > \angle DMF$, folglich $DE > DF$. Die kleinste unter diesen Linien ist die berührende DB.

ad 3. Es ist $MK + DK > MD$

oder $MG + DK > MG + DG$

folglich $DK > DG$

Demnach ist DG die kleinste der den Umkreis blofs treffenden Linien.

ad 4. Aus den Dreiecken DLM und DKM ergibt sich $DL > DK$, und die berührende DB als die gröfste der den Umkreis blofs treffenden Linien.

ad 5. Macht man $\angle DMH = \angle DML$, so erhält man aus den congruenten Dreiecken DMH, DML, $DH = DL$. Wollte man nun annehmen, es sei auf der linken Seite noch eine Linie, z. B. DK ebenfalls $= DH$, so widerspricht dem der vierte Theil des Satzes.

Dasselbe findet statt mit den Durchschnittslinien DJ, DF, welche einander gleich sind, und dafs noch eine zweite Linie, etwa DE der Linie DJ gleich sein sollte widerspricht No. 4 dieses Satzes.

Lehrsatz 9. Gehen (Fig. 775) von einem Punkt innerhalb eines Kreises an dem Umkreis mehr als zwei gleiche gerade Linien, so ist solcher Punkt des Kreises Mittelpunkt.

Denn ist $ME = MF = ML$, und es wäre nun ein anderer Punkt als M, z. B. N der Mittelpunkt, so ziehe durch MN den Durchmesser AG. Dann wäre nach Lehrsatz 7: $MA > ME$, $ME > MF$, $MF > ML$.

Lehrsatz 10. Ein Kreis schneidet einen anderen in nicht mehr als zwei Punkten.

Denn gesetzt, beide Kreise, Fig. 773, schnitten sich in den drei Punkten A, B, D, so ziehe AB und DB, halbire diese in G, H, errichte die Normalen GJ, HK, so liegt in diesen beiden, folglich in deren Durchschnittspunkt der Mittelpunkt der beiden Kreise, welches nach Lehrsatz 5 nicht möglich ist.

Lehrsatz 11. Berühren zwei Kreise, Fig. 774, einander innerhalb, so trifft die beide Mittelpunkte verbindende gerade Linie genugsam verlängert, den Berührungspunkt.

Denn ist K der Mittelpunkt des gröfseren Kreises und der des kleineren läge aufserhalb der Linie KJ etwa in G, so ziehe JG und durch G und K die MH.

Dann ist $GJ = GD$ und $KJ = KH$

Da nun $KG + GJ > KJ$

so ist $KG + GD > KH$

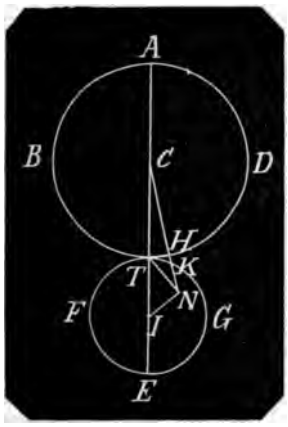
oder $KD > KH$

welches nicht möglich ist.

Lehrsatz 12. Berühren zwei Kreise ABD, EFG (Fig. 776) aufserhalb, so geht die gerade Linie, welche beides Mittelpunkte C, J verbindet, durch den Berührungspunkt T.

Denn wäre ein Punkt aufserhalb CJ,

Fig. 776.



etwa N der Mittelpunkt des zweiten Kreises, so ist $NT = NK$, und da $CT = CH$ so hat man $CT + JN = CH + NK$

woraus $CJ + TN < CN$

D. h. In einem Dreieck zwei Seiten zusammengenommen kleiner als die dritte.

Lehrsatz 13. Kreise berühren einander, sowohl innerhalb wie aufserhalb in nicht mehr als einem Punkt.

ad 1. Sind (Fig. 774) K und C die Mittelpunkte der sich innerhalb berührenden Kreise, so liegt nach Satz 11 der Berührungspunkt in der verlängerten geraden Linie KC; er kann also nur entweder in J oder in E sein, denn wäre er in J und in E zugleich, so wäre

$$CJ = CE$$

Es ist aber $KJ = KE$

folglich $CJ < KE$

um so viel mehr $CJ < CE$

welches der Annahme $CJ = CE$ widerspricht.

ad 2. wird mit Hülfe von Satz 12 eben so bewiesen.

Lehrsatz 14. In einem Kreise (Fig. 771) sind gleiche gerade Linien AD, BD gleich weit vom Mittelpunkt C entfernt, und gleich weit vom Mittelpunkt entfernte Linien sind einander gleich.

ad 1. Ist CH normal AD, CO normal BD, so ist nach Lehrsatz 3, $DO = \frac{1}{2}BD$, $DH = \frac{1}{2}AD$, also $DO = DH$; hierzu $DC = DC$ also $\triangle DCO \cong \triangle DCH$, woraus $CO = CH$.

ad 2. Aus $CD = CD$, $CO = CH$ und $\angle COD = \angle CHD = R$ folgt $\triangle CDO \cong \triangle CDH$ also $DO = DH$ und $BD = AD$.

Lehrsatz 15. In einem Kreise (Fig. 775) ist der Durchmesser OP die gröfste Linie, unter den übrigen aber immer die dem Mittelpunkt nähere $FJ >$ als die entferntere LH.

ad 1. Jede Sehne wie FJ bildet mit den Halbmessern MF, MJ ein Dreieck MFJ, in welchem also die Sehne kleiner ist als die Summe beider Halbmesser, mithin immer kleiner als der Durchmesser.

ad 2. Hat das $\triangle MLH$ eine gröfsere Höhe als das $\triangle MFJ$, so ist auch $\angle LMH < \angle FMJ$, folglich $LH < FJ$.

Lehrsatz 16. Das auf eines Kreises Durchmesser BE (Fig. 771) im Endpunkt E errichtete Perpendikel EP fällt aufserhalb des Kreises, und an diesen Punkt E fällt zwischen dem Umkreise und dem Perpendikel keine andere gerade Linie. Auch ist der Winkel des Halbkreises $JSEC$ gröfser, der übrige vom Umkreise und dem Perpendikel eingeschlossene Winkel, SEP aber kleiner als jeder spitze geradlinige Winkel.

ad 1. Gesetzt das Perpendikel fiele innerhalb des Kreises etwa wie EJ, so ist $\angle CEJ = R$. Nun ist in dem $\triangle CJE$, $CJ = CE$, mithin $\angle CJE = \angle CEJ = R$, zwei Rechte in einem Dreieck; daher kann eine in E auf BE errichtete Normale keine Sehne sein.

ad 2. Gesetzt es fiele zwischen dem Bogen ES und dem Perpendikel EP eine gerade Linie EG, die also ebenfalls ganz aufserhalb des Kreises liegt, so ist $\angle CEG < R$ und ein auf EG gefälltes Perpendikel CG fällt oberhalb CE und $CE > CG$. Da nun $CS = CE$, so kann G nicht aufserhalb des Kreises fallen.

ad. 3 und 4. Es ist schon No. 1, Erkl. 7 angegeben, dafs Euklid gemischtlinige Winkel betrachtet. Diese aber mit geradlinigen Winkeln zu vergleichen, ist nicht angemessen, denn beiderlei Winkel sind ungleichartig. Es ist das Unangemessene daraus ersichtlich, dafs zwischen der geraden Linie EP und dem Kreisbogen EJ noch unzählige Kreisbogen möglich sind, die einen um so gröfseren Winkel mit

EC bilden, je weiter man von E über EC hinaus den Mittelpunkt des Kreises verlegt. (Vergleiche den späteren Art. „Kugeldreieck", pag. 120.)

Lehrsatz 18. Auf eines Kreises $ABDE$ Berührungslinie EG (Fig. 771) ist die vom Mittelpunkt C nach dem Berührungspunkt E gezogene gerade Linie CE perpendiculär.

Wäre CE nicht perpendiculär, so müfste es eine andere sein, z. B. CG. Dann ist $\angle CGE$ ein rechter Winkel, also im $\triangle CEG$ die Seite $CE > CG$, also auch $CS > CG$.

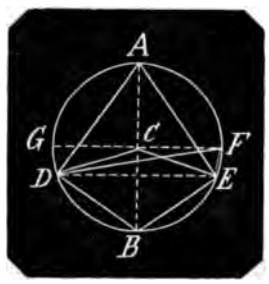
Lehrsatz 19. Ist, Fig. 771, auf eines Kreises $ABDE$ Berührungslinie EG im Berührungspunkt E eine gerade Linie EB perpendiculär, so liegt in solcher des Kreises Mittelpunkt.

Denn wäre in EB nicht der Mittelpunkt, sondern aufser ihr, etwa in O, so ist, wenn man OE zieht, (nach Satz 18) $\angle OEG = R$, folglich $\angle OEG = \angle BEG$.

Lehrsatz 20. In jedem Kreise (Fig. 777) ist der Winkel DCE am Mittelpunkt doppelt so grofs als der Winkel am Umfang, wenn beide auf einerlei Bogen DE stehen.

Ist 1. der Peripheriewinkel DAE, so dafs beide Schenkel desselben den Mittelpunkt C einschliefsen, so ziehe den

Fig. 777.



Durchmesser AB. Dann ist $DC = AC$, also $\angle CDA = \angle CAD$, also $\angle DCB = 2\angle CAD$.

Eben so $\angle ECB = 2\angle CAE$, folglich $\angle DCE = 2\angle DAE$.

Ist 2. der Peripheriewinkel DFE, so dafs der Mittelpunkt aufserhalb beider Schenkel fällt, so ziehe den Durchmesser FG und man hat aus 1:

$$\angle GCD = 2\angle GFD$$
$$\angle GCE = 2\angle GFE$$

hieraus
$\angle GCE - \angle GCD = 2\angle GFE - 2\angle GFD$
oder $\angle DCE = 2\angle DFE$

Lehrsatz 21. Die Winkel DAE, DFE in einem Kreisabschnitte $DAFE$ sind einander gleich (heifst jetzt: Peripheriewinkel auf demselben Bogen (DE) sind einander gleich).

Denn zieht man den Mittelpunktswinkel DCE, so ist nach dem vorigen Satz $\angle DCE = 2\angle DAE = 2\angle DFE$, woher $\angle EAC = \angle DFE$.

Lehrsatz 22. Die gegenüberstehenden Winkel einer vierseitigen Figur im Kreise sind zweien rechten Winkeln gleich.

Es sei (Fig. 777) $ADBE$ das Viereck, ziehe die Diagonalen AB, DE, so ist nach dem vorigen Satz

$$\angle ADE = \angle ABE$$
$$\angle BDE = \angle BAE$$

hieraus $\angle ADB = \angle ABE + \angle BAE$
hierzu $\angle AEB = \angle AEB$

folglich
$\angle ADB + \angle AEB = 2$ rechten Winkeln.

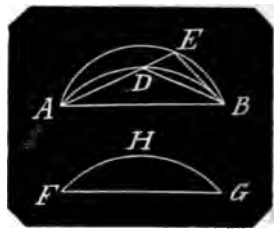
Lehrsatz 23. Auf einer geraden Linie (AB, Fig. 778) können nicht zwei ähnliche und dabei ungleiche Kreisabschnitte an einerlei Seite errichtet werden.

Denn zieht man die beliebigen Linien AE und BE aus den Endpunkten der Sehne, ferner die Linie BD, so hat man immer $\angle ADB > \angle AEB$, mithin sind die Abschnitte immer unähnlich.

Lehrsatz 24. Aehnliche Kreisabschnitte ADB, FHG auf gleichen geraden Linien AB, FG sind einander gleich.

Denn legt man beide so aufeinander,

Fig. 778.



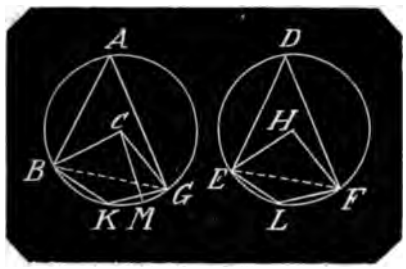
dafs ihre Sehnen sich decken, so müssen auch die Bogen sich decken, weil sonst nach dem vorigen Satz die Abschnitte unähnlich sein würden.

Lehrsatz 26. In gleichen Kreisen stehen gleiche Winkel am Mittelpunkt sowohl als gleiche Winkel am Umkreise auf gleichen Bogen.

Ist $\angle BCG = \angle EHF$ und also auch

$\angle BAG = \angle EDF$, so ziehe BG, EF, so ist $\triangle BCG \cong \triangle EHF$, folglich $BG = EF$, und da $\angle A = \angle D$, so ist auch nach Satz 22, $\angle K = \angle L$, also die Abschnitte BKG

Fig. 779.



und ELF ähnlich (Erkl. 11), und wegen $BG = EF$ auch Abschnitt BKG = Abschnitt ELF. (Euklid spricht im Lehrsatz nur von gleichen Bogen, beweist aber auch gleiche Sehnen, Auschnitte und Abschnitte.)

Lehrsatz 27. In gleichen Kreisen sind die auf gleichen Bogen BG, EF stehenden Winkel am Mittelpunkt BCG und EHF sowohl, als am Umkreise BAG, EDF einander gleich.

Wäre $\angle BCG > \angle EHF$, so sei $\angle BCM = \angle EHF$. Dann wäre nach dem vorigen Satz Bogen BM = Bogen EF; es ist aber angenommen Bogen BG = Bogen EF, also wäre Bogen BM = Bogen BG, welches unmöglich ist. Demnach ist $\angle BCG = \angle EHF$ und mit diesen nach Satz 20, $\angle BAG = \angle EDF$.

Lehrsatz 28. In gleichen Kreisen schneiden gleiche gerade Linien BG, EF gleiche Bogen ab, so dafs die gröfseren Bogen BAG, EDF wie auch die kleineren BKG, ELF einander gleich sind.

Denn da die Halbmesser einander gleich sind, so ist $\triangle CBG \cong \triangle HEF$ also $\angle BCG = \angle EHF$, folglich (nach Satz 26) die gröfseren und die kleineren Bogen einander gleich.

Lehrsatz 29. In gleichen Kreisen sind die geraden Linien BG, EF, welche die Endpunkte gleicher Bogen mit einander verbinden, einander gleich.

Die Halbmesser beider Kreise sind einander gleich, die Bogen gleich, folglich (Satz 27) auch $\angle BCG = \angle EHF$, folglich in den congruenten Dreiecken BCG, EHF $BG = EF$.

Lehrsatz 31. Der Winkel im Halbkreise ist ein rechter; aber der Winkel im gröfseren Kreisabschnitt ist kleiner und der im kleineren gröfser als ein rechter (heifst jetzt Umfangswinkel auf einem kleineren, auf einem gröfseren Bogen). Hingegen ist der Winkel des gröfseren Kreisabschnitts gröfser und des kleineren kleiner als ein rechter (beide letzten Winkel sind die gemischtlinigen Winkel (s. 1. Erkl. 7 und Lehrsatz 16, ad 3).

ad 1. Fig. 777. Es ist AEB der Winkel im Halbkreise. (Euklids Beweis ist etwas weitläufig). Nun ist (nach Lehrsatz 20)

$$\angle AEC = \tfrac{1}{2}\angle ACE$$
$$\angle BEC = \tfrac{1}{2}\angle BCE$$

daher $\angle AEB = \tfrac{1}{2}(\angle ACE + \angle BCE)$
$= \tfrac{1}{2} \cdot 2$ Rechten = R$\angle$.

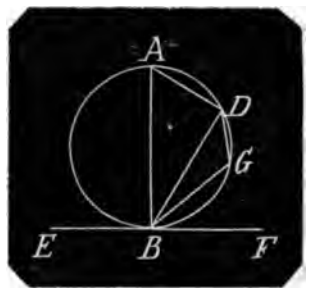
ad 2. Es ist $\angle DEB$ der Winkel im gröfseren Abschnitt $DGAFEB$ oder der auf dem kleineren Bogen BD stehende Umfangswinkel und augenscheinlich $< (AEB = R)$.

ad. 3. Es ist $\angle DBE$ der Winkel im kleineren Abschnitt DBE oder der auf dem gröfseren Bogen $DGAFE$. Mithin ist nach 2 des Satzes $\angle DAE < R$; aber nach Lehrsatz 22 ist $\angle DAE + \angle DBE = 2R$, mithin $\angle DBE > R$.

ad 4. Dafs der gemischtlinige Winkel $ED\,(GAFE) > R$ und der $ED\,(BE) < R$, wird augenscheinlich, wenn man durch D eine Normale auf DE errichtet.

Lehrsatz 32. Wird ein Kreis, Fig. 780, von einer geraden Linie EF berührt und von einer anderen aus dem Berührungspunkt B gezogenen BD geschnitten,

Fig. 780.



so sind die Winkel DBF, DBE, welche die schneidende Linie mit der berührenden macht, den Winkeln in den Nebenabschnitten des Kreises gleich.

Denn ad 1. In dem auf EF in B errichteten Perpendikel BA liegt der Mittelpunkt des Kreises, also ist $\angle BDA$

$= R = \angle ABD + \angle BAD = \angle ABF = \angle ABD + \angle DBF$. Folglich $\angle BAD = \angle DBF$.

ad 2. Nach Lehrsatz 22 ist $\angle A + \angle G = 2R = \angle DBF + \angle DBE$. Nun ist $\angle A = \angle DBF$ (ad 1) mithin $\angle G = \angle DBE$.

Lehrsatz 35. Schneiden einander in einem Kreise zwei gerade Linien, so ist das unter den Abschnitten der einen enthaltenen Rectangel dem unter den Abschnitten der anderen enthaltenen gleich.

Gehen die beiden sich schneidenden Linien durch den Mittelpunkt, so ist der Satz an sich klar. Ist aber C der Mittelpunkt, und der Durchschnittspunkt ein anderer, E, so ziehe CB, CG, CE, fälle die Perpendikel CF, CH, so ist $AF = GF$, $BH = DH$.

Fig. 781.

Mithin $AE \times GE + EF^2 = AF^2 = GF^2$ *)
hierzu $CF^2 = CF^2$
gibt $AE \times GE + EF^2 + CF^2 = CF^2 + GF^2$
oder $AE \times GE + CE^2 = CG^2 = CB^2$

Eben so ist
$DE \times BE + CE^2 = CB^2$
folglich ist $AE \times GE = DE \times BE$

Lehrsatz 36. Gehen von einem aufserhalb eines Kreises (Fig. 775) genommenen Punkt D zwei gerade Linien nach dem Umkreis, von denen ihn die eine DA oder DF in AL schneidet, die andere DB berührt, so ist das unter der ganzen schneidenden Linie DA, DF und ihrem aufserhalb des Kreises befindlichen Abschnitt DG, DL enthaltene Rectangel dem Quadrat der Berührungslinie DB gleich.

ad 1. Wenn die schneidende Linie DA den Mittelpunkt M trifft.

Fälle das Loth MB auf BD, so ist

$DM^2 = DB^2 + BM^2$

Ferner ist
$AD \times BG + GM^2 = DM^2$ **)
oder
$AD \times DG + BM^2 = DM^2 = DB^2 + BM^2$
woraus $AD \times DG = DB^2$

ad 2. Wenn die schneidende Linie DF nicht den Mittelpunkt M trifft.

Fälle das Perpendikel MR auf DF, dann ist FL in R halbirt, und man hat
$DF \times DL + LR^2 = DR^2$
hierzu $MR^2 = MR^2$
gibt
$DF \times DL + LR^2 + MR^2 = DR^2 + MR^2$
oder
$DF \times DL + LM^2 = DM^2 = BD^2 + BM^2$
Nun ist $LM^2 = BM^2$
folglich ist $DF \times DL = BD^2$

Lehrsatz 37. Gehen von einem aufserhalb eines Kreises (Fig. 775) genommenen Punkt D zwei gerade Linien an den Umkreis, von denen die eine DF ihn schneidet, die andere DB an ihn fällt, und ist das unter der ganzen schneidenden Linie DF und ihrem aufserhalb des Kreises befindlichen Abschnitt DL enthaltene Rectangel dem Quadrat der an den Umkreis fallenden Linie DB gleich, so ist letztere eine Berührungslinie des Kreises.

Denn denkt man sich (Fig. 775) rechts von AD eine berührende DB_1, so ist nach dem vorigen Satz: $DF \times DL = DB_1^2$

Nun ist zugleich $DF \times DL = DB^2$
folglich $DB_1 = DB$

Nun sind in den beiden Dreiecken DMB und DMB_1: $DB = DB_1$; $DM = DM$ und $MB = MB_1$; folglich ist auch $\angle DBM = \angle DB_1M$ und da dieser ein rechter Winkel ist, so ist auch $\angle DBM$ ein rechter Winkel, und folglich DB eine Tangente (Satz 16).

7. Hier schliefst das dritte Buch und mit ihm das Lehrgebäude über die wissenswürdigsten Eigenschaften des Kreises mit Ausnahme der Aufgaben, welche durch Construction gelöst werden, von welchen allein 16 Aufgaben das 4te Buch ausmachen.

Auffallend könnte es erscheinen, dafs ein ganz einfacher Lehrsatz, der zu den ersteren der Kreislehre gehört, erst als

*) Anmerk. $AE = a$, $GE = b$ gesetzt: $ab + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

**) Anmerk. $AD = a$, $DG = b$ gesetzt: $ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-b}{2} + b\right)^2$

33ter Lehrsatz im 6ten Buch aufgeführt ist.

Nämlich: „In gleichen Kreisen verhalten sich sowohl die Winkel am Mittelpunkt als auch die Winkel am Umkreise, desgleichen die Kreisausschnitte wie die Kreisbogen, worauf sie stehen.“ Denn der Satz beruht auf dem Satz, daſs in gleichen Kreisen zu gleichen Winkeln am Mittelpunkt auch gleiche Bogen u. s. w. gehören.

Man muſs aber erwägen, daſs Euklid die Lehre von den Verhältnissen erst im fünften Buch und zwar mit Hülfe von geraden Linien vorträgt.

8. Die geordnete Zusammenstellung der Lehrsätze für die Elemente der Kreislehre ist nach meiner Ansicht mit Zuziehung guter Lehrbücher folgende:

1. Kreise, welche gleiche Halbmesser also auch gleiche Durchmesser haben, sind gleich.

2. Gleiche Kreise haben gleiche Halbmesser und also auch gleiche Durchmesser.

3. Der Durchmesser theilt den Kreis in zwei congruente Theile.

Diese drei Sätze sind durch Deckung zu erweisen.

4. In einem und in gleichen Kreisen gehören zu gleichen Winkeln am Mittelpunkt gleiche Bogen, gleiche Sehnen, gleiche Ausschnitte und gleiche Abschnitte.

Beweis s. vorstehend Euklid Satz 26.

5. In einem und in gleichen Kreisen gehören zu ungleichen Winkeln am Mittelpunkt ungleiche Bogen u. s. w.

Ist mit Hülfe von Satz 4 indirect zu beweisen.

6. Die acht umgekehrten Sätze von Satz 4 und 5 (wie Euklid Satz 27).

7. In einem und in gleichen Kreisen verhalten sich die Bogen und die Ausschnitte (die Sehnen und die Abschnitte natürlich nicht) wie die zu ihnen gehörenden Winkel am Mittelpunkt.

Beweis aus Satz 4. Verhalten sich nämlich die Winkel wie $m : n$, so theile diese Winkel durch Radien in m und in n gleiche Theile, dann besteht der erste Winkel aus m, der zweite aus n gleichen Winkeln, für jeden gilt Satz 4, folglich haben n und m gleiche Winkel n und m gleiche Bogen und Ausschnitte.

Sind die Winkel (A und B) incommensurabel, so nehme den einen derselben z. B. A, rational an und theile denselben in n gleiche rationale Theile; der zweite Winkel B sei nun gröſser als $m-1$ und kleiner als m solcher Theile (α), so fällt dessen zweiter Halbmesser zwischen den $m-1$ten und den $m$ten Theilhalbmesser. Nun kann man n beliebig groſs und damit den einzelnen Theilwinkel α beliebig klein nehmen, und dadurch beide den Endhalbmesser des $\angle B$ einschlieſsenden Halbmesser demselben (d. h. $\angle(m-1)\alpha$ und $\angle m\alpha$ dem $\angle B$) beliebig nahe bringen. Aber der zu $m\alpha$ gehörende Bogen bleibt immer gröſser und der zu $(m-1)\alpha$ gehörende Bogen immer kleiner als der gegebene, mithin ist der gegebene Bogen als Grenzwerth zwischen beiden der gesuchte Bogen und mit diesem der zugehörige Ausschnitt der gesuchte Ausschnitt.

8. In einem oder in gleichen Kreisen sind gleiche Sehnen gleich weit vom Mittelpunkt entfernt; und Sehnen, die in einem oder in gleichen Kreisen gleich weit vom Mittelpunkt entfernt sind, sind gleich.

Der Satz ist mit Hülfe von Satz 4 zu beweisen. Siehe vorstehend Euklid Satz 14, und den Aufsatz Chorde No. 2 mit Fig. 286.

9. In einem oder in gleichen Kreisen ist der Mittelpunktswinkel doppelt so groſs als der mit ihm auf demselben Bogen stehende Umfangswinkel. (Beweis vorstehend Euklid Satz 20.)

Hieraus gehen unmittelbar folgende Sätze als richtig hervor:

10. Alle Umfangswinkel auf demselben oder auf gleichen Bogen in einem Kreise, oder auf gleichen Bogen in gleichen Kreisen sind einander gleich (mit Hülfe 8, Satz 4).

Jeder der beiden von einer Sehne abgeschnittenen Bogen ist der geometrische Ort für Dreiecke auf einerlei Grundlinie mit gleichen Winkeln an der Spitze.

11. Zu gleichen Peripheriewinkeln in einem und in gleichen Kreisen gehören gleiche Bogen und gleiche Sehnen.

12. Der Peripheriewinkel im Halbkreise ist ein rechter Winkel, denn der Centriwinkel ist = 2 rechten. Der Halbkreis ist demnach der geometrische Ort für rechtwinklige Dreiecke auf einerlei Hypotenuse. (Euklid, Satz 31.)

13. Der Peripheriewinkel, der auf einem Bogen steht, der kleiner ist als der Halbkreis, ist spitz, auf einem der gröſser ist als der Halbkreis stumpf. (Euklid, Satz 31.)

14. Parallele Sehnen schneiden zwischen sich gleiche Bogen ab. (S. den Art. „Chorde“, No. 4)

15. Der Mittelpunkt eines Kreises liegt in der auf einer Chorde in der Mitte errichteten Normalen, und die von dem Mittelpunkt auf eine Chorde gefällte Normale halbirt dieselbe. (Vorstehend Euklid, Satz 3.)

16. Eine gerade Linie schneidet einen Kreis nur in zwei Punkten. Denn schnitte sie den Kreis in drei Punkten und man zieht die drei Radien, so entständen mit drei Schenkeln, derselben Spitze und derselben Höhe drei gleichschenklige Dreiecke.

17. Drei in einer Ebene befindliche Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, bestimmen einen Kreis. Denn verbindet man einen Punkt mit den beiden anderen Punkten durch gerade Linien, so kann man diese beiden Linien als Sehnen eines Kreises betrachten; dessen Mittelpunkt liegt nach Satz 15 in dem Durchschnittspunkt der in den Mitten der Sehnen auf denselben errichteten beiden Normalen.

18. In jedem Viereck im Kreise ist die Summe je zwei einander gegenüberliegender Winkel = 2 rechten Winkeln, weil deren Centriwinkel zusammen 4 Rechte ausmachen. (Euklid, Satz 22.)

19. Wenn in einem Viereck je zwei einander gegenüberliegende Winkel zusammen gleich $2R$ sind, so kann man einen Kreis darum beschreiben.

Denn gesetzt der Kreis (Fig. 777) ginge durch A, D und E aber nicht durch B, sondern durch einen Punkt H oberhalb oder unterhalb B in AB, so würde nach dem vorigen Satz $\angle A + \angle H =$ zweien Rechten sein. Im ersten Fall aber wäre $\angle H > B$ und im zweiten Fall $\angle H < \angle B$ also $\angle A + \angle H$ entweder $>$ oder $< 2R$.

Anmerk. Man kann Satz 18 auch folgender Art ausdrücken:

Die beiden Umfangswinkel in jeden zwei Abschnitten, aus welchen ein Kreis besteht, sind zusammen = 2 Rechten.

20. In einem oder in gleichen Kreisen liegt die gröfsere Sehne dem Mittelpunkt näher als die kleinere.

21. Wenn in einem oder in gleichen Kreisen eine Sehne entfernter vom Mittelpunkt ist als eine andere, so ist die erstere kleiner als die letzte.

Die Beweise dieser beiden Sätze sind einfach (s. den Art. „Chorde“, No. 3, pag. 22 mit Fig. 286).

22. Zwei sich schneidende Sehnen halbiren einander nicht. (Euklid, Satz 4.)

23. Schneiden sich zwei Sehnen innerhalb des Kreises, so ist der von ihnen gebildete Winkel = der Summe, schneiden sie sich aufserhalb, = der Differenz der beiden Umfangswinkel, welche auf den zwischen den Sehnen abgeschnittenen Bogen stehen.

Beweis wie im Art. „Chorde“, No. 6 mit Fig. 287 und 288.

24. Schneiden sich zwei Sehnen normal, und man zieht die vier Halbmesser nach deren Endpunkten, so ergänzen sich die gegenüberliegenden Umfangswinkel gegenseitig zu zwei Rechten.

Beweis im Art. „Chorde“, No. 7 mit Fig. 289.

25. Die auf einem Durchmesser in jedem Endpunkt errichtete Normale hat nur diesen einen Punkt mit dem Kreisumfang gemein, liegt mit allen übrigen Punkten aufserhalb des Kreises und ist somit eine Tangente an dem Kreis. (Euklid, Satz 16)

Denn ist (Fig. 771) EG normal auf BE und man zieht aus dem Mittelpunkt C nach einem anderen dem Berührungspunkt E noch so nahe gelegenen Punkt G in EG eine gerade Linie CG, so ist diese als Hypotenuse in dem rechtwinkligen $\triangle CEG$ immer gröfser als CE; der Punkt G liegt also aufserhalb des Kreises.

Der weitläufige Beweis von Euklid, Satz 16 ist nicht erforderlich.

26. Eine Tangente steht auf dem durch den Berührungspunkt gezogenen Durchmesser normal.

Denn gesetzt GE, (Fig. 771) wäre nicht normal EC, so fälle eine Normale CG auf EG. Dann ist $\angle CGE = R$, folglich in dem rechtwinkligen $\triangle CEG$ die CE als Hypotenuse $> CG$; da aber der Punkt G in der Tangente aufserhalb des Kreises liegt, so mufs $CG > CE$ sein.

27. Eine in dem Berührungspunkt auf einer Tangente errichtete Normale geht durch den Mittelpunkt.

Denn ginge sie nicht durch C, Fig. 771, sondern etwa wie EO, und man zieht den Halbmesser CE, so ist nach dem vorigen Satz $\angle CEG = R$, also kann $\angle OEG$ nicht R sein.

28. Zwei nicht parallele Tangenten an einem Kreis bis zu ihrem Durchschnittspunkt verlängert sind gleich; die vom Durchschnittspunkt durch den Mittelpunkt gezogene gerade Linie ist normal auf der beide Berührungspunkte verbindenden Sehne und halbirt sie.

Denn denkt man sich (Fig. 775) rechts von AD eine zweite Tangente DB' so

ist $\triangle DBM \cong \triangle DB'M$, weil $DM = DM$, $BM = B'M$ und $\angle B = \angle B' = K$. Folglich ist $DB' = DB$.

Da nun auch $\angle DMB' = \angle DMB$, so ist, wenn man BB' zieht und den Durchschnittspunkt zwischen DM und BB' mit R bezeichnet, $MR = MR$, mithin $\triangle BMR \cong B'MR$ und hieraus $BR = B'R$ und $\angle BRM = \angle B'RM = R$.

29. Treffen sich eine Tangente und Sehne in dem Berührungspunkt, so ist der von ihnen gebildete Winkel = dem Peripheriewinkel im gegenüberliegenden Kreisabschnitt.

Beweis vorstehend, Euklid, Satz 32.

30. Ist von den beiden geraden Linien DB und DF, Fig. 775, erstere eine Tangente, letztere eine Durchschnittslinie, so ist das Rectangel, welches von dieser Durchschnittslinie mit dem äufseren Theil derselben gebildet wird, gleich dem Quadrat der Tangente. Also Fig. 775:
$DB^2 = DF \times DL = DA \times DG = DJ \times DH$

Beweis: Euklid, Satz 36 mit Fig. 775.

31. Der umgekehrte Satz von 30 mit Beweis s. vorstehend Euklid, Satz 37.

32. Zwei Kreise, die einander schneiden und die einander berühren haben keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt.

Euklid hat darüber 2 Lehrsätze: Zwei Kreise, die einander schneiden haben keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt (Satz 5 mit Fig. 773) und: Zwei Kreise, deren einer den anderen inwendig berührt, haben keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt (Satz 6 mit Fig. 774). Dafs dies bei Kreisen, die sich auswendig berühren, der Fall ist, scheint ihm unnöthig bewiesen zu werden.

33. Zwei Kreise schneiden einander in nicht mehr als zwei Punkten. Beweis ist vorstehend in Euklid, Satz 10 mit Fig. 773.

34. Wenn zwei Kreise sich schneiden, so steht (Fig. 782) die Centrale CC' auf der gemeinschaftlichen Sehne AB normal und halbirt dieselbe.

Fig. 782.

Denn aus $AC' = BC'$, $AC = BC$ und $CC' = CC'$ hat man

$$\triangle ACC' \cong \triangle BCC'$$

Hieraus $\angle ACC' = \angle BCC'$

hierzu $AC = BC$, $DC = DC$ gibt

$$\triangle ACD \cong \triangle BCD$$

woraus $AD = BD$ und $\angle ADC = \angle BDC = R$

35. Kreise berühren einander, sowohl innerhalb als aufserhalb in nicht mehr als einem Punkt und haben daselbst eine gemeinschaftliche Tangente. (Beweis, Euklid, Satz 13 mit Fig. 774.)

36. Berühren zwei Kreise einander innerhalb oder aufserhalb, so trifft die Centrale den Berührungspunkt. (Beweis s. Euklid, Satz 11 und 12.)

37. Zwei in einer Ebene liegende Kreise schneiden sich, wenn der Abstand ihrer Mittelpunkte kleiner ist als die Summe ihrer Halbmesser oder gröfser als die Differenz derselben.

Denn im ersten Fall liegt jeder Mittelpunkt aufserhalb des zweiten Kreises, im zweiten Fall liegen beide Mittelpunkte in dem gröfseren Kreise; in beiden Fällen steht die Verbindungslinie der Mittelpunkte (die Centrale) auf der gemeinschaftlichen Sehne normal und halbirt dieselbe.

38. Zwei in einer Ebene liegende Kreise berühren einander in einem einzigen Punkt, wenn der Abstand ihrer Mittelpunkte gleich der Summe oder der Differenz ihrer Halbmesser ist. Sie haben eine gemeinschaftliche Tangente, die im ersten Fall zwischen beiden Kreisen, im zweiten Fall auf einer Seite beider Kreise liegt, weil die Berührung der Kreise im ersten Fall aufserhalb, im zweiten Fall innerhalb geschieht.

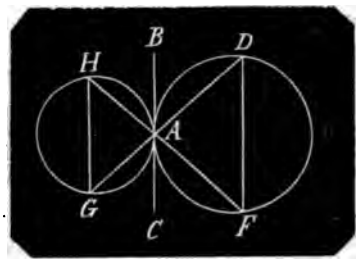
39. Zwei in einer Ebene liegende Kreise liegen ganz auseinander, wenn die Centrale gröfser ist als die Summe der Halbmesser. Ist die Centrale kleiner als die Differenz beider Halbmesser, so liegt der kleinere Kreis ganz innerhalb des gröfseren.

40. Wenn (Fig. 783 und 784) zwei Kreise einander berühren, und man zieht durch den Berührungspunkt zwei gerade Linien, welche jeden der beiden Umfänge in noch einem Punkt schneiden, so sind die beiden Sehnen, welche diese Durchschnittspunkte verbinden, einander parallel.

Denn in Fig. 783 sind DG und FH, in Fig. 784 AF und AD die beiden durch den Berührungspunkt A gezogenen ge-

fachen Linien, *FD* und *GH* die deren Endpunkte verbindenden Sehnen.

Fig. 783.



Es ist also in Fig. 783

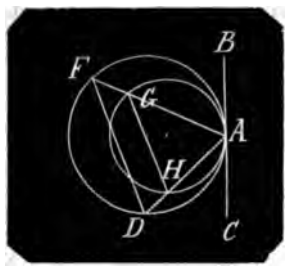
$$\angle BAD = \angle AFD$$
$$\angle CAG = \angle AHG$$

Aber $\angle BAD = \angle CAG$

also auch $\angle AFD = \angle AHG$

folglich $GH \fallingdotseq DF$

Fig. 784.



In Fig. 784 ist

$$\angle BAG = \angle AHG$$
$$\angle BAF = \angle ADF$$

folglich $\angle AHG = \angle ADF$

und $GH \fallingdotseq DF$

41. Schneiden sich zwei Sehnen, so ist das Rechteck aus den Abschnitten der einen Sehne mit dem Rechteck aus den Abschnitten der anderen gleich grofs. Beweis s. Euklid, Satz 35 mit Fig. 781, pag. 94 und Art. Chorde, No. 11 mit Fig. 287, Bd. II. pag. 24.

42. Schneidet eine Tangente eine verlängerte Sehne, so ist das Quadrat der Tangente = dem Rechteck aus der ganzen verlängerten Sehne und der Verlängerung.

Beweis s. Euklid, Satz 36 mit Fig. 775, pag. 94 und Art. „Chorde", No. 11 mit Fig. 290, Bd. II. pag. 24.

43. Schneiden sich zwei Sehnen auserhalb des Kreises, so sind die Rectangel aus jeder ganzen verlängerten Sehne und ihrer Verlängerung einander gleich. Beweis im Art. „Chorde", No. 11 mit Fig. 288, Bd. II. pag. 24.

9. Zu den Lehren der Geometrie gehören die Anweisungen zu Lösung geometrischer Aufgaben mittelst Zeichnung, wie dies in dem Art. „Constructionen", pag. 49, als Einleitung auseinandergesetzt ist. Die Constructionen beginnen daselbst mit denen aus der Elementargeometrie und es sind für dieselbe 135 Aufgaben gelöst. Diejenigen Aufgaben, welche speciell auf den Kreis sich beziehen, fangen mit No. 29 an und zwar mit der einfachsten Aufgabe: In einem gegebenen Kreis eine Sehne von gegebener Länge einzutragen.

Die den Kreis speciell betreffenden Aufgaben sind nun No. 29 bis incl. No. 41, No. 79 bis No. 81 und No. 135. Die Verzeichnung von regelmäfsigen Dreiecken und Vielecken in und um einen Kreis zeigen No. 89 bis incl. 95. Von den übrigen Aufgaben sind No. 62 bis No. 64 Construction von Vierecken in und um den Kreis, No. 70 bis No. 78 Construction von Dreiecken und Quadraten im Halbkreis und im Quadrant; No. 89 bis No. 95 Construction regelmäfsiger Vielecke in und um den Kreis. Auch in dem Art. „Chorde" mit 8 Figuren befinden sich Constructionen, welche die Chorde an sich und dieselbe in Zusammenhang mit der Tangente betreffen.

10. Der algebraische Theil der Elementarlehre vom Kreise ist in dem Wörterbuch schon in verschiedenen Artikeln behandelt. Der erste Artikel darüber: Arcus, Bogen, Kreisbogen enthält die Auffindung der Verhältnifszahl π zwischen dem irrationalen Kreisumfang und dem rationalen Durchmesser und die Werthe von π, $log\,br\,\pi$, $log_n \pi$, jede in 15 Decimalstellen angegeben. Ferner enthält er die Eintheilung der Kreislinie, die Auffindung der Bogen bei gegebenen Centriwinkeln mit Hülfe der trigonometrischen Tafeln; Tabellen für Bogenlängen bei Centriwinkeln Secunde für Secunde und Minute für Minute von 1 bis 60 und Grad für Grad von 1° bis 360°. Ferner die Entwickelung von Reihen für die Länge eines Bogens bei gegebenen Sinus, Cosinus, Tangente, Cotangente, Secante, Cosecante.

In dem Art. „Chorde", No. 12 mit Fig. 293 sind Formeln gegeben für den Zusammenhang des Halbmessers der zu-

gen Sehne, der zu dem halben Bo-
gehörenden Sehne, der Höhe des zur
n Sehne gehörenden Abschnitts und
ndung auf die genannten Stücke
eile regelmäfsiger Figuren im Kreise.
ırt. „Halbkreis“ enthält dieselben Formeln für den Halkreis.

eordnete Zusammenstellung
um Kreise gehörenden Zah-
n und Elementarformeln.

Verhältnifszahl zwischen dem Durch-
: zum Umfang des Kreises ist

$1 : \pi = 1 : 3{,}14159\ 26535\ 89793$

$log\ br\ \pi = 0{,}49714\ 98726\ 94134$

$log\ \pi = 1{,}14472\ 98858\ 49400$

$\frac{1}{\pi} = 0{,}31830\ 98861\ 83791$

$log\ br\ \frac{1}{\pi} = 9{,}50285\ 01273 \ldots - 10$

$\sqrt{\pi} = 1{,}77245\ 38509\ 05516$

$log\ br\ \sqrt{\pi} = 0{,}24857\ 49364$

$\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0{,}56418\ 95835\ 47756$

$log\ br\ \sqrt{\frac{1}{\pi}} = 9{,}75142\ 50636 \ldots - 10$

$\pi^2 = 9{,}86960\ 44010\ 89359$

$log\ br\ \pi^2 = 0{,}99429\ 97454$

$\frac{1}{\pi^2} = 0{,}10132\ 11836\ 42338$

$log\ br\ \frac{1}{\pi^2} = 9{,}00570\ 02546 \ldots - 10$

$\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} = 0{,}80599\ 59770$

$log\ br\ \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} = 9{,}90633\ 28741 \ldots - 10$

Umfang des Kreises:

$2\pi r = 6{,}28318\ 53071\ 79586 \times r$

$log\ 2\pi r = 0{,}79817\ 98734 \ldots log\ r$

Umfang des Quadrant:

$\frac{1}{2}\pi r = 1{,}57079\ 63268 \ldots \times r$

$log\ \frac{1}{2}\pi r = 0{,}19611\ 98719 \ldots \times log\ r$

Inhalt des Kreises:

$\pi r^2 = 3{,}14159 \ldots \times r^2$

$log\ \pi r^2 = 0{,}99429\ 97454 \ldots log\ r$

dem Centriwinkel $= \alpha$

ır Kreisbogen $= \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi r$

ı Sehne $= 2r \sin \frac{\alpha}{2}$

ı Höhe des Bogens $= \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right) r$

25. Der Kreisausschnitt $= \frac{\alpha}{360^\circ} \pi r^2$

26. Der Kreisabschnitt $=$
$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{180^\circ}\pi - \sin\alpha\right) r^2$$

27. Der concentrische Kreisring $=$
$$\pi (R^2 - r^2)$$

28. Das concentrische Ringstück $=$
$$\frac{\alpha}{360^\circ} \pi (R^2 - r^2)$$

Sind die in einen Kreis eingetragenen Linien, als Sehnen, Höhen, Abschnitte statt in Zahlen gegeben zu sein mit Buchstaben bezeichnet, so erhält man noch folgende Formeln (Bd. II. pag. 23):

29. $AF : DF = EF : BF$ oder $AF \times BF = DF \times EF$ } Fig. 288

30. $AF : BF = DF : AF$ oder $AF^2 = BF \times DF$ } Fig. 290

Für den Halbkreis (Fig. 292)

31. $AE : DE = DE : BE$ oder $DE^2 = AE \times BE$

32. $AE : AD = AD : AB$ oder $AD^2 = AB \times AE$

Wird Fig. 293 der Halbmesser $AC = BC = r$, die Sehne $AB = a$ für den Centriwinkel $ACB = \alpha$, die Sehne $AD = BD = b$ für den Centriwinkel $ACD = \frac{1}{2}\alpha$, die Höhe DE des Abschnitts $ABD = h$ gesetzt, so erhält man

33. $a = \frac{b}{r}\sqrt{4r^2 - b^2}$

34. $b^4 - 4b^2r^2 + a^2r^2 = 0$

35. $b = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}$

36. $h = \sqrt{2rh} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

37. $h = \frac{b^2}{2r} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

38. $r = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}$

Setzt man α für $\frac{1}{2}\alpha$, also Fig. 293, $\angle ACD = \angle BCD = \alpha$, so hat man

39. $AB = a = 2r \sin\alpha = 2b \cos\frac{\alpha}{2}$

$$\frac{a}{b} = 2\cos\frac{\alpha}{2}$$

40. $BD = AD = b = 2r \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}a \sec\frac{\alpha}{2}$

12. Die in dem Art. „Arcus“, von No. 9 ab entwickelten Formeln für die Länge der Bogen in Reihen nach den fortlaufenden Potensen der trigonometrischen Linien der Bogen sind:

41. $Arc\,(sin = x) = x + \frac{1}{2\cdot3}x^3 + \frac{3}{2\cdot4\cdot5}x^5 + \frac{3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7}x^7 + \frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot9}x^9 + \ldots$

Das allgemeine (nte) Glied ist

$$\frac{3\cdot5\cdot7\ldots.(2n-3)}{2\cdot4\cdot6\ldots.(2n-2)(2n-1)}\cdot x^{2n-1}$$

42. $Arc\,(cos = x) = \frac{\pi}{2} - \left[x + \frac{1}{2\cdot3}x^3 + \frac{3}{2\cdot4\cdot5}x^5 + \frac{3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7}x^7 + \ldots\right]$

43. $Arc\,(tg = x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 + \ldots. \pm \frac{1}{2n-1}x^{2n-1}$

$$= \frac{x}{1+x^2}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{2\cdot4}{3\cdot5}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 + \frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3 + \frac{2\cdot4\cdot6\cdot8}{3\cdot5\cdot7\cdot9}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^4 + \ldots \frac{2\cdot4\cdot6\ldots.2(n-1)}{3\cdot5\cdot7\ldots.(2n-1)}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{n-1}\right]$$

44. $Arc\,(cot = x) = \frac{\pi}{2} - x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 - \ldots.$

$$= \frac{\pi}{2} - (x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \ldots.)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{x}{1+x^2}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{2\cdot4}{3\cdot5}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 + \ldots.\right]$$

45. $Arc\,(sec = x) = \frac{\pi}{2} - \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{2\cdot3\cdot x} + \frac{3}{2\cdot4\cdot5\cdot x} + \ldots..\right]$

46. $Arc(cosec = x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\cdot3x^3} + \frac{3}{2\cdot4\cdot5x^5} + \ldots.$

47. $Arc\,(sinv = x) = \frac{\pi}{2} - \left[(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2\cdot3} + \frac{3(1-x)^5}{2\cdot4\cdot5} + \ldots.\right]$

48. $Arc\,(cosv = x) = (1-x) + \frac{(1-x)^2}{2\cdot3} + \frac{3(1-x)^5}{2\cdot4\cdot5} + \ldots.$

Man kann aus einigen dieser Formeln eine Reihe für den Werth von π entwickeln: Legt man Formel 41 zu Grunde, setzt den Centriwinkel für $x = 30°$, dann ist $arc\,sin\,30° = \frac{1}{6}\pi$ und $sin\,30° = \frac{1}{2}$, mithin

49. $\pi = 6\left[\frac{1}{2} + \frac{2}{2\cdot3\cdot4^2} + \frac{2\cdot3}{2\cdot4\cdot5\cdot8^2} + \frac{2\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7\cdot16^2} + \ldots.\right]$

(s. den Art. „Arcus", No. 17, A am Schlufs).

Legt man Formel 43, 2 zu Grunde, so hat man für den Centriwinkel von $x = 45°$: $x = \frac{1}{4}x$, $tg\,x = 1$ und

50. $\pi = 2\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1\cdot2}{3\cdot5} + \frac{1\cdot2\cdot3}{3\cdot5\cdot7} + \ldots..\right)$

(s. den Art. „Arcus", No. 17).

13. Der Art. „Brennpunkte der Kegelschnitte", pag. 420 mit Fig. 257 zeigt den Kreis als einen Kegelschnitt, nämlich als den mit der Grundebene ∓ genommenen Durchschnitt EF eines Kegels, entwickelt aber für denselben keine Formel, weil der Kreis keinen Brennpunkt hat. Wie aber für die übrigen Kegelschnitte, so gehört auch für den Kreis eine allgemein geltende Gleichung.

Der Art. „Coordinaten", pag. 132, gibt mit Fig. 513 die rechtwinklige Coordinatengleichung des Kreises (des Kreisumfangs)

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 2rx - x^2 \\ \text{oder} \quad y^2 + x^2 - 2rx = 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

Die Gleichung ist aber eingeschränkt, und zwar deshalb, weil die Abscissenlinie der Durchmesser, ein Endpunkt desselben Anfangspunkt der Coordinaten und diese rechtwinklig sind.

Der Art. „Curven", pag. 161 entwickelt gleich Anfangs mit Fig. 518 die Coordinatengleichung für den Kreis, wo die Abscissenlinie AX aufserhalb des Kreises liegt, die Doppelordinaten wie DE, DF schiefwinklig und der Anfangspunkt A der Coordinaten ein willkühr-

cher Punkt darin ist. Man erhält dort die Gleichung:

$$y^2 - 2yx\cos\alpha + x^2 + 2y(a\cos\alpha - b) - 2x(a - b\cos\alpha) + a^2 - 2ab\cos\alpha + b^2 - r^2 = 0 \quad (2)$$

Es wird aus dieser Gleichung festgestellt, dafs die einfachste aller krummen Linien, der Kreis, schon durch eine quadratische Gleichung bestimmt wird. Es ist also der Kreis schon eine Linie der zweiten Ordnung oder eine Curve der ersten Klasse von der diesen Curven zukommenden allgemeinen Form 1 (Bd. II, pag. 172).

$$ay^2 + byx + cx^2 + dy + ex + f = 0$$

Oder wenn man $a = 1$ setzt, oder wenn man die Gleichung mit a dividirt und die übrigen Coefficienten als mit a dividirt beibehält

$$y^2 + byx + cx^2 + dy + ex + f = 0$$

Man erhält ferner zwei verschiedene Werthe von y, einen für DE und einen für DF.

A. Setzt man $\alpha = 90°$, dann sind die Ordinaten normal der Abscisse und man erhält aus Gleichung 2:

$$y^2 + x^2 - 2by - 2ax + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \quad (3)$$

B. Setzt man nun in diese Gleichung noch $b = r$, so erhält man die Abscissenlinie in den unteren Berührungspunkt mit dem Kreise und es ist:

$$y^2 + x^2 - 2ry - 2ax + a^2 = 0 \quad (4)$$

C. Setzt man in Gleichung 3 die Constante $b = 0$, so erhält man die Abscissenlinie durch den Mittelpunkt C und die Gleichung

$$y^2 + x^2 - 2ax + a^2 - r^2 = 0 \quad (5)$$

D. Setzt man in Gleichung 3 die Constante $a = r$, so erhält man den Anfangspunkt in der Projection des Scheitels J und die Gleichung

$$y^2 + x^2 - 2by - 2rx + b^2 = 0 \quad (6)$$

E. Setzt man in Gleichung 3 die Constante $a = 0$, dann erhält man den Anfangspunkt in der Projection des Mittelpunkts und die Gleichung

$$y^2 + x^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0 \quad (7)$$

F. Setzt man in Gleichung 4 die Constante $a = r$, so hat man die Abscissenlinie in dem unteren Berührungspunkt mit dem Kreise und den Anfangspunkt A in der Projection des Scheitels J und die Gleichung

$$y^2 + x^2 - 2ry - 2rx + r^2 = 0 \quad (8)$$

G. Setzt man in Gleichung 4 die Constante $a = 0$, dann hat man die Abscisse in den unteren Berührungspunkt und den Anfangspunkt in der Projection des Mittelpunkts. Die Gleichung ist

$$y^2 + x^2 - 2ry = 0 \quad (9)$$

H. Setzt man in Gleichung 5 die Constante $a = r$ oder in Gleichung 6 die Constante $b = 0$, so hat man die Abscissenlinie durch den Mittelpunkt C, den Anfangspunkt im Scheitel J und die Gleichung

$$y^2 + x^2 - 2rx = 0$$

J. Setzt man in Gleichung 6 die Constante $b = r$, dann hat man die Abscissenlinie in dem unteren Berührungspunkt mit dem Kreise, den Anfangspunkt in der Projection des Scheitels J und die Gleichung

$$y^2 + x^2 - 2ry - 2rx + r^2 = 0$$

K. Setzt man in Gleichung 5 die Constante $a = 0$, so erhält man die Abscissenlinie durch den Mittelpunkt C, den Anfangspunkt im Mittelpunkt C und die Gleichung

$$y^2 + x^2 - r^2 = 0$$

Kreis in einem Beweis ist wenn das zu beweisende, mehr oder weniger versteckt, als bewiesen vorausgesetzt wird.

Kreis, Borda'scher, s. „Borda'scher Kreis".

Kreisabschnitt. Erklärung, s. „Kreis", No. 1. Formel für den Inhalt No. 11, Formel 24.

Kreisausschnitt. Erklärung, s. „Kreis", No. 1. Bezeichnet man den Centriwinkel mit α, die Länge des Bogens mit b, die Sehne mit a, so hat man den Inhalt des Ausschnitts $J =$

$$\frac{\alpha}{360°}\pi r^2 = \tfrac{1}{2}br = \tfrac{1}{4}\cdot\frac{\alpha}{360°}\cdot\left(\frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2$$

Für $\alpha = 108° 36' 13''$ wird der Ausschnitt durch die Sehne halbirt.

Kreisbewegung, s. „Centralbewegung".

Kreisbogen, s. „Kreis", No. 1 und die Formel No. 11, 20.

Kreisebene, s. „Kreis", No. 1 und die Formeln No. 11, 18 und 19.

Kreislinie, s. v. w. „Kreis"; Formel s. Kreis, No. 11, 14 und 15.

Kreisring und Ringstück, s. „Kreis", No. 11, 25 und 26.

Krümmung ist die Abweichung von der geraden Richtung und die Krümmung ist um so gröfser und um so kleiner, je

gröfser und je kleiner diese Abweichung ist.

Die Krümmung findet bei Linien und Flächen statt; eine Linie, die gekrümmt ist, heifst eine krumme Linie, eine Fläche, die gekrümmt ist, heifst eine krumme Fläche. Die Krümmung darf sich jedoch nicht auf einzelne Theile der Linie oder der Fläche beschränken, so dafs andere Theile derselben gerade sind; der noch so kleinste Theil der Linie und der Fläche darf nicht gerade sein.

Linien, die nach einem Gesetz gekrümmt sind heifsen Curven (s. d.); Flächen, die gekrümmt sind, kommen in der Geometrie nur als Oberflächen vor.

Das Maafs der Krümmung ist die Kreislinie (der Krümmungskreis) von gröfserem und von kleinerem Halbmesser (Krümmungshalbmesser). Denn man kann eine sehr kleine krumme Linie mit einem Kreisbogen vergleichen, wenn sie diesem so nahe kommt, dafs weder eine anders gekrümmte Linie noch ein Kreisbogen von kleinerem Halbmesser zwischen beide fallen kann, ohne dafs er die eine oder die andere schneidet.

Je kleiner der Halbmesser des Krümmungskreises ist, desto gröfser, und je gröfser der Halbmesser, desto kleiner ist die Krümmung.

Der Krümmungsgrad einer Fläche wird in den Krümmungen von Durchschnittslinien gemessen, die durch dieselben in geraden Richtungen genommen werden.

Krümmungshalbmesser, s. d. vorigen und den folgenden Artikel.

Krümmungskreis ist in der Curvenlehre ein sehr wichtiges Mittel für die Untersuchung der Curven in bestimmten Punkten nach verschiedenen Eigenschaften hin. Wie derselbe dadurch gefunden wird, dafs man seinen Halbmesser bestimmt s. „Curvenlehre“ II., pag. 186. Die Curve, in welcher die Mittelpunkte der Krümmungskreise aller auf einander folgenden Curvenpunkte liegen, heifst die Curve der Mittelpunkte. Wie diese gefunden wird, zeigt der Art. „Curvenlehre“ III. pag. 188; desgleichen die nächste Anwendung davon auf die Ermittelung von Wende- und Rückkehrpunkten dieselbe pag. No. IV.

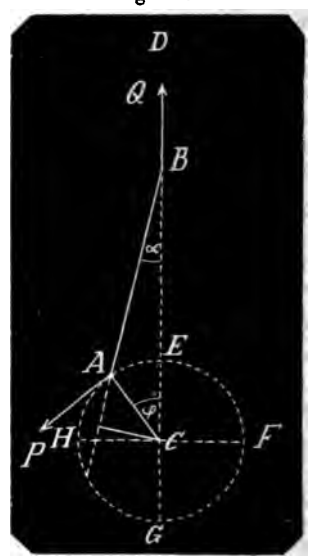
Krumm ist nicht gerade. S. d. Art. „Krümmung“.

Krumme Linien, Flächen, die nach einem Gesetz gekrümmt sind. S. die Art. „Curven“ und „Curvenlehre“.

Krummzapfen ist eine mechanische Vorrichtung, durch welche man vermöge einer um eine feste aber um ihre Axe drehbare Welle in Kreisbewegung befindlichen Kraft eine Last mittelst einer Lenkstange in hin und her gehende geradlinige Bewegung versetzt.

1. Ist (Fig. 785) C der Mittelpunkt der Welle und des Krummzapfens, CA die augenblickliche Lage des daran befestigten Arms, dessen Endpunkt A die Warze, an dieser die Lenkstange AB und an dieser wieder die gerade auf den Mittelpunkt C gerichtete Lastzugstange angebracht. Ferner Q die Last, welche nach der Richtung BD, und Q' die Last, welche nach der Richtung DB widersteht, die Kraft, welche fortdauernd auf die Warze wirkt, und zwar in jedem Punkt des Kreises nach der Tangente gerichtet beim

Fig. 785.



Heruntergang, wenn die Last Q zu überwinden ist $= P$ und beim Hinaufgang zu Ueberwindung der Last $Q' = P'$. Dann legen P und P' jede den Umfang des Halbkreises als Weg zurück, wenn Q und Q' jede den Durchmesser durchläuft.

Berücksichtigt man keine Nebenhindernisse, so ist nach dem Cartesischen Princip: „Kräfte verhalten sich umgekehrt wie die zu gleicher Zeit von ihnen zurückgelegten Wege“.

$$P : Q = 2AC : \pi \cdot AC$$

woraus

$$P = \frac{2}{\pi} Q$$

desgleichen $P' : Q' = 2AC : \pi \cdot AC$

woraus $$P' = \frac{2}{\pi} Q'$$

So dafs die für die Bewegung der Lasten $Q + Q'$ die Kraft, welche fortdauernd thätig sein mufs

$$\frac{P + P'}{2} = \frac{Q + Q'}{\pi}$$

und das mechanische Moment dieser permanent erforderlichen Kraft, wenn v die Geschwindigkeit der Lasten Q und Q' bedeutet:

$$\frac{\pi}{2} v (P + P') = v (Q + Q')$$

2. Aufser dieser reinen Kraft und der reinen Last sind aber noch mehrere Nebenumstände vorhanden, welche als Widerstand Kraftzuschufs erfordern. Es sind dies die Reibungen der Zapfen in den Lagern der Kurbelwelle, die ungleichförmige Geschwindigkeit der Kurbelwarze und der Zugstange, welche vom Maximo zum Minimo herab einen nachtheiligen Gang veranlassen, so dafs zur möglichsten Ausgleichung dieser Unregelmäfsigkeiten ein Schwungrad erforderlich ist, welches nun durch seine Last wieder die Reibung vermehrt.

Um nun die geeignete Untersuchung und eine diese Nebenhindernisse mit berücksichtigende Formel aufzufinden sei

die Länge AC des Krummzapfens $= r$

die Länge AB der Lenkstange $= l$.

Die Kraft in der Krummzapfenwarze, nach der Richtung der Tangente wirksam, sei unveränderlich $= P$.

Die oben gedachten nach BD und DB gerade auf C gerichteten Widerstände seien Q und Q'.

Die Masse aller in Bewegung befindlichen Maschinentheile von dem Angriffspunkt der Kraft in der Maschine bis in den Krummzapfen und auf diesen in A reducirt sei $= \mathfrak{P}$.

Die Masse, welche von der Lenkstange AB in Bewegung gesetzt wird und auf den Punkt B reducirt sei $= \mathfrak{Q}$.

In dem Augenblick, wo der Krummzapfen um den Winkel φ von dem senkrechten Stande CE ab sich gedreht hat und in CA sich befindet, sei die Geschwindigkeit der Warze $= v$..

Die Geschwindigkeit des Punkts B der Lenkstange in demselben Augenblick sei $= w$.

Der Winkel, den hier die Lenkstange AB mit der senkrechten Linie BD bildet, sei ψ.

Bezeichnet man die Spannung im Lenker AB mit S, so wird aufser dem senkrecht aufwärts wirkenden Widerstand noch ein waagerecht wirkender gebildet und man hat die senkrechte Seitenwirkung

$$S \cos \psi = Q \qquad (1)$$

woraus $$S = \frac{Q}{\cos \psi} \qquad (2)$$

Von der in A wirkenden Kraft P mufs nun ein Theil thätig sein, um diese Spannung hervorzubringen, während der andere Theil derselben zur Bewegung der trägen Massen wirksam bleibt. Nennt man den ersten Theil von $P = p$, so müssen p und $\frac{Q}{\cos \psi}$ mit einander im Gleichgewicht sein, beide müssen also gleiche statische Momente haben. Der Hebelsarm von $\frac{Q}{\cos \psi}$ nach der Richtung AB thätig ist $= CK = r \sin CAK = r \sin (\varphi + \psi)$.

Man hat also

$$pr = \frac{Q}{\cos \psi} \cdot r \sin (\varphi + \psi) \qquad (3)$$

woraus $$p = Q \cdot \frac{\sin (\varphi + \psi)}{\cos \psi} \qquad (4)$$

Mithin ist der zweite für die trägen Massen thätige Theil von $P =$

$$p' = P - p = P - Q \frac{\sin (\varphi + \psi)}{\cos \psi} \qquad (5)$$

3. Wenngleich P selbst in der Rundbewegung als unveränderlich festgestellt ist, so ist aus den beiden Formeln zu ersehen, dafs die beiden Theile von P, in welche die Kraft P auf naturgemäfsem Wege zertheilt wird, jede einzeln für sich, veränderlich sind, indem sie von den veränderlichen Winkeln φ und ψ abhangen und dafs sich beide in jedem Augenblick zu der unveränderlichen Kraft P gegenseitig ergänzen.

Es ist daher die Bewegung des Krummzapfens eine ungleichförmig beschleunigte und verzögerte Bewegung und es finden daher auch die Formeln dafür ihre Anwendung.

Bd. I., pag. 358, Formel 10 ist $G = \frac{1}{2} C \cdot \frac{\partial C}{\partial S}$

Bezeichnet man mit P die Kraft, mit M die Masse, so ist $G = g \cdot \frac{P}{M}$, die Geschwindigkeit C an dem Punkt B nach DB ist hier w, und s bleibe der Weg, der von Anfang der Bewegung an zurückgelegt worden ist, so hat man für den vorliegenden Fall, wenn man noch $\mathfrak{Q}$ für M setzt, die in B abwärts wir-

kende Kraft, wenn der Krummzapfen in A gekommen ist

$$= \frac{w \cdot \frac{\partial w}{\partial s}}{2g} \cdot \Omega \qquad (6)$$

und diese nach der Richtung BA der Lenkstange reducirt

$$= \frac{w \cdot \frac{\partial w}{\partial s}}{2g \cos\psi} \cdot \Omega \qquad (7)$$

mithin nach der Richtung AP der Krummzapfenbahn normal CA gerichtet

$$\frac{w \cdot \frac{\partial w}{\partial s}}{2g} \cdot \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi} \cdot \Omega \qquad (8)$$

Bezeichnet man den Weg der Krummzapfenwarze während derselben Zeit, also den Bogen EA mit X, so hat man nach demselben Gesetz zu Ueberwindung der trägen Masse $\mathfrak{P}$:

$$\frac{v \cdot \frac{\partial v}{\partial x}}{2g} \cdot \mathfrak{P} \qquad (9)$$

Mithin nach Gl. 5, 8 und 9 die für Ueberwindung der Widerstände $\mathfrak{P}$ und Ω in A erforderliche Kraft

$$P' = \frac{w \cdot \frac{\partial w}{\partial s}}{2g} \cdot \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi} \cdot \Omega + \frac{v \cdot \frac{\partial v}{\partial x}}{2g} \cdot \mathfrak{P}$$

oder

$$P - \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi} \cdot Q = \frac{w \cdot \frac{\partial w}{\partial s}}{2g} \cdot \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi} \cdot \Omega + \frac{v \cdot \frac{\partial v}{\partial x}}{2g} \cdot \mathfrak{P} \qquad (10)$$

welches die Fundamentalgleichung für die Bewegung des Krummzapfens ist.

4. Um diese Differenzialgleichung integriren zu können müssen alle einzelnen Differenziale auf dieselbe Unveränderliche bezogen werden. Der trigonometrischen Functionen wegen ist es am zweckmäßigsten den Winkel φ als solche anzunehmen.

Zuerst ist $AE = x = r\varphi$

hieraus $r = \frac{x}{\varphi}$ und $\partial x = r\partial\varphi$ oder $\frac{\partial x}{\partial\varphi} = r$

folglich $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial\varphi} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial\varphi}$ (11)

Der von der Zugstange BD zurückgelegte Weg s ist $= AB + AC - BC$. Denn beim Beginn der Bewegung war die Warze A in E, der Punkt B also in dem Abstand $AC + AB$ von C und gegenwärtig in der Entfernung BC.

Mithin $s = l + r - (l\cos\psi + r\cos\varphi)$ (12)

Hieraus $\frac{\partial s}{\partial\varphi} = +l\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + r\sin\varphi$ (13)

Aus dem $\triangle ABC$ ist aber zugleich:

$$AB : AC = \sin\varphi : \sin\psi$$

oder $$l : r = \sin\varphi : \sin\psi$$

woraus $$\sin\psi = \frac{r}{l}\sin\varphi$$

und $$\cos\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \frac{r}{l}\cos\varphi$$

woraus $$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \frac{r}{l} \cdot \frac{\cos\varphi}{\cos\psi} \qquad (14)$$

Diesen Werth in Formel 13 substituirt gibt

$$\frac{\partial s}{\partial\varphi} = r \cdot \frac{\sin\psi \cdot \cos\varphi}{\cos\psi} + r\sin\varphi$$

oder $$\frac{\partial s}{\partial\varphi} = r \cdot \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi}$$

woraus $$\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial s}{\partial\varphi} \qquad (15)$$

Ferner ist $$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial\varphi} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial\varphi} \cdot \frac{\cos\psi}{\sin(\varphi+\psi)} \qquad (16)$$

Substituirt man nun aus den Formeln 11, 15, 16 die Werthe in die Gleichung 10, so erhält man

$$P - \frac{Q}{r} \cdot \frac{\partial s}{\partial\varphi} = \frac{w}{2gr} \cdot \frac{\partial w}{\partial\varphi}\Omega + \frac{v}{2gr} \cdot \frac{\partial v}{\partial\varphi} \cdot \mathfrak{P}$$

oder $$4gr\left(P - \frac{Q}{r} \cdot \frac{\partial s}{\partial\varphi}\right) = 2w \cdot \frac{\partial w}{\partial\varphi}\Omega + 2v\frac{\partial v}{\partial\varphi} \cdot \mathfrak{P}$$

Diese Gleichung integrirt gibt

$$4gr\left(P\varphi - \frac{Q}{r}s\right) = w^2\Omega + v^2\mathfrak{P} + \text{Const.} \qquad (17)$$

Um die Constante bestimmen zu können, setze die Geschwindigkeit der Warze

in dem obersten Punkt $E=c$, so ist zugleich $\varphi=0$, $w=0$, der Weg s, den die Zugstange schon zurück gelegt hat, $s=0$ und man hat die Gleichung

$$0=c^2\mathfrak{P}+C$$

woraus $$C=-c^2\mathfrak{P}$$

daher die Integralgleichung vollständig

$$4gr\left(P\varphi-\frac{Q}{r}s\right)=w^2\mathfrak{Q}+(v^2-c^2)\mathfrak{P} \quad (18)$$

5. Bezeichnet man die Geschwindigkeit der Warze, wenn sie von E über A, H nach G gekommen ist, mit c_1, so ist $\varphi=\pi$, $s=2r$, $w=0$, und man hat aus Formel 18

$$4gr(\pi P-2Q)=+(c_1^2-c^2)\mathfrak{P} \quad (19)$$

Diese Gleichung ist die Gleichung für die abwärts gerichtete Bewegung allein.

Aus der für beide Bewegungsrichtungen geltenden Gleichung 18 ist auch die Gleichung für die aufwärts von G über F nach E gehende Bewegung des Krummzapfens zu finden, wenn man mit φ' den Bogen bezeichnet, der von G aus beschrieben wird, statt Q den Widerstand Q' statt s den Weg s' des aufsteigenden Gatters, statt v die Geschwindigkeit v', statt c in E die Geschwindigkeit c, in G und statt w die Geschwindigkeit w, des Gatters setzt. Dann erhält man

$$4gr\left(P\varphi'-\frac{Q'}{r}\cdot s'\right)=w_1^2\mathfrak{Q}+(v_1^2-c_1^2)\mathfrak{P} \quad (20)$$

und bezeichnet man mit c_2 die Geschwindigkeit der Warze, wenn sie wieder in E gekommen ist, so hat man

$$4gr(\pi P-2Q')=(c_2^2-c_1^2)\mathfrak{P} \quad (21)$$

6. Soll nun die Maschine im Beharrungsstande bleiben, so mufs die Geschwindigkeit c_2 mit welcher die Warze wieder in E ankommt, der Geschwindigkeit c mit der sie in E die Bewegung begonnen hat, gleich sein. Denn wäre $c_2<c$, so würde die Maschine immer langsamer im Gange werden und zum Stillstande kommen und würde $c_2>c$, so würde sie immer schneller laufen. Setzt man demnach $c_2=c$ so hat man, Gleichung 19 und 21 mit einander addirt

$$8gr[\pi P-(Q+Q')]=0$$

woraus $$\pi P=Q+Q'$$

also $$P=\frac{Q+Q'}{\pi} \quad (22)$$

7. Um das Gesetz der Bewegung für alle Werthe von φ in Beziehung auf v aus Gleichung 18 bestimmen zu können, ist es erforderlich, die darin vorkommende Geschwindigkeit w der Zugstange durch v auszudrücken. Man betrachte daher den Bogen φ als eine Function der Zeit t, welche während des Weges φ von A aus verflossen ist, so sind eben so die Geschwindigkeiten v und w und die Wege x und s Functionen von t, weil sie Functionen von φ sind.

Da aber die Bewegung eine ungleichförmig beschleunigte und verzögerte ist, so hat man, wie für die Formeln zu No. 3 von 6 ab nach Bd. I, pag. 358, Formel 1.

$$v=\frac{\partial x}{\partial t}$$

Nun ist $$x(EA)=r\varphi$$

mithin $$\frac{\partial x}{\partial t}=r\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

folglich $$v=r\frac{\partial\varphi}{\partial t} \quad (23)$$

Eben so ist $$w=\frac{\partial s}{\partial t} \quad (24)$$

Aber aus Gleichung 12

$$s=l+r-l\cos\psi-r\cos\varphi \quad (25)$$

mithin

$$\frac{\partial s}{\partial t}=+l\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial t}+r\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

Ferner ist (s. zwischen Gleichung 13 und 14)

$$\sin\psi=\frac{r}{l}\sin\varphi$$

Daher diese Gleichung differenzirt

$$\cos\psi\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{r}{l}\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

woraus $$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{r}{l}\cdot\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

Diesen Werth in die Gleichung für $\frac{\partial s}{\partial t}$ gesetzt, gibt nach Reduction

$$w=\frac{\partial s}{\partial t}=r\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t} \quad (26)$$

Diese Gleichung durch Gleichung 23 dividirt gibt

$$\frac{w}{v}=\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi}$$

woraus $$w=v\cdot\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi} \quad (27)$$

Setzt man nun in die Bedingungsgleichung 18 für die Bewegung des Krummzapfens die Werthe von s und w aus Gleichung 25 und 27 so erhält man

$$4gr\left[P\varphi-\frac{Q}{r}(l+r-l\cos\varphi-r\cos\varphi)\right]=(v^2-c^2)\mathfrak{P}+\frac{\sin^2(\varphi+\psi)}{\cos^2\psi}v^2\mathfrak{Q}$$

Hieraus v entwickelt

$$v^2 = \frac{4gr\left[P\varphi - Q\left(1 - \cos\varphi + \frac{l}{r}[1 - \cos\psi]\right)\right] + c^2\,\mathfrak{P}}{\mathfrak{P} + \frac{\sin^3(\varphi+\psi)}{\cos^2\psi}\,\mathfrak{Q}} \tag{28}$$

Das erste Glied des Zählers ist ein Product, die Klammergröfse desselben eine Differenz und die Bewegung des Krummzapfens von E bis G kann nur dann statt finden, wenn die Differenz nämlich

$$P\varphi - Q\left[1 - \cos\varphi + \frac{l}{r}(1 - \cos\psi)\right] \tag{29}$$

für keinen Werth von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$ selbst einen so grofsen negativen Werth erhält, dafs der ganze Zähler negativ oder 0 wird.

8. Um nun die Bedingungen aufzufinden, nach welchen der Zähler immer gröfser als Null bleibt, hat man den Werth von φ zu bestimmen, bei welchem die Differenz 29, der allein veränderliche Theil des Zählers ein Minimum wird.

Setzt man die Differenz $29 = z$, so hat man daraus

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = P - Q\left(\sin\varphi + \frac{l}{r}\sin\psi \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)$$

Nun ist Formel 14: $\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \frac{r}{l}\cdot\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}$

Mithin

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial\varphi} &= P - Q\left(\sin\varphi + \sin\psi\cdot\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}\right)\\ \text{oder}\\ \frac{\partial z}{\partial\varphi} &= P - Q\,\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi}\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Für's Maximum und Minimum hat man

$$\frac{\partial z}{\partial\varphi} = 0$$

woraus

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi} = \sin\varphi + \sin\psi\,\frac{\cos\varphi}{\cos\psi} = \sin\varphi + \sin\psi\,\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\psi}} \tag{31}$$

Den oben ermittelten Werth für $\sin\psi = \frac{r}{l}\sin\varphi$ gesetzt, gibt

$$\frac{P}{Q} = \sin\varphi\left[1 + \frac{r}{l}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+\frac{r^2}{l^2}\sin^2\varphi}}\right] = \sin\varphi\left[1 + \sqrt{\frac{1-\sin^2\varphi}{\frac{l^2}{r^2} - \sin^2\varphi}}\right] \tag{32}$$

Hieraus entsteht eine unreine cubische Gleichung, welche zum Probiren, auch wenn man das zweite Glied fortschafft, wenig geeignet ist. Nämlich

$$\sin^3\varphi + \frac{\frac{l^2-r^2}{r^2}Q^2 - P^2}{2PQ}\sin^2\varphi - \frac{l^2}{r^2}\sin\varphi + \frac{l^2P}{2r^2Q} = 0 \tag{33}$$

Zweckmäfsiger ist es, die aus Formel 30 entwickelte Gleichung

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi}$$

dazu zu benutzen.

9. In dem von mir verfafsten Aufsatz „die vortheilhafteste Einrichtung von Sägemühlen" in Försters allgemeiner Bauzeitung, 1846, pag. 141 ist durch Berechnung ermittelt worden, dafs ohne Berücksichtigung der ad 2 dieses Artikels gedachten Nebenhindernisse das mechanische Moment der Last Q beim Niedergang des Krummzapfens und bei mittlerer Geschwindigkeit von 4 Fufs beträgt 12,914 Pferdekraft zu 500 (Pfund × Fufs).

Der Widerstand Q' beim Aufgang des Krummzapfens bei 4 Fufs Geschwindigkeit = 1,744 Pferdekraft.

$Q + Q'$ also in Summa 14,658 Pferdekraft.

Demnach beträgt $Q = \frac{12{,}914 \times 500}{4}$

$= 1614{,}25$ Pfund.

Und nach Formel 22

$$P = \frac{Q+Q'}{\pi} = \frac{14{,}658\times 500}{4\pi} = 583{,}2223 \text{ Pfd.}$$

10. Setzt man nun vorläufig den $\angle\psi$ der Lenkstange mit der Schubstange, welcher bei möglichst langer Lenkstange nur sehr klein ist, $= 0$, so hat man für's Maximum und Minimum aus Gleichung 31

$$\sin\varphi = \frac{P}{Q} \tag{34}$$

und es entsprechen zwei Bogen φ zwischen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ belegen, der Be-

ngung, dafs sich beide zu π ergänzen, rgestalt, dafs wenn der eine Bogen $-\beta$ gesetzt wird, der andere $=\frac{\pi}{2}+\beta$ ird.

Geht man nun zurück auf das Differnzial, Formel 30

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = P - Q\left(\sin\varphi + \sin\psi\,\frac{\cos\varphi}{\cos x}\right)$$

wird dies für $\psi = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = P - Q\sin\varphi$$

nd $$\frac{\partial^2 z}{(\partial\varphi)^2} = -Q\cos\varphi$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2} - \beta$ hat man dies zweite ifferenzial

$$\frac{\partial^2 z}{(\partial\varphi)^2} = -Q\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = -Q\sin\beta$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2} + \beta$ hat man es

$$\frac{\partial^2 z}{(\partial\varphi)^2} = -\varphi\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) = +Q\sin\beta$$

Aus diesen beiden zweiten Differenzian geht hervor, dafs für $\varphi = \frac{\pi}{2} - \beta$ ein aximum und für $\varphi = \frac{\pi}{2} + \beta$ ein Minium entsteht, und folglich hat man auch ei Berücksichtigung von ψ für $\varphi < \frac{\pi}{2}$ ein Maximum und für $\varphi > \frac{\pi}{2}$ ein Minimum als Werth der obigen Differenz.

11. Aus No. 9 und Formel 34 hat man näherungsweise

$$\sin\varphi = \frac{583{,}22}{1614{,}25}$$

woraus $\log\sin\varphi = 9{,}5578616 - 10$

Für's Minimum ist hiernach

$\varphi = 180° - 21° 10' 47'' = 158° 49' 13''$

Nach Formel ist aber auch

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi} \qquad (35)$$

mithin also auch

$$\log\frac{\sin(\varphi+\psi)}{\cos\psi} = 9{,}557\,8616 - 10 \qquad (36)$$

Nun hat man, um das richtige Minimum zu erhalten, auch das zu dem Winkel φ gehörige ψ mit in Rechnung zu bringen und dies ist nicht anders möglich als durch Probiren. Nun hat man No. 4 gefunden

$$\sin\psi = \frac{r}{l}\sin\varphi$$

und wenn man annimmt, dafs der Kurbelarm r zu der Lenkstange l wie 1 : 6 sich verhält: $\sin\psi = \frac{1}{6}\sin\varphi$, so hat man die logarithmische Gleichung

$$\log\sin\psi = \log\sin\varphi - \log 6 \qquad (37)$$

Nun schreibe man für den Versuch die vorletzte Logarithmengleichung

$$\log\sin(\varphi-\psi) = 9{,}557\,8616 - 10 + \log\cos\psi \qquad (38)$$

Setze für den ersten Versuch $\psi = 0$, mithin $\cos\psi = 1$ und $\log\cos\psi = 0$, so hat an aus der letzten Gleichung

	$\log\sin\varphi =$	$9{,}557\,8616 - 10$
Hiervon (wegen Gleichung 37)	$\log 6 =$	$0{,}778\,1513$
Gibt	$\log\sin\psi$	$8{,}779\,7103 - 10$
oraus	$\psi = 3° 27' 10''$	

Hieran den folgenden Näherungsversuch angeknüpft in Folge von Gleichung 38:

	$\log\cos\psi = \log\cos 3° 27' 10''$	$9{,}999\,2109 - 10$
Hierzu den ersten Summand (Gl. 38)		$9{,}557\,8616 - 10$
Gibt	$\log\sin(\varphi+\psi)$	$0{,}557\,0725 - 10$

oraus $\varphi + \psi = 21° 8' 22''$ und $158° 51' 38''$

ervon ab ψ $\quad 3° 27' 10''$

eibt φ $\quad 155° 24' 28''$

Für den zweiten Annäherungsversuch t man nun den Supplementswinkel = 24° 35' 32''.

Von dem $\sin 24° 35' 32''$ den $\log$ genommen, $\log 6$ abgezogen gibt

$\log\sin\psi$ und hieraus $\psi = 3° 58' 38''$ u. s. w.

Endlich erhält man für $\varphi = 154° 48' 28\frac{1}{2}''$

s zugehörige $\psi = 4° 4' 4\frac{1}{2}''$

Hieraus $\varphi + \psi =$ 158° 52′ 33″
$\pi - (\varphi + \psi) =$ 21° 7′ 27″
$log\ sin\ (\varphi + \psi) = 9{,}556\,7730 - 10$
$log\ cos\ \psi = 9{,}998\,9045 - 10$
Differenz $= 9{,}557\,8685 - 10$

welches gegen den Gleichung 36 gegebenen Logarithmus nur in den beiden letzten Decimalstellen differirt. Das Minimum des veränderlichen Zählers in der Bedingungsgleichung 28 findet also statt bei

$\varphi = 154° 48′ 28\frac{1}{2}″$
$\psi = 4° 4′ 4\frac{1}{2}″$

In der veränderlichen Klammergröfse, Gl. 28 ist nun

$P =$ 583,2223 Pfd.
$\varphi = \frac{154° 48′ 28\frac{1}{2}″}{180°} \cdot \pi = 2{,}7018$

Hieraus

$P\varphi =$ 1576,7500 Pfd.
$cos\ \psi = cos\ 4° 4′ 4\frac{1}{2}″ = 0{,}99748$
$1 - cos\ \psi =$ 0,00252
$\frac{l}{r} =$ 6
hieraus $\frac{l}{r}(1 - cos\ \psi) = 0{,}01512$
$-cos\ \varphi =$ + 0,90488
$1 =$ 1
Summa 1,92000
$Q =$ 1614,25

mithin

$1{,}92 \times Q =$ 3099,36

folglich die Klammergröfse

$$P\varphi - Q\left[1 - cos\ \varphi + \frac{l}{r}(1 - cos\ \psi)\right]$$
$$= 1576{,}75 - 3099{,}36 = -1522{,}61$$

12. Die Bewegung der Maschine ist demnach für die ersten beiden Quadranten aufser allem Zweifel gesetzt, wenn

$$4gr \times 1522{,}61 < c^2\mathfrak{P}.$$

Die mittlere Geschwindigkeit in BD ist = 4 Fufs festgesetzt (s. No. 9); die Geschwindigkeit der Warze im Mittel $4 \cdot \frac{1}{2}\pi = 2\pi$. Nimmt man demnach die Geschwindigkeit c nur = dieser mittleren Geschwindigkeit $2\pi = 6{,}2832$ Fufs, $r = 7$ Zoll $= \frac{7}{12}$ Fufs, und da $g = 15\frac{1}{3}$ Fufs, so hat man die Bedingung: $P > 1406$ Pfund.

Diese Bedingung aber genügt nicht für die Praxis, der Unterschied zwischen dem natürlichen Maximum und dem natürlichen Minimum während der Bewegung des Krummzapfens darf höchstens $\frac{1}{10}$ der mittleren Geschwindigkeit sein.

13. Es ist also der Winkel φ für das Maximum des Zählers zu bestimmen.

Aus den zweiten Differenzialen von s, No. 10 ist für's Maximum der Differenz im Zähler erkannt, dafs $\varphi <$ als $\frac{1}{2}\pi$ sein mufs. Nimmt man zum ersten Versuch denselben für's Minimum,

Nämlich $\varphi + \psi = 21° 8′ 22″$
hiervon $\psi = 3° 27′ 10″$
bleibt $\varphi = 17° 41′ 12″$
Hiernach $log\ sin\ \varphi = 9{,}482\,6040 - 10$
hiervon $log\ 6 = 0{,}778\,1513$
bleibt $log\ sin\ \psi = 8{,}704\,4527 - 10$
hieraus ist $\psi = 2° 54′ 9″$
Hierzu $\varphi = 17° 41′ 12″$
gibt $\varphi + \psi = 20° 35′ 21″$

Fährt man so fort, so erhält man für's Maximum der Differenz des Zählers Formel 28

$\psi = 2° 58′ 45{,}3″$
$\varphi = 18° 10′ 13{,}75″$
Nun ist $P =$ 583,2223 Pfd.
$\varphi = \frac{18° 10′ 13{,}75″}{180°} \cdot \pi = 0{,}3173$
also $P\varphi =$ 185,05643
$cos\ \varphi =$ 0,99865
daher
$1 - cos\ \varphi =$ 0,00135
$\frac{l}{r} =$ 6
daher
$\frac{l}{r}(1 - cos\ \varphi) =$ 0,00810
$-cos\ \varphi =$ − 0,95013
daher
$1 - cos\ \varphi =$ 0,05797
$Q =$ 1614,25
also $0{,}05797 \times 1614{,}25 =$ 93,57807

Mithin

$$P\varphi - Q\left[1 - cos\ \varphi + \frac{l}{r}(1 - cos\ \psi)\right]$$
$$= +\ 278{,}6345$$

14. In der Bedingungsformel 28 ist der Nenner ebenfalls eine veränderliche Gröfse und demnach wären mit dem Maximum und Minimum des Zählers nicht auch für v diese der Fall. Dagegen ist nach Formel 31 gerade für's Maximum und Minimum $\frac{sin\ (\varphi + \psi)}{cos\ \psi} = \frac{P}{Q}$ also constant, und man kann den Zähler schreiben:

$$\mathfrak{P} + \left(\frac{P}{Q}\right)^2 \Omega$$

Demnach hat man Formel 28 zu schreiben

$$v^2 = \frac{4gr\left[P\varphi - Q\left(1 - \cos\varphi + \frac{l}{r}\left[1 - \cos\psi\right]\right)\right] + c^2 \cdot \mathfrak{P}}{\mathfrak{P} + \left(\frac{P}{Q}\right)^2 \cdot \Omega}$$

Nun ist die Klammergröfse des Zählers (s. No. 11 und 13)

für's Minimum $= -1552{,}61$

für's Maximum $= +\ 278{,}6345$

c ist nach No. 12 $= 2\pi = 6{,}2832$

$\left(\frac{P}{Q}\right)^2$ ist nach No. 13 $= \left(\frac{583{,}2223}{1614{,}25}\right)^2 = 0{,}13054$

Ω kann bei der Sägemühle 200 Pfund betragen.

Demnach ist für's Minimum

$$v_n^2 = \frac{-4 \cdot 15\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{11} \cdot 1552{,}61 + 6{,}2832^2 \cdot \mathfrak{P}}{\mathfrak{P} + 0{,}13054 \times 200} = \frac{-55511{,}82 + 39{,}4786 \cdot \mathfrak{P}}{\mathfrak{P} + 26{,}108}$$

für's Maximum

$$v_x^2 = \frac{4 \cdot 15\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{11} \cdot 278{,}6345 + 6{,}2832^2 \cdot \mathfrak{P}}{\mathfrak{P} + 0{,}13054 \times 200} = \frac{10158{,}55 + 39{,}4786 \cdot \mathfrak{P}}{\mathfrak{P} + 26{,}108}$$

15. Man ersieht, dafs bei den übrigen durch Zahlen festgestellten Gröfsen die Geschwindigkeiten nur noch von der Gröfse $\mathfrak{P}$ der Masse abhangen, welche von der Krummzapfenwarze ab durch die Maschine bis zum Angriffspunkt der bewegenden Kraft hin vorhanden und vertheilt sind. Bei der oben gedachten Sägemühle ist $\mathfrak{P}$ auf 1406 Pfund im Minimo berechnet, nämlich in der Art, dafs v im Minimo gerade $= 0$ wird. Bei jeder Erhöhung von $\mathfrak{P}$ erhält v einen positiven Werth.

Bei $\mathfrak{P} = 1406$ erhält man also

$v\,(v_n)$ im Minimo $= 0$

$v\,(v_x)$ im Maximo $= 6{,}7$ Fufs.

Es sind nun diese Geschwindigkeiten in der Praxis nicht anwendbar; man ersieht aber aus den Formeln für v_n und v_x, dafs durch Vergröfserung von $\mathfrak{P}$ v_n zunimmt und v_x abnimmt. Augenscheinlich hat man dies, wenn man den gegen $\mathfrak{P}$ sehr geringen Summand 26,108 im Nenner fortläfst. Dann entsteht

$$v_n = -\frac{55511{,}82}{\mathfrak{P}} + 39{,}4786 \text{ und } v_x = +\frac{10158{,}55}{\mathfrak{P}} + 39{,}4786$$

Es ist daher möglich, für jeden beliebigen Unterschied $v_x - v_n$ (nur für $v_x = v_n$ nicht) die Gröfse von $\mathfrak{P}$ zu finden. Bei Maschinen soll nach No. 12 der Unterschied nur $\frac{1}{10}$ der mittleren Geschwindigkeit betragen; d. h. in diesem Falle

$$v_x - v_n = \frac{6{,}2832}{20} = 0{,}31416 \text{ Fufs.}$$

Nun ist zugleich

$$v_x^2 - v_n^2 = \frac{65670{,}37}{\mathfrak{P} + 26{,}108} \text{ Quadratfufs}$$

Die zweite Gleichung durch die erste dividirt gibt

$$v_x + v_n = \frac{212217{,}88}{\mathfrak{P} + 26{,}108} \text{ Fufs.}$$

Es ist aber

$v_x + v_n = 2 \times 6{,}2832 = 12{,}5664$ Fufs.

Hieraus $\mathfrak{P} = 16861{,}6$ Pfund.

16. Hiermit ist gezeigt, wie man die Gröfse der **Schwungmasse** für eine auszuführende Maschine findet, wenn diese durch einen Krummzapfen betrieben werden soll.

Hat man in dem vorliegenden speciellen Fall die schon vorhandene Masse $\mathfrak{P}$ berechnet, so ist das erforderliche Gewicht der auf die Warze A, den Angriffspunkt der Kraft, noch einzubringenden Schwungmasse $= 16861{,}6 - \mathfrak{P}$ Pfund.

Die einer Maschine noch erforderliche Masse wird in den bei Weitem meisten Fällen als Schwungring an Armen, Schwungrad genannt, eingerichtet und zwar dem Angriffspunkt A der Kraft möglichst nahe, also auf der Kurbelwelle C. Die Reduction in Bètreff der verschiede-

nen Halbmesser geschieht nach dem Verhältnifs deren Quadrate. Ist $\mathfrak{P}$ die als Schwungring anzubringende Masse, der Halbmesser des Ringes $= R$, der Halbmesser AC des Kurbelarms $= r$, so ist die in A erforderliche Masse $\mathfrak{P}$ als Schwungring angebracht $= \frac{r^2}{R^2} \cdot \mathfrak{P}$.

In der vorstehend zu Grunde gelegten Sägemühle ist die überhaupt in A erforderliche Masse 16861,6 Pfund, die in den Maschinentheilen vom Wasserrade ab bis zum Punkt A befindliche Masse ist ermittelt 5194,6 Pfund, also ist die in A noch hinzuzufügende Masse 11667 Pfund. Der Kurbelarm beträgt 7 Zoll, der äufsere Halbmesser des Schwungringes ist 30 Zoll, der innere 25 Zoll, folglich ist die erforderliche Masse im Schwungringe

$$= \frac{7^2}{\frac{1}{2}(30^2 + 25^2)} \cdot 11667 = 749 \text{ Pfund.}$$

Beim Aufgange der Warze aus dem untersten Punkt über F nach E ist ziemlich Leergang; die Kraft P wirkt gleichförmig, mithin mufs die Geschwindigkeit von G über F nach E immer schneller gehen und es kann in diesen beiden Quadranten, dem dritten und dem vierten, weder ein Maximum noch ein Minimum entstehen. Es ist aus diesem Grunde mit dem ersten und dem zweiten Quadranten die Untersuchung über die Theorie des Krummzapfens geschlossen.

Krystalle sind regelmäfsig gebildete Fossilien, die immer von geradlinig begrenzten Ebenen umschlossen sind. Deren Kenntnifs bildet eine eigene Wissenschaft: die Krystallographie.

Man hat sich die Krystalle, wie das Eis beim Gefrieren aus Wasser, aus fossilen Flüssigkeiten durch Wärme-Entziehung entstanden zu denken, so wie noch heut Krystalle aus künstlich concentrirten Laugen durch Abkühlung hervorgebracht werden.

Je nach der chemischen Beschaffenheit des Fossils geschieht die geradlinige Bildung des Krystalls, wie man diese bei der Eisbildung beobachten kann, nach verschieden gelegenen Axenrichtungen, um die sich Flächen gruppiren und an Zahl, Form und Dimensionen verschiedenen Begrenzungsebenen (Flächen). Diese Flächen sind entweder alle congruent (gleich) oder paarweise gleich und so gegen einander gruppirt, dafs durch Ebenen, in gewissen Richtungen genommen, der Krystall in zwei congruente oder symmetrisch gleiche Körper getheilt werden kann.

Die Umfassungswinkel der Flächen (Flächenwinkel) und die Kanten je zweier zusammenstofsenden Flächen sind scharf ausgebildet, die Flächen selbst meist glatt, oft glänzend und der Krystall nach den Richtungen der Flächen in ebenen Flächen spaltbar, was in der oben gedachten Bildungsweise seinen Grund hat.

Fossilien, welche die Gestalt eines Krystalls angenommen haben, heifsen krystallinisch, krystallisirt; sie besitzen die Eigenschaft der Spaltbarkeit in geraden glatten Flächen, es fehlt ihnen aber die äufsere Krystallgestallt, was jedenfalls in mechanischen Natur-Einwirkungen liegt, denen der ursprünglich als Krystall bestandene Körper von Aufsen nach Innen unterworfen gewesen ist. Unkrystallinisch heifsen Fossilien, die weder eine äufsere Krystallgestalt noch Spaltbarkeit in geraden Flächen besitzen.

Krystalldruse ist eine unregelmäfsige Krystallbildung, die darin besteht, dafs mehrere Krystalle auf einer gemeinschaftlichen Unterlage zusammengewachsen sind.

Krystallgruppe bildet eine Anzahl von frei ausgewachsenen Krystallen, wenn sie neben einander liegen, so dafs sie sich gegenseitig unterstützen.

Krystallisationssystem ist für die Krystallographie das, was das System in jeder anderen Wissenschaft ist: die der Natur deren Gegenstände angemessene Eintheilung und Zusammenstellung der Lehren darüber zu deren möglichst genauer und umfassender Kenntnifsnahme.

Die Krystallographie hat die gröfste Verwandtschaft mit der Stereometrie, der Lehre von den begrenzten körperlichen Räumen und deren Theile in Lage und Gröfse. Bei der Krystallographie kommt noch der Stoff mit seinen physikalischen Eigenschaften hinzu, von dem die Stereometrie ganz absieht. In Betreff der Körperformen ist zwischen beiden Wissenschaften der Unterschied, dafs die Stereometrie die Formen aus der Vernunft selbstständig construirt, während die Krystallographie nur die Körper von denjenigen Formen betrachtet, die in den von der Natur uns gegebenen Krystallen wirklich dargeboten werden.

Die Krystalle sind nur solche Fossilien, die von ebenen geradlinig begrenzten Flächen symmetrisch begrenzt werden und deren Massentheile durch und durch gerade und ebenflächig angeordnet sind. Die Krystallographie schliefst also alle runden Körper, die Kugel, das Ellipsoid, ebene Körper mit Wölbungen u. s. w.

us. Ferner lassen sich offenbar unzähige solcher Körper mit unzähligen inieren Massen-Anordnungen denken; dagegen ist die Krystallographie eine Naurwissenschaft und nimmt nur, wie eben rwähnt, diejenigen Formen in ihre Wisenschaft auf, welche in den Krystallen on der Natur gegeben sind.

Zu diesen gehören die in der Stereoıetrie bekannten regelmäfsigen Polyeder; ber auch Polyeder mit symmetrisch aneordneten Oberflächen, welche die Steıometrie nicht betrachtet.

Der allgemein durchgreifende Character er Krystallformen ist der des denkbaen Vorhandenseins von Axen, symmeisch zu einander liegenden Körperdiaonalen; und wie die Stereometrie ihr ehrsystem nach den in der Planimetrie orkommenden Ebenen als Körperbegrenungen aufstellt und Prismen, Pyramiden, rner die Umdrehungskörper, den Cylinr, den Kegel und endlich die Kugel etrachtet, so hat die Krystallographie ıxensysteme. (S. die Art.: „Axenysteme der Krystalle, Basis der rystalle, Flächen eines Krytalls, Kanten“ u. s. w., in welchen as hierher gehörige Wissenswürdigste ngegeben ist.

Kugel ist ein Körper, dessen Oberfläche ie Eigenschaft hat, dafs alle Punkte derelben von einem innerhalb des Körpers efindlichen Punkt einerlei Abstand haen. Die Begrenzungsfläche heifst Kuelfläche, jener innere Punkt der Mitelpunkt der Kugel. Jede gerade Verindungslinie des Mittelpunkts mit irend einem Punkt der Oberfläche heifst er Halbmesser, Radius der Kugel. ede durch den Mittelpunkt geführte Verindungslinie zweier Punkte der Oberläche ist ein Durchmesser, Diameer der Kugel.

I. Oberflächenbestimmung.

2. Der Durchschnitt der Kugelfläche ait einer Ebene ist ein Kreis.

Es sei $ABGF$ die Kugeloberfläche, deen Mittelpunkt C, ABE eine Durchchnittsebene. Fälle das Loth CD auf ie Ebene, ziehe von zwei beliebigen unkten A, E des Umfangs nach C und) gerade Linien, so ist $AC = EC$, weil eide Halbmesser sind.

Nun ist $\angle CDA = \angle CDE = R$

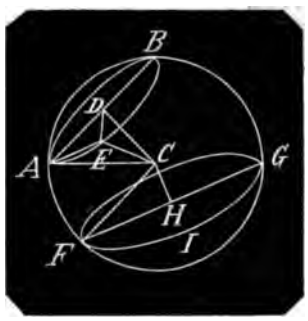
$CD = CD$

laher $\triangle CDA \cong \triangle CDE$

roher $AD = ED$

Dasselbe gilt von allen übrigen in dem Umfang ABE liegenden Punkten, sie liegen also sämmtlich in gleichen Abständen $= AD = ED$ von D, mithin ist ABE

786.



eine Kreislinie und D deren Mittelpunkt.

3. Ebene Durchschnitte einer Kugel, die einen gleichen Abstand vom Mittelpunkt der Kugel haben, sind gleich.

Denn sind die Abstände CD und CH der beiden Durchschnitte ABE und FGJ einander gleich, so hat man noch $\angle CHF = \angle CDA = R$, $CF = CA$ also $\triangle CFH \cong CAD$ und hieraus $FH = AD$, mithin sind die beiden Kreislinien einander gleich.

4. Durchschnittsebenen in einem Kreise, die ungleiche Abstände vom Mittelpunkt der Kugel haben, sind ungleich, und zwar ist derjenige Durchschnitt der gröfsere, dessen Ebene dem Mittelpunkt näher liegt. Durchschnitte durch den Mittelpunkt der Kugel genommen sind einander gleich und gröfser als jeder andere durch die Kugel gelegte Kreisdurchschnitt.

Denn ist $CH < CD$, so ist noch $CF = CA$, $\angle CHF = \angle CDA = R$, mithin ist in den Dreiecken CFH und CAD die Seite $FH > AD$.

In jedem der bis hierher betrachteten aufserhalb des Mittelpunkts C liegenden Durchschnittskreise ist der Halbmesser kleiner als der Kugelhalbmesser. Mithin mufs der durch den Mittelpunkt gelegte Kreis von dem Halbmesser der Kugel der gröfste sein.

5. Erklärungen. A. Jeder durch den Mittelpunkt einer Kugel liegende Kreis heifst ein gröfster Kreis, jeder andere Durchschnittskreis heifst ein kleinerer Kreis; Durchschnittskreise einer Kugel, die ∓ mit einander laufen, heifsen Parallelkreise. Derjenige Durchmesser, der auf einem System von Parallelkreisen normal steht, der also sämmtliche Mittelpunkte der Parallelkreise trifft, heifst

eine Axe der Kugel, die Endpunkte dieser Axe heifsen Pole des Kreises.

B. Der Theil der Kugeloberfläche, der von zwei halben gröfsten Kreisen begrenzt wird, heifst ein sphärisches Zweieck.

Der Theil der Kugeloberfläche, der von drei, vier u. s. fort mehreren Bogen gröfster Kreise begrenzt wird, heifst ein sphärisches Dreieck, Viereck u. s. f. sphärisches Vieleck.

Die Bogen, welche die Zweiecke, Dreiecke, ... Vielecke begrenzen, heifsen die Seiten der Zweiecke, Dreiecke u. s. w., und die Winkel, welche die Tangenten dieser Seiten in deren gemeinschaftlichem Durchschnittspunkt mit einander bilden, heifsen ihre Winkel.

C. Eine die Kugelfläche schneidende Ebene theilt dieselbe in zwei Theile, deren jede eine Calotte oder Zone mit einem Endkreise heifst. Der gröfste Abstand der Punkte einer Calotte von der Ebene ihres Endkreises heifst die Höhe der Calotte.

D. Der zwischen zwei Parallelkreisen begriffene Theil einer Kugeloberfläche heifst eine Zone mit zwei Endflächen oder Zone schlechthin; der Abstand beider Endebenen ist die Höhe der Zone.

E. Jede durch den Mittelpunkt der Kugel gelegte Ebene theilt die Kugelfläche in zwei congruente Hälften; jede derselben heifst daher die Halbkugelfläche.

F. Eine Ebene, welche mit der Kugelfläche nur einen Punkt gemein hat, heifst eine Berührungsebene der Kugel.

6. Zwei sphärische Zweiecke auf derselben Kugelfläche sind gleich, wenn ihre Winkel gleich sind, und überhaupt verhalten sich die Ebenen von Zweiecken auf derselben Kugel wie die ihnen zugehörigen Winkel.

Denn der Winkel eines Zweiecks ist der Neigungswinkel der beiden Ebenen, in welchen die dasselbe einschliefsenden Halbkreise liegen. Bei gleichen Neigungswinkeln lassen sich also die beiden Ebenen des einen Zweiecks so auf die des anderen legen, dafs sie sich decken, wo dann auch alle Punkte der Zweiecke auf einander fallen müssen, weil sie alle von dem gemeinschaftlichen Mittelpunkt der Halbkreise gleichen Abstand haben. Hieraus folgt denn auch die zweite Behauptung aus dem Art. „Ebene", Satz 21, und dem Art. „Flächenwinkel".

7. Stehen die Ebenen zweier gröfsten Kreise einer Kugel auf einander normal, so bilden sie vier congruente Zweiecke auf der Kugelfläche, die zusammen diese Kugelfläche ausmachen, so dafs jedes dieser Zweiecke der vierte Theil der Kugelfläche ist. Nun ist der Winkel eines jeden Zweiecks $= R = 90^\circ$, jedes sphärische Zweieck ist aber derselbe aliquote Theil der ganzen Kugeloberfläche, der sein Winkel von 360° ist. Bezeichnet man also mit F den Inhalt des vierten Theils der Kugeloberfläche, mit f den Inhalt eines Zweiecks vom $\angle\alpha$, so ist

$$f = \frac{\alpha}{R} F = \frac{\alpha}{90^\circ} F.$$

8. Wenn man auf die Ebenen von 4 gleichen Zweiecken, Fig. 791, normal durch den Mittelpunkt der Kugel eine Ebene $BGDE$ legt, so werden sämmtliche vier Zweiecke halbirt, und es entstehen acht gleiche sphärische Dreiecke, von welchen jedes drei Quadranten zu Seiten und drei rechte Winkel hat, und jedes hat zur Oberfläche $\frac{1}{8}$ der ganzen Kugeloberfläche.

Läfst man zwei Ebenen $BGDE$ und $AGFE$ dieser acht Dreiecke in ihrer rechtwinkligen Lage und dreht die dritte Ebene $ABFE$ um den einen ihr zugehörigen Durchmesser AF auf der diesem Durchmesser normalen festen Ebene $BGDE$ herum, so entstehen durch diese Drehung Dreiecke, in welchen je zwei Winkel bei B, G, D, E rechte bleiben und deren dritte bei A und F mit der Drehung verändert werden; ferner bleiben zwei Seiten in jedem der acht Dreiecke Quadranten, die dritten Seiten in $BGDE$ werden mit den ihnen gegenüberliegenden Winkeln geändert, und diese Winkel und Seiten und die Flächenräume der Dreiecke bleiben unter einander in gleichem Verhältnifs.

9. In einem sphärischen Dreieck betragen zwei Seiten zusammen genommen mehr als die dritte Seite, wenn nicht der dieser dritten Seite gegenüberliegende Winkel gröfser ist als 2 Rechte.

Denn es sei ABD, Fig. 787, ein sphärisches Dreieck, C der Mittelpunkt der Kugel, ziehe die drei Halbmesser CA, CB, CD, so bilden diese ein Körperdreieck, deren Seiten die zu den Bogen AB, AD, BD gehörenden Mittelpunktswinkel sind. Bei gleichem Halbmesser verhalten sich aber die Bogen wie die zugehörigen Centriwinkel. Man hat demnach

$$AB : AD : BD = \angle ACB : \angle ACD : \angle BCD$$

folglich ist auch

$$AB : AD + BD = \angle ACB : \angle ACD + \angle BCD$$

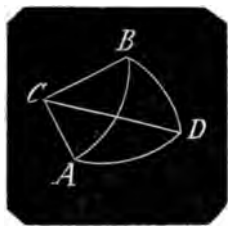
In jedem Körperdreieck ist aber die Summe zweier Seiten gröfser als die dritte Seite (No. 15, pag. 44)

)glich ist $\angle ACD + \angle BCD > \angle ACB$
aher auch $AD + BD > AB$

Dafs dies nicht statt findet, wenn $BDA > 2R$, s. No. 8.

10. Die kürzeste Linie, die sich zwi:hen zwei Punkten der Kugeloberfläche

Fig. 787.

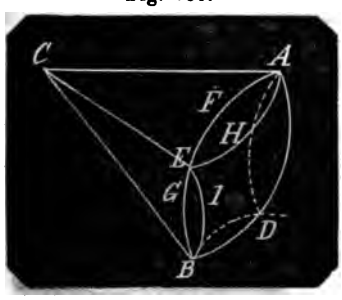


ıf dieser ziehen läfst, ist der Bogen nes gröfsten Kreises, der durch diese unkte geht.

Denn es sei ADB der Bogen eines röfsten Kreises zwischen den auf der ugelfläche vom Mittelpunkt C befindlihen Punkten A und B. Wäre nun ein nderer Bogen auf derselben z. B. AEB ie kürzeste Linie zwischen A und B, o führe man durch irgend einen Punkt : dieser Linie und A und B zwei gröfste :reisbogen AHE und BJE, so ist nach em vorigen Satz Bogen AHE + Bogen $JE >$ Bogen ADB.

Macht man also AD = Bogen AHE nd man dreht den zwischen den Bogen HE und AFE befindlichen Ausschnitt

Fig. 788.



ım den Halbmesser AC so lange herum, ois der Bogen AHE in die Richtung ADB fällt, so deckt der Bogen AHE den Bogen AD, weil beide gleiche Halbmesser haben.

Dreht man eben so den Ausschnitt zwischen den Bogen EGB und EJB um den Halbmesser CB bis Bogen BJE in die Richtung BDA fällt, so deckt aus gleichem Grunde der Bogen BJE von B aus einen Theil des Bogens BDA.

Da aber Bogen AHE + Bogen $BJE >$ als Bogen ADB, so fällt der Punkt E über D hinaus nach A hin, und wenn man die Drehung weiter fortsetzt bis ein Punkt G des Bogens BGE in D fällt, so würde ein kleinerer Bogen ($AE + BG$) als AEB die kürzeste Linie zwischen A und B sein, welches der Voraussetzung, dafs Bogen AEB die kürzeste Linie ist, widerspricht.

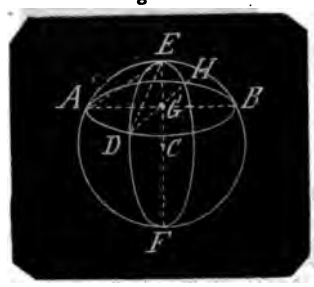
Es ist demnach der Bogen eines gröfsten Kreises die kürzeste Verbindungslinie zwischen zwei auf der Kugeloberfläche befindlichen Punkten.

11. Durch jede zwei auf einer Kugeloberfläche befindliche Punkte läfst sich ein gröfster Kreis legen, zwischen beiden Punkten liegen also zwei Bogen eines gröfsten Kreises. Sind diese ungleich, so ist der kleinere die auf der Kugeloberfläche zu verzeichnende kürzeste Linie zwischen den beiden Punkten und heifst der Abstand der beiden Punkte auf der Kugeloberfläche genommen.

12. Jeder der beiden Pole eines Kreises auf der Kugel hat, auf der Kugelfläche gemessen, von allen Umfangspunkten dieses Kreises einen gleichen Abstand. Und umgekehrt, ist der Punkt auf der Kugelfläche, der von drei Umfangspunkten eines Kreises auf derselben einen gleichen Abstand hat, einer der beiden Pole dieses Kreises.

Denn sind E, F die Pole des Kreises $ADBH$, so geht die gerade Linie EF durch den Mittelpunkt G desselben und durch den Mittelpunkt C der Kugel.

Fig. 789.



Legt man nun durch die Pole und durch zwei Punkte A und D des Kreises zwei

gröfste Kreise $AEBF$ und $EDFH$, zieht die geraden Linien AE und DE, so sind die dadurch entstehenden rechtwinkligen Dreiecke AEG und DEG congruent, folglich ist auch $AE = DE$. Da nun die Bogen AE und DE zu gleichen Kreisen gehören, so sind sie einander gleich, weil sie zu gleichen Sehnen gehören.

Da dies nun von allen übrigen in dem Kreisumfang $ADBH$ liegenden Punkten gilt, so hat der Pol E von allen diesen Punkten einen gleichen Abstand.

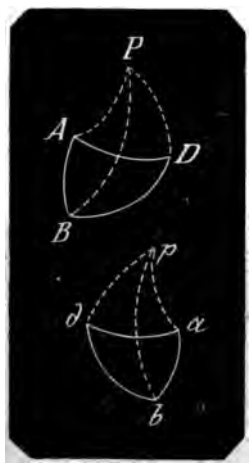
Ist umgekehrt E ein Punkt auf der Kugelfläche, der auf dieser gemessen von drei Punkten des Kreisumfangs $ADBH$ gleich weit absteht, so steht er auch von allen übrigen Punkten desselben Umfangs gleich weit ab und ist ein Pol des Kreises.

Denn alsdann folgt aus der Gleichheit der Bogen die Gleichheit der Sehnen, eine Normale EG auf die Kreisebene $ADBH$ gefällt, ist allen Dreiecken wie EAG gemeinschaftlich, hierzu die gleichen rechten Winkel, gibt die congruenten Dreiecke, mithin auch G als den Mittelpunkt des Kreises.

13. Zwei symmetrische Dreiecke auf derselben Kugelfläche sind gleich grofs.

Denn es seien ABD und abd die beiden symmetrischen Dreiecke, in welchen die gleich bezeichneten Seiten einander gleich sind. P sei der Pol des durch die

Fig. 790.



Punkte A, B, D gelegten kleineren Kreises, ziehe die Bogen gröfster Kreise PA, PB, PD, so bilden sich drei gleichschenklige Dreiecke PAB, PAD und PBD.

Nun führe man durch den Punkt b des anderen Dreiecks einen gröfsten Kreisbogen bp, so dafs $\angle dbp = \angle DBP$, nimm Bogen $bp = BP$ und ziehe von p die gröfsten Kreisbogen pa, pd.

Nun sind in den Dreiecken dbp und DBP zwei Seiten und die eingeschlossenen Winkel einander gleich, also nach Satz 12 auch die übrigen homologen Stücke derselben, mithin auch $dp = DP$. Da nun $DP = BP$, also auch $dp = bp = BP$, so ist $\triangle bdp \cong BDP$ und haben congruente Flächen.

Aus der Gleichheit dieser Dreiecke folgt

$$\angle bdp = \angle BDP$$

nach Voraussetzung ist

$$\angle adb = \angle ADB$$

folglich ist $\angle adp = \angle ADP$

Hierzu $dp = DP$

und $ad = ad$

mithin die Dreiecke adp und ADP in allen Bestimmungsstücken gleich,

also auch $\angle apd = \angle APD$

Seite $ap = AP$

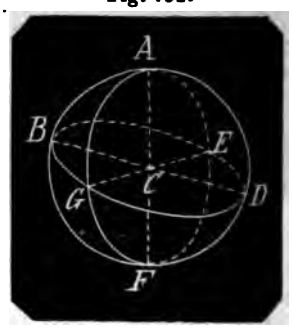
aber Seite $AP = DP = dp$

mithin auch $ap = dp$.

Folglich ist p der Pol des kleineren Kreises, der durch die Winkelspitzen a, b, d geht, und überdies sind die Dreiecke adp und ADP als gleichschenklig einander $\cong$. Auch $\angle apb = \angle APB$, weil beide Differenzen gleicher Winkel sind und da die diese Winkel einschliefsenden gleichen Schenkel in beiden Dreiecken abp und ABP gleich sind, so sind auch diese Dreiecke congruent.

14. Wenn zwei gröfste Kreise $ABFD$ und $AGFE$ von einem dritten $BGDE$ geschnitten werden, so sind die beiden

Fig. 791.



Theile der Zweiecke, welche die beiden ersten Kreise bilden, und die auf derselben Seite des schneidenden Kreises $BGDE$

liegen, zusammengenommen so grofs, als eins dieser Zweiecke.

Sind *ABFGA*, *AEFDA* diese Zweiecke, so ist zu beweisen,

dafs $\triangle ABG + \triangle ADE$ = Zweieck *ABFGA* = Zweieck *AEFDA*.

Es findet dies statt, wenn $\triangle AED = \triangle FBG$.

Es ist aber Halbkreis *ABF* = Halbkreis *BAD*, von beiden Bogen *AB* abgezogen bleibt Bogen *FB* = Bogen *AD*; eben so ist Bogen *FG* = Bogen *AE*, da nun zugleich wegen der gleichen Winkel *BCG* und *ECD* Bogen *BG* = Bogen *DE*, so ist $\triangle FBG = \triangle FDE$ folglich

$$\triangle ABG + \triangle FBG = \triangle ABG + \triangle ADE$$

oder Zweieck $ABFGA = \triangle ABG + \triangle ADE$

Ist $\angle BAG = \alpha$, so hat man nach No. 7:

$$\triangle ABG + \triangle ADE = \frac{\alpha}{90^\circ} F$$

15. Sphärische Dreiecke auf derselben Kugelfläche sind unter denselben Bedingungen in ihren Seiten und Winkeln einander gleich, unter welchen dies von den Körperdreiecken gilt.

Denn zieht man von den Winkelspitzen eines sphärischen Dreiecks nach dem Mittelpunkt der Kugel die Halbmesser, so sind diese die Halbmesser der gröfsten Kreise, zu welchen die Seiten des sphärischen Dreiecks als Bogen gehören und bilden die Kanten einer dreiseitigen Körperecke, deren Spitze der Mittelpunkt der Kugel ist. Ferner stehen die in den Spitzen des sphärischen Dreiecks an den Bogen gezogenen Tangenten auf den Halbmessern winkelrecht und mithin sind die Winkel des sphärischen Dreiecks zugleich die Winkel des Körperdreiecks. Die Seiten des Körperdreiecks sind aber Mittelpunktswinkel gleicher Kreise, deren zugehörige Bogen die Seiten des sphärischen Dreiecks sind, folglich verhalten sich die Seiten des sphärischen Dreiecks wie die Seiten jener Körperecke. Folglich sind in sphärischen Dreiecken die Bestimmungsstücke für deren Gleichheit dieselben mit den ihnen zugehörigen Körperdreiecken.

Die Gleichungen der Körpertrigonometrie finden also eine unmittelbare Anwendung auf die sphärischen Dreiecke, in sofern ihre Seiten durch ihr Verhältnifs zum Viertelkreise eben so bestimmt werden, wie die Ebenenwinkel durch ihr Verhältnifs zum rechten und wegen dieser Anwendung heifst die Körpertrigonometrie auch die sphärische Trigonometrie.

16. Für die Beziehung zwischen Körperdreieck oder dreiseitiger Körperecke und sphärischem Dreieck ist nothwendig zu erwähnen, dafs um jede Spitze einer Ecke eigentlich zwei Ecken liegen, wie dies auch im Art. „Ecke“, pag. 6, zu Anfang erörtert ist, und dafs dort die erhabene Ecke und nicht die hohle Ecke betrachtet worden ist. Wie mit der Ecke ist es nun auch mit den sphärischen Dreiecken:

Um die drei Punkte *A*, *B*, *G*, Fig. 791, liegen vier Kugeldreiecke, nämlich das von den Seiten *AB*, *AG* und *BG* und das von zweien dieser drei Seiten und der Ergänzung der dritten Seite zum ganzen Kreis wie das von *AB*, *AG* und *BEDG* begrenzte Dreieck. In ersterem ist $\angle A < 2R$, im zweiten ist $\angle A > 2R\angle$; beide Dreiecke ergänzen sich zur Halbkugelfläche, das erste wird verstanden, und für das erste gelten die der Körperecke zugehörigen Gesetze.

Ein Dreieck mit zwei Winkeln, die gröfser sind als zwei Rechte, gibt es nicht, ein zweiter Kreis, wie z. B. *AEFG* würde den Bogen *BEDG* schon in *E* schneiden. Dafs jede von drei oder von zwei Seiten nicht gröfser sein kann als ein Halbkreis, dafs überhaupt jedes mögliche sphärische Dreieck innerhalb einer Halbkugelfläche liegen mufs, zeigt anschaulich Fig. 792, wo der Kreis *ABDE* der gröfste Kreis der Dreieckseiten *AE* und *ABDA* für die Dreiecke *CAE* und *CABDE* ist.

17. Man hat demnach in Beziehung auf die dem sphärischen Dreieck zugehörige Körperecke folgende Sätze für dasselbe (s. Art. „Ecke“).

1. Der Winkel einer dreiseitigen Ecke ist zugleich der Winkel des der Ecke zugehörigen sphärischen Dreiecks.

2. Jede Seite einer dreiseitigen Ecke ist zugleich die Seite des dazu gehörigen sphärischen Dreiecks.

3. Sind dreiseitige Ecken einander gleich, so sind auch die zugehörigen sphärischen Dreiecke einander gleich.

4. In jeder drei- oder mehrseitigen sphärischen Figur ist die Summe der Seiten immer kleiner als ein gröfster Kreis („Ecke“ No. 4).

5. Jedes sphärische Dreieck hat ein Supplementardreieck; es wird auf der Kugeloberfläche eben so construirt, wie die Supplementarecke zu einer gegebenen dreiseitigen Ecke (s. „Ecke“ No. 5) indem man auf den durch jede Dreieckseite und den Kugelmittelpunkt gelegte Ebene in dem Mittelpunkt einen

normalen Halbmesser errichtet und die drei neuen Punkte auf der Kugelfläche durch gröfste Kreisbogen verbindet. In beiden sphärischen Dreiecken ergänzen sich Seiten und gegenüberliegende Winkel gegenseitig zu zwei Rechten.

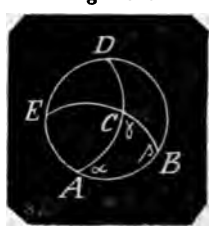
6. Die Summe der drei Winkel eines spärischen Dreiecks sind immer gröfser als zwei Rechte und kleiner als sechs Rechte.

7. Die Bestimmungsstücke für ein und dasselbe sphärische Dreieck erhält man in allen vorkommenden Fällen aus Art. „Ecke", No. 14, 15, 16, 17 und 18.

18. Die Fläche eines sphärischen Dreiecks verhält sich zum vierten Theil der zugehörigen Kugelfläche (F, No. 7), wie der Ueberschufs seiner drei Winkel über zwei Rechte zu zwei Rechten.

Denn ist Fig. 792 $\triangle ABC$ in seinem Flächeninhalt zu bestimmen, so verlängere die Seiten BC und AC bis E und D in den gröfsten Kreis der dritten Seite AB. Dann sind die vier entstandenen Dreiecke zusammen = der Halbkreisfläche $= 2F$. Nach No. 7 ist das Zweieck von den Seiten DCA und $DBA = \frac{\alpha}{R} F$, das Zweieck von den Seiten BCE und $BAE = \frac{\beta}{R} F$ und nach No. 14 ist $\triangle ABC + \triangle DEC$ = einem Zweieck von dem $\angle\gamma$ also $= \frac{\gamma}{R} F$. Demnach hat man

Fig. 792.



$$\text{Zweieck } ACDB = \triangle ACB + \triangle DCB = \frac{\alpha}{R} F$$

$$\text{Zweieck } BAEC = \triangle ACB + \triangle ACE = \frac{\beta}{R} F$$

$$\triangle ACB + \triangle CDE = \frac{\gamma}{R} F$$

hieraus $$3\triangle ACB + \triangle DCB + \triangle ACE + \triangle CDE = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{R} F$$

Hierzu $$\triangle ACB + \triangle DCB + \triangle ACE + \triangle CDE = 2F$$

gibt subtrahirt $$2\triangle ACB = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{R} F - 2F = \frac{\alpha+\beta+\gamma-2R}{R} \cdot F$$

woraus $$\triangle ACB = \frac{\alpha+\beta+\gamma-2R}{2R} \cdot F$$

oder $$\triangle ACB : F = (\alpha+\beta+\gamma) - 2R : 2R$$

19. Die Fläche eines sphärischen Vielecks ($n$ecks) verhält sich zum vierten Theil der Kugeloberfläche wie der Ueberschufs der Summe seiner Winkel über so viel mal zwei Rechten als das Vieleck Seiten weniger zwei hat zu zwei Rechten; d. h. Ist $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots = \varphi$ die Summe seiner Umfangswinkel, J der Inhalt des Vielecks ($n$ecks), so ist

$$J : F = \varphi - 2(n-2)R : 2R$$

Denn durch Bogen gröfster Kreise durch gegenüberliegende Winkelspitzen kann man das $n$eck in $(n-2)$ Dreiecke theilen. Jedes dieser Dreiecke verhält sich zu F, wie der vorige Satz sagt. Die Summe sämmtlicher Dreieckswinkel ist = der Summe der Umfangswinkel des Vielecks, von denen also für jedes Dreieck $2R$, mithin in Summa $(n-2)2R$ abgezogen werden müssen. Der Satz ist also richtig.

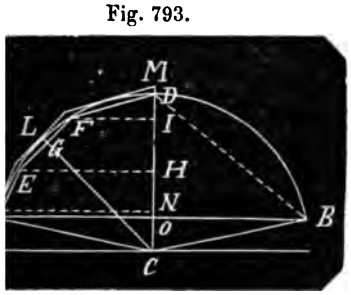
20. Die Fläche einer Kugelzone ist so gros als der Mantel eines geraden Cylinders von einerlei Höhe mit der Zone, dessen Grundfläche ein gröfster Kreis der Kugel ist.

Es sei die Zone zuerst eine Calotte mit dem Grundkreis von dem Durchmesser AB. C der Mittelpunkt der Kugel, D der Pol des Grundkreises, ADB ein durch den Mittelpunkt C und den Pol P, also auf der Grundebene normal genommener Durchschnitt der Calotte. In dem Kreisausschnitt ACD beschreibe man ein reguläres Vieleckstück, EF sei eine Seite desselben; durch die Winkelpunkte desselben führe man Parallelkreise zu dem

dkreise, und stelle sich Kegel vor, ıe diese Parallelkreise zu Endflächen die Seiten des Vielecksstücks zu n haben, so bildet sich innerhalb der te eine Reihe von Kegelmänteln, die ımengenommen kleiner sind als die te. Zieht man nun durch die Winnkte des Vielecks mit AB Parallelen n die Axe CD, so sind die zwischen nächsten Parallelen begriffene Theile ıxe die Höhen dieser Kegel, so HJ öhe des Kegels von der Seite EF. man auf EF das Loth CG (Apo-ı) so ist G die Mitte von EF, daher egelmantel EF = dem Mantel eines ders, der HJ zur Höhe und CG zum nesser seines Grundkreises hat (s. , No. 12). Da dies nun von jedem egelmäntel gilt und das Apothema de Vieleckseite dasselbe ist, so ist Summe aller Kegelmäntel = dem l eines Cylinders, der die Summe egelhöhen, d. h. die Höhe DO der e zur Höhe und das Apothema CG Halbmesser hat ($= 2\pi \cdot CG \cdot DO$).

chreibt man eben so um denselben hnitt ein dem inneren ähnliches kstück und betrachtet diese als von Kegelmänteln, deren Axen M zusammenfallen, so sind diese mäntel zusammen gröfser als die

Fig. 793.



e ist, und die Summe derselben ist ı Mantel eines Cylinders von der NM des Vielecksstücks und von Apothema CL = dem Halbmesser ugel als Halbmesser des Grund-s ($= 2\pi \cdot CL \cdot NM$). Zwischen bei-ylindermänteln ist nun immer ein lermantel begriffen, der die Höhe er Calotte zur Höhe und einen gröfs-reis der Kugel zur Grundebene hat $\cdot AC \cdot DO$). Denn dieser letzte Cy-hat einerlei Höhe DO mit dem Cylinder, sein Grundkreis πAC^2 st gröfser, weil der Halbmesser AC r ist als das Apothema CG.

Nun ist $DO : MN = AO : KN$

Aber $AO : KN = AC : CK = CG : CL$

folglich ist $MN > DO$

Der dritte und der zweite Cylinder haben aber einerlei Grundfläche, der zweite eine gröfsere Höhe, also ist der Mantel des zweiten Cylinders gröfser als der dritte Cylindermantel. Wenn man nun die Seitenzahl des beliebigen Vielecksstücks beliebig vermehrt, so kann das Apothema CG dem Kugelhalbmesser beliebig nahe gebracht werden; d. h. der Grundkreis des ersten Cylindermantels beliebig nahe dem Grundkreis des zweiten und die Höhe des zweiten der Höhe des ersten. Folglich können auch die Cylindermäntel selbst beliebig nahe gebracht werden. Da nun zwischen beiden Cylindermänteln immer die Calotte und der im Satz ausgedrückte, der dritte Cylindermantel liegt, so ist der Satz erwiesen.

Ist statt der Calotte eine Zone mit zwei Endkreisen gegeben, so ergänze man dieselbe zur Calotte und es gilt also der Satz von der ganzen und von der Ergänzungscalotte; zieht man auf einer Seite die Ergänzungscalotte ab, auf der andern den zu ihr gehörenden Cylindermantel, so hat man die Richtigkeit des Satzes für die Zone.

21. Ist r der Halbmesser der Kugel, h die Höhe einer Calotte oder Zone, so ist die Fläche J = dem Cylindermantel vom Halbmesser r und der Höhe h; mithin

J der Calotte oder Zone $= 2\pi hr$ (1)

Die Halbkugelfläche ist eine Calotte von der Höhe r, mithin

J der Halbkugelfläche $= 2\pi r^2$ (2)

J der ganzen Kugeloberfläche $= 4\pi r^2$, = dem vierfachen Inhalt des gröfsten Kreises der Kugel.

II. Körperbestimmung.

22. A. Denkt man sich den ebenen Durchschnitt einer Kugel als Grundebene eines Kegels, dessen Spitze der Mittelpunkt der Kugel ist, so heifst der von dem Kegelmantel und der vorliegenden Calotte begrenzte Körper ein **kegelförmiger Kugelausschnitt** oder **Kugelausschnitt**.

B. Verbindet man die Seiten eines sphärischen Vielecks durch Ebenen mit dem Mittelpunkt der Kugel, so heifst der von diesen Ebenen und dem vorliegenden sphärischen Vieleck begrenzte Körper ein **pyramidenförmiger Kugelausschnitt**.

C. Der von einer Calotte und deren Grundkreis begrenzte Körper heifst ein Kugelabschnitt.

D. Der von einer Zone und ihren beiden Endkreisen begrenzte Körper heifst eine Körperzone oder körperliche Zone auch Kugelabschnitt mit zwei Endkreisen.

E. Der von einem sphärischen Zweieck und den zu ihm gehörigen Halbkreisen begrenzte Körper heifst ein keilförmiger Kugelausschnitt oder ein sphärischer Keil.

23. Ein kegelförmiger Kugelausschnitt ist = einem Kegel, dessen Grundkreis gleich ist der den Ausschnitt begrenzenden Calotte und welcher den Halbmesser der Kugel zur Höhe hat.

Verfährt man mit der Construction ähnlich wie Satz 20 mit Fig. 793, indem man die Calotte innerhalb und aufserhalb mit Kreisebenen belegt, von denen je zwei über einander befindliche parallel sind, und deren Umfänge mit dem Kugelmittelpunkt zu Kegeln verbindet, so ist jede innere Kegel-Grundebene kleiner, jede äufsere gröfser als das von ihnen eingeschlossene Calottenstück, die Höhen der ersten Kegel alle kleiner als der Kugelhalbmesser, die der zweiten Kegel gleich dem Kugelhalbmesser.

Durch Vermehrung und Verkleinerung der einzelnen Grundflächen kommt jede äufsere und jede innere Grundfläche der Calotte, die inneren Höhen dem Kugelhalbmesser an Gröfse beliebig nahe. Beide Kegelsummen kommen also beliebig nahe einem Kegel, der die Calotte zur Grundfläche und den Kugelhalbmesser zur Höhe hat und zugleich beliebig nahe dem Kugelausschnitt; beide letztgenannten Körper werden aber von den beiden vorgenannten Kegelsummen eingeschlossen, mithin ist der Satz erwiesen.

Es ist demnach jeder kegelförmige Kugelausschnitt = $\frac{1}{3}$ × Calotte × Kugelhalbmesser. Wird die Calotte nach No. 21 bezeichnet, so ist

der kegelförmige Kugelausschnitt $J = \frac{2}{3}\pi r^2 h$ (1)

Setzt man $AO = a$, $BD = b$, so ist $a^2 = 2rh - h^2$ mithin $2rh = a^2 + h^2 = b^2$. Diese Werthe in Formel 1 gesetzt gibt den Kugelausschnitt

$J = \frac{1}{3}\pi r \cdot 2rh = \frac{1}{3}\pi r(a^2 + h^2) = \frac{1}{3}\pi b^2 r$ (2)

24. Verwandelt sich der Kegelmantel in einen gröfsten Kreis, so ist der Ausschnitt die Halbkugel; es ist $h = r$, und der körperliche Inhalt der Halbkugel

$= \frac{2}{3}\pi r^3$ (3)

der Inhalt der ganzen Kugel $= \frac{4}{3}\pi r^3$ (4)

25. Der Inhalt eines Kugelabschnitts ist gleich dem Inhalt eines Cylinders, der den Grundkreis des Abschnitts zur Grundfläche und die Hälfte der Höhe desselben zur Höhe hat, sammt einer Kugel, deren Durchmesser gleich der Höhe des Abschnitts ist.

Denn es ist (Fig. 793) ADB der Durchschnitt eines Kugelabschnitts, C der Mittelpunkt der Kugel, CD deren Halbmesser $= r$, $DO = h$ die Höhe des Abschnitts, BO der Halbmesser des Grundkreises vom Abschnitt. Nun ist der Kugelabschnitt ABD der Unterschied zwischen dem Kugelausschnitt $ADBC$ und dem Kegel CAB.

Der Kugelausschnitt ist nach No. 23, Formel 1 $= \frac{2}{3}\pi r^2 h$

Der Kegel $CAB = \frac{1}{3}\pi \cdot CO \times BO^2$

aber $CO = r - h$

$$BO = a = \sqrt{CB^2 - CO^2} = \sqrt{r^2 - (r-h)^2} = \sqrt{2rh - h^2}$$

Also der Kegel $= \frac{1}{3}\pi (r-h) a^2$

also der Kugelabschnitt $= \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi (r-h) a^2$ (5)

Nun ist $h : a = a : 2r - h$

woraus $$r = \frac{a^2 + h^2}{2h}$$ (6)

Diesen Werth eingesetzt gibt den Kugelabschnitt

$$\frac{1}{3}\pi \left[2\left(\frac{a^2+h^2}{2h}\right)^2 h - \left(\frac{a^2+h^2}{2h} - h\right) a^2 \right]$$

$$= \frac{1}{3}\pi \frac{(a^2+h^2)^2 - (a^2-h^2)\,a^2}{2h} = \frac{1}{2}\pi a^2 h + \frac{1}{6}\pi h^3$$ (7)

Nun ist $\pi a^2 (\frac{1}{2}h)$ der Inhalt des im Satz erwähnten Cylinders und $\frac{1}{6}\pi h^3$ der Inhalt der daselbst erwähnten Kugel.

Setzt man ferner aus der Formel für $BO = a$ den Werth von a in Formel 5, so erhält man den Kugelabschnitt

$$J = \tfrac{1}{3}\pi h^2 (3r - h) \qquad (8)$$

Setzt man die Sehne BD des Abschnitts $= b$, so hat man $b^2 = 2rh$

also $r = \dfrac{b^2}{2h}$.

Diesen Werth in Formel 8 gesetzt gibt den Kugelabschnitt

$$J = \tfrac{1}{3}\pi h\,(3b^2 - 2h^2) = \tfrac{1}{3}\pi h\,(3a^2 + h^2) \qquad (9)$$

26. Der Inhalt einer körperlichen Zone (mit zwei Endflächen) ist gleich dem Inhalt zweier Cylinder, welche die halbe Höhe der Zone zur Höhe haben und deren Grundkreise die Endkreise der Zone sind, plus dem Inhalt einer Kugel, welche die Höhe der Zone zum Durchmesser hat.

Also wenn die Höhe der Zone $= h$, die Halbmesser deren Endkreise AO und $HE = a$ und b sind

$$\tfrac{1}{2}\pi a^2 h + \tfrac{1}{2}\pi b^2 h + \tfrac{1}{6}\pi h^3.$$

Ergänzt man die Zone zu einem Abschnitt, und man bezeichnet die Höhe HD des Ergänzungs-Abschnittes mit x, so ist nach Formel 7 des vorigen Satzes der Inhalt des gröfseren Abschnittes

$$= \tfrac{1}{2}\pi a^2 (h + x) + \tfrac{1}{6}\pi (h + x)^3$$

der Ergänzungs-Abschnitt

$$= \tfrac{1}{2}\pi b^2 x \qquad + \tfrac{1}{6}\pi x^3$$

Der letzte Inhalt von dem ersten abgezogen gibt den Inhalt der Körperzone

$$J = \tfrac{1}{2}\pi\,[a^2 h + \tfrac{1}{3}h^3 + (a^2 + h^2 - b^2)\,x + hx^2]$$

Ist nun wieder r der Halbmesser der Kugel, so hat man

$$x : b = b : 2r - x$$

woraus $2r - x = \dfrac{b^2}{x}$

Es ist eben so

$$h + x : a = a : 2r - h - x$$

woraus $2r - h - x = \dfrac{a^2}{h + x}$

Mithin $2r - x = \dfrac{a^2}{h + x} + h = \dfrac{b^2}{x}$

oder $a^2 x + h^2 x - b^2 x = b^2 h + h^2 x$

woraus

$(a^2 + h^2 - b^2)\,x + hx^2 = b^2 h$

Diesen Werth in den Ausdruck für J gesetzt, gibt den Inhalt der körperlichen Zone

$$J = \tfrac{1}{2}\pi\,(a^2 h + \tfrac{1}{3}h^3 + b^2 h) \qquad (10)$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi a^2 h + \tfrac{1}{2}\pi b^2 h + \tfrac{1}{6}\pi h^3$$

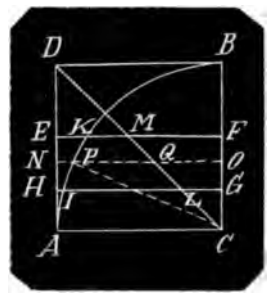
Man schreibt in der Regel die Formel

$$J = \tfrac{1}{6}\pi h\,(3a^2 + 3b^2 + h^2) \qquad (11)$$

27. Wird über einem gröfsten Kreise einer Kugel als Grundfläche ein gerader Cylinder verzeichnet, dessen Höhe dem Halbmesser der Kugel gleich ist, und überdies zu dem oberen Endkreise des Cylinders als Grundfläche ein Kegel, der seine Spitze im Mittelpunkt der Kugel hat, und schneidet man dann den Cylinder durch zwei mit seinen Endflächen ∓ laufenden Ebenen, so ist der zwischen diesen beiden Durchschnittsebenen begriffene Theil des Cylinders gleich der zwischen denselben Ebenen begriffenen körperlichen Kugelzone + dem dazwischen begriffenen Theil des Kegels.

Es sei Fig. 794 das Quadrat $ACBD$ der halbe Durchschnitt des Cylinders mit einer Ebene durch seine Axe BC gelegt, so sind AC, BC Halbmesser der Kugel,

Fig. 794.



der Quadrant ABC der halbe Durchschnitt der Halbkugel und das $\triangle BCD$ der halbe Durchschnitt des Kegels, C dessen Spitze. EF, HG seien die Durchschnittslinien der Ebene $ACBD$ mit den parallelen Durchschnitten des Cylinders, so sind FK und GJ die Halbmesser der beiden Endkreise des Kugelabschnitts, FM und GL die Halbmesser der beiden Endkreise des abgekürzten Kegels.

Führt man nun einen beliebigen Durchschnitt ∓ den Endkreisen des Cylinders, so schneide dieser die Ebene $ABCD$ in NO, dann wird NO der Halbmesser des Durchschnitts im Cylinder, OP der Halbmesser des Durchschnitts in der Zone und OQ der Halbmesser des Durchschnitts im abgekürzten Kegel.

Zieht man CP so ist

$$CP = AC = NO$$
$$OQ = CO$$

folglich

$$NO^2 = CP^2 = OP^2 + CO^2 = OP^2 + OQ^2$$

Nun sind NO, OP, OQ die Halbmesser der Kreisdurchschnitte des Cylinders, der Kugelzone und des Kegels, folglich ist der erst genannte Durchschnittskreis

den anderen beiden zusammengenommen gleich. Da nun diese Durchschnittsflächen in beliebiger Lage sind, so haben sie überall dasselbe Verhältniſs und es sind also nach Cavalleris Grundsatz, s. Art. „Körperberechnung“, die in dem Satz aufgeführten Körper einander gleich.

28. Fällt GH auf AC und EF auf BD, so folgt, daſs der ganze Cylinder über dem gröſsten Kreise der Kugel = ist der Halbkugel sammt dem ganzen Kegel. Es ist also die Halbkugel der Unterschied zwischen dem Cylinder und dem Kegel. Nun ist der Kegel = $\frac{1}{3}$ des Cylinders, mithin die Halbkugel = $\frac{2}{3}$ des Cylinders, der den gröſsten Kreis zur Grundfläche und den Durchmesser zur Höhe hat, wie dies schon aus der Formel 4, No. 24 hervor geht.

Ist R der Kugelhalbmesser, so ist
der Inhalt der Kugel $= \frac{4}{3}\pi R^3$
der Inhalt des Cylinders $= 2\pi R^3$
der Inhalt des Kegels $= \frac{2}{3}\pi R^3$
Die Kugel also = $\frac{2}{3}$ des Cylinders und das Doppelte des Kegels von der Grundfläche des gröſsten Kreises und der Höhe = dem Durchmesser.

29. Der Inhalt eines keilförmigen Kugelausschnitts verhält sich zum Inhalt der Kugel, wie der Winkel seines Zweiecks zu 4 Rechten. Hat das Zweieck den Winkel α, so ist der Ausschnitt also =

$$\frac{\alpha}{4R} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha}{90^\circ}\pi r^3 \qquad (12)$$

30. Ein pyramidenförmiger Kugelausschnitt ist einer Pyramide gleich, die den Halbmesser der Kugel zur Höhe hat, und deren Grundebene = ist dem zu dem Ausschnitt gehörenden sphärischen Vieleck.

So wie nach Satz 19 die Fläche eines sphärischen Vielecks sich zur Kugelfläche oder deren vierten Theil verhält, so verhält sich auch der zu dem Vieleck gehörende Pyramidal-Ausschnitt zur Kugel oder deren vierten Theil. Bei derselben Bezeichnung mit No. 19 ist demnach der n seitige Pyramidalausschnitt

$$K = \frac{\varphi - 2(n-2)R}{2R} \cdot \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{\varphi - 2(n-2)R}{6R} \cdot \pi r^3 \qquad (13)$$

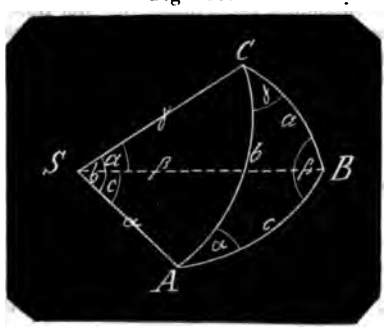
Kugelabschnitt, s. u. „Kugel“ No. 22, C, D. Bestimmung dessen körperlichen Inhalts, No. 25.

Kugelausschnitt, s. u. „Kugel“, No. 22. Inhalt des kegelförmigen Ausschnitts No. 23, des keilförmigen No. 29, des pyramidenförmigen Ausschnitts No. 30.

Kugelaxe, s. u. „Kugel“ No. 5, A.

Kugeldreieck, sphärisches Dreieck ist ein Dreieck, welches auf einer Kugeloberfläche mit gröſsten Kreisbogen verzeichnet wird, oder welches entsteht, wenn drei gröſste Kreise auf einer Kugeloberfläche sich schneiden. Die gröſsten Kreisbogen heiſsen die Seiten des Dreiecks, die Winkel, welche die Tangenten dieser Seiten in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt, dem Scheitelpunkt mit einander bilden, heiſsen die Winkel des Dreiecks.

Fig. 795.



Es seien Fig. 795, AB, AC, BC gröſste Kreisbogen einer Kugel, deren Mittelpunkt S ist, so sind die von S nach den Spitzen des Dreiecks gezogenen geraden Linien SA, SB, SC als Halbmesser einander gleich. Legt man durch die drei Bogen und den Mittelpunkt S drei Ebenen ABS, ACS, BCS, so sind die oben gedachten Winkel des Kugeldreiecks dieselben mit den Neigungswinkeln je zweier Ebenen, zu welchen die den Winkel einschlieſsenden Kreisbogen gehören; so wie, wenn man den Halbmesser der Kugel = 1 setzt, die Dreiecksseiten mit den sie umschlieſsenden um S liegenden Centriwinkeln einerlei Maaſs haben. Wie die Bezeichnung dies angibt, wo nun diese Figur mit Fig. 740 (pag. 36) des Art. „Körpertrigonometrie“ bis auf die Kreislinien und die Hülfslinien dieselbe ist.

Es ist aus dieser Figur augenscheinlich, daſs die ganze Theorie der Körperdreiecke auf die der Kugeldreiecke unmittelbar zu übertragen ist, und auch der Art. „Kugel“ hat in No. 15, 16 und 17 dies auseinandergesetzt, damit in jenem Art.

der analytisch trigonometrische Theil über die sphärischen Dreiecke nicht vermifst werde.

Es mufs daher in diesem Art. dasselbe gelten; dagegen habe ich mich oft überzeugt, dafs es Jüngern der Wissenschaft zeitraubend ist, die Formeln der Körperdreiecke auf die der Kugeldreiecke ohne dafs die Figur umgeändert wird, anzuwenden, und deshalb will ich hier die dort erwiesenen Auflösungen der Kugeldreiecke in ihren Resultaten und in Beziehung auf Fig. 795 geordnet zusammenstellen.

Auflösung rechtwinkliger Kugeldreiecke.

(S. „Körpertrigonometrie", No. 6. Formel I. bis XIII.)

Es sei Fig. 793: $\angle ACB = \gamma = 90°$, also $AB = c$ die Hypotenuse.

A. Wenn zwei Catheten $BC = a$, $AC = b$ gegeben sind.

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b$$

$$tg\,\alpha = \frac{tg\,a}{\sin b}$$

$$tg\,\beta = \frac{tg\,b}{\sin a}$$

B. Wenn die Hypotenuse $AB = c$ und eine Cathete $AC = b$ gegeben sind.

$$\cos a = \frac{\cos c}{\cos b}$$

$$\cos\alpha = tg\,b \cdot cot\,c$$

$$\sin\beta = \frac{\sin b}{\sin c}$$

C. Wenn die Hypotenuse $AB = c$ und ein ihr anliegender Winkel $CBA = \beta$ gegeben sind.

$$\sin b = \sin c \cdot \sin\beta$$

$$tg\,a = tg\,c \cdot \cos\beta$$

$$tg\,\alpha = \frac{cot\,\beta}{\cos c}$$

D. Wenn eine Cathete $BC = a$ und der ihr gegenüberliegende Winkel $BAC = \alpha$ gegeben sind.

$$\sin c = \frac{\sin a}{\sin\alpha}$$

$$\sin b = \frac{tg\,a}{tg\,\alpha}$$

$$\sin\beta = \frac{\cos\alpha}{\cos a}$$

E. Wenn eine Cathete $BC = a$ und der ihr anliegende Winkel $ABC = \beta$ gegeben sind.

$$cot\,c = \frac{\cos\beta}{tg\,a}$$

$$tg\,b = \sin a \cdot tg\,\beta$$

$$\cos\alpha = \cos a \cdot \sin\beta$$

F. Wenn zwei Winkel $BAC = \alpha$ und $ABC = \beta$ gegeben sind.

$$\cos c = cot\,\alpha \cdot cot\,\beta$$

$$\cos a = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$$

$$\cos b = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$$

Auflösung schiefwinkliger Kugeldreiecke.

A. Wenn die drei Seiten gegeben sind.

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\cdot\sin\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin b\cdot\sin c}}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b\cdot\sin c}}$$

B. Wenn zwei Seiten $BC = a$, $AC = b$ und der von ihnen eingeschlossene Winkel $ACB = \gamma$ gegeben sind.

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos\gamma$$

$$\cos c = \begin{cases} \dfrac{\cos a \cdot \sin(b+\varphi)}{\sin\varphi} \\ \text{wenn } cot\,\varphi = tg\,a \cdot \cos\gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} tg\,\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \dfrac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} \cdot cot\,\dfrac{\gamma}{2} \\ tg\,\dfrac{\alpha-\beta}{2} = \dfrac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}} \cdot cot\,\dfrac{\gamma}{2} \end{cases}$$

C. Wenn zwei Seiten $BC = a$, $AC = b$ und ein gegenüberliegender Winkel $CAB = \alpha$ gegeben sind.

$$\sin(c+\mu)\begin{cases} = \dfrac{\cos a \cdot \sin\mu}{\cos b} \\ \text{wenn } tg\,\mu = \dfrac{cot\,b}{\cos\alpha} \end{cases}$$

$$\sin\beta = \frac{\sin b}{\sin a}\sin\alpha$$

$$\sin(\gamma+\psi)\begin{cases} = cot\,\alpha \cdot tg\,\beta \cdot \sin\psi \\ \text{wenn } tg\,\psi = \cos b \cdot tg\,\alpha \end{cases}$$

D. Wenn eine Seite $BC = a$, ein dieser Seite gegenüberliegender Winkel $CAB = \alpha$ und ein derselben anliegender Winkel $ABC = \beta$ gegeben sind.

$$\sin b = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\sin a$$

$$\sin(c-\psi)\begin{cases}=\cot\alpha\cdot tg\,\beta\cdot\sin\psi\\ \text{wenn } tg\,\psi=tg\,a\cdot\cos\beta\end{cases}$$

$$\sin(\gamma-\mu)\begin{cases}=\dfrac{\cos\alpha\cdot\sin\mu}{\cos\beta}\\ \text{wenn } tg\,\mu=\dfrac{\cot\beta}{\cos a}\end{cases}$$

E. Wenn eine Seite $BC=a$ und die beiden daran liegenden Winkel $ABC=\beta$ und $ACB=\gamma$ gegeben sind.

Für die Bestimmung der beiden anderen Seiten b und c hat man (s. No. 14, Formel XIV, pag. 43)

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}:\cos\frac{\gamma-\beta}{2}&=tg\,\frac{a}{2}:tg\,\frac{b+c}{2}\\ \sin\frac{\beta+\gamma}{2}:\sin\frac{\gamma-\beta}{2}&=tg\,\frac{a}{2}:tg\,\frac{c-b}{2}\end{aligned}\right\}$$

und für den dritten Winkel α (s. Formel XV.)

$$\cos\alpha=\begin{cases}\dfrac{\cos\beta\cdot\sin(\gamma-\varphi)}{\sin\varphi}\\ \text{wenn } \cot\varphi=\cos a\cdot tg\,\beta\end{cases}$$

F. Wenn die drei Winkel gegeben sind.

$$\cos a=\frac{\cos\alpha+\cos\beta\cdot\cos\gamma}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}$$

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos\dfrac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta+\gamma}{2}}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}}$$

$$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta+\gamma-\alpha}{2}}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}}$$

Bd. III. pag. 137 sind die Gauſs'schen Gleichungen angegeben, deren Nutzen für die Auflösung von Kugeldreiecken nachgewiesen und der Beweis ihrer Richtigkeit auf diesen Artikel angewiesen.

Im Art.: „Körpertrigonometrie" sind No. 2, Formel 1 und No. 5, Formel 1:

$$\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos\alpha$$
$$\cos\alpha=-\cos\beta\cdot\cos\gamma+\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos a$$

Hieraus

$$\cos\alpha=\frac{\cos a-\cos b\cdot\cos c}{\sin b\cdot\sin c}$$

$$\cos a=\frac{\cos\alpha+\cos\beta\cdot\cos\gamma}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}$$

Aus diesen

$$1-\cos\alpha=\frac{-\cos a+\cos(b-c)}{\sin b\cdot\sin c}$$

$$1+\cos\alpha=\frac{\cos a-\cos(b+c)}{\sin b\cdot\sin c}$$

$$1-\cos a=\frac{-\cos\alpha-\cos(\beta+\gamma)}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}$$

$$1+\cos a=\frac{\cos\alpha+\cos(\beta-\gamma)}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}$$

Nun ist

$$1-\cos x=2\sin^2\tfrac{1}{2}x$$
$$1+\cos x=2\cos^2\tfrac{1}{2}x$$
$$\cos x=1-2\sin^2\tfrac{1}{2}x=2\cos^2\tfrac{1}{2}x-1$$
$$\sin x=2\sin\tfrac{1}{2}x\cdot\cos\tfrac{1}{2}x$$

Diese Werthe in die letzten vier Gleichungen eingeführt, reducirt und entwickelt entstehen folgende 4 Formeln:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin^2\dfrac{a}{2}-\sin^2\dfrac{b-c}{2}}{\sin b\cdot\sin c}\qquad(1)$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{-\sin^2\dfrac{a}{2}+\sin^2\dfrac{b+c}{2}}{\sin b\cdot\sin c}\qquad(2)$$

$$\sin^2\frac{a}{2}=\frac{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}-\cos^2\dfrac{\beta+\gamma}{2}}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}\qquad(3)$$

$$\cos^2\frac{a}{2}=\frac{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\sin^2\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}\qquad(4)$$

Um die erste Gauſs'sche Gleichung zu finden, verbinde man Gleichung 2 mit 4, so ist

$$\frac{\cos^2\dfrac{a}{2}}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}=\frac{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\sin^2\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{-\sin^2\dfrac{a}{2}+\sin^2\dfrac{b+c}{2}}\cdot\frac{\sin b\cdot\sin c}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}$$

Nun ist

$$\frac{\sin b}{\sin\beta}=\frac{\sin c}{\sin\gamma}=\frac{\sin a}{\sin\alpha}=\frac{2\sin\dfrac{a}{2}\cdot\cos\dfrac{a}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}}$$

Hieraus

$$\frac{\sin b\cdot\sin c}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}=\frac{\sin^2\dfrac{a}{2}\cdot\cos^2\dfrac{a}{2}}{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$$

diesen Werth eingesetzt und reducirt gibt

$$\frac{-\sin^2\frac{a}{2}+\sin^2\frac{b+c}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\beta-\gamma}{2}}=\frac{\sin^2\frac{a}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

woraus

$$\frac{\sin\frac{b+c}{2}}{\sin\frac{a}{2}}=\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

oder diese Gleichung in Producte verwandelt:

$$\sin\tfrac{1}{2}(b+c)\cdot\sin\tfrac{1}{2}\alpha=\cos\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\tfrac{1}{2}a$$

Um die zweite Gauſs'sche Gleichung zu finden, verbinde man Gleichung 1 mit 4, so ist

$$\frac{\cos^2\frac{a}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin^2\frac{a}{2}-\sin^2\frac{b-c}{2}}\cdot\frac{\sin b\cdot\sin c}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}$$

hieraus erhält man bei der Verwandlung wie ad 1

$$\frac{\sin^2\frac{a}{2}-\sin^2\frac{b-c}{2}}{\cos^2\frac{a}{2}-\sin^2\frac{\beta-\gamma}{2}}=\frac{\sin^2\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

woraus

$$\frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{a}{2}}=\frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

oder

$$\sin\tfrac{1}{2}(b-c)\cdot\cos\tfrac{1}{2}\alpha=\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\cdot\sin\tfrac{1}{2}a$$

Um die dritte Gauſs'sche Gleichung zu finden, verbinde man Gleichung 2 mit 3, so ist

$$\frac{\sin^2\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{a}{2}}=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\beta+\gamma}{2}}{-\sin^2\frac{a}{2}+\sin^2\frac{b+c}{2}}\cdot\frac{\sin b\cdot\sin c}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}$$

Bei demselben Verfahren wie ad 1 und 2 erhält man

$$\frac{\cos^2\frac{a}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\sin^2\frac{b+c}{2}}{\cos^2\frac{\beta+\gamma}{2}}=\frac{\cos^2\frac{b+c}{2}}{\cos^2\frac{\beta+\gamma}{2}}$$

woraus

$$\cos\tfrac{1}{2}(b+c)\cdot\sin\tfrac{1}{2}\alpha=\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)\cos\tfrac{1}{2}a$$

Um die vierte Gauſs'sche Gleichung zu finden, verbinde man Gleichung 1 mit 3, nämlich

$$\frac{\sin^2\frac{a}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\beta+\gamma}{2}}{\sin^2\frac{a}{2}-\sin^2\frac{b-c}{2}}\cdot\frac{\sin b\cdot\sin c}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}$$

Bei demselben Verfahren wie ad 1 bis 3 erhält man

$$\cos\tfrac{1}{2}(b-c)\cos\tfrac{1}{2}\alpha=\sin(\beta-\gamma)\cdot\cos\tfrac{1}{2}a$$

Kugelgewölbe wird bisweilen das Kuppelgewölbe genannt.

Kugelhaufen. Die (in Haufen) gesetzten Kugeln haben die Form

A. von dreiseitigen Pyramiden. Die Anzahl S der Kugeln wird ausgedrückt durch die Reihe der Trigonalzahlen. Die Anzahl der Lagen über einander gibt die Anzahl der Glieder; die oberste Lage ist eine einzige Kugel, demnach ist die Formel für die Reihe der Glieder

$$1+3+6+10\ldots.+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\text{ Stück}$$

die Summen von 1, 2, 3 .... n Lagen sind

$$1;\ 4;\ 10;\ 20;\ \ldots..\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\text{ Stück}$$

B. von vierseitigen Pyramiden.

Die Lagen sind:

$$1+4+9+16+25\ldots..n^2$$

die Summen von 1, 2, 3 ... n Lagen

$$1;\ 5;\ 14;\ 30;\ \ldots.\frac{n(n+1)(2n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

C. von dreiseitigen Prismen mit schräg ansteigenden dreiseitigen Endflächen. Wenn in der obersten einfachen Reihe m Kugeln liegen, dann enthalten die Reihen:

$$m+2(m+1)+3(m+2)+4(m+3)+\ldots..n(m+n-1)$$

Die Summen der Kugeln in 1, 2, 3, ... n Lagen ist

$$m;\ 3m+2;\ 6m+8;\ 10m+20;\ \ldots..\tfrac{1}{3}n(n+1)(3m+2n-2)$$

Kugeloberfläche, s. u. „Kugel", 2.

Kugelschale ist der Körper, welcher zurückbleibt, wenn man von einer körperlichen Zone den Kegel fortnimmt, der durch die Umdrehung der Sehne um den die Höhe bildenden Theil des Durchmessers entsteht, also Fig. 793 der Körper, welcher durch die Umdrehung des Abschnitts EFL um HJ hervorgeht.

Nach dem Art. „Kugel", No. 26 ist die körperliche Zone von der Höhe JH,

wenn $EH = a$, $FJ = b$, $HJ = h$ gesetzt wird $= \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + 3b^2 + h^2)$
der innere abgekürzte Kegel $= \frac{1}{2}\pi h(a^2 + b^2 + ab)$

Letzteren von Ersterem abgezogen gibt
die Kugelschale $= \frac{1}{6}\pi h[(a-b)^2 + h^2]$
d. h. $= \frac{1}{6}\pi \cdot JH \cdot [(EJ - FJ)^2 + HJ^2] = \frac{1}{6}\pi \cdot JH \times EF^2$.

Kugelzone, s. u. „Kugel“, No. 5, C, D. Inhalt der Oberfläche No. 20 und 21; Inhalt der körperlichen Zone No. 26.

Kugelzweieck, s. v. w. „Sphärisches Zweieck“, s. „Kugel“ No. 5, B. No. 6 bis 8 und No. 14.

Kuppelgewölbe, Statik derselben, s. u. „Gewölbe“ No. 30, pag. 193.

Kurbel ist der Arm und die Länge des Hebelsarms am Krummzapfen.

L.

Länge ist die Abmessung einer Raumröfse nach einer geradlinigen Richtung; uch die Gröfse dieser Abmessung in iner Anzahl von Einheiten ausgedrückt. ine Linie hat nur eine Ausdehnung nd diese ist die Länge.

Da unter Länge in der Regel eine gerade Linie verstanden wird, so nennt man ei krummen Linien die in dieser Linie elbst gemessene Länge: absolute änge, um keinen Zweifel zu erregen, afs der (geradlinige) Abstand deren Endunkte verstanden sei. Die Ermittelung nd Angabe solcher Länge in der Länge iner geraden Linie ausgedrückt nennt an die Rectification der krummen inien.

Länge, astronomische, s. „astronomische Länge".

Länge, geocentrische und helioentrische, s. eben daselbst und „geocentrisch".

Länge, geographische, s. „geographische Länge."

Länge eines Gestirns ist der östliche bstand des Durchschnitts zwischen dessn Breitenkreis und der Ekliptik von em Frühlingspunkt.

Länge eines Planeten in seiner Bahn t die Länge des Bogens von dem Plaeten bis zu seinem aufsteigenden Knon + dem östlichen Abstand dieses Knons von dem Frühlingspunkt, dieser Abstand von dem Knoten in der Planetenahn gemessen (s. „Knoten").

Länge eines Knotens ist die im vorisn Art. hinzuaddirte Länge, dieselbe ickwärts in der Planetenbahn gemessen. Der Anfangspunkt dieser Länge ist der Anfangs- oder Nullpunkt für die anzugebende Länge jedes Planeten.

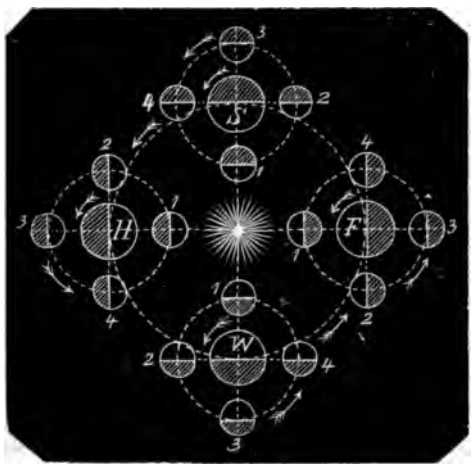
Länge der Sonne ist die Länge des Orts, wo die Sonne in der Ekliptik, von der Erde aus gesehen, sich zu befinden scheint, (d. h. des Punktes, in welchem die gerade Verbindungslinie von Erde zu Sonne verlängert die Ekliptik schneidet). Also der Abstand dieses Punktes von dem rechts von ihm belegenen Frühlingspunkt in Bogen gemessen. Man unterscheidet wahre oder scheinbare Länge der Sonne, die Länge des wirklich beobachteten Orts, und mittlere Länge derselben. Die Länge des Orts, in dem die Sonne sich befinden würde, wenn sie von Anfang ab bis zu Ende die Ekliptik mit gleichförmiger Geschwindigkeit scheinbar durchlaufen hätte. Die wahre Länge ist bald gröfser bald kleiner als die mittlere

Länge (geocentrische) **der Sonne und des Mondes.** Fig. 796 stellt dar möglichst zusammengedrängt die Sonne, die umliegende Ekliptik *FSHW*, von welchen *F* den Frühlingspunkt, *S* den Sommerpunkt, *H* den Herbstpunkt und *W* den Winterpunkt angibt.

In jedem dieser vier Punkte die Erde mit dem sie umkreisenden Mond, diesen in den vier Punkten seiner Hauptphasen. 1 bedeutet den Neumond, 2 das erste Viertel, 3 den Vollmond und 4 das letzte Viertel. Nach den Richtungen der Pfeile geschehen die Umdrehungen.

Befindet sich die Erde in *H*, so ist die Länge der Sonne = 0, des Neumonds 1 = 0, des ersten Viertels 2 = 90°, des

Fig. 796.



Vollmonds 3 = 180°, des letzten Viertels 4 = 270°.

Tritt die Erde in *W*, so ist die Länge der Sonne = 90°, des Neumonds = 90°, des ersten Viertels = 180°, des Vollmonds = 270°, des letzten Viertels = 0.

Tritt die Erde in *F*, so ist die Länge der Sonne = 180°, des Neumonds = 180°, des ersten Viertels = 270°, des Vollmonds = 0°, des letzten Viertels = 90°.

Tritt die Erde in *S*, so ist die Länge der Sonne = 270°, des Neumonds = 270°, des ersten Viertels = 0, des Vollmonds = 90°, des letzten Viertels = 180°.

Längenausdehnung ist die Ausdehnung einer Raumgröfse nach einer Richtung (s. „Ausdehnung“).

Längengrade sind wie die Breitengrade entweder geographisch oder astronomisch (s. „Breitengrade, Grad und geographische Länge“). Eine interessante Vergleichung zwischen Längen- nnd Breitengraden der Erde unter verschiedenen geographischen Breiten s. „Gradlängen“.

Die astronomischen Längengrade werden in der Ekliptik von dem Frühlingspunkt als Nullpunkt ab gezählt. Desgleichen in den Planetenbahnen (s. „Länge eines Planeten und Länge eines Knotens“).

Längenkreise für Orte auf der Erdoberfläche sind der Aequator und die Parallelkreise.

Längenmaafs ist eine als Einheit gewählte Länge um andere Längen mit derselben zu vergleichen, um also die Gröfsen anderer Längen-Ausdehnungen als Vielfache jener Einheit anzugeben.

Der Längenmaafse gibt es je nach der Ausdehnung und der Natur der zu messenden Längen verschiedene. Für kleine Längen hat man die bekannten Maafse: den Fufs, die Elle, das Meter u. s. w., mit deren gleichen Untertheilen; für Feldmaafse und andere städtische und ländliche Längen die Ruthe u. s. w.; für Wege die Ruthe mit ihren Vielfachen: die Meile, das Meter bis zu dem Myriameter u. s. w. Für astronomische Längen hat man allgemein das Längenmaafs: die geographische Meile (s d), welche übrigens in ihrer wirklichen Länge noch nicht genau bekannt ist.

Nicht überall können mithin Längenmaafse unmittelbar zum Abmessen angelegt werden. Auch bei Vermessung von Längen auf dem Felde nicht, man mufs mit Hülfe von Winkelmessungen die meisten berechnen.

Es ist sehr zu beklagen, dafs für den jetzt so allgemeinen und über den ganzen Erdball verbreiteten Verkehr so sehr viele verschiedene Längenmaafse existiren, um so mehr, da deren Quadrate und Kuben auch die Verschiedenheit in den Flächen- und Körpermaafsen hervorbringen und mit letzteren zugleich die Verschiedenheit der Gewichtsmaafse. So z. B. war das gesetzliche preufsische Pfund der 66te Theil des Gewichts eines preufsischen Kubikfufses destillirten Wassers bei 15° R. In England ist noch jetzt das Gewicht eines englischen Kubikzolles destillirten Wassers von 62° F. bei 30 Zoll Barometerstand = 252,458 Troy-Grän.

Es liegt dies in dem früheren Zustand der Abgeschlossenheit von Nachbarstaaten, und selbst benachbarter Städte eines Landes, und es hatte fast jede Stadt in jedem Lande ihre eigenen Maafse und Gewichte und somit auch ihr eigenes Längenmaafs. Namentlich sollen die üblichen Fufsmaafse in unzähliger Anzahl aus dem Alterthum herrühren: Griechen und Römer maafsen mit Fufsen, der Fufs wurde eingetheilt in vier flache Hände (palmi) zu vier Finger oder drei Daumen, also zu 12 Daumen oder 16 Finger, welches bei den späteren Völkern die Eintheilung in Zolle veranlafst hat. Die Anzahl der verschiedenen Fufsmaafse zu Anfang dieses Jahrhunderts ging ins Un-

glaubliche. Wenn jedes Land von den Mannsfüfsen die mittlere Länge als Fufsmaafs genommen hat, so haben die Portugiesen und die Franzosen die längsten, die Engländer die kürzesten Füfse. Es scheint jedoch, als wenn man zugängliche Längen, z. B. den Umfang der Ringmauer einer Landeshauptstadt zu Grunde gelegt, und dafs Provinzialstädte eben so verfahren und mit einer bestimmten runden Zahl die Länge zu Füfsen eingetheilt haben, woher die Fufse zwar sämmtlich die ungefähre Länge eines Mannsfufses, aber alle dennoch verschiedene Länge erhielten.

Wenn dieser Uebelstand nun in neuester Zeit wenigstens darin vermindert worden, dafs jedes civilisirte Land zu allgemeinem Gebrauch gesetzlich eingeführte Maafse und Gewichte hat, so bleibt immer noch die Unannehmlichkeit, dafs ein Maafs auf das andere reducirt werden mufs und es ist solche Reduction um so unbequemer, als die verschiedenen Ländermaafse in der Regel mit einander incommensurabel sind.

Für das einflufsreichste Maafs: für das Längenmaafs ist dies ein Beweis, dafs die Regierungs-Intelligenzen bei Wahl ihrer Längen-Einheiten keine allen Erdbewohnern ohne Ausnahme zugängliche, also in der Natur aufzufindende Länge genommen haben, wie das destillirte Wasser es für den Stoff ist, wobei aber für den gegenseitigen Verkehr auch einerlei Temperatur, am geeignetsten 3,5° R, die nahe dessen gröfste Dichtigkeit gibt, allgemein festgestellt sein sollte.

Unter den älteren Längenmaafsen war am bekanntesten der Pied de roi und dessen sechsfache Länge die Toise, welche beide fast allen wissenschaftlichen Untersuchungen als Maafs zu Grunde lagen. Woher der pied de roi stammt, weifs man nicht, die Maafse aller Länder sind aber mit dem pied de roi verglichen; so auch unser preufsischer Fufs, der eigentlich gleichbedeutend mit dem uralten rheinländischen Fufs und auch gleich grofs mit diesem festgestellt worden ist. Dieser rheinländische Fufs ist aber wieder an vielen Orten verschieden gefunden und von Autoritäten als Schriftsteller von 137,5 bis 139,2 pariser Linien, erstere Zahl von Whitehurst, letztere von Picard angegeben worden.

Um die Länge des rheinländischen Fufses für Preufsen ganz bestimmt festzustellen, hatte das Königliche Ober-Bau-Departement im J. 1771 diejenige Länge von 139,13 pariser Linien vorgeschlagen, welche Eisenschmid aus eigenen Untersuchungen als Länge des rheinländischen Fufses gefunden hat. Dieser rheinländische Fufs ist durch einen Directorialbefehl vom 28ten October 1773 in Preufsen eingeführt worden. Von der pariser Academie wurde ein genauer französischer Fufsstock erbeten, und danach sind unter Aufsicht des Oberbauraths und Professors Lambert zwei Normalmaafsstäbe, einer für die Academie der Wissenschaften, der andere für das Oberbaudepartement angefertigt worden und nach diesen wieder Maafsstäbe für Provinzialbehörden und Magistrate.

Durch die Maafs- und Gewichtsordnung für die preufsischen Staaten vom 16ten Mai 1816 wurde nun dieselbe Länge von 139,13 pariser Linien preufsischer Fufs genannt, und der Würfel dieser Länge ist der preufsische Kubikfufs, und das Gewicht desselben, aus destillirtem Wasser von 15° R. bestehend, wiegt 66 ehemalige preufsische Pfund.

Zur gesetzlichen Bestimmung des englischen Längenmaafses, des Normal-Yards gingen die Engländer selbstständig und ohne Beziehung zu dem pied de roi zu Werke. Es befand sich dort ein von Bird im Jahr 1760 aus Messing gefertigter in 36 Zoll eingetheilter Yardmaafsstab und es wurde festgestellt, dafs dieser Stab bei einer Temperatur von 62° F. die Länge des Imperial-Yards sein sollte. Um ferner dieses Yard für den Fall, dafs der Normalmaafsstock verloren ginge, zu fixiren, wurde durch eine Reihe von Versuchen die Länge des Secundenpendels in der Höhe des Meeresspiegels in der geographischen Breite von London im luftleeren Raum ermittelt, und es ergab sich dieselbe mit Hülfe des Normal-Yards zu 39,1393 Zoll, so dafs das Yard zum Secundenpendel wie 36 : 39,1393 sich verhält und dies Verhältnifs ist ebenfalls in der Parlamentsacte mit ausgesprochen worden.

Das wichtigste Längenmaafs, weil es allgemein zu werden verspricht, ist das französische Meter. Das Meter ist der Zehnmillionste Theil des nördlichen Erdmeridianquadranten. Demnach scheint es, man könne voraussetzen, dafs ein Erdquadrant wirklich genau zu vermessen sei. Es ist dies aber eine mifsliche Sache, denn eine directe Messung ist deshalb ganz unmöglich, weil man den Nordpol oder den Südpol nicht persönlich erreichen kann, abgesehen von den vielen anderen technischen Schwierigkeiten, die sich einer directen Messung

über Meere entgegenstellen würden, und wieder abgesehen hiervon, weil circa 1350 Meilen Länge Vermessung kein gut mögliches Unternehmen ist. Noch kommt hinzu, dafs höchst wahrscheinlich die Erde kein vollkommenes Sphäroid ist, dafs also die Meridiane allesammt von verschiedener Länge sind, und es resultirt hieraus, dafs das Meter keine in der Natur wirklich gegebene Länge sein kann, also von Rechtswegen keine Normallänge ist, und dafs das Meter nicht in das hohe Ansehen der Alleinseligmachung hätte kommen sollen.

Die Ungenauigkeit des Meters hat aber das Gute, dafs man in seiner Bestimmung das Wort: „nördlich" wegstreichen, dafs man das Meter als den zehnmillionsten Theil eines Erdmeridianquadranten festsetzen kann, so dafs die Bewohner der südlichen Halbkugel einerlei Anrecht mit uns an ihm haben.

Man darf jedoch zur Entschuldigung des Meters nicht übersehen, dafs es aus der französischen Revolution hervorgegangen ist, indem redliche Männer zugleich geistreich genug waren, der Nationalversammlung in verhüllenden Ausdrücken ein allgemeines Revolutionsmaafs in Anregung zu bringen, blofs in der Absicht, damit bei den Unruhen die Wissenschaft nicht zu sehr leide. Dafs ein solches Maafs nur französischen Boden zu Grunde haben konnte ist natürlich: De Bonnai schlug vor die Länge des Secundenpendels unter dem 45ten Grad nördlicher Breite, der sich durch Frankreich von West nördlich über Bordeaux nach Ost südlich unter Grenoble hinzieht.

Die Academie, der die Begutachtung übertragen wurde, zog es vor, dafs etwas Ausgezeichneteres geschehe und es entstanden die berühmten französischen Gradmessungen von Dünkirchen bis Barcelona, beide Städte ziemlich nahe dem durch Paris gehenden 20ten Meridiangrad liegend; Dünkirchen am Pas de Calais, Barcelona am mittelländischen Meere,*) und es wurde in Folge der Messungen und Berechnungen, nach welchen das Meter 443,22487 bis 443,328 französische Linien schwankte, mittelst Decret vom 19ten Frimaire im Jahre der Republik 8 das Meter auf 443,296 französische Linien festgesetzt.

Das Meter ist also eben so ein Maafs par ordre wie der preufsische Fufs und anderer Länder Fufse, allein es sind doch Meridianmessungen ihm vorangegangen.

Gehen die Gradmessungen verloren, aus welchen das Meter als eine näherungsweise Länge berechnet worden ist, wie die englische Regierung von ihrem Yardmaafs gefürchtet hat, und die Berechnungen selbst, so ist auch das Meter verloren; die vorhandenen Normalmaafsstäbe sind schwer zu revidiren und es können Zeitereignisse eintreten, durch welche unsere Nachkommen über die Länge des Meters eben so ungewifs sind, wie wir heut über die Längen der alten griechischen und römischen Maafse.

Ein Normallängenmaafs, welches allen Erdbewohnern gleichgeltend ist, zu welchem alle Erdbewohner ein gleiches Anrecht haben ist von grofser Wichtigkeit. Es ist hierzu das geeignetste Maafs offenbar die Länge des Secundenpendels am Meeresspiegel in der Aequatorebene. Es ist diese Länge eine constante Länge, und wenngleich mit Anstrengung von Fleifs und Aufmerksamkeit, aber jedenfalls zu allen Seiten aufzufinden. Zu Mittag ist die gröfste Hitze; hier wird die Pendelstange am längsten; die Schwingungen geschehen langsamer; die mühsamen Thermometercorrecturen bei grofsen Temperaturunterschieden werden vermieden, wenn man nur bei Nacht arbeitet, wo die Temperatur constanter ist.

Schwingt das Pendel in einer Minute 61 mal, so wird es durch die Mikrometerschraube länger gemacht, schwingt es nun in zwei Minuten 119 mal, so wird es wieder kürzer gemacht, und so gehen Versuche und Correcturen fort bis das Pendel in 12 Stunden von Sonnenuntergang bis Sonnenaufgang seine richtige Anzahl Schwingungen macht, und die kürzeste Länge des Secundenpendels der Erdoberfläche, das Normallängenmaafs ist mit Hülfe thermometrischer Correcturen factisch gefunden.

---

*) Anmerk.

Dünkirchen hat	51°	2′	9″	nördliche Breite.
Barcelona hat	41°	21′	44″	„ „
Länge des vermessenen Bogens	9°	40′	25″	nördliche Breite.
Dünkirchen hat	0°	2′	23″	östliche Länge.
Barcelona hat	0°	10′	18″	westliche Länge.
Länge des vermessenen Bogens	0°	12′	41″	Länge.

rägt diese Pendellänge etwa 39 Zoll = 0,99058 Meter; sie ist der Meterlänge sehr nahe überend. Es hat nämlich Sabine ndenpendel auf St. Thomas in rbusen von Guinea unter 0° 24′ 42″ r Breite durch Beobachtungen 2074 englische Zoll bestimmt. , da der englische Fufs = 0,3047945 t, 0,99148 Meter. Unter dem : mufs das Pendel nun eine Kleiürzer sein.

unterschiede zweier auf der äche befindlichen Orte mifst man einer genau richtig gehenden hr. Ist in dem Ort *B* der wahre m *n* Minuten früher oder später m Ort *A*, für welchen die Uhr eht, oder auch nur als in dem nach derselben Uhr der wahre ngezeigt wird, so liegt im ersten Ort *B* um $\frac{1}{4}n$ Grade östlicher, ten Fall um $\frac{1}{4}n$ Grad westlicher Ort *A*.

st zunächst eine Masse, welche ihres Gewichts auf eine Unterkt; hiernächst eine Masse, deren ndert werden soll. Im ersten die Last als eine Kraft zu be-, und die gedrückte Unterlage durch ihre Festigkeit einen dekkkraft gleichen Widerstand entso dafs statisches Gleichgewicht det. Im zweiten Fall ist eine zuwenden um die Last fortzu-

Soll die Ortsänderung (Bewenkrecht aufwärts geschehen, dann r's Gleichgewicht die Kraft, in n ausgedrückt, der Last gleich ei der geringsten Vermehrung t geschieht Bewegung. Ist die eine andere, so ist eine nur Kraft zu Gewältigung der Last ich (s. „Kraft, Kräfte im ewicht").

tz, (Theorem) ist ein Satz, desrheit nicht unmittelbar erkannt ndern erst aus der Verbindung schon als wahr erkannter Sätze et werden mufs. Diese Herleifst der Beweis (s. d.)

oeder ist das erste Ikositetraed. mit Fig. 722.

oid ist das zweite Ikositetraeder; t fast nur in Combinationen vor.

, Wasserwaage, dient zur Hotellung von Mefsinstrumenten, s von Mefstischen; dann aber für kelmesser und die mit Fernröhren versehenen Nivellirinstrumente. Die Libelle besteht aus einem Gefäfs, welches man voll Alkohol gieſst, bis auf einen kleinen Raum für eine Luftblase, die darin verbleibt.

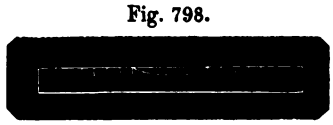
Hat nun das Gefäfs einen genau ebenen Boden, der Glasdeckel eine flach gekrümmte Form, deren höchste Stelle genau lothrecht über dem Mittelpunkt des Gefäfsbodens sich befindet, so liegt dieser Boden und mit diesem zugleich die mit ihm vereinigte Plattenoberfläche des Mefsinstruments in einer genau horizontalen Ebene; weshalb auch jener der Luftblase zukommende Normalpunkt markirt ist.

Die für Mefstische gefertigte Libellen haben die Form (Fig. 797) einer Dose, sie heifsen Dosenlibellen, und sie sind

Fig. 797.

in dieser Form deshalb geeignet, weil eine Ebene, die Ebene des Mefstisches horizontal sein soll. Für Winkelmesser und Nivellirinstrumente mit Fernröhren ist die Form (Fig. 798) einer Röhre zweckmäfsiger, weil eine Linie, nämlich die

Fig. 798.



Visirlinie oder deren Horizontalprojection waagerecht liegen soll. Eine solche Röhrenlibelle hat eine zwischen Theilstrichen markirte Stelle für die Normallage der länglichen Luftblase, und deren Axe ist und verbleibt in der durch jede beliebige Visirlinie befindlichen lothrechten Ebene.

Libration. Hiermit bezeichnet man die verschiedenen schwankenden Bewegungen des Mondes.

Limbus ist der bei Winkelmefsinstrumenten eingetheilte feste äufsere Rand.

Linearisch ist was sich auf Linien bezieht, wird von Zahlen und Zahlengröfsen gesagt, weil man dieselben auch geometrisch construirt. Die bekanntesten Zah-

lengröfsen, welche allgemein gezeichnet werden, sind die goniometrischen, woher man dieselben auch noch immer trigonometrische Linien nennt. Man nennt einen als Linie aufgetragenen Sinus, Cosinus u. s. w. einen linearischen Sinus, Cosinus u. s. w.

In der analytischen Geometrie werden geometrische Constructionen durch Algebra erst zu Formeln entwickelt und nach diesen geometrisch construirt. Man nennt daher eine Aufgabe, welche durch Schneidung und Zusammensetzung von geraden Linien gelöst wird, eine linearische Aufgabe. Zahlen (Buchstabengröfsen), die geometrisch dargestellt eine gerade Linie geben, sind linearische Zahlen; es sind dies also alle Buchstabengröfsen in der ersten Potenz. Aus diesem Grunde heifsen auch Gleichungen zwischen Veränderlichen, in welchen die eine nur in der ersten Potenz vorkommt, linearische Gleichungen. Desgleichen sind linearische Differenzialgleichungen, in welchen eine Veränderliche und deren Differenziale nur in der ersten Potenz erscheinen.

Linie. Deren Begriff ist, wenn er dafür gelten soll, schon in dem Art.: „Gerade Linie“ gegeben. Sie ist eine Raumgröfse von nur einer Abmessung, ihre Theile liegen daher hinter, nicht neben einander; sie entsteht durch die Bewegung eines Punkts.

So wie der Punkt, ein im Verschwinden begriffener begrenzter Raum, die Grenze eines Raumes von nur einer Abmessung, von der Linie ist, so ist die Linie als im Raum von nur einer Abmessung, die Grenze des Raumes von zwei Abmessungen, die Grenze der Fläche (s. d).

Aus dem Grunde, dafs der Punkt die Grenze der Linie ist, schneiden sich zwei Linien nur in einem Punkt, der nun als der gemeinschaftliche Grenzpunkt von vier Linien betrachtet werden kann.

Linien sind entweder gerade oder krumm.

Gerade Linien decken sich; zwischen zwei Punkten ist nur eine gerade Linie möglich; eine gerade Linie ist durch zwei in derselben liegenden Punkte der Lage nach bestimmt.

Die Beziehung zwischen gerader Linie und Ebene, s den Art. „Ebene“. Die geometrischen Constructionen, die geraden Linien unter sich und mit Kreislinien betreffend, siehe den Art. „Construction“ 1. Constructionen aus der Elementargeometrie. Der analytische Theil der geraden Linie, die Bestimmung derselben durch Coordinaten- und Polargleichungen, s. Art. „Curven“ II., Bd. II., pag. 170 bis 172 mit Fig. 526 bis 531. Der analytische Theil der krummen Linien ist der Gegenstand der Art. „Curven und Curvenlehre“.

Linien, goniometrische, sind die durch gerade Linien dargestellten goniometrischen Functionen: Sinus, Tangente u. s. w.

Linsen, Linsengläser sind zunächst Gläser in der Form einer Linse, deren beide Oberflächen die Form von Calotten haben, die zu gleich und ungleich grofsen Kugeln gehören können, aber von gleichen Grundflächen, so dafs beide Calotten von einem scharfen Kreisrand begrenzt werden, durch dessen Mittelpunkt und normal auf dem Rand die zu den Calotten gehörenden Kugelmittelpunkte liegen.

Die Gläser werden angewendet, um mittelst der Brechung hindurch gehender Lichtstrahlen (s. die Art. „Ablenkung des Lichtstrahls, Brechung der Lichtstrahlen“) von Gegenständen vergröfserte oder verkleinerte Bilder hervorzubringen oder durch Vereinigung der Sonnenstrahlen auf einen sehr kleinen Raum Brandhitze zu erzeugen.

Aufser der Linsenform werden den Gläsern davon abweichende Formen gegeben, je nachdem der Zweck ihrer Anwendung ist. Es erhalten beide Oberflächen auch hohle Calottenflächen, andere eine erhabene und eine hohle, noch andere eine ebene Fläche und eine hohle oder erhabene Calottenfläche. Dennoch haben auch diese von der Linsenform ganz abweichende Gläser den Namen Linsen und heifsen je nach ihrer Form: convex-convexe oder biconvexe Gläser, concav-concave oder biconcave Gläser, plan-convexe, plan-concave Gläser; die convex-concaven Gläser werden Menisken genannt.

In dem Art. „Brennglas“ ist theoretisch die Wirkung eines biconvexen Glases auf die Erzeugung der Hitze nachgewiesen und am Schlufs mit Beziehung auf No. 4 die Theorie auf ein plan-convexes und auf ein concav-convexes Glas ausgedehnt worden.

In dem Art. „Brille“ ist theoretisch die Wirkung der biconvexen Brille nachgewiesen für Personen, welche nahe befindliche Gegenstände erkennen wollen und die der biconcaven Brille zu Erkennung ferner Gegenstände.

Der Art. „Astronomisches Fernrohr" zeigt die Wirkung zweier biconvexen Gläser, das eine als Objectivglas, das andere als Ocularglas, beide Gläser so mit einander fest verbunden, dafs deren Axen in einerlei geraden Linie liegen und beider Brennpunkte in einem Punkt zusammenfallen.

In dem Art. „Fernrohr" ist zunächst die Wirkung zweier Gläser, eines biconvexen Objectivglases und eines biconcaven Ocularglases nachgewiesen, die eben so wie bei dem astronomischen Fernrohr zusammengestellt sind. Der gemeinschaftliche Brennpunkt beider Gläser fällt vor das Ocular, aufserhalb des Rohrs.

Hierauf erfolgt die Zusammenstellung der terrestrischen Fernröhre mit drei und vier unter einander vereinigten biconvexen Gläsern.

Es ist bei den so eben gedachten Instrumenten zu beachten, dafs bei den beiden Fernröhren, dem Keplerschen und dem Galileischen, die zu beobachtenden Körper Gestirne sind, also Körper, die äufserst weit entfernt sich befinden und eine unermefsliche Menge von Lichtstrahlen dem Objectiv zuführen. Dasselbe findet beim Brennglase statt, für welches die Sonne der leuchtende Körper ist. Bei den terrestrischen Werkzeugen befinden sich die zu beobachtenden Gegenstände, mit Gestirnen verglichen, äufserst nahe, und es sind nur Gegenstände von geringer Ausdehnung, oft nur einzelne sehr kleine Flächen.

Literalalgebra begreift die in Buchstabenausdrücken gegebenen algebraischen Aufgaben.

Literalgleichungen sind die in Buchstabengröfsen gegebenen Gleichungen.

Localhorizontal-Parallaxe, s. u. „Aequatoreal-Parallaxe".

Locomotiven. Diese üben ihre Zugkraft nur dadurch, dafs sie mit ihrem bedeutenden eigenen Gewicht ihre beiden Treibräder belasten, und dafs diese gegen die Schienen in der gleitenden Reibung eine feste Stütze finden, während die Lastwagen nur die viel geringere gleitende Reibung als Widerstand entgegensetzen.

Die überhaupt zu überwindenden Widerstände eines Eisenbahnzuges werden den Versuchen und Beobachtungen zufolge angegeben:

1. Die Reibung der Radachsen sämmtlicher Wagen des Zuges.

$$P_1 = \mu \frac{d}{D} Q$$

wo μ der Reibungscoefficient 0,05; d der Durchmesser des Zapfens, D der der Räder, Q das Gewicht der Wagen mit Ausschlufs der Räder bedeutet.

2. Die Reibung der Räder auf den Schienen.

$$P_2 = \mu_1 (Q + q)$$

wo μ_1 den Reibungscoefficient = 0,001; q das Gewicht der Räder und Achsen bedeutet.

3. Die Schwerkraft bei Ueberwindung von Steigungen.

$$P_3 = (Q + q) \sin \alpha$$

wo α der Elevationswinkel der Steigung ist.

4. Der Luftwiderstand.

$$P_4 = 0{,}0625\, m \cdot v^2 \cdot F$$

wo v die Geschwindigkeit des Wagenzuges, F die dem Winde entgegenstehende Fläche des Zuges und m ein von dem Verhältnifs der Wagenlänge zu deren Querschnitt und den gegenseitigen Entfernungen der Wagen abhängiger Coefficient 1,10 bis 1,43. Pambour bestimmt F aus der Summe S sämmtlicher Wagen incl. Locomotive und Tender; für den ersten 70 □Fufs und für jeden folgenden 10 □Fufs, mithin $F = 10\,(S + 6)$ □Fufs.

Die Summe der Widerstände ist $P_1 + P_2 + P_3 + P_4$.

Harding gibt folgende mit der Erfahrung stimmende Formel für die erforderliche Zugkraft der Locomotiven in englischen Pfunden für jedes Ton

$$P = 5{,}9964 + 0{,}3335 \cdot V + 0{,}002567 \frac{V^2}{Q} F$$

wo P die Zugkraft, V die Geschwindigkeit des Zuges per Stunde in englischen Meilen, Q das Gewicht des Zuges in Tons und F die Widerstandsfläche in □Fufs bedeuten. Z. B. ein Zug hat die Geschwindigkeit $V = 6$ preufs. Fufs, per Stunde = 28,0833 engl. Meilen, dessen Gewicht sei 4000 Zoll-Centner = 196,84 engl. Tons, die Widerstandsfläche = 250 preufs. □Fufs = 265 engl. □Fufs, so ist die Zugkraft pro Ton in englischen Pfunden

5,9964 + 9,3658 + 2,7255 = 18,0877 engl. Pfd.

Die gesammte Zugkraft für den Zug
= 18,0877 × 196,84 = 3560,4 engl. Pfund
= 3230 Zollpfund.

Löwe, Astr. (♌). Das fünfte Himmelszeichen der nördlichen Halbkugel,

fängt 30 Grad vom Sommerwendepunkt, am Ende des Krebses an und endet am Anfang der Jungfrau, 60 Grad vom Sommerwendepunkt.

Logarithmen sind die Stellenzahlen einer geometrischen Reihe, die nach den Potenzen einer beliebigen Zahl, der Grundzahl fortschreitet. Ist z. B. die Reihe:

$$A,\ A^2,\ A^3,\ A^4 \ldots . A^n$$

so ist A die Grundzahl, Basis und die Zahlen 1, 2, 3 ... n sind Logarithmen. Nämlich 1 ist der Logarithmus von A', 2 der Log. von A^2, n der Log. von A^n.

Die Logarithmen sind also zugleich die Exponenten einer Zahl, diese als Potenz einer gegebenen Zahl A betrachtet.

Wie die Glieder der Reihe eine geometrische, so bilden deren Logarithmen eine arithmetische Reihe.

Man kann die Reihe rückwärts fortsetzen; dann erhält man

$$A^{-n},\ A^{-(n-1)}, \ldots . A^{-2},\ A^{-1},\ A^0,\ A',\ A^2, \ldots . A^n$$

Deren Logarithmen sind der Reihe nach und unabhängig von der Gröfse der Basis

$$-1,\ -(n-1) \ldots . -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3 \ldots . n.$$

Um aus einem Gliede ein nächst vorhergehendes zu finden hat man es durch die Grundzahl zu dividiren. $\frac{A^4}{A} = A^3$; eben so $\frac{A'}{A'} = A^0 = 1$.

Bei jeder beliebigen Grundzahl also ist der Log. der Basis = 1, der Log. von 1 = 0. Ist die Basis > 1, so haben alle Zahlen gröfser als 1 positive, alle Zahlen kleiner als 1 negative Logarithmen. Ist die Basis < 1, so haben alle Zahlen < 1 positive, alle Zahlen > 1 negative Logarithmen Der Log. von 0 ist $= \pm\infty$, d. h. Null hat keinen Log. Die Zusammenstellung der Logarithmen mit ihren Zahlen in Beziehung auf eine bestimmte Basis heifst ein Logarithmensystem und man erhält so viele Systeme als Basen man annimmt.

Der Art. Briggsche Logarithmen hat schon den Nutzen und die Anwendung der Logarithmen dargethan, und es kann demnach zum Bedürfnifs des practischen Rechnens kein anderes System geben, als das unserem dekadischen System zugehörige dekadische Logarithmensystem, das System dessen Basis = 10 ist.

Der Art. „Basis eines Logarithmensystems" zeigt noch die Begründung eines zweiten Systems, welches aus wissenschaftlichen Gründen, nämlich weil der Modul = 1, das einfachste System ist und daher auch das natürliche Logarithmensystem genannt wird.

2. In dem Art. Basis eines Logarithmensystems sind nun folgende Formeln entwickelt.

Der Logarithmus einer Zahl a, wenn die Basis des Systems b ist,

$$log\ a = \frac{(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \ldots .}{(b-1) - \frac{1}{2}(b-1)^2 + \frac{1}{3}(b-1)^3 - \ldots .} \qquad (1)$$

Der Modul des Systems also

$$M = \frac{1}{(b-1) - \frac{1}{2}(b-1) + \frac{1}{3}(b-1)^3 - \ldots} \qquad (2)$$

3. Beide Formeln sind zu numerischen Berechnungen nicht anzuwenden. Durch Umformungen aber gelangt man zu brauchbareren Formeln.

Setzt man zuerst $a - 1 = x$, so ist $a = 1 + x$. Man erhält, diesen Werth in Gleichung 1 eingeführt, und für 1 dividirt durch den Nenner $= M$ gesetzt:

$$log\ (1+x) = M\left[x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots .\right] \qquad (1)$$

Nimmt man den negativen Werth von x, so hat man

$$log\ (1-x) = -M\left[x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots .\right] \qquad (2)$$

Die zweite Gleichung von der ersten abgezogen gibt

$$log\ (1+x) - log\ (1-x) = log\ \frac{1+x}{1-x} = 2M\left(x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 \ldots .\right) \qquad (3)$$

Diese Gleichung ist schon deshalb geeigneter zu Berechnungen, weil in der

Reihe nur positive Vorzeichen sind, allein sie convergirt nicht, und es kann dies nur geschehen, wenn x in einen ächten Bruch umgestaltet wird. Man gelangt dazu, wenn man unmittelbar $x = \frac{1}{y}$ setzt. Dann ist $\frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\frac{1}{y}}{1-\frac{1}{y}} = \frac{y+1}{y-1}$ und man hat

$$log\,\frac{y+1}{y-1} = log\,(y+1) - log\,(y-1) = 2M\left[\frac{1}{y} + \frac{1}{3y^3} + \frac{1}{5y^5} + \ldots\right] \quad (4)$$

4. Hat man also den *log* von einer Zahl $y-1$ gefunden, so kann man aus dieser Formel 4 den *log* $(y+1)$ finden. Denn vorläufig von dem Modul M abgesehen, oder denselben = 1 gesetzt, so dafs die Logarithmen natürliche sind, hat man aus Gl. 4:

$$logn\,(y+1) = logn\,(y-1) + 2\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{3y^3} + \frac{1}{5y^5} + \frac{1}{7y^7} + \ldots\right) \quad (1)$$

Nun ist $log\,1 = 0$; für $y = 2$ ist $y-1 = 1$ und $y+1 = 3$. Demnach ist

$$logn\,3 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} + \frac{1}{7\cdot 2^7} + \ldots..\right)$$

Um dies Beispiel practisch auszuführen ist

$$\frac{1}{2} = 0{,}50000\ 00000$$
$$\frac{1}{3\cdot 2^3} = 0{,}04166\ 66667$$
$$\frac{1}{5\cdot 2^5} = 0{,}00625\ 00000$$
$$\frac{1}{7\cdot 2^7} = 0{,}00111\ 60714$$
$$\frac{1}{9\cdot 2^9} = 0{,}00021\ 70139$$
$$\frac{1}{11\cdot 2^{11}} = 0{,}00004\ 43892$$
$$\frac{1}{13\cdot 2^{13}} = 0{,}00000\ 93900$$

Latus 0,54930 35312

Transport 0,54930 35312

$$\frac{1}{15\cdot 2^{15}} = 0{,}00000\ 20345$$
$$\frac{1}{17\cdot 2^{17}} = 0{,}00000\ 04488$$
$$\frac{1}{19\cdot 2^{19}} = 0{,}00000\ 01004$$
$$\frac{1}{21\cdot 2^{21}} = 0{,}00000\ 00227$$
$$\frac{1}{23\cdot 2^{23}} = 0{,}00000\ 00052$$
$$\frac{1}{25\cdot 2^{25}} = 0{,}00000\ 00003$$

Summa 0,54930 61431

Mithin

$$logn\,3 = 1{,}09861\ 22862$$

Nun findet man $logn\,2$, denn man hat

$$ln\,(3+1) = ln\,(3-1) + 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \ldots\right)$$

oder

$$ln\,4 = ln\,2 + 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \ldots\right)$$

Es ist aber $ln\,4 = 2\,ln\,2$; mithin entsteht

$$ln\,2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \ldots\right)$$

5. Man kann, wie Vega angiebt, die Reihe noch convergirender erhalten:

Denn setzt man für x den Werth $\frac{1}{2p^2-1}$ so hat man $1+x = \frac{2p^2}{2p^2-1}$

$$1-x = 2\cdot\frac{p^2-1}{2p^2-1}.$$

Nun hat man

$$ln\,\frac{1+x}{1-x} = ln\,\frac{2p^2}{2p^2-1} - ln\,2\,\frac{p^2-1}{2p^2-1}$$

aber auch nach No. 3, Formel 3

$$ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \ldots\right)$$

Mithin $ln\frac{2p^2}{2p^2-1} - ln\,2\,\frac{p^2-1}{2p^2-1} = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \ldots\right)$

woraus reducirt $2\,ln\,p - ln\,(p^2-1) = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \ldots\right)$

Mithin wenn man $(p^2-1) = (p+1)(p-1)$ setzt:

$$ln\,p = \tfrac{1}{2}\,[ln\,(p+1) + ln\,(p-1)] + \left(\frac{1}{2p^2-1} + \frac{1}{3\,(2p^2-1)^3} + \frac{1}{5\,(2p^2-1)^5} + \ldots\right) \quad (1)$$

Setzt man in diese Gleichung zuerst $p=2$ und dann $p=3$, so erhält man

$$ln\,2 = \tfrac{1}{2}\,ln\,3 + \tfrac{1}{2}\,ln\,1 + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3\cdot 7^3} + \frac{1}{5\cdot 7^5} + \ldots\right)$$

$$ln\,3 = \tfrac{1}{2}\,ln\,4 + \tfrac{1}{2}\,ln\,2 + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{3\cdot 17^3} + \frac{1}{5\cdot 17^5} + \ldots\right)$$

oder reducirt und geordnet

$$ln\,2 = \tfrac{1}{2}\,ln\,3 + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3\cdot 7^3} + \frac{1}{5\cdot 7^5} + \ldots\right)$$

$$ln\,2 = \tfrac{3}{2}\,ln\,3 - \tfrac{3}{2}\left(\frac{1}{17} + \frac{1}{3\cdot 17^3} + \frac{1}{5\cdot 17^5} + \ldots\right)$$

woraus, die erste von der zweiten abgezogen

$$ln\,3 = 4\left(\frac{1}{17} + \frac{1}{3\cdot 17^3} + \ldots\right) + 6\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3\cdot 7^3} + \frac{1}{5\cdot 7^5} + \ldots\right) \quad (2)$$

Diesen Werth in eine der beiden letzten Gleichungen gesetzt

$$ln\,2 = 2\left(\frac{1}{17} + \frac{1}{3\cdot 17^3} + \ldots\right) + 4\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3\cdot 7^3} + \frac{1}{5\cdot 7^5 + \ldots}\right) \quad (3)$$

Hat man *log* 2, *log* 3 und hierzu *log* 5 gefunden, so erhält man

$ln\,10 = log_n\,2 + log_n\,5 = 2{,}30258\,50929$ (4)

6. Bezeichnet man die von x abhängige Gröfse, welche mit dem Modul M multiplicirt den *log br* von x ergibt, mit φx, so ist

$$\begin{array}{l} log\,br\,x = M\cdot\varphi x \\ log_n\,x = \varphi x \end{array}$$

Hieraus folgt $M = \dfrac{log\,br\,x}{log_n\,x}$ (1)

D. h. Der Modul des Brigg'schen Systems ist gleich dem Brigg'schen Logarithmus irgend einer Zahl dividirt durch den natürlichen Logarithmus derselben Zahl.

Setzt man in Formel 1 für x die Zahl 10, so hat man

$$M = \frac{1}{ln\,10} = \frac{1}{2{,}30258\ldots} = 0{,}43429\,44819\ldots \quad (2)$$

Setzt man in Formel 1 für x die Basis e der natürlichen Logarithmen so hat man $M = log\,br\,e = 0{,}43429\ldots$ (3)

Es ist also der Modul des Brigg'schen Systems = dem Brig. Logarithmus der Basis des natürlichen Systems.

Man erhält zugleich diese Basis e, wenn man den zum Logarithmus 0,43429... gehörenden Numerus findet.

In dem Art. „Differenzial", No. 18, pag. 265, ist für diese Basis die Formel entwickelt:

$$e = 2 + \frac{1}{(2)} + \frac{1}{(3)} + \frac{1}{(4)} + \ldots\ldots \frac{1}{(n)} \quad (4)$$

Die Ausrechnung ist sehr einfach: man erhält

$$\begin{array}{l} 2 = 2{,}00000\;00000 \\ \frac{1}{(2)} = 0{,}50000\;00000 \\ \frac{1}{(3)} = 0{,}16666\;66667 \\ \frac{1}{(4)} = 0{,}04166\;66667 \\ \frac{1}{(5)} = 0{,}00833\;33333 \\ \frac{1}{(6)} = 0{,}00138\;88888 \\ \frac{1}{(7)} = 0{,}00019\;84127 \\ \frac{1}{(8)} = 0{,}00002\;48016 \\ \hline \text{Latus } 2{,}71827\;87698 \end{array}$$

Transport 2,71827 87698

$\frac{1}{(9)} = 0{,}00000\ 27557$

$\frac{1}{(10)} = 0{,}00000\ 02766$

$\frac{1}{(11)} = 0{,}00000\ 00251$

$\frac{1}{(12)} = 0{,}00000\ 00021$

$\frac{1}{(13)} = 0{,}00000\ 00002$

Summa $e = 2{,}71828\ 18285$

7. Setzt man in No. 3, Formel 1, für $log\,(1+x)$ diesen Logarithmus $= y$, so hat man die Reihe

$$y = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots$$

und wenn man diese mit Hülfe der unbekannten Coefficienten umkehrt, nämlich wenn man schreibt

$$x = Ay + By^2 + Cy^3 + \ldots$$

und die Coefficienten A, B, C ... entwickelt (s. „Arcus", No. 9, pag. 110), so erhält man die Formel, aus welcher man den Numerus x bei gegebenem $log\,x = y$ findet.

Man erhält nämlich bei Anwendung des binomischen Satzes

$$\begin{array}{llll} x = Ax & -\tfrac{1}{2}Ax^2 & +\tfrac{1}{3}Ax^3 & -\tfrac{1}{4}Ax^4 \quad +\tfrac{1}{5}Ax^5 \quad -\ldots. \\ & +Bx^2 & -Bx^3 & +(\tfrac{1}{1}+\tfrac{3}{2})Bx^4 \quad -(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2})Bx^5+\ldots. \\ & & +Cx^3 & -\tfrac{3}{2}Cx^4 \quad +(\tfrac{3}{2}+1)Cx^5-\ldots. \\ & & & +Dx^4 \quad -2Dx^5 \\ & & & +Ex^5 \end{array}$$

Hieraus $0 = (A-1)x + (B-\tfrac{1}{2}A)x^2 + (\tfrac{1}{3}A - B + C)x^3 + (-\tfrac{1}{4}A + 1\tfrac{1}{2}B - \tfrac{3}{2}C + D)x^4 + (\tfrac{1}{5}A - \tfrac{3}{2}B + \tfrac{1}{2}C - 2D + E)x^5$

Jeden einzelnen der Coefficienten $= 0$ gesetzt giebt

$A = 1$

$B = \tfrac{1}{2} = \frac{1}{1\cdot 2}$

$C = \tfrac{1}{3} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$

$D = \frac{1}{24} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$

$E = \frac{1}{120} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$

u. s. w.

Mithin ist

$$x = y + \frac{y^2}{1\cdot 2} + \frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{y^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{y^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \ldots.$$

oder $$x = ln\,x + \frac{(ln\,x)^2}{(2)} + \frac{(ln\,x)^3}{(3)} + \frac{(ln\,x)^4}{(4)} + \ldots. \frac{(ln\,x)^m}{(m)}$$

8. Ist von einer Zahl x der natürliche Logarithmus gegeben, so erhält man aus No. 6, Formel 1 den Brigg'schen Logarithmus

$log\,br\,x = M\,ln\,x = 0{,}43429\ldots \times ln\,x$

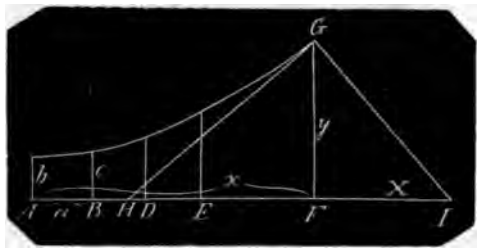
und ist der Brigg'sche Logarithmus von x gegeben,

$logn\,x = \frac{1}{M}\,log\,br\,x = 2{,}30258\ldots \times log\,br\,x$

Logarithmische Linie oder Logistische Linie ist eine krumme Linie, deren Ordinaten zu Abscissen, welche nach einer arithmetischen Reihe fortschreiten, eine geometrische Reihe bilden.

Ist Fig. 799 AX die Abscissenlinie, A der Anfangspunkt der Coordinaten, und man nimmt von A aus auf derselben lauter gleiche aufeinander folgende Abscissenstücke $AB = BD = DE \ldots = a$, so dafs die Abscissen von A aus: a, $2a$, $3a$, ... na sind; errichtet in A auf AX eine Normale von der beliebigen Länge b, ferner in den anderen Abscissenpunkten ebenfalls Normalen von den Längen c, d, e ... so dafs $b:c = c:d = d:e \ldots$, dafs also $\frac{c}{b} = \frac{d}{c} = \frac{e}{d} \ldots$ ein constantes Verhältnifs ist, so liegen sämmtliche Endpunkte der Ordinaten in einer logarithmischen Linie. Nimmt man bei diesem constanten Verhältnifs b als die erste und c als die zweite Ordinate, so sind die Längen der Ordinaten der Reihenfolge nach

Fig. 799.



$$b,\ c,\ \frac{c^2}{b},\ \frac{c^3}{b^2},\ \ldots\ \frac{c^n}{b^{n-1}}$$

wo $\frac{c^n}{b^{n-1}}$ die Ordinate y für die Abscisse $na = x$ ist, indem b die Ordinate ist für die Abscisse $= 0$.

2. Schreibt man $n = \frac{x}{a}$, so hat man die rechtwinklige Coordinatengleichung

$$y = b \cdot \left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{x}{a}}$$

und wenn man $b = 1$ setzt

$$y = c^{\frac{x}{a}}$$

oder $y^a = c^x$

oder $a \ln y = x \ln c$

und $\ln y = \frac{x}{a} \ln c$

woraus $\frac{\partial y}{y} = \frac{\ln c}{a} \partial x$

also $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\ln c}{a} y = \frac{\ln c}{a} \cdot c^{\frac{x}{a}}$

Dieser Ausdruck bezeichnet zugleich die Tangente des Winkels $GHF = \alpha$, den die Tangente GH in H mit der Abscisse bildet.

Hieraus ist die Subtangente $FH = \frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} = \frac{y}{y \cdot \frac{\ln c}{a}} = \frac{a}{\ln c}$

welche mithin für jeden Punkt der Linie constant ist.

Die Subnormale $FJ = y \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\ln c}{a} y^2$

Die Tangente $GH = \frac{a}{\ln c} \sqrt{1 + \left(\frac{\ln c}{a} y\right)^2}$

Die Normale $GJ = y \sqrt{1 + \left(\frac{\ln c}{a} y\right)^2}$

Für den Mittelpunkt der Krümmungskreise

Die Abscisse $= x - \frac{a^2 + y^2 (\ln c)^2}{a \ln c} = x - \frac{1 + y^2 \left(\frac{\ln c}{a}\right)^2}{\frac{\ln c}{a}}$

Die Ordinate $= y + \frac{a^2 + y^2 (\ln c)^2}{y (\ln c)^2} = y + \frac{1 + y^2 \left(\frac{\ln c}{a}\right)^2}{y \left(\frac{\ln c}{a}\right)^2}$

Der Halbmesser $= \frac{[a^2 + y^2 (\ln c)^2]^{\frac{3}{2}}}{a y (\ln c)^2} = \frac{\left[1 + y^2 \left(\frac{\ln c}{a}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{\ln c}{a}\right)^2 y}$

3. Zur Rectification der Curve hat man die allgemeine Formel Bd. II., pag. 191:

$$\lambda = \int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, \partial x$$

Mithin für diesen Fall die Länge von A bis G:

$$\lambda = \int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \partial y = \int \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\ln c}{a} y\right)^2}}{\frac{\ln c}{a} y} \cdot \partial y = \frac{a}{\ln c} \int \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\ln c}{a}\right)^2 y^2}}{y} \cdot \partial y$$

Das Integral wird gelöst nach Bd. III., pag. 342, Formel 234, wenn man $a=1$; $=0$ und $c=\left(\frac{ln\,c}{a}\right)^2$ setzt, und man hat

$$\int \frac{\sqrt{1+\left(\frac{ln\,c}{a}\right)^2 y^2}}{y}\cdot \delta y = \sqrt{1+\left(\frac{ln\,c}{a}y\right)^2}+\int \frac{\delta y}{y\sqrt{1+\left(\frac{ln\,c}{a}y\right)^2}}$$

Dieses letzte Integral ist nach pag. 342, Formel 231

$$=-ln\left[2\cdot\frac{1+\sqrt{1+\left(\frac{ln\,c}{a}y\right)^2}}{y}\right]$$

Man hat demnach, wenn man den Factor 2 im Logarithmus mit zu der Constante rechnet

$$\lambda=\frac{1}{\left(\frac{ln\,c}{a}\right)}\cdot\left[\sqrt{1+\left(\frac{ln\,c}{a}y\right)^2}-ln\frac{1+\sqrt{1+\left(\frac{ln\,c}{a}y\right)^2}}{y}\right]+C$$

Für $y=1$ wird $\lambda=0$, mithin hat man

$$0=\frac{1}{\left(\frac{ln\,c}{a}\right)}\cdot\left[\sqrt{1+\left(\frac{ln\,c}{a}\right)^2}-ln\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{ln\,c}{a}\right)^2}\right)\right]+C$$

Mithin vollständig

$$\lambda=\frac{1}{\frac{ln\,c}{a}}\cdot\left[\sqrt{1+\left(\frac{ln\,c}{a}y\right)^2}-\sqrt{1+\left(\frac{ln\,c}{a}\right)^2}-ln\frac{1+\sqrt{1+\left(\frac{ln\,c}{a}y\right)^2}}{y\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{ln\,c}{a}\right)^2}\right)}\right]$$

4. Die Fläche zwischen b und FG erhält man mit Hülfe der allgemeinen Quadraturformel, Bd. II., pag. 192: $F=\int y\,\delta x+C$

Für diesen Fall ist

$$F=\int y\cdot\frac{\delta x}{\delta y}\cdot\delta y=\int y\cdot\frac{ln\,c}{ay}\cdot\delta y=\frac{y}{\left(\frac{ln\,c}{a}\right)}+C$$

Für $y=b=1$ wird $F=0$, daher vollständig

$$F=\frac{y-1}{\left(\frac{ln\,c}{a}\right)}$$

5. Die Oberfläche, welche der Bogen bei seiner Umdrehung um die Abscisse AX beschreibt erhält man mit Hülfe der allgemeinen Formel Bd. II., pag. 194:

$$F=2\pi\int y\sqrt{1+\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2}\cdot\delta x$$

Für den vorliegenden Fall also

$$F=2\pi\int y\cdot\sqrt{1+\left(\frac{ln\,c}{a}y\right)^2}\cdot\frac{\delta y}{y}=\frac{2\pi}{\left(\frac{ln\,c}{a}\right)}\cdot\int\sqrt{1+\left(\frac{ln\,c}{a}y\right)^2}\cdot\delta y$$

Also das letzte Integral nach Bd. III., pag. 341, Formel 219

$$=\tfrac{1}{2}y\sqrt{1+\left(\frac{ln\,c}{a}y\right)^2}+\tfrac{1}{2}\int\frac{\delta y}{\sqrt{1+\left(\frac{ln\,c}{a}y\right)^2}}$$

Das letzte Integral nach Bd. III., pag. 341, Formel 227

$$= \frac{1}{\left(\frac{ln\,c}{a}\right)} ln\left(y \cdot \frac{ln\,c}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{ln\,c}{a} y\right)^2}\right)$$

Hieraus

$$F = \frac{2\pi}{\left(\frac{ln\,c}{a}\right)} \cdot \left[\tfrac{1}{2} y \sqrt{1 + \left(\frac{ln\,c}{a} y\right)^2} + \tfrac{1}{2} \frac{1}{\left(\frac{ln\,c}{a}\right)} ln\left(y \frac{ln\,c}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{ln\,c}{a} y\right)^2}\right)\right] + C$$

Die Constante wie in den vorigen Formeln; mithin vollständig und reducirt:

$$F = \frac{\pi}{\left(\frac{ln\,c}{a}\right)} \cdot \left[y \sqrt{1 + \left(\frac{ln\,c}{a} y\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{ln\,c}{a}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{ln\,c}{a}\right)} ln \frac{y \frac{ln\,c}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{ln\,c}{a} y\right)^2}}{\frac{ln\,c}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{ln\,c}{a}\right)^2}}\right]$$

6. Den Körper, den die zwischen b, FG und AF befindliche Ebene bei der Umdrehung um AX beschreibt, erhält man mit Hülfe Bd. II., pag. 195: $K = \pi \int y^2 \partial x$ Für diesen Fall ist

$$K = \pi \int y^2 \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \partial y = \frac{\pi}{\left(\frac{ln\,c}{a}\right)} \int y \, \partial y = \frac{\pi}{2\,\frac{ln\,c}{a}} y^2 + C$$

Mithin vollständig $K = \frac{\pi}{2\frac{ln\,c}{a}} \times (y^2 + 1)$

Logarithmischer Maafs- oder **Rechnenstab** ist ein Maastab, der mit den natürlich auf einander folgenden Zahlen beschrieben ist, deren zugehörige Längen aber die Logarithmen der Zahlen sind. Der Anfangspunkt hat die Zahl 1 weil $log\,1 = 0$ ist; $log\,1000$ ist $= 3$. Nimmt man nun irgend eine Länge zum Stabe für die Zahlen von 1 bis 1000, theilt diese in 3000 gleiche Theile, so erhalten hiervon die Länge von Anfang bis

zur Zahl 100 = 2000 Theile, also
" " 200 = 2301 " von 100 bis 200 = 301 Theile
" " 300 = 2477 " " 200 " 300 = 176 "
" " 400 = 2602 " " 300 " 400 = 125 "
" " 500 = 2699 " " 400 " 500 = 97 "

u. s. w.

Macht man nun in jedem Zwischenraum 10 Abtheilungen, so erhält man die Längen der Logarithmen für die Zehner, und theilt man diese wieder in 10 Theile, die der Einer. Das Intervall zwischen den Zahlen 1 und 2 würde 301 der gleichen Theile, das zwischen 999 und 1000 nur $^4/_{10}$ der 3000 gleichen Theile lang sein.

Hat man nun zwei solche Stäbe, so kann man mit denselben multipliciren und dividiren. Denn um 47×53 zu finden braucht man nur an den Theilstrich der Zahl 53 des einen Stabes den Nullpunkt des zweiten Stabes anzulegen und auf dem ersten die Zahl abzulesen, auf welche die Zahl 47 des zweiten Maafsstabes trifft. Beim Dividiren hat man zwei Maafse abzuziehen. Der Gebrauch solcher Stäbe ist jedenfalls von keinem Vortheil; sie sollen früher von Lehrern angewendet worden sein, um den Schülern die Eigenschaften der Logarithmen augenscheinlich zu machen.

Logarithmotechnie ist die Anweisung, Formeln zur Auffindung der Logarithmen aus gegebenen Zahlen und Zahlen aus gegebenen Logarithmen möglichst schnell auch möglichst viele Decimalen darzustellen.

Logistische Linie, s. v. w. „Logarithmische Linie".

Logometer, s. v. w. „Logarithmischer Maafsstab“.

Longimetrie hiefs früher der erste Theil der Geometrie, welcher sich nur mit den Linien und deren Lagen untereinander beschäftigt; ihr folgte die Planimetrie. Den Systemen zufolge, nach welchen die Geometrie vorgetragen wird, sind aber Longimetrie und Planimetrie nicht von einander zu trennen. Euklids erster Lehrsatz ist schon ein Satz über die Congruenz der Dreiecke.

Wenn man dagegen ein Lehrsystem begründet, wie ich es in dem Art. Axiom am Schlufs angeregt habe, dann ergibt sich eine vollständige Longimetrie, ohne dafs die Congruenz der Dreiecke oder andere planimetrische Gesetze zu Beweisen hinzugezogen werden müssen.

Longitudinalschwingungen kommen nur beim Schall vor.

Loth ist die geradlinige Richtung nach dem Mittelpunkt der Erde. Sämmtliche nahe an einander stehende Lothe auf der Erde sichtbar gemacht, bilden verlängerte Halbmesser einer Kugel und durch Nivellements um die Erde bestimmte Horizontalen würden eine Kugeloberfläche erzeugen.

Die Richtung eines Loths heifst lothrecht. Es geschieht nicht selten, dafs Linien und Ebenen, die rechte Winkel mit einander bilden, lothrecht auf einander genannt werden. Besser und angemessener ist es, diese Lagen mit winkelrecht oder normal zu bezeichnen.

Ludolphsche Zahl ist die Zahl $\pi = 3{,}1415926\ldots$ welche das Vielfache des Durchmessers als Länge des Kreisumfangs angibt. Ludolph von Ceulen hat diese Zahl zuerst auf 32 Decimalen berechnet, woher man sie nach seinem Namen benannt hat.

Luft, atmosphärische, deren physikalische Eigenschaften s. in dem Art. „Aerostatik“, Bd. I., pag. 39. Menge und Geschwindigkeit der Luft bei Ausströmungen in einen absolut leeren Raum, von dichterer Luft in einen mit dünnerer Luft angefüllten Raum, Füllung leerer und mit dünner Luft angefüllter Gefäfse durch dichtere Luft und bei verschiedenen Temperaturen nebst Zeitbestimmung, s. den Art. „Ausflufs der Luft“ Bd. I, pag. 230. Siehe ferner den Art. „Atmosphäre.“

Luftbild ist das Bild eines Gegenstandes, dessen Strahlen von einem Linsenglase aufgefangen, durchgelassen, dabei reflectirt und auf die durch dessen Brennpunkt normal auf der Axe befindliche Ebene geworfen werden, welche in dieser Ebene das Bild ausmachen.

Ist diese Ebene mit einer lichten materiellen Fläche z. B. mit einem Blatt Papier versehen, so ist das Bild sichtbar; ist die Ebene unbelegt, also eine freie Luftebene, so ist das Bild unsichtbar und ein Luftbild.

Fig. 91, Bd. I., pag. 143 ist ein Kepler'sches Fernrohr; NN^0 ein sehr weiter Gegenstand, z. B. die halbe Vollmondscheibe im Durchschnitt. Von dieser Scheibe werden sämmtliche auf das Objectivglas *DE* fallende Strahlen in die Ebene des Brennpunkts geworfen und dort zu einem verkehrten Luftbilde *cn* vereinigt. Da nun *c* zugleich der Brennpunkt des Glases *AB* ist, so werden die Strahlen des Luftbildes von *AB* aufgefangen und dem vor *AB* befindlichen Auge vergröfsert sichtbar gemacht, (s. „Auge“ mit Fig. 116 und 117) indem das Luftbild auf der Netzhaut sich abspiegelt.

Fig. 621 ist das Galileische Fernrohr mit demselben Objectivglase *DE*, das Ocularglas *GH* ist biconcav, und wenn dasselbe nicht vorhanden wäre, so würde in der Ebene *C'C''* des zum Glase *DE* gehörenden Brennpunkts das Luftbild von *NM* wie in dem vorigen Fernrohr entstehen. Das Ocularglas aber empfängt die Strahlen vorher und reflectirt sie divergirend für das vor *GH* befindliche Auge.

In den Erdfernröhren, Fig. 622 und 623 sind *nm* und *n'm'* desgleichen die von dem Auge wahrgenommenen Luftbilder des beobachtenden Gegenstandes.

Luftdruck, s. die Art.: „Aerodynamische Gesetze, Aerostatik und Atmosphäre“.

Lunation, s. v. w. Mondwechsel, und zwar entweder die Summe der aufeinander folgenden Mondphasen oder die Zeit von dem Anfang einer bestimmten Mondphase bis zum Anfang derselben zunächst folgenden Phase: z. B. von Neumond bis zum nächst folgenden Neumond.

Lupe ist ein aus nur einem Glase bestehendes also das einfachste Mikroskop, mit dessen Hülfe man kleine Gegenstände in vergröfsertem Maafsstabe sieht. Die Wirkung der Lupe wird durch den Art. „Brille“, No. 2, pag. 431 mit Fig. 262 erklärt: Es ist dort nachgewiesen, dafs ein biconvexes Glas *AB* einen kleinen Gegenstand *ab*, wenn er zwischen das

Glas und dessen Brennpunkt N gebracht wird, dadurch vergrößert, daſs er die von dem Gegenstande aufgefangenen Lichtstrahlen divergirt, und daſs das Auge nun diese Strahlen geradlinig zu einem gröſseren Bilde verfolgt.

Es ist die Brennweite CN des Glases mit f, die Entfernung Cc des Gegenstandes ab von der Axe des Glases mit a und die Entfernung Cc' des entstehenden Bildes $a'b'$ mit b bezeichnet, und Formel 3 entwickelt

$$b = \frac{af}{f-a} \text{ und } \frac{b}{a} = \frac{f}{f-a}$$

Nun ist aus $ab : a'b' = Cc : Cc'$

$$a'b' = \frac{Cc'}{Cc} \cdot ab = \frac{b}{a}\,(ab)$$

d. h. die Vergröſserung $a'b'$ beträgt das $\frac{b}{a}$ fache = das $\frac{f}{f-a}$ fache.

Je näher demnach a bei constantem f, also bei einer bestimmten Lupe dem Brennpunkt N gerückt wird, desto gröſser erscheint er.

Es ist $\frac{f}{f-a} = 1 + \frac{a}{f-a}$

Hieraus geht hervor, daſs die Vergröſserung um so bedeutender wird, je kleiner man die Brennweite f nimmt, also je convexer die Lupe ist.

M.

st die Einheit zu Bestimmung
n meſsbarer Gegenstände. Ein-
Vielheit können nur gleichartig
r gibt es so vielerlei Maaſse als

Die zu messenden materiellen
ıde sind in drei Dimensionen
ı, daher gibt es für diese Län-
ſse, Flächenmaaſse, Kör-
'se (s. diese 3 Art.).

n Art. „Längenmaaſs“ ist
s zu wünschenden allgemeinen
ıaſses gedacht; d. h. eines für
ıe Bewohner der Erde geltenden
ängenmaaſses, und mit die-
e auch offenbar ein allgemeines
'lächenmaaſs und ein allge-
ormalkörpermaaſs gegeben

s Maaſs für Längen, so sollten
Maaſse für messungsbedürftige
ıde anderen Characters Nor-
ſse sein. Zunächst das Maaſs
ckkräfte, das Gewichts-
welches besonders hierher gehört.
Art. „Gewicht“ ist die Be-
eines Gewichtsmaaſses
auseinandergesetzt, und daſs
ınschaft schon lange ein auf dem
durchweg gleichgeltendes Nor-
icht, nämlich das specifische
t eingeführt hat. Dasselbe Recht
auch die Verkehrswelt in Be-
ıuf die von derselben verlangte
ı des absoluten Gewichts einer
der Sache. In demselben Art.
ewiesen, wie in den Ländern
, Frankreich, England, Neapel
land die Normal-Landesge-
bestimmt worden sind.

stimmung eines Normalgewichts ist abhängig von zwei Elementen, nämlich von dem Stoff der abgewägt wird und von dem Kubikmaaſs, welches der Stoff ausfüllt. Alle Regierungen der genannten Länder haben zum Stoff das destillirte Wasser genommen, welches auf der ganzen Erde einerlei Gewicht hat. Warum aber in verschiedenen Temperaturen?

Preuſsen 15° R., Frankreich 3,5° R., England und Ruſsland 62° F. = 13⅓° R., Neapel 12,95° R. Vielleicht sind diese Grade die mittleren Temperaturen der Länder, die der Hauptstädte sind es nicht. Denn die mittlere Temperatur in Berlin ist 9,1 C. = 7,28° R., in London 10,8 C. = 8,64° R. Neapel hat eine viel gröſsere mittlere Temperatur und nimmt die des Quecksilbers am geringsten. Für die Temperatur des Wassers sollte 3,5° R. wie in Frankreich zu Grunde liegen, wobei es die gröſste Dichtigkeit hat.

Ferner hat jede der Regierungen den Würfel eines ihrer Landes-Längenmaaſse zu Grunde gelegt, und es darf nur ein und dasselbe Kubikmaaſs sein, wozu der Würfel eines allgemeinen Normal-Längenmaaſses zu nehmen sein würde.

Das Maaſs für die Zeit, s. den Art. „Kalender“.

. **Maaſse**, französische, s. u. „Decimalmaaſs“.

Maaſsstäbe sind Stäbe, deren Längen eine bestimmte Menge von gesetzlichen Längeneinheiten enthalten. Auch der Feldmesser gebraucht dieselben. Gradmessungen verlangen äuſserst genaue metallene Stäbe. Längen von Flächen, die

bebaut werden sollen und überall wo es auf Genauigkeit ankommt, werden statt mit der Kette mit Maafsstäben gemessen. Man nimmt zu denselben am besten harziges Kiefernholz, weil dieses am wenigsten durch Temperaturwechsel Dimensionsveränderungen erleidet; sie werden um Abnutzung zu verhindern, an den Enden mit winkelrecht auf die Länge gerichteten metallenen Ringen versehen. Beim Messen legt man die Stäbe auf feste Stützen, am besten auf Schemel, deren Platten zur Herstellung der Horizontale leicht und schnell auf- und abwärts geschoben werden können. Zweckmäfsig, besonders sicherer ist es, wenn man zwei Maafsstäbe anwendet, so dafs immer der eine an den anderen liegenbleibenden zu Fortsetzung der Vermessung angelegt werden kann. Die Beobachtung der Horizontale während des Messens geschieht mit Hülfe einer kleinen Setzwaage; auch kann man die Maafsstäbe mit etwa einen Fufs hohen eisernen Visirstiften an einem Ende versehen, die bei beiden an einanderliegenden Stäben in den äufsersten Punkten sich befinden.

Mac-Laurinsche Reihe. Deren Entwickelung s. den Art. „Differenzialrechnung", pag. 289, Bedingungen unter welchen sie convergirt, pag. 292; deren Ergänzungsglied, pag. 293. Anwendung derselben, Bd. I. pag. 110, 113 und an vielen anderen Orten.

Magister matheseos ist der Ehrenname, mit welchem der 47te Satz des Euklid, Buch I. bezeichnet wird (s. Art. „Dreiecke, ebene", No. 21, pag. 327 mit Fig. 574).

Magnete waren zuerst ausschliefslich Erze, welche Eisen anziehen; der Name rührt daher, dafs diese Erze nahe der Stadt Magnesia gefunden worden waren. Da man später lernte, auch dem Eisen selbst die magnetische Kraft mitzutheilen, erfand man künstliche Magnete, die in der Form der Magnetnadeln so grofsen Nutzen gewähren, indem man entdeckt hatte, dafs der ganze Erdkörper die magnetische Kraft besitzt.

Eine frei horizontal hangende Magnetnadel nämlich nimmt immer eine bestimmte Richtung nach Norden zu an und weicht in den verschiedenen Orten mehr und weniger von dem astronomischen Meridian ab, trifft auch in einigen Punkten genau mit demselben zusammen. Die durch die Richtung der Nadel gedachte lothrechte Ebene ist der magnetische Meridian des Orts; der Winkel zwischen diesem und dem astronomischen Meridian heifst die Declination oder Abweichung der Nadel, sie ist östlich, westlich und Null. Das Instrument für die Messung der Abweichung heifst Declinationsboussole, beim Seefahrer ist sie der Compafs.

Hängt man die Magnetnadel in ihrem Schwerpunkt frei auf, so bleibt sie nicht mehr horizontal, sie senkt sich in näher dem Nordpol liegenden Orten mit ihrer Nordseite immer tiefer und stellt sich endlich lothrecht. Kapitain Rofs hat diesen nördlichen magnetischen Pol der Erde unter 70° 5′ nördlicher Breite 263° 14′ östlicher Länge (Greenwich = 0) gefunden. Diese lothrechte Abneigung, die Inclination nimmt bis in die Gegend des Aequators immer mehr ab und wird dort an einzelnen Punkten = 0, die Nadel liegt dort vollkommen horizontal. Sämmtliche Punkte der Erdoberfläche daselbst zu einer Curve verbunden geben den magnetischen Aequator. Weiter südlich wird die Inclination entgegengesetzt, die Südseite der Nadel senkt sich immer mehr und so gibt es daselbst einen magnetischen Südpol. Je stärker die Inclinationen werden, desto unzuverlässiger wird der Compafs.

Magnetnadel, astatische, s. „Astatische Magnetnadel".

Manometer, s. „Ausflufs der Luft" No. 3, pag. 230 mit Fig. 133.

Mantisse ist der Decimalbruch in den Logarithmen, s. Bd. I., pag. 429, rechts oben, und „Characteristik", Bd. II. pag. 20.

Mariottesches Gesetz: Das Volumen der Gase verhält sich umgekehrt wie der auf sie wirkende Druck. Oder die Elasticität der abgesperrten trockenen Luft ist ihrer jedesmaligen Dichtigkeit proportional, wobei also vorausgesetzt wird, dafs die Luft keine Feuchtigkeit oder Dünste enthält (s. den Art. „Aerodynamische Gesetze", No. 5, pag. 39).

Mars (♂) ist der nächste Planet über der Erde, der erste der oberen Planeten, erscheint in einem auffallend röthlichen Lichte. Seine mittlere Entfernung von der Sonne ist 31500000 Meilen = der 1,523691 fachen der Erde von der Sonne. Seine siderische Umlaufszeit (Rückkehr zu demselben Fixstern) = 686,98 Tage, seine tropische Umlaufszeit (Rückkehr zur Nachtgleiche) = 686,93 Tage. Seine mittlere tägliche Bewegung $\left(\frac{686{,}98}{360^\circ}\right) = 31'\ 26{,}7''$.

Seine Excentricität = 0,0932168, fast $^1/_{10}$ der halben grofsen Axe. Neigung der Bahn gegen die Ekliptik 1° 51′ 6″, welche sich jährlich um 0,013 Secunde vermindert. Länge des aufsteigenden Knotens = 47° 59′ 58″. Gröfste Entfernung von der Sonne = 34436200 Meilen, kleinste = 28563800 Meilen. Der Durchmesser des Mars ist 890 bis 930 Meilen, also etwa halb so grofs als der Durchmesser der Erde. Seine scheinbare Gröfse ist in der Erdnähe 4″, in der Erdferne 2,7″. Seine gröfste Entfernung von der Erde ist gegen 55 Milionen, seine kleinste 7½ Millionen Meilen. Volum = 0,14 und Dichtigkeit = 0,948, Schwerkraft = ½ der Erde. Seine Axendrehung 24 Stunden 37 Min. 20 Sec.

Maschine ist ein stabiles Bauwerk, welches dadurch, dafs Kräfte auf dasselbe wirken und durch dasselbe in Gröfse und Richtung zerlegt werden, selbst thätig wird zu dem Zweck, Körper mechanisch zu ändern oder deren Ortsänderung zu bewirken. Die Maschine unterscheidet sich also von Instrument dadurch, dafs dieses kein stabiles Bauwerk sondern eine transportable Handhabe ist, wenngleich es auch thätig wird; und es unterscheidet sich von dem Bauwerk Apparat genannt, auf welches Kräfte wirken, das aber nicht selbst zur Thätigkeit kommt. Ein Winkelmefs-Instrument, wenn es stabil ist, ist ein Apparat, Nonius und Mikrometerschraube sind Instrumente am Apparat. Eine Taschenuhr ist ein Apparat, das Gehwerk und das Hemmwerk sind Maschinen am Apparat (vergl. „Instrument“).

Masse eines Körpers ist die Menge der in dem Körper befindlichen materiellen Theile (vergl. „Gewicht, Dichtigkeit“).

Massenreduction. Eine Masse liegt da, wo sie liegt, fest; sie hat keine Ursach von selbst sich zu bewegen, eine Eigenschaft, welche man Beharrungsvermögen oder Trägheit nennt. Soll nun diese Masse bewegt werden, so mufs nothwendig eine Kraft auf sie einwirken.

Man stelle sich ein festes System von materiellen Linien und Flächen vor, welches durch eine Ueberwucht P in eine fortschreitende oder in eine drehende Bewegung gebracht werden soll, und es komme eine Masse vom Gewicht q hinzu und zwar auf einen Punkt A des Systems, dafs wenn P die Geschwindigkeit c hat, q die Geschwindigkeit v erhält. Ist nun p der Theil der zu Bewegung der Masse q erforderlichen Ueberwucht, so ist nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten die auf den Punkt A auf q reducirte Ueberwucht $= \frac{c}{v} p$ als bewegende Kraft, die in A auf q wirkende beschleunigende Kraft $= \frac{c}{v} \cdot \frac{p}{q}$ und deren Beschleunigung $= g \cdot \frac{c}{v} \cdot \frac{p}{q}$.

Denkt man sich nun statt der Masse q in A eine andere Masse $q_,$ in $A_,$, deren Geschwindigkeit $= v_,$, so ist die für sie in $A_,$ reducirte Ueberwucht $= \frac{c}{v_,} p_,$

Die beschleunigende Kraft $= \frac{c}{v_,} \cdot \frac{p}{q_,}$ und deren Beschleunigung $= g \cdot \frac{c}{v_,} \cdot \frac{p}{q_,}$.

Diese Beschleunigungen beide wirken in verschiedenen Abständen von der Drehaxe und zwar so, dafs deren Geschwindigkeiten wie v zu $v_,$ sich verhalten, dafs also

$$g \cdot \frac{c}{v} \cdot \frac{p}{q} : g \cdot \frac{c}{v_,} \cdot \frac{p}{q_,} = v : v_,$$

Da beide aber dieselbe Ueberwucht p mit derselben Geschwindigkeit c erfordern, so müssen auch deren mechanische Widerstände einander gleich sein. D. h. es ist

$$g \cdot \frac{c}{v} \cdot \frac{p}{q} \cdot v_, = g \cdot \frac{c}{v_,} \cdot \frac{p}{q_,} \cdot v$$

oder reducirt $v^2 q = v_,^2 q_,$.

Ist die Bewegung drehend, so verhalten sich die Geschwindigkeiten v und $v_,$ der Massen q und $q_,$ wie deren Abstände l und $l_,$ von der Drehaxe und man hat

$$l^2 \cdot q = l_,^2 \cdot q_,$$

und es ist $q_, = \frac{v^2}{v_,^2} \cdot q = \frac{l^2}{l_,^2} \cdot q.$

Massen von einem Punkt auf einen anderen, wobei der Einfluſs auf das System dasselbe bleibt, werden also dadurch reducirt, dafs man das Quadrat ihrer Geschwindigkeit durch das Quadrat der Geschwindigkeit des neuen Punkts, oder das Quadrat ihres Abstands von der Drehaxe durch das Quadrat des neuen Punkts von derselben dividirt und den Quotient mit der Masse multiplicirt.

2. Beim Gleichgewicht der Kräfte nennt man bekanntlich die Producte der Kräfte mit den Abständen von der Drehaxe die Momente der Kräfte; hier nun der

Aehnlichkeit wegen die Producte der Massen mit den Quadraten jener Abstände die Momente der Massen und um zugleich auszudrücken, dafs hierbei die Kräfte, welche etwa durch die Massen noch wirken könnten, aufser Betracht bleiben, werden jene Producte auch Momente der Trägheit oder Trägheitsmomente genannt.

Materie ist der Stoff, sind die materiellen Theile eines und mehrerer Körper in ihren wesentlichen von einander unterschiedenen Eigenschaften betrachtet, von denen die Mathematik absieht. Man sagt auch Stoff sei das Raum erfüllende, dasjenige, was in einerlei Zeit in einerlei Raum sich befindet.

Materieller Hebel, dessen Unterschied von mathematischem Hebel, s. den Art. „Hebel" zu Anfang.

Mathematik ist Gröfsenlehre, die Wissenschaft von den Gröfsen (s. den Art. „Gröfsen") deren es Zahlengröfsen und Raumgröfsen gibt. Sind diese Gröfsen blofs Gedankengröfsen, so heifst der Theil der Wissenschaft, welcher mit diesen sich beschäftigt, reine Mathematik; sind die Gröfsen aber mit unseren Organen wahrzunehmen, sind sie Gegenstände oder Erzeugnisse der Natur oder der Kunst, angewandte Mathematik.

Zahlengröfsen werden nie wahrgenommen, bei einer Mehrzahl oder einem Theil von Gegenständen nimmt man nur diese wahr. Die Rechenexempel $2 \times 3 = 6$ und 2×3 Thaler sind 6 Thaler sind ohne allen Unterschied, das benannte Einmaleins gehört nicht zur angewandten Mathematik und die höhere Analysis desgleichen nicht: Die ganze Arithmetik von der niedrigsten bis zur höchsten Stufe gehört der reinen Mathematik zu.

Die reine Mathematik hat also einen arithmetischen und einen geometrischen Theil.

Die Arithmetik beschäftigt sich in allen Stufen ihrer Lehren und Erkenntnisse mit bestimmten und unbestimmten Zahlen.

Die Gesetze des Verfahrens mit den ersteren werden aber allein aus den Lehren über das Verfahren mit den letzteren hergeleitet; die in den Elementarschulen gelehrte Rechenkunst ist schon eine Anwendung davon und wird für den tagtäglichen nothwendigen Verkehr eingeübt.

Die eigentliche Arithmetik (s. d.) ist die Lehre für Auffindung von allgemein geltenden Gesetzen über die verschiedenen Verbindungen von Zahlen, wie sie nur immer verlangt werden können, und diese Gesetze werden ermittelt mit Hülfe symbolischer Zeichen, der Buchstaben, von welchen jeder einzelne jede beliebige bestimmte Zahl bedeutet.

Die Geometrie (s. d.) beschäftigt sich mit den Raumgröfsen, und da der Raum drei Dimensionen hat, mit den Linien, Flächen und Körpern.

Die angewandte Mathematik ist die Lehre von den Aenderungen der Naturkörper in Folge äufserer Einwirkung auf dieselben durch Kräfte. Die Bedingungen, unter welchen sie entweder in Ruhe oder in gleichförmiger Bewegung, d. h. im Gleichgewicht verbleiben, lehrt die Statik.

Die Bedingungen, unter welchen sie entweder aus der Ruhe in Bewegung kommen oder ihre Bewegung theils nach Richtung theils nach Geschwindigkeit ändern, die Mechanik.

Die Statik fester Körper heifst die Geostatik, die Statik tropfbar flüssiger Körper die Hydrostatik, die der luftförmigen Körper die Aerostatik.

Die Mechanik fester Körper heifst die Geomechanik, die Mechanik tropfbar flüssiger Körper die Hydrodynamik oder Hydraulik, die Mechanik luftförmiger Körper die Aerodynamik oder Pneumatik.

Mathematische Geographie ist der erste Theil der G., der Erdbeschreibung, welcher mit der Lage der Erde im Weltraume oder vielmehr gegen die Sonne und das ganze Sonnensystem, mit der Gestalt und Gröfse der Erde sich beschäftigt. Die mathematische G. hängt unmittelbar mit der Astronomie zusammen.

Mathematischer Punkt ist ein geometrischer Gedanke, die Grenze einer Linie, eine im Verschwinden begriffene Linie.

Mauerquadrant, s. u. „astronomischer Quadrant."

Maurerwaage, s. v. w. „Bleiwaage."

Maximum und **Minimum**. Der Art. „Gröfstes" löst die Aufgabe: die gröfsten und kleinsten Werthe einer gegebenen Function zu finden, aufserdem mehrere geometrische Maxima und Minima an Figuren und Körpern auf elementarem Wege.

Der Art. „Differenzialrechnung" III. pag. 298 enthält die Auffindung der

axima und Minima allgemein durch fferenzialrechnung mit Beispielen und g. 309 die Auffindung der gröfsten und einsten Werthe implicirter Functionen. Es sollen hier noch folgende Beispiele nzugefügt werden.

1. Eine gerade Linie so zu theilen, fs das aus den Theilen zusammengetzte Rechteck ein Maximum werde.

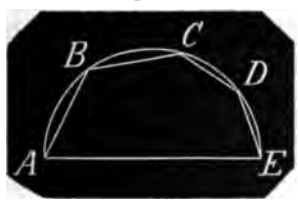
Nennt man den einen Theil x, so ist r andere $a-x$, und damit $x(a-x)=$ $-x^2$ ein Maximum werde, hat man s Differenzial $a-2x=0$ woraus $x=\frac{1}{2}a$ id es ist also die Linie zu halbiren.

Geometrisch kommt man zu dem Reltat, wenn man $AB=a$ in C halbirt id von C aus nach einem Endpunkt B n ein Stück x abträgt. Dann ist das chteck $=\left(\frac{a}{2}+x\right)\left(\frac{a}{2}-x\right)=\frac{a^2}{4}-x^2$. fenbar wird das Rechteck für $x=0$ ein aximum und $=\frac{a^2}{4}$, so dafs a halbirt rden mufs.

2. Es sind zwei Seiten a, b eines Dreiks gegeben, so ist der von ihnen einschlossene Winkel, damit das Dreieck n Maximum werde offenbar der gröfste, nn er ein Rechter ist.

3. Alle Seiten eines Winkels weniger ie sind gegeben, so erhält man das öfste Vieleck, wenn die gegebenen Sein zusammen die Sehnen eines Halbkreisgens sind und die letzte nicht gegeie Seite zum Durchmesser genommen rd.

Fig. 800.



Wenn also die Seiten AB, BC, CD, DE geben sind, so soll das Vieleck $ABCDEA$ Maximum sein, wenn die genannten iten als Sehnen einen Halbkreisbogen nehmen und wenn der Durchmesser t als unbekannte letzte Seite genomn wird.

Diesen Satz hat Meier Hirsch § 115 ner Sammlung geometrischer Aufga n aufgestellt; sein Beweis für die Richkeit ist als solcher nicht anzuerkennen.

4. Aus diesem Satz folgt denn unmittelbar:

Unter allen Vielecken, welche sich aus einer bestimmten Anzahl gegebener Seiten construiren lassen, ist dasjenige, um welches sich ein Kreis beschreiben läfst, das gröfste.

5. Der Inhalt eines Kreises ist gröfser als der Inhalt jeder geradlinigen Figur, welche mit demselben einen gleichen Umfang hat.

Nach Bd. III., pag. 228, No. 10 hat unter allen gleich vielseitigen Vielecken von gleichem Umfang das gleichseitige den gröfsten Inhalt. Wenn man also statt des vorausgesetzten ungleichseitigen Vielecks ein gleichseitiges von gleichem Umfang mit jenem nimmt, so erhält man ein Vieleck von gröfserem Inhalt und kann demnach gezeigt werden, dafs der Kreis gröfser ist, als das gleichseitige, dann ist es ganz bestimmt auch gröfser als das ungleichseitige Vieleck.

Denkt man sich nun den Kreis und um denselben Mittelpunkt das Vieleck beschrieben, so können dessen Seiten weder Sehnen noch Tangenten sein; denn im ersten Fall wäre dessen Umfang kleiner, im zweiten Fall gröfser als der Umfang des Kreises, die Seiten müssen also die Kreislinie schneiden.

Denkt man sich nun von dem Mittelpunkt nach sämmtlichen Vieleckspitzen gerade Linien gezogen, so entstehen so viele Dreiecke als das Vieleck Seiten hat.

Die von dem Mittelpunkt auf diese Seiten gefällte Normalen mit h, die Umfänge des Kreises und des Vielecks mit p, den Halbmesser des Kreises mit r bezeichnet ist

der Inhalt P des Kreises $=\frac{1}{2}rp$

der Inhalt Q des Vielecks $=\frac{1}{2}hp$.

Construirt man nun um den Kreis ein dem Vieleck ähnliches Vieleck, bezeichnet dessen Umfang mit p_1, so ist der Inhalt Q_1 dieses Vielecks $=\frac{1}{2}rp_1$.

Nun ist wegen Aehnlichkeit der Vielecke

$$p : p_1 = h : r$$

woraus $$p_1 = \frac{r}{h}p$$

folglich ist $$Q_1 = \frac{1}{2}r \cdot \frac{r}{h}p = \frac{1}{2}\frac{q^2}{h}p$$

hierzu $$Q = \frac{1}{2}hp$$

gibt $$Q\,Q_1 = \frac{1}{4}r^2p^2 = P^2$$

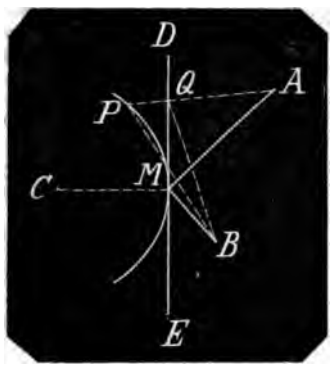
woraus $$Q : P = P : Q'$$

Da nun die Kreisfläche P immer kleiner ist als die um denselben liegende

Vielecksfläche Q', so ist auch die Vielecksfläche Q kleiner als der Kreis.

6. Aufserhalb eines Kreises vom Mittelpunkt C sind zwei Punkte A, B gegeben, man soll auf der Peripherie einen Punkt von solcher Beschaffenheit angeben, dafs wenn man aus demselben nach den gegebenen Punkten gerade Linien zieht, die Summe dieser beiden Linien ein Minimum sei. (Meier Hirsch geometrische Aufgaben I, pag. 223.)

Fig. 801.



Es wird bewiesen, dafs die Linien $AM + BM$ ein Minimum sind, wenn $\angle AMC = \angle BMC$. Eine geometrische Construction des Punkts M dieser an sich einfachen Bedingung gemäfs ist aber noch nicht aufgefunden worden.

Ist $\angle AMC = \angle BMC$ und man zieht durch M die Tangente DE, so ist auch $\angle AMD = \angle BME$. Wählt man nun einen beliebigen anderen Punkt P in der Peripherie, zieht die geraden Linien AP, BP und BQ, von welchen AP die Tangente in Q schneidet, so hat man wegen der gleichen Winkel AMD und BME die Linien $AM + BM$ kleiner als alle übrigen von A und B nach irgend einem anderen Punkt der Linie DE gezogenen Linien (s. Bd. II, pag. 306 mit Fig. 560).

Folglich ist auch $AM + BM < AQ + BQ$
also um so mehr $AM + BM < AP + BQ$
und noch mehr $AM + BM < AP + BP$

7. Die von einem innerhalb eines Dreiecks gelegenen Punkt nach den Spitzen gezogenen geraden Linien sind zusammen genommen ein Minimum, wenn sie um den Punkt gleiche Winkel mit einander bilden.

Denn ist nebenstehend die gedachte Construction, also $\angle ACB = \angle ACD = \angle BCD$, und man denkt sich aus dem Eckpunkt A mit AC einen Kreis beschrieben, so sind $CB + CD$ ein Minimum für alle anderen zwei Linien, die von B und D nach

Fig. 802.

anderen in der Kreislinie liegenden Punkten gezogen werden könnten, hierzu AC gibt $AC + BC + DE$ ein Minimum der drei Linien die von A, B, D nach dem Kreisbogen gezogen werden können. Dasselbe beweist man durch Kreisbogen aus B mit BC und aus D mit CD.

8. Unter allen Parallelepipeden von einerlei Grundebene und Höhe hat das gerade die kleinste Oberfläche.

Hieraus folgt:

Wenn ein gerades und ein schiefes Parallelepipedum einerlei Grundfläche und gleiche Oberflächen haben, so ist das gerade höher als das schiefe.

Unter allen Parallelepipeden von gleicher Oberfläche hat das rechtwinklige den gröfsten cubischen Inhalt.

Unter allen Parallelepipeden von gleichem cubischen Inhalt hat das rechtwinklige die kleinste Oberfläche.

9. Unter allen rechtwinkligen Parallelepipeden von gegebenem cubischen Inhalt und gegebener Höhe hat dasjenige, dessen Grundebene ein Quadrat ist, den kleinsten Umfang.

Denn unter den ausgesprochenen Bedingungen haben sämmtliche Körper gleiche Grundebenen, von diesen hat nun das Quadrat den kleinsten Umfang, folglich auch der Körper mit quadratischer Grundebene die kleinsten Seitenflächen, und da die beiden Grundflächen in allen gleich grofs sind, überhaupt die kleinste Oberfläche.

Hieraus folgt:

10. Unter allen rechtwinkligen Parallelepipeden von gleicher Höhe und gleichem cubischen Inhalt (also auch von gleicher Grundfläche) hat das mit einer quadratischen Grundfläche die kleinste Oberfläche.

11. Das rechtwinklige Parallelepiped

mit einer quadratischen Grundfläche hat unter allen rechtwinkligen Parallelepipeden von gleicher Höhe und gleicher Oberfläche den grösten Inhalt.

12. Unter allen rechtwinkligen Parallelepipeden von gleichem Inhalt hat der Würfel die kleinste Oberfläche.

13. Unter allen rechtwinkligen Parallelepipeden von gleicher Oberfläche hat der Würfel den grösten Inhalt.

14. Unter allen geraden und schiefen Parallelepipeden von gleichem Inhalt hat der Würfel die kleinste Oberfläche.

15. Unter allen geraden und schiefen Parallelepipeden von gleicher Oberfläche hat der Würfel den grösten Inhalt.

16. Von einem Parallelepiped ist die Grundfläche an Gestalt und Grösse gegeben, die Seitenflächen sind es blos der Grösse nach; man soll dasjenige finden, welches den grösten körperlichen Inhalt hat.

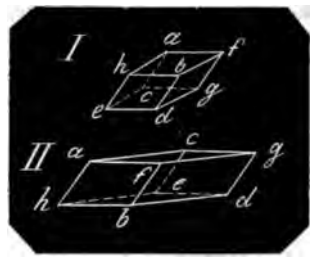
Mit den bleibenden Grundflächen bleiben auch deren Seiten dieselben und da die vier Seitenflächen in ihrer summarischen Grösse verbleiben, so müssen bei der Verwandlung dieser Flächen auch deren Höhen, d. h. die normalen Abstände der an den Grundebenen des Körpers befindlichen Seiten verbleiben. Sind diese Höhen alle einander gleich, so darf man auf eine der Grundflächen nur ein gerades Parallelepipedum von der eben gedachten Höhe errichten und man hat dasselbe nach No. 8 im Maximo des Inhalts; sind die Höhen nicht gleich, so mufs man die kleinste der beiden Höhen zur Höhe des neuen Parallelepipedums nehmen. Die zu dieser Höhe gehörenden beiden Seitenflächen werden normal der Grundfläche, die anderen beiden Seitenflächen werden ihnen angeschmiegt.

Zur Erläuterung des Gesagten sollen Fig. 803, I. und II. und Fig. 804 dem Vortrag zu Hülfe kommen.

Fig. 803, I. und II. sind die Oberansichten zweier schiefer Parallelepipeden; in beiden ist *cd* die Grundebene, *ab* die ihr parallele obere Ebene, *qe* und *fd*, *cf* und *be* die beiden einander gegenüberstehenden Seitenflächen.

In I. haben sämmtliche 4 Seitenflächen einerlei Höhe, d. h. die Abstände von

Fig. 803.

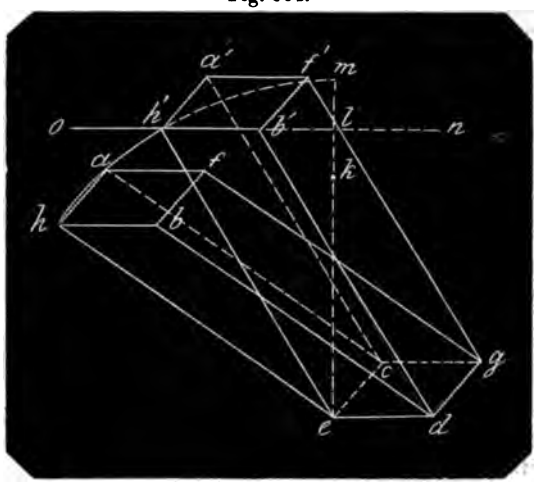


af und *cg*, von *bh* und *de*, von *ah* und *ce* und von *bf* und *dg* sind einander gleich. Man hat also nur nöthig, die genannten Seitenflächen normal über die Grundflächen zu bringen, dann werden die längeren Seiten *eh*, *bd*, *gf*, *ac* gleich den kleineren Höhen, normal auf der Grundfläche und der Körper, der zuerst die lothrechte kleinere Projection der Seitenflächenhöhen zur Höhe hatte, erhält die grösere Höhe selbst zur Höhe und sein Inhalt ist nach No. 8 ein Maximum.

In II. haben, wie man sofort ersieht, die Seitenflächen *acgf* und *hcdb* eine steilere Lage gegen die Grundfläche *cedg* als die Seitenflächen *aceh* und *fgdb*, und bei gleichem Abstande der Flächen *cedg* und *ahbf* ist der Abstand zwischen *cg* und *af* kleiner als der Abstand zwischen den schrägeren *dg* und *bf*. Dieser Fall ist nun Fig. 803 im Aufriss vorgestellt.

Es ist nämlich Fig. 804 *ahbfedgc* das gegebene Parallelepipedum, die beiden Seiten *bh*, *de* haben in der schrägen Fläche, aber senkrecht auf der Linie *de*, also in

Fig. 804.



der schrägen Verkürzung betrachtet die Länge ek, und wenn diese Höhe zugleich normal auf die Ebene $cedg$ errichtet wird, die Länge el. Wollte man nun wie ad 1 diese Länge el zugleich zur Seite des Körpers machen, so würde sie zugleich die Seite eh sein müssen, mit der sie dieselbe ist. eh ist aber zu lang, sie würde über l hinaus bis m reichen, und es könnte kein Parallelepipedum entstehen.

Da aber um ein Maximum zu erhalten wenigstens ein Paar Seitenflächen den Grundebenen normal sein muſs, so zieht man durch den Punkt l eine Parallele on mit de, beschreibt aus e innerhalb der senkrechten Seitenebene einen Bogen mit dem Abstand zwischen ce und ah als Halbmesser, und in dem Punkt h', wo er die Parallele on trifft, ist der entsprechende Punkt für h. Zieht man demnach die Linie $h'e$ und construirt die der Grundebene $edgc$ parallele und congruente Figur $h'b'f'a'$, vollendet das Parallelepipedum $a'h'b'f'edgc$, so befinden sich in diesem die Seitenflächen $deh'b'$ und $cgf'a'$ normal den Grundebenen $edgc$ und $h'b'f'a'$ und es ist das verlangte Maximum.

17. Von einem Parallelepiped sind die Grundfläche und die Seitenflächen der Gröſse nach gegeben, desgleichen die Winkel der Grundfläche, so erfährt man die Bedingung für das Maximum des Inhalts folgender Art:

Es sei q der Inhalt der Grundfläche, q' der Inhalt der einen, q'' der Inhalt der daran grenzenden Seitenfläche, der gegebene Winkel sei α, x und y seien die unbekannten ihn einschlieſsenden Seiten.

Dann ist der Inhalt der Grundfläche $q = xy \sin \alpha$

woraus $xy = \frac{q}{\sin \alpha}$.

Die Inhalte der beiden Seitenflächenpaare sind $q' = h'x$ und $q'' = h''y$

hieraus die Höhen $h' = \frac{q'}{x}$ und $h'' = \frac{q''}{y}$,

woraus $h' \cdot h'' = \frac{q'q''}{xy} = \frac{q'q''}{q} \sin \alpha$.

Demnach ist die gröſste Höhe eines Parallelepipedums von den gegebenen Stükken $= \sqrt{\left(\frac{q'q''}{q} \sin \alpha\right)}$, und zwar muſs dieselbe auf den Grundebenen normal stehen. Das Parallelepiped ist also ein gerades, dessen Grundebene $= q$ und dessen Höhe $= \sqrt{\left(\frac{q'q''}{q} \sin \alpha\right)}$. Sein Inhalt beträgt $\sqrt{qq'q'' \sin \alpha}$.

18. Was von den Parallelepipeden gilt, gilt auch von den dreiseitigen Prismen. Also:

Unter allen dreiseitigen Prismen von derselben Höhe und derselben Grundfläche hat das gerade Prisma die kleinste Oberfläche.

19. Unter allen geraden dreiseitigen Prismen von gegebener Höhe, gegebener Grundfläche und einer gegebenen Seitenfläche findet man das von der kleinsten Oberfläche, wenn die beiden nicht gegebenen Seitenflächen einander gleich sind.

Denn ist A die gegebene Grundfläche, h die Höhe des Prisma, so ist h auch die Höhe jeder Seitenfläche. Ist die gegebene Seitenfläche $= B$, so ist dessen zur Grundfläche gehörige Seite ebenfalls gegeben $= \frac{B}{h}$. Diese als Grundlinie der Dreiecksgrundfläche A betrachtet, gibt deren Höhe $= 2h \frac{A}{B}$. Unter allen Dreiecken von einerlei Grundlinie und gleicher Höhe hat aber das gleichschenklige den geringsten Umfang, mithin auch das gerade dreiseitige Prisma, welches dieses Dreieck zur Grundfläche hat.

Hieraus folgt:

20. Unter allen geraden dreiseitigen Prismen von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe hat dasjenige die kleinste Oberfläche, in welchem alle Seitenflächen gleich groſs sind. Desgleichen

21. Unter allen Prismen von einer gegebenen Anzahl und summarischem Inhalt der Seitenflächen von derselben Grundfläche und derselben Höhe hat das gerade Prisma die kleinste Oberfläche.

22. Unter allen geraden Prismen von gegebener Anzahl der Seitenflächen, gegebener Höhe hat dasjenige, dessen Grundfläche ein reguläres Vieleck ist, den gröſsten körperlichen Inhalt.

Denn unter allen Vielecken von gegebener Seitenanzahl und gegebenem Umfang ist (No. 4) das regelmäſsige von dem gröſsten Inhalt, mithin auch das darauf gestellte gerade Prisma.

23. Unter allen geraden Prismen von einer gleichen Anzahl der Seitenflächen, gleicher Höhe und gleichem körperlichen Inhalt hat das mit regelmäſsiger Grundebene den kleinsten Umfang der Seitenflächen; und da mit dem körperlichen Inhalt und der gegebenen Höhe auch die Gröſse der Grundfläche gegeben ist, auch den kleinsten Umfang (inclusive der Grundflächen).

24. Unter allen geraden Prismen von einer gleichen Anzahl der Seitenflächen, gleicher Höhe und Oberfläche hat das von regelmäfsiger Grundfläche den gröfsten körperlichen Inhalt.

25. Der Kreis hat einen kleineren Umfang als jedes regelmäfsige Vieleck von gleichem Inhalte mit demselben.

Denn ist a die Seite des Vielecks, so ist dessen Umfang $= na$ und wenn man die von dem Mittelpunkt auf die Seite gefällte Normale $= h$ setzt, so ist $h > r$, weil die Seite nicht Tangente aber auch nicht Sehne sein kann und folglich den Kreisumfang schneiden mufs. Nun ist

der Inhalt des Vielecks $= \frac{1}{2}nah$

der Inhalt des Kreises $= r^2\pi$

also $\frac{1}{2}nah = \frac{1}{2}r \cdot 2\pi r$

$h < r$

gibt dividirt $na > 2\pi r$

26. Die Oberfläche eines Cylinders ist immer kleiner als die Oberfläche eines Prisma von gleicher Höhe und gleichem körperlichen Inhalt.

Folgt unmittelbar aus No. 19.

27. Der Inhalt eines Cylinders ist immer gröfser als der Inhalt eines Prisma auf regulärer Grundfläche von gleicher Oberfläche und von gleicher Höhe mit dem Cylinder.

28. Unter allen geraden Cylindern von gleichem körperlichen Inhalt ist dasjenige von der kleinsten Oberfläche, welches in einem Würfel eingeschrieben ist.

Denn beschreibt man nun sämmtliche Cylinder-Parallelepipeden mit quadratischen Grundflächen, so verhalten sich diese untereinander wie die inliegenden Cylinder, sie sind also einander gleich. Nach Satz 12 hat aber von allen der Würfel die kleinste Oberfläche, mithin hat auch der in einem Würfel beschriebene Cylinder die kleinste Oberfläche.

Dieser Satz ist Bd. II, pag. 304, No. 2 analytisch erwiesen mit dem Schlufs, dafs der Durchmesser der Grundfläche so grofs als die Höhe sein müsse.

Anmerk. Das gleiche Verhältnifs zwischen den Cylindern unter sich mit den umschriebenen Prismen unter sich hat seinen Grund darin, dafs Kreise und die um denselben beschriebenen Polygone sowohl in Betreff der Umfangs als auch des Inhalts einerlei Verhältnifs haben, wenn die Polygone mit einander ähnlich sind, und folglich um so mehr bei gleichseitigen regelmäfsigen Polygonen.

29. Unter allen geraden Cylindern von gleicher Oberfläche hat der in dem Würfel eingeschriebene Cylinder den gröfsten körperlichen Inhalt.

30. Aus beiden vorigen Sätzen folgt der Satz:

Der Cylinder, der in einem Würfel einbeschrieben werden kann, d. h. dessen Höhe dem Durchmesser seiner Grundfläche gleich ist, hat unter allen Cylindern von gleichem Inhalte die kleinste Oberfläche und unter allen Cylindern von gleicher Oberfläche den gröfsten Inhalt.

31. Unter allen Pyramiden von gleicher Höhe und auf derselben regulären Grundfläche hat die gerade Pyramide die Seitenflächen von dem geringsten Inhalt.

32. Unter allen Kegeln von gleicher Höhe und gleicher Grundfläche hat der gerade Kegel den kleinsten Mantel.

33. Unter allen Kegeln von gleicher Höhe und gleicher Grundfläche, wenn diese zwei auf einander normale Axen hat, ist bei dem geraden Kegel der Mantel am kleinsten.

Mayer-Borda'scher Kreis, s. „Borda'scher Kreis".

Mechanik ist derjenige Theil der angewandten Mathematik, welcher sich mit der durch Einwirkung von Kräften hervorgebrachten Bewegung von Körpern beschäftigt (s. Mathematik). Man nennt die Phoronomie auch die reine Mechanik, dann ist die Anwendung derselben auf die Bewegung der Naturkörper die angewandte M. Die Mechanik der Himmelskörper heifst die Himmelsmechanik.

Mechanische Kräfte oder mechanische Potenzen hiefsen früher die einfachen Maschinen: der Hebel, die schiefe Ebene, die Schraube, das Rad an der Welle, der Keil.

Mechanisches Moment oder auch mechanischer Effect und Effect schlechthin, ist das Maafs für die Wirkung von Kräften auf Bewegung, nämlich das Product aus der Gröfse der Kraft multiplicirt mit der durch sie erzeugten Geschwindigkeit, oder auch mit dem Wege in einer bestimmten Zeit. Wegen der Nebenhindernisse, durch Reibungen u. s. w. unterscheidet man den Nutzeffect, den Nebeneffect und deren Summe den Totaleffect.

Mediale, eine der von Euklid aufgestellten Irrationallinien, s. den Art. „Irrationalen des Euklid".

Mehrheit ist jede Anzahl von Einheiten.

Meile, geographische ist eins der ersten allgemein geltenden Längenmaafse (Normallängenmaafs), hat aber die Eigenthümlichkeit als solches, dafs Niemand deren wirkliche Länge genau kennt. Die geographische Meile hat zur Einheit den Umfang des Erdaequators und ist dessen 5400ter Theil. Es geht daher bei der Ermittelung dieser Meile eben so, wie es bei Ermittelung des Meters, dem 10 Millionsten Theil des nördlichen Erdmeridianquadranten gegangen ist, die Vermessungen haben zu verschiedenen Resultaten geführt und die geographische Meile schwankt innerhalb der Grenzen 3807,09 Toisen = 23642 preufs. Fufs und 3811,5 Toisen = 23661 preufs. Fufs. Erwägt man, dafs dieses Maafs ein astronomisches ist und dafs die Angaben der enorm grofsen Längen auf Beobachtungen und Berechnungen sich gründen, so hat man jede einzelne Länge, durch geographische Meilen ausgedrückt, innerhalb ziemlich genau ermittelter Grenzen.

Menisken sind Linsen von concav-convexer Form, sie sind in der Mitte stärker als am Rand und gehören also zu den Vergrörserungsgläsern. In dem Art. „Brennglas" ist die Wirkung der convex-convexen Gläser entwickelt, in No. 4 mit Fig. 249 für solche Linsen, deren beide Oberflächen verschiedene Halbmesser haben, die also verschiedenen Kugeln angehören. Man hat deren Brennweite

$$w = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{r \cdot \varrho}{r+\varrho}$$

wo n den Coefficient (= 1,5 etwa) für Glas; r, ϱ die gedachten Halbmesser bedeuten.

Setzt man nun $-\varrho$ für ϱ, so hat man einen Meniskus, es ist die innere Fläche, die Höhlung flacher als die äufsere Fläche, also $\varrho > r$, mithin für den Meniscus

$$w = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{r\varrho}{\varrho - r} = 2 \cdot \frac{r\varrho}{\varrho - r}$$

Setzt man die Entfernung des zu vergrörsernden Gegenstandes $= a$, so hat man die Vergrörserung $= \frac{w}{w-a}$. Diese ist also um so grörser, je näher der Gegenstand dem Brennpunkt gebracht wird. Unter gleichen Umständen verhalten sich die Brennweiten eines convex-convexen Glases zu dem eines Meniskus wie

$$\frac{r\varrho}{r+\varrho} : \frac{r\varrho}{\varrho - r} = \varrho - r : \varrho + r$$

Bei einem convex-convexen Glas ist wenn $\varrho = r$ ist die Brennweite $w = r$; ist $\varrho = 2r$, so ist $w = \frac{1}{3}r$. Beim Meniskus ist für $\varrho = 2r$ die Brennweite $w = 4r = 2\varrho$.

Merkur (☿) ist der der Sonne zunächst stehende Planet, also der erste der unteren Planeten. Seine mittlere Entfernung von der Sonne ist cc. 8 Millionen Meilen = 0,3870938 der unserer Erde von der Sonne. Seine siderische Umlaufszeit = 87,696928 Tage = 87 Tg. 23 St. 15 Min. 46 Sec. Seine tropische Umlaufszeit ist nur um 1 Min. 11 Sec. kürzer. Seine Excentricität = 0,2056175 mal der halben grofsen Axe = 1645000 Ml. Hieraus seine gröfste Entfernung von der Sonne 9645000 Ml., seine kleinste 6355000 Ml. Neigung der Bahn gegen die Ekliptik = 7° 0′ 6″. Axenumdrehung in 24 Stunden 5 Min. Die Länge des aufsteigenden Knotens 45° 47′ 9″; die Länge des Perihels 74° 20′ 5″. Die letzten drei Bestimmungen erleiden innerhalb langer Jahre einige kleine Abänderungen. Die Masse des Merkurs ist etwas mehr als der fünfmillionste Theil der Sonnenmasse, nämlich $\frac{1}{4865751}$ derselben. Der Durchmesser des Merkur etwa 670 Meilen, also etwas über $\frac{1}{5}$ des Erddurchmessers und mithin seine Oberfläche etwa $\frac{1}{25}$ der Erdoberfläche; seine scheinbare Gröfse in der Erdnähe 12″, in der Erdferne 4″; sein Volumen 0,6, Dichtigkeit = 2,94, das der Erde

Meridian, Mittagskreis ist jeder durch beide Weltpole gelegte gröfste Kreis der hohlen Himmelskugel, und der durch den Scheitelpunkt eines Orts gelegte Kreis der Meridian des Orts. In diesem Kreise erreichen alle Gestirne für den Ort ihren höchsten Stand, sie culminiren in demselben, und der Augenblick, in welchem die Sonne in ihn tritt, ist Mittag.

Legt man durch den Meridian eines Orts eine Ebene, so ist diese dessen Mittagsebene, Mittagsfläche, diese theilt die sichtbare Himmelshalbkugel in zwei Hälften, in die östliche und in die westliche Halbkugel. Die beiden Durchschnittspunkte des Meridians mit dem Horizont sind der Mittags- oder Südpunkt und der Mitternachts- oder Nordpunkt. Letzterer ist der Endpunkt der Meridianhälfte in welcher der Nordpol liegt, ersterer der ihm entgegengesetzt liegende. Die von diesen gleich weit also 90° abstehenden Punkte des Horizonts sind der Ost- oder Morgenpunkt und der West- oder Abendpunkt. Ersterer, wenn man den Südpunkt ansieht, links, letzterer rechts lie-

end. (Vergleiche den Art. „Astronomischer Horizont“ mit Fig. 92.)

Die Erdmeridiane sind dieselben rößten Halbkreisbogen, wenn man sie tatt auf der Himmelskugel auf der Erdberfläche beschreibt, und sie entstehen uch als die Durchnittslinien der Mittagsächen mit der Erdoberfläche.

Man rechnet die Meridiane nur in der ichtbaren Halbkugel von Pol zu Pol auf 80° Länge, der zweite in derselben Ebene efindliche uns unsichtbare Halbkreis ist er entgegengesetzte Meridian oder uch der untere Meridian.

In den Meridianen werden die geographischen Breiten gemessen. Der Punkt es Aequators ist der Nullpunkt, die Pole egen unter 90° nördlicher und südlicher reite.

Meridian, erster, ist derjenige, welher für die Messung und Angabe der ographischen Längen von Orten den nfangsmeridian ausmacht, der also mit en unter ihm belegenen Orten die geoaphische Länge = Null hat (s. geographische Länge). Die Auffindung des Meridians eines Orts, s. den Art. „Correspondirende Höhen“.

Meridian, magnetischer, s. u. „Magnete“. Vergleiche: „Abweichung der Magnetnadel“.

Meſsinstrumente sind Längen- und Winkelmeſsinstrumente, ferner die Nivellinstrumente. Ueber die ersten, Kette, Säbe, Stangen, s. den Art. „Baculometrie“, ferner die Art. „Gradmessung“ und „Maaſsstäbe“. Die Winkelmeſs- und Nivellirinstrumente erhalten re einzelnen Artikel. Bereits sind behrieben und abgebildet das Astrolabium, die Boussole mit Diopterlineal, der Borda'sche Kreis, die Bergwaage oder das Clitometer, die Bleiler Maurerwaage und die Libelle.

Meſstisch ist auf nicht zu coupirtem errain und für Flächen von nicht zu roſsem Umfang ein recht brauchbares eſsinstrument. Es besteht in einer auf nem Stativ ruhenden quadratischen Reiſsettplatte von 12 bis 18 Zoll im Quaat, die zugleich um eine kugelförmige uſs oder mit einem hohlen Cylinder um nen vollen beliebig horizontal gedreht erden kann. Die Platte muſs, damit e sich nicht wirft, aus zusammengeleimn Lindenhölzern gefertigt sein. Die orizontalstellung geschieht mit Hülfe ner Dosenlibelle, entweder blos durch indrücken der Stativfüſse in den Erdboden, oder mittelst complicirterer Einichtungen, durch Mikrometerschrauben in Schienen und dergleichen. Für den praktischen Gebrauch kann der Meſstisch nicht einfach genug eingerichtet sein. Bei Fortsetzung einer Vermessung, wobei das Instrument über einen zweiten Terrainpunkt aufzustellen ist, und zwar mit dem auf der Platte ihn vorstellenden schon verzeichneten Punkt, wird gelothet. Bei der geringen Oberfläche der Platte thut ein gutes Augenmaaſs genug, sonst steckt man auch eine Gabel, deren unterer Stab mit einem Häkchen versehen ist, bis zu dem verzeichneten Punkt und lothet von dem senkrecht darunter befindlichen Häkchen aus.

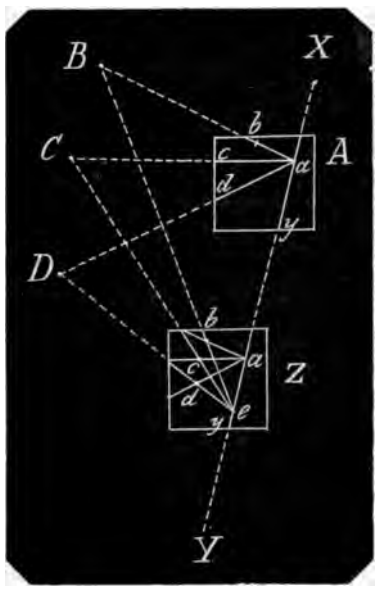
Um einen Winkel zu finden, den zwei entfernte Gegenstände mit dem Standpunkt bilden, visirt man mit dem Diopterlineal nach beiden und zeichnet längs dem Lineal beide visirte Richtungen mit Bleistift nach. Man steckt hierbei wohl auch eine feine Nadel in den Visirpunkt gegen welche das Lineal gelegt wird.

Soll ein Dreieck des Feldes in verjüngtem Maaſsstabe aufgetragen werden, so muſs eine Linie desselben vermessen und in verjüngtem Maaſsstabe auf der Meſstischplatte gezeichnet sein; alsdann erhält man die anderen beiden Seiten durch die eben gedachte Winkelmessung. Man nennt dies Verfahren das Einschneiden mit dem Meſstisch, und man hat ein Vorwärts-Einschneiden und ein Rückwärts-Einschneiden. Ersteres ist, wenn man dieselbe Linie zeichnet, welche man visirt und letzteres, wenn man die Visirlinie rückwärts verlängert zeichnet. Folgendes Beispiel zeigt die Aufnahme einiger Punkte durch beiderseitiges Einschneiden:

Die Punkte A, B, C, D auf dem Felde sollen mit dem Meſstisch in verjüngtem Maaſsstab aufgetragen werden. AB ist gemessen und als Linie ab verjüngt aufgetragen. Richte den Meſstisch mit ab in die Richtung AB, visire und zeichne die Richtungen ac, ad von AC, AD. Um einschneiden zu können wähle eine Distanz XY, entweder zwischen bemerkbaren natürlichen Punkten oder durch Signalstangen. Visire AY, zeichne die Richtung ay. Bringe nun den Meſstisch in irgend einen Punkt Z der Distanz XY, indem man die durch a gezeichnete Richtung ya mit den Punkten A, X visirt, dann sind alle auf dem Meſstisch gezeichneten Linien mit den ihnen entsprechenden auf dem Felde parallel, also auch $ab \fallingdotseq AB$. Visirt man nun von b nach

B und zieht rückwärts die Linie *b* bis zur Linie *ay*, so erhält man durch Rückwärts-Einschneiden den Durch-

Fig. 805.



schnittspunkt *e*. Von diesem Punkt *e* aus visirt man nun die Punkte *D*, *C*, zeichnet und erhält durch Vorwärts-Einschneiden die Durchschnittspunkte *c*, *b* und die Figur *edcba*, in welcher *e* ein Hülfspunkt und zugleich *ae* die in gleich verjüngtem Maafsstab gezeichnete wirkliche Länge *Ae* ist.

Meter, s. u. „Decimalmaafs“ und „Längenmaafse“.

Methode der kleinsten Quadrate ist das rechnende Verfahren, den wirklichen Werthen von Gröfsen, die durch zu viel gegebene Gleichungen überbestimmt sind, mit Hülfe der Quadrate ihrer aus den Gleichungen hervorgehenden Werthsdifferenzen möglichst nahe zu kommen.

Diese Fälle ereignen sich in der Astronomie. Es lehrt nämlich die Erfahrung, dafs astronomische Beobachtungen über Abstände von Gestirnen oder von ausgezeichneten astronomischen Punkten, sie mögen von einem oder von mehreren Beobachtern wiederholentlich geschehen, mit einander niemals genau übereinstimmen. Ist nur eine einzige Länge mit solchen Beobachtungen gegeben, so ist unter allen beobachteten Längen der natürliche Näherungswerth das arithmetische Mittel derselben. Ist die wissenswürdige Länge x mit einer Beobachtung $= a$, mit einer zweiten $= b$ gegeben, so ist der natürliche Näherungswerth von $x = \frac{1}{2}(a+b)$; unter drei Beobachtungen von a, b, c der Mittelwerth von $x = \frac{1}{3}(a+b+c)$. Von n Beobachtungen $= \frac{a+b+c+\ldots}{n}$

Wird dagegen mit jeder Beobachtung die Verbindung zweier unbekannten Gröfsen x, y gefunden, so ist das natürliche Mittel auf so unmittelbare Weise nicht zu finden. Denn es sei durch gleich zuverlässige Beobachtungen gefunden $x+y = a$, $x+y = b$, $x+y = c$, so kann man nur das Mittel von $x+y$, nicht aber das von x allein und von y allein finden. Eine Entwickelung ist aber deshalb nicht möglich, weil für die beiden unbekannten Gröfsen x und y nicht zwei, sondern mehrere Gleichungen gegeben, die Unbekannten also überbestimmt sind.

Nun findet sich aber, dafs die Summe der Quadrate der aus den Beobachtungen hervorgehenden Differenzen (oder Beobachtungsfehlern, wie man sie in der Regel mit Unrecht nennt) zum Minimum gesetzt, einen Werth für jede einzelne der Gröfsen gibt, der für jede unbekannte eingesetzt, den Bedingungsgleichungen näher kommt, als irgend ein anderer Werth. Erwägt man nun, dafs es nicht einen einzigen Werth der verlangten einen oder jeder der verlangten mehreren Unbekannten gibt, welcher sämmtlichen Bedingungsgleichungen genau entspricht, weil diese aus Beobachtungen herrühren, von denen keine einzige genau richtig ist, so ist mit solchem, den Gleichungen entsprechenden Näherungswerthe auch der nächste Näherungswerth für die gesuchte wirkliche Gröfse gegeben.

Um das Gesagte klarer zu machen diene folgendes Beispiel. Es seien gegeben die beiden Gleichungen:

$$3y + 2x = 75$$
$$2y - x = 4$$

Durch die beiden Gleichungen sind x und y bestimmt; durch Entwickelung findet man $x = 19\frac{2}{7}$ und $y = 11\frac{1}{7}$.

Zu diesem Resultat gelangt man nun auch, wenn man jede Gleichung auf Null reducirt, quadrirt und nach den Regeln der Analysis das Minimum sucht. Man hat demnach

$$(3y + 2x - 75)^2 + (2y - x - 4)^2$$

Nach dem Art. „Differenzialrechnung“, No. 10, pag. 309 hat man nun

1. $\frac{\partial (3y+2x-75)^2}{\partial y} + \frac{\partial (2y-x-4)^2}{\partial y} = 0$

2. $\frac{\partial (3y+2x-75)^2}{\partial x} + \frac{\partial (2y-x-4)^2}{\partial x} = 0$

Diese Differenzirung ausgeführt gibt

$6(3y+2x-75)+4(2y-x-4)=0$
$4(3y+2x-75)-2(2y-x-4)=0$

Diese Gleichungen reducirt ergeben

$26y+8x-466=0$
$8y+10x-292=0$

woraus $x = 19\frac{1}{2}$ und $y = 11\frac{1}{2}$.

Dafs mit dem Minimum der Differenzenquadrate das natürlichste Mittel der Beobachtungswerthe entsteht, ist folgender Art zu beweisen.

Es sei beobachtet $x = a$; $x = a_1$; $x = a_2$; $x = a_3$ ....

so ist der natürlichste wahre (der mittlere) Werth $x' = \frac{a + a_1 + a_2 + \ldots}{n}$

Nach der Methode der kleinsten Quadrate hat man

$$(x-a)^2 + (x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + (x-a_3)^2 + \ldots = 0$$

differenzirt

$2(x-a)+2(x-a_1)+2(x-a_2)+\ldots=0$

woraus $x = \frac{a + a_1 + a_2 + \ldots}{n}$

Beispiel. Aus drei Beobachtungen gehen folgende drei Gleichungen hervor:

$x+y=7$
$2x+y=9{,}4$
$y-x=3{,}15$

Man erhält die Gleichung der Quadrate

$$(x+y-7)^2 + (2x+y-9{,}4)^2 + (y-x-3{,}15)^2 = 0$$

Auf x differenzirt

$$2(x+y-7)+4(2x+y-9{,}4)-2(y-x-3{,}15)=0$$

Auf y differenzirt

$$2(x+y-7)+2(2x+y-9{,}4)+2(y-x-3{,}15)=0$$

Die beiden Gleichungen ergeben folgende zwei Bestimmungsgleichungen:

$12x+4y-45{,}3=0$
$4x+6y-39{,}1=0$

Hieraus entwickelt entsteht

$y = 5\frac{1}{7}$; $x = 2\frac{17}{56}$

Setzt man diese Werthe in die gegebenen drei Gleichungen, so erhält man:

$x+y = 7\frac{3}{56} = 7{,}20328$ Unterschied $= +0{,}20328$
$2x+y = 9\frac{17}{14} = 9{,}26428$ Unterschied $= -0{,}13572$
$y-x = 3\frac{3}{56} = 3{,}08214$ Unterschied $= -0{,}06786$
Unterschied in Summa $= -0{,}00030$

Nimmt man zur Prüfung beide Werthe kleiner, $x = 2{,}05$ und $y = 5{,}1$, so hat man

$x+y=7{,}15$; $2x+y=9{,}2$; $y-x=3{,}0$

Unterschied in Summa $-0{,}15$

Nimmt man beide Werthe gröfser:

$x=2{,}1$ und $y=5{,}2$ so erhält man

$x+y=7{,}3$; $2x+y=9{,}4$; $y-x=3{,}1$

Unterschied in Summa $+0{,}25$

Nimmt man x gröfser, y kleiner, z. B. $x=2{,}1$ und $y=5{,}1$, so erhält man

$x+y=7{,}2$; $2x+y=9{,}3$; $y-x=3$

Unterschied in Summa $=-0{,}05$

Nimmt man x kleiner, y gröfser, z. B. $x=2{,}05$; $y=5{,}2$; so erhält man

$x+y=7{,}25$; $2x+y=9{,}3$; $y-x=3{,}15$

Unterschied in Summa $=+0{,}15$

Die Anwendung der kleinsten Quadrate gibt also die summarisch genommene kleinste Differenz.

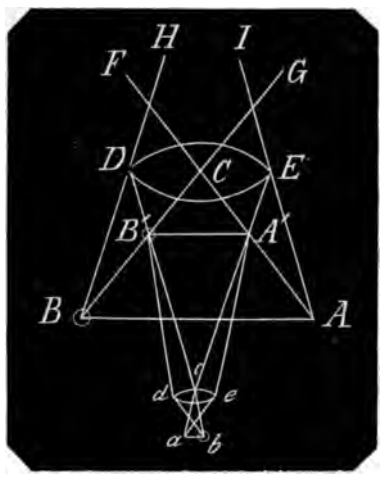
Mikrometerschraube ist eine äufserst genau gearbeitete Schraube mit schwacher Steigung in dreikantigen Gängen, mit welcher man ein sehr geringes, direkt nicht mefsbares Fortschreiten eines mit der Schraube verbundenen Gegenstandes hervorbringen kann. Es ist jedes Winkelinstrument mit solcher Schraube versehen, und man erzielt dadurch äufserst kleine und durch Berechnung in Bruchlängen auszudrückende Verschiebungen, weil man die Länge der Schraube durch die Anzahl der Windungen dividirt, die Länge einer ganzen Steigung erfährt, und weil man vermittelst eines mit der Dreh-

axe befestigten in beliebig viele gleiche Bogen eingetheilten Kreises einen beliebigen aliquoten Theil einer ganzen Windung umzudrehen vermag.

Mikroskop ist ein dioptrisches Werkzeug um äufserst kleine Gegenstände dem Auge in seinen Details in grofsem Maafsstabe deutlich darzustellen. Das einfachste M. ist die Lupe (s. d.), die aus nur einem Glase besteht.

Fig. 806 zeigt ein aus zwei Gläsern zusammengesetztes M., welches man mit einer Röhre eingefafst sich vorzustellen hat.

Fig. 806.



Es ist *de* das biconvexe Objectiv, *ab* der kleine Gegenstand, welcher möglichst nahe dem Brennpunkt von *de* sich befinden mufs, damit ein möglichst grofses Luftbild *A'B'* entsteht. Die Lichtstrahlen *bc* und *ac* gehen geradlinig durch bis *D* und *E*, der Strahl *bd* bricht nach *dB'*, der Strahl *ae* nach *eA'* in *A'* und *B'*, wo sich die beiden genannten Paar Strahlen schneiden, entsteht das vergröfserte Luftbild *A'B'*.

Das vor dem Ocularglas *DE* befindliche Auge sieht die von dem Luftbilde *A'B'* herrührenden Strahlen *A'C*, *B'C* in den Punkten *F* und *G* geradlinig nach *FA* und *GB*; der Strahl *A'E* bricht nach *EJ*, der Strahl *B'D* nach *DH*; das Auge wirft die aus *DH* und *EJ* empfangenen Strahlen geradlinig fort nach *HB* und *JA* und zwischen den Durchnittspunkten *A*, *B* beider genannten Strahlenpaare entsteht das zweite vergröfserte Luftbild *AB*. Ist *A'B'* *n* mal gröfser als *ab* und *AB* *m* mal gröfser als *A'B'*, so wird in dem Bilde *AB* der Gegenstand *ab* um das $n \cdot m$fache vergröfsert.

Million ist die Zahl $= 1000 \times 1000$.

Minuendus, das zu Vermindernde ist die Zahl, von der eine andere abgezogen werden soll; die abzuziehende Zahl heifst der Subtrahendus, die durch die Abziehung des Subtrahendus vom Minuendus entstandene Zahl die Differenz oder der Rest.

Minus ist die Bezeichnung der Eigenschaft einer Gröfse, dafs sie die entgegengesetzte Richtung von Gröfsen derselben Art hat, deren Richtungen für normal gelten (s. „Entgegengesetzte Gröfsen"). Da diese negirende Eigenschaft gegen die normale immer subtractiv auftritt, so hat man eine Minusgröfse immer als Subtrahend zu betrachten, und es ist das Minuszeichen sowohl Zeichen der Negativität als auch der Subtractivität.

Minute ist ein Zeitmaafs und ein Bogenmaafs; als Zeitmaafs der 60te Theil der Stunde und als Bogenmaafs der 60te Theil des Grades.

Mittag ist die allgemein bekannte und gebräuchliche Bezeichnung zweier mit einander zusammenhangenden Begriffe, nämlich eines Zeitaugenblicks und eines Himmelpunkts; beides für jeden Ort der Erdoberfläche. Der Himmelspunkt ist der am südlichen Horizont des Meridians (s. d.), der Zeitpunkt derjenige, in welchem die Sonne für den Wohnort täglich den höchsten Stand erreicht (s. „Culmination").

In mehreren Art. dieses Wörterbuchs, als in „Chronologie" ist der Unterschied zwischen wahrer (der astronomischen) Sonnenzeit und mittlerer (der bürgerlichen, der Kalender-) Sonnenzeit auseinandergesetzt. So wie mit der Sonnenzeit ist es auch mit dem Hauptmittpunkt derselben, dem Mittag, und man hat einen wahren (den astronomischen) Mittag und einen mittleren Mittag. Ersterer ist der Zeitpunkt, in welchem die Sonne für den Wohnort wirklich culminirt, letzterer der Zeitpunkt, in welchem die Sonne culminiren würde, wenn sie statt in der Ekliptik im Aequator und hier das ganze Jahr hindurch sich gleichförmig bewegte (s. den Art. „Chronologie" mit Fig. 295).

Alle Orte der Erde, die unter demselben Meridian liegen, haben in gleichem

Zeitaugenblick Mittag, die in dem entgegengesetzten, dem unteren Meridian liegenden Orte in demselben Augenblick Mitternacht.

Die Erdpole haben keinen Meridian, also nicht Morgen, nicht Mittag, nicht Abend und nicht Mitternacht (s. den Art. „Astronomischer Horizont", No. 7, pag. 147).

Mittagsfernrohr ist ein Fernrohr, welches mit seiner visirenden Axe innerhalb der Mittagsebene verbleibt, in derselben aber auf und nieder gedreht wird, um nicht nur die Zeit des Durchgangs eines Gestirns, die Zeit der Culmination, sondern auch dessen Höhe in diesem Augenblick, dessen Mittagshöhe zu bestimmen.

Mittagsfläche ist die durch den Meridian des Orts gedachte Ebene; sie enthält beide Pole und das Zenith des Orts.

Mittagsgegend, Süden bilden die in der Nähe um den Südpunkt des Meridians im Horizont belegenen Punkte.

Mittagshöhe ist diejenige Höhe, im Bogen vom Horizont aufwärts gemessen, in welcher ein Gestirn durch den Meridian geht (s. „Mittagsfernrohr"; geometrische Construction der Höhen, s. Bd. I, pag. 176—178 mit Fig. 109 bis 111.

Mittagskreise, s. v. w. „Meridiane". Erster Mittagskreis, s. „Meridian, erster".

Mittagslinie die Durchschnittslinie der Mittagsfläche mit dem Horizont.

Mittagspunkt ist der südliche Endpunkt der Mittagslinie.

Mittagsuhr wird eine Sonnenuhr genannt, wenn deren Zeiger genau in der Mittagsfläche liegt, wenn also deren lothrechte Platte in der Ost-Westebene sich befindet.

Mittel ist in einer stetigen Proportion das gleiche Mittelglied. Es gibt dreierlei Proportionen, die arithmetische, die geometrische und die harmonische (s. den Art. „Harmonische Proportion").

Es ist noch hinzuzufügen:

1. dafs für die algebraische Summe mehrerer Zahlen das Mittel der Zahlen = ist dieser arithmetischen Summe dividirt durch die Anzahl der Zahlen:

Von $+a, -b, +c, +d, -e$ ist das arithmetische Mittel $= \frac{a-b+c+d-e}{5}$

2. dafs das arithmetische Mittel zweier Zahlen immer gröfser ist als das geometrische und dieses wieder gröfser ist als das harmonische Mittel. Denn in der stetigen Proportion $a-b=b-d$ ist das Mittel

$$b=\frac{a+d}{2} \qquad (1)$$

und in der Proportion $a : b_1 = b_1 : d$ ist das Mittel

$$b_1=\sqrt{ad} \qquad (2)$$

Nun ist $b^2=\frac{a^2+d^2+2ad}{4}$

$$b_1^2=ad$$

also $4(b^2-b_1^2)=(a-d)^2$

Da nun $(a-d)^2$ immer positiv ist, so ist auch b immer $> b_1$. Das harmonische Mittel hat man aus dem oben citirten Artikel

$$b_2=\frac{2ad}{a+d} \qquad (3)$$

Dafs das harmonische Mittel $b_2=\frac{2ad}{a+d}<b$ ersieht man aus dem eben citirten Artikel.

Es gibt noch eine zweite harmonische Proportion: die contraharmonische Proportion:

$$a-b_2 : b_2-d=d : a$$

Hieraus entsteht

$$a^2+d^2=ab_2+b_2d$$

und das Mittel $b_2=\frac{a^2+d^2}{a+d}$ (4)

Vergleicht man dieses mit dem geometrischen Mittel $b_1=\sqrt{ad}$, so hat man

$$(b_1^2=ad) \gtrless \left(b_2^2=\frac{a^4+d^4+2a^2d^2}{(a+d)^2}\right)$$

woraus geordnet und reducirt

$$a^3d+ad^3 \gtrless a^4+d^4$$

und hieraus $d \gtrless a$

Da aber $b_2 < a$; $d < b_2$, so ist $d < a$, und folglich $b_1 < b_2$.

D. h. das contraharmonische Mittel ist gröfser als das geometrische Mittel.

Durch Umformung des contraharmonischen Mittels $\frac{a^2+d^2}{a+d}$ in $a+d-\frac{2ad}{a+d}$ ersieht man dessen Gröfse = dem doppelten arithmetischen Mittel (1) weniger dem harmonischen Mittel.

Mittelgeschwindigkeit ist nicht zu verwechseln mit mittlerer Geschwindigkeit. Diese letztere ist diejenige Geschwindigkeit, welche ein materieller Punkt haben würde, wenn er statt einer fort-

dauernd ungleichförmigen Bewegung während einer bestimmten Zeit und auf eine bestimmte Länge innerhalb derselben Zeit und auf dieselbe Länge von Anfang bis Ende gleichförmig sich bewegte, wie diese Bezeichnung bei den Gestirnen, als der Sonne und dem Monde gebräuchlich ist. Die erstere, die Mittelgeschwindigkeit dagegen ist die wirkliche Geschwindigkeit eines materiellen Punkts, wenn dieser von zweien nach verschiedenen Richtungen wirkenden Kräften zugleich angegriffen wird, so dafs er weder die eine noch die andere annehmen kann, sondern dafs er in einer zwischen beiden liegenden Richtung sich bewegen mufs, und zwar mit einer aus den Gröfsen und Richtungen der Kräfte hervorgehenden Geschwindigkeit (s. den Art. „Bahn", No 2 mit Fig. 163 pag. 270). Es verhalten sich hier in der Mechanik die Seitengeschwindigkeiten zur Mittelgeschwindigkeit wie in der Statik die Seitenkräfte zur Mittelkraft. Jene drei Geschwindigkeiten bilden das Parallelogramm der Geschwindigkeiten, wie die drei Kräfte das Parallelogramm der Kräfte.

Mittelkraft, s. u. „Kräfte im Gleichgewicht", No. 5, pag. 57, ist gleichfalls nicht zu verwechseln mit mittlerer Kraft (s. d.).

Mittellinie ist jede Linie, die innerhalb eines begrenzten Raumes in der Mitte liegt, die eine Figur in zwei gleiche Theile theilt, die in Prismen und Cylindern die Mittelpunkte der Endflächen, die in Pyramiden und Kegeln die Spitze mit dem Mittelpunkt der Grundebene verbindet. In zweiastigen Curven heifsen die Mittellinien Axen und Durchmesser.

Mittellinie eines Magnets ist die gerade Verbindungslinie seiner Pole.

Mittelpunkt ist in einer Linie, einer Fläche und einem Körper der mittelste Punkt: die Mitte einer geraden Linie ist deren Mittelpunkt. Stellt man sich diese Linien, Flächen und Körper gleichförmig materiell oder auch ohne Masse vor, so ist Mittelpunkt mit Schwerpunkt gleichbedeutend.

Der Mittelpunkt des Gleichgewichts von Kräften ist der Punkt des Systems, welcher nach der Richtung der entgegengesetzt mittleren Kraft unterstützt das System in Ruhe erhält.

Mittelpunkte der Momente s. den Art. „Kräfte im Gleichgewicht", No. 16, pag. 62.

Der Mittelpunkt des Schwungs bei einem zusammengesetzten (einem physischen) Pendel ist derjenige Punkt desselben, welcher selsst ohne Masse an einer massenlosen Pendelstange in derselben Entfernung vom Aufhängepunkt mit dem zusammengesetzten Pendel dieselben Schwingungen machen würde.

Der Mittelpunkt einer Centralbewegung ist der Sitz der dieselbe erhaltenden attractorischen Kraft.

Mittelpunkt der Entfernung, s. später: „Punkt der mittleren Entfernung".

Der Mittelpunkt eines Stofses ist der Punkt des gestofsenen Körpers, der von der stofsenden Kraft allein getroffen dem Körper dieselbe Wirkung mittheilen würde.

Mittelpunktsgleichung, s. v. w. „Gleichung der Bahn" (s. d.).

Mitternacht ist wie Mittag eine Zeit und ein Punkt an der hohlen Himmelskugel, beides für jeden Ort der Erdoberfläche. Der Himmelspunkt ist der am nördlichen Horizont des Meridians, der Zeitpunkt derjenige, in welchem die Orte des unteren Meridians Mittag haben. Eben so sind die Begriffe wahre und mittlere Mitternachtszeit. Die beiden Erdpole haben keine Mitternacht.

Mitternachtsfläche, Mitternachtsgegend, Mitternachtspunkt wie bei Mittag; Mitternachtskreise sind die unteren Meridiane.

Anstatt Mittagshöhe hat man Mitternachtstiefe der Gestirne. Eine genauere Betrachtung und geometrische Constructionen derselben befindet sich wie für Mittagshöhe Bd. I, pag. 176 bis 178 mit Fig. 109 bis 111.

Mittlere Anomalie, s. „Anomalie" mit Fig. 66.

Mittlere Bewegung ist die auf gleichförmige Bewegung reducirte ungleichförmige B. Vergleiche: Mittlere Geschwindigkeit in dem Art. „Mittelgeschwindigkeit".

Mittlere Entfernung bedeutet in der Astronomie die halbe grofse Axe der elliptischen Bahn eines Planeten oder eines Mondes. Ihre Länge ist die Einheit für alle übrigen Längenelemente desselben Gestirns; vornehmlich bestimmt sie die Excentricität der Bahn, nämlich den Abstand des Axenmittelpunkts von dem Brennpunkt, dem Kraftpunkt, dem Ort des Centralkörpers, als aliquo-

ten Theil dieser halben grofsen Axe, diese halbe grofse Axe als Einheit genommen, in Decimalen, desgleichen wird für die Angaben der mittleren Entfernung unseres Mondes und der übrigen Planeten in abstracten Zahlen als Vielfache der halben grofsen Axe unserer Ekliptik als Einheit.

Mittlere Glieder oder innere Glieder einer Proportion, s. u. „äufsere Glieder einer Proportion.

Mittlere Kraft. Ist während auf einander folgender constanter Zeitperioden und bei constanten Bewegungen während jeder solchen Zeit der zu überwindende Widerstand in fortdauernd abwechselnder Gröfse, so ist es auch die diesen Widerstand überwindende Kraft. Diejenige, während solcher Periode constant bleibende Kraft, welche dieselbe Wirkung auf den ungleichförmigen Widerstand ausüben würde, heifst die mittlere Kraft (vergleiche den Art. „Krummzapfen").

Mittlerer Ort ist bei der Bewegung eines Gestirns in seiner Bahn derjenige augenblickliche Standpunkt desselben, den er in der Bahn einnehmen würde, wenn er von dem angenommenen Anfangspunkt ab für dieselbe Zeit des vollständigen Umlaufs gleichförmig sich bewegt hätte.

Mittlerer Planet ist statt des wirklichen Planeten ein eingebildeter Planet, der immer in einem jeden der eben beschriebenen mittleren Orte sich befindet; der Planet also, welcher statt des wirklichen in gleichförmiger Bewegung die Bahn durchläuft. Vergleiche: Mittlere Sonne in dem Art. „Chronologie", No. 5, pag. 27.

Mittlere Proportionale zweier Zahlengröfsen ist die Quadratwurzel aus dem Product derselben.

Mittlere Sonne ist das für die wirkliche Sonne, was der mittlere Planet für den Planeten ist (s. „Chronologie", No 5, pag. 27).

Mittleres Sonnenjahr, mittlerer Sonnentag u. s. w., s. den folgenden Artikel.

Mittlere Sonnenzeit ist unsere bürgerliche Zeit. Sie würde die wahre Sonnenzeit sein, wenn die für diese Zeit von den Astronomen eingesetzte fingirte mittlere Sonne statt der wirklichen am Himmel sich scheinbar bewegte. Die mittlere Sonne hat mit der wahren einen Cyclus von 400 Jahren, in welchen ihre Umläufe sich vollständig ausgleichen und wieder einen genau übereinstimmenden Nullpunkt als Anfangspunkt erhalten, wo die wahre und die mittlere Sonne genau dieselbe Länge haben.

Aus überlieferten Beobachtungen, verglichen mit den selbst angestellten, berechnete man nämlich, dafs bei 400 maligem Umlauf, also den Umlauf, das Jahr, im Mittel 365¼ Tage genommen, also innerhalb einer Bewegung von 146100 Tagen die Sonne 3 Tage voraus war, so dafs sie die 400 Umläufe in 146097 Tagen gemacht hatte, und es ergab sich hieraus das mittlere Sonnenjahr $= \frac{1}{400} \times 146097 = 365{,}2425$ mittlere Sonnentage = 365 Tg. 6 St 3 Min. 44,64 Sec. Die neuesten Beobachtungen und Berechnungen haben jedoch das in unserem Jahrhunderte stattfindende tropische Jahr mit Beachtung der veränderlichen Nachtgleichen = 365,242255 mittlere Sonnentage = 365 Tg. 5 St. 48 Min. 50,832 Sec. gefunden.

Jeder dieser Tage, in welchem die mittlere Sonne in der Ekliptik einen Bogen beschreibt von $\frac{360°}{365{,}242255} = 0{,}9856472$ Grad, ist unser irdischer Tag, die ewig constante Zeit einer vollständigen Umdrehung der Erde um ihre Axe, die wir in 24 Stunden eintheilen und von der Uhr ablesen, die wahre Sonne mag bei ihrer ungleichförmigen Bewegung stehen wo es sei.

Die Sonne beschreibt während eines solchen (tropischen) Jahres die ganze Ekliptik weniger der Länge 50,1 Bogensecunden, um welche der Frühlingspunkt während des Jahres zurückgetreten und der Sonne entgegengekommen ist.

Nun stelle man sich vor den Zeitpunkt, in welchem eine nach bürgerlicher Zeit richtig gehende Uhr am 31ten December eines Jahres genau Mitternacht 12 Uhr zeigt, in demselben Augenblick denke man sich den Standpunkt der Sonne in der Ekliptik sichtbar markirt. Nach einem Jahre gebe man Acht auf den Augenblick, in welchem die Sonne 50,1 Bogensecunden von der Marke rechts eintritt, wo sie also dieselbe Länge hat, so zeigt in diesem Augenblick die Uhr den 1ten Januar Morgens 5 Uhr 48′ 51″. In dem folgenden Jahr zeigt die Uhr den ersten Januar Morgens 11 Uhr 37′ 42″; nach dem zweiten Jahre den ersten Januar Nachmittag 5 Uhr 26′ 33″, nach dem dritten Jahre den ersten Januar Abends 11 Uhr 15′ 24″ und nach dem vierten Jahr den zweiten Januar Morgens früh 5 Uhr 4′ 15″.

Es ist also in den vier Jahren fast ein ganzer Tag (es fehlen nur 44′ 36″ daran) verloren gegangen und aus diesem Grunde erhält in dem vierten Jahre der Februar einen Tag mehr.

Mit diesem eingeschalteten Tage ist die mittlere, die bürgerliche Zeit der wahren Sonnenzeit um 44 Minuten 36 Secunden vorausgeeilt. Demnach beträgt dies einen Tag von 24 Stunden zu viel in $4 \cdot \frac{24^\circ}{44' 36''}$ = 129,15 Jahren. Die weitere Zeitausgleichung s. in dem Art. „Kalenderjahr".

Die tägliche Bewegung der mittleren Sonne beträgt, wie schon oben angegeben 0,9856472 Grad = 59 Min. 8½ Sec. Bogenmaafs. Die stündliche Bewegung 2 Min. 27,847 Sec., die Bewegung in der Minute = 2,464 Secunden, die Vergleichung der mittleren Sonnenzeit mit der Sternzeit s. d. Art. „Chronologie".

Die mittlere Sonnenzeit ist mit der wahren Zeit viermal im Jahre übereinstimmend: um den 14ten April, den 14ten Juni, den 31ten August und den 23ten December.

Modul (Modulus). 1. Das bei den alten Architekten gebräuchliche Längenmaafs, der untere Säulenhalbmesser, welcher in 30 Partes, Minuten getheilt wurde.

2. Bei Logarithmen gegebener Zahlen derjenige der beiden Factoren, aus welchen jeder L. besteht, welcher nur allein von der Basis des Systems abhängig ist, s. den Art. „Basis, Grundzahl eines Logarithmensystems", pag. 327. Der Modul des natürlichen Systems ist = 1; der des Brigg'schen Systems = 0,43429...

Molecüle sind Massentheilchen eines Körpers, nicht aber die Atome (s. d.), sondern Complexe derselben.

Molecülarkräfte werden die zwischen den Molecülen von festen Körpern thätigen Kräfte genannt, welche dieselben an einander befestigen; sie sind also gleichbedeutend mit den Cohäsionskräften; bei tropfbar flüssigen Körpern sind sie gering, bei luftförmigen Körpern findet die entgegengesetzte Eigenschaft statt, die Kraft der Expansion.

Moment, 1. mechanisches ist das Product einer Kraft oder Masse multiplicirt mit deren Geschwindigkeit oder mit dem Wege derselben in einer bestimmten Zeit.

2. Statisches ist das Product einer Kraft oder Masse multiplicirt mit ihrem Abstand von einem beliebig angenommenen Punkt oder von einer beliebig angenommenen oder einer durch die Natur des Systems gegebenen Drehaxe. Das statische Moment ist entweder ein Moment der Kraft oder ein Moment des Widerstandes (Moment der Last). Anwendungen hiervon s. den Art. „Kräfte im Gleichgewicht", No. 17, pag. 62 und weiter.

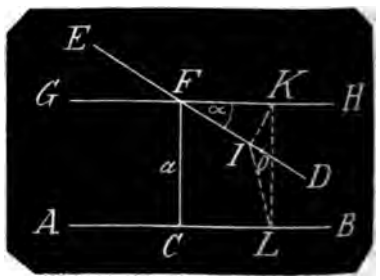
Moment der Trägheit. Was hierunter verstanden wird ist in dem Art. „Massenreduction" No. 2 erklärt. Die Voraussetzung, dafs die Masse in einem Punkt sich befinde, wie in jenem Art. No. 1, bei Entwickelung des Gesetzes für die Reduction hat angenommen werden müssen, ist hypothetisch, denn eins der wesentlichen Grundmerkmale von Masse ist, dafs sie einen Raum einnimmt. Hat man also von einer einen begrenzten Raum einnehmenden Masse das Trägheitsmoment zu bestimmen, so gibt es theoretisch betrachtet nur ein Mittel, nämlich, dafs man jedes einzelne Massentheilchen der Masse mit dem Quadrat seines Abstandes multiplicirt und alle diese Producte addirt; oder dafs man den Grenzwerth der Summe findet, unter der Bedingung, dafs die einzelnen Massentheilchen immer kleiner und kleiner genommen werden, wodann dieser Grenzwerth das Trägheitsmoment der ganzen Masse ist.

Kennt man dieses Trägheitsmoment, so ist auch immer die Bewegung der Masse um eine Axe vermöge einer gegebenen Kraft zu bestimmen, wenn man hypothetisch annimmt, dafs dieselbe Masse in einem einzigen Punkt vereinigt ist.

In Folgendem sollen die Trägheitsmomente ($\mathfrak{M}$) von Linien, Flächen und Körpern bestimmt werden.

1. Das Trägheitsmoment einer mit Masse gleichförmig vertheilten

Fig. 807.



$DE = l$; $DF = b$

geraden Linie DE, die mit einer Drehaxe AB verbunden ist.

Die Masse der Linie DE sei $= M$, $CF = a$ der kürzeste Abstand beider Linien GH und AB, die durch F gezogene gerade Linie GH sei $\perp AB$, $\angle HFD = \alpha$. Die Länge von $DE = l$, die Länge $DF = b$, die auf dieselbe kommende Masse $= m'$, so ist $M' = \frac{b}{l} M$.

Theile DF in n gleiche Theile; von F aus sei J der $m-1$)te, O der $m$te Theilpunkt, so ist der auf JO kommende Massentheil $= \frac{1}{n} M'$.

Fällt man das Loth JK auf GH und das Loth KL auf AB, so ist JL der Abstand des Punkts J von AB, und man hat

$$JL^2 = KL^2 + JK^2 = a^2 + (JF \cdot \sin\alpha)^2 = a^2 + \left(\frac{m-1}{n} b\right)^2 \sin^2\alpha$$

Eben so findet sich das Quadrat des Abstands des Punkts O von AB

$$= a^2 + \left(\frac{m}{n} b\right)^2 \sin^2\alpha$$

Das Moment der auf JO vertheilten Masse ist offenbar kleiner, als wenn die Masse in O und gröfser als wenn sie in J vereinigt wäre. Multiplicirt man also die beiden Abstände mit der Masse $\frac{1}{n} M'$ und bezeichnet das wirkliche Moment dieser Masse mit $\mathfrak{M}_m$, so hat man

$$\left[\frac{a^2}{n} + \frac{(m-1)^2}{n^3} b^2 \sin^2\alpha\right] M' < \mathfrak{M}_m < \left(\frac{a^2}{n} + \frac{m^2}{n^3} b^2 \sin^2\alpha\right) M'$$

Setzt man hierein statt m der Reihe nach die Folge der natürlichen Zahlen von 1 bis n und summirt die n Vergleichungen, so schliefsen die Aufsenglieder das Moment $\mathfrak{M}'$ der Masse M' ein und man hat

$$\left[a^2 + \frac{\Sigma(n-1)^2}{n^3} \cdot b^2 \sin^2\alpha\right] M' < \mathfrak{M}' < \left[a^2 + \frac{\Sigma n^2}{n^3} \cdot b^2 \sin^2\alpha\right] M'$$

Der Unterschied der einschliefsenden Gröfsen ist offenbar

$$\frac{n^2}{n^3} b^2 \sin^2\alpha\, M' = \frac{1}{n} b^2 \sin^2\alpha\, M'$$

und kann mit dem Wachsthum von n beliebig klein werden.

Nun ist aber

$$\frac{\Sigma(n-1)^2}{n^3} = \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6n^3}$$

und

$$\frac{\Sigma n^2}{n^3} = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6n^3}$$

Folglich begreifen diese beiden Zahlen offenbar die Zahl $\frac{n \cdot n \cdot 2n}{6 \cdot n^3} = \frac{1}{3}$ in sich, und folglich ist auch die Gröfse

$$(a^2 + \tfrac{1}{3} b^2 \sin^2\alpha) M' = (a^2 + \tfrac{1}{3} b^2 \sin^2\alpha) \frac{b}{l} M$$

mit $\mathfrak{M}'$ zwischen denselben Gröfsen begriffen, deren Unterschied beliebig klein werden kann. Man hat also das Trägheitsmoment der geraden Linie

$$\mathfrak{M}' = (a^2 + \tfrac{1}{3} b^2 \sin^2\alpha) \frac{b}{l} M. \qquad (1)$$

Eben so findet man das Trägheitsmoment für die auf EF kommende Masse, wenn man $l - b$ statt b setzt. Daher das Trägheitsmoment der ganzen Massenlinie

$$\mathfrak{M} = (a^2 + \tfrac{1}{3} b^2 \sin^2\alpha) \frac{c}{l} M + [a^2 + \tfrac{1}{3} (l-b)^2 \sin^2\alpha] \frac{l-b}{l} M$$
$$= [a^2 + (\tfrac{1}{3} l^2 - lb + b^2) \sin^2\alpha] M \qquad (2)$$

Ist $b = \frac{1}{2} l$, so dafs F in der Mitte von DE liegt, so ist

$$\mathfrak{M} = (a^2 + \tfrac{1}{12} l^2 \sin^2\alpha) M \qquad (3)$$

Ist $b = 0$, so dafs die Linie $EF = l$ an dem der Axe näheren Endpunkt F mit der Axe befestigt ist, so hat man

$$\mathfrak{M} = (a^2 + \tfrac{1}{3} l^2 \sin^2\alpha) M \qquad (4)$$

Ist $b = l$, so dafs die Linie DF an dem der Axe entfernteren Endpunkt F mit der Axe verbunden ist, so bleibt

$$\mathfrak{M} = (a^2 + \tfrac{1}{3} l^2 \sin^2\alpha)\, M \qquad (5)$$

Ist $a = 0$, so dafs der Punkt F in C liegt und die Linie unmittelbar mit der Axe verbunden ist, so ist

$$\mathfrak{M} = (\tfrac{1}{3} l^2 - lb + b^2) \sin^2\alpha \cdot M \qquad (6)$$

Ist $\alpha = 0$, so dafs die Linie in GH und in der Entfernung $a \neq$ mit der Axe schwingt, so ist

$$\mathfrak{M} = a^2 M \qquad (7)$$

Ist $\alpha = 90°$, so dafs die Linien in F mit der Axe verbunden, in einer Ebene schwingt, so ist

$$\mathfrak{M} = (a^2 + b^2 - lb + \tfrac{1}{3} l^2) M \qquad (8)$$

Ist $\alpha = 90°$, $b = \frac{1}{2} l$, so dafs die Linie in der Mitte mit der Axe verbunden ist und in einer Ebene schwingt, dann ist

$$\mathfrak{M} = (a^2 + \tfrac{1}{12} l^2) M \qquad (9)$$

Ist $\alpha = 90°$, $b = 0$, so dafs die Linie an einem Endpunkt mit der Axe verbunden ist und in einer Ebene schwingt, so ist

$$\mathfrak{M} = (a^2 + \tfrac{1}{3} l^2) M \qquad (10)$$

Ist $\alpha = 90°$, $a = 0$, so dafs die Linie, indem F in C liegt, mit der Axe unmittelbar verbunden ist, so hat man

$$\mathfrak{M} = (\tfrac{1}{3} l^2 - lb + b^2) M \qquad (11)$$

Ist $\alpha = 90°$, $a = 0$, $b = 0$, so dafs die Linie EF mit dem einen Endpunkt F in C liegt und in einer Ebene schwingt, dann ist

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3} l^2 \cdot M \qquad (12)$$

Ist $a = 0$, $b = \frac{1}{2} l$, so dafs die Linie DE mit ihrer Mitte in C liegt, so ist

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{12} l^2 \sin^2\alpha\, M$$

Ist $a = 0$, $b = 0$, so dafs die Linie EF mit einem Endpunkt in C sich befindet, dann ist

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3} l^2 \sin^2\alpha\, M \qquad (13)$$

Ist $a = 0$, $\alpha = 90°$, $b = \frac{1}{2} l$, so dafs die Linie EF mit einem Endpunkt in C und in einer Ebene schwingt, dann ist

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{12} l^2 M \qquad (14)$$

Die Formel 1 ist mit Hülfe der Integralrechnung leichter darzustellen:

Setzt man nämlich das beliebige Stück $FJ = x$, läfst dies um $JO = \triangle x$ wachsen, so ist die auf $\triangle x$ fallende Masse $= \frac{M}{l} \triangle x$, der Abstand JL ist im Quadrat $= KL^2 + JK^2 = a^2 + FJ^2 \sin^2\alpha = a^2 + x^2 \sin^2\alpha$ mithin ist das Moment von $\triangle x =$

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} = (a^2 + x^2 \sin^2\alpha) \frac{M}{l}$$

Mithin das Moment der Linie $DF = x$:

$$\mathfrak{M} = \int (a^2 + x^2 \sin^2\alpha) \frac{M}{l}\, \partial x = \frac{M}{l} (a^2 x + \tfrac{1}{3} x^3 \sin^2\alpha)$$

wo die Constante fortfällt, weil für $x = 0$ auch $M = 0$ wird.

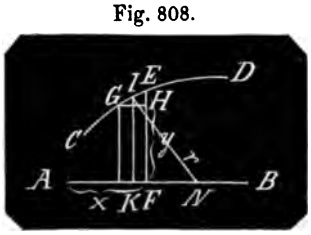
Setzt man nun $x = DF = b$, so erhält man das Moment wie Formel 1.

$$\mathfrak{M} = \frac{M}{l} (a^2 b + \tfrac{1}{3} b^3 \sin^2\alpha) = (a^2 + \tfrac{1}{3} b^2 \sin^2\alpha) \frac{b}{l} M$$

2. Das Trägheitsmoment einer Curve, auf welcher Masse gleichförmig vertheilt ist, in Beziehung auf eine mit ihr in einer Ebene liegende Axe.

Es sei AB die Drehaxe, CD die Curve, deren Masse auf die Länge $= 1$ sei m,

Fig. 808.



die Axe zur Abscissenlinie genommen habe A zum Anfangspunkt, für den Punkt E seien $AF = x$, $EF = y$ die Coordinaten. Die Länge des Bogens CE sei $= l$, das Trägheitsmoment der Masse dieses Bogens $= \mathfrak{M}$, so ändert sich dies Moment um $\triangle \mathfrak{M}$, wenn x den Zuwachs $\triangle x$ und y den Zuwachs $\triangle y$ erhält; der Zuwachs der Masse ist sodann $= m \cdot \triangle l$.

Nun kann $\triangle x$ so klein genommen werden, dafs die Ordinaten von y bis $y + \triangle y$ entweder fortdauernd wachsen oder abnehmen. Dann ist der Zuwachs $\triangle \mathfrak{M}$ des Moments begriffen zwischen den Trägheitsmomenten, welche für die Masse $m \cdot \triangle l$ statt finden würden, wenn diese sich einmal am Endpunkt der Ordinate y und das andere Mal an dem der $(y + \triangle y)$ befände. Man hat daher immer

$$y^2 m \cdot \Delta l \leqq \Delta \mathfrak{M} \leqq (y+\Delta y)^2 m \cdot \Delta l$$

folglich
$$m y^2 \cdot \frac{\Delta l}{\Delta x} \leqq \frac{\Delta \mathfrak{M}}{\Delta x} \leqq m (y+\Delta y)^2 \cdot \frac{\Delta l}{\Delta x}$$

und wenn man zu den Grenzwerthen übergeht, so erhält man

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} = m y^2 \cdot \frac{\partial l}{\partial x}$$

woraus
$$\mathfrak{M} = m \int y^2 \cdot \frac{\partial l}{\partial x} \cdot \partial x = m \int y^2 \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, \partial x + C \qquad (15)$$

wo die Constante so zu bestimmen ist, dafs das Integral für die Abscisse des Anfangspunkts C des Bogens verschwindet.

Beispiel. Es sei CD ein Kreisbogen, dessen Mittelpunkt in der Axe AB liegt, dessen Halbmesser $= r$. Nimmt man den Mittelpunkt zum Anfangspunkt der Coordinaten, so ist

$$y^2 = r^2 - x^2; \text{ also } y \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = -x \text{ oder } \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{y}$$

Diese Werthe in Gleichung 15 substituirt ergibt

$$\mathfrak{M} = m \int y^2 \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \partial x = m \int y \sqrt{y^2 + x^2}\, \partial x = mr \int y\, \partial x \qquad (16)$$

Es ist aber $\int y\, \partial x$ die Fläche des Kreisstücks zwischen der Abscisse und den beiden Ordinaten des Anfangs- und des Endpunkts des Bogens. Ist dieses Flächenstück vom Inhalt $= F$, so ist

$$\mathfrak{M} = m \cdot r \cdot F \qquad (17)$$

Dieses Resultat erhält man auch auf elementarem Wege:

Denn man denke sich den Bogen CD in unendlich viele unendlich kleine Theile getheilt, S_m sei der $m$te dieser Theile von C an gezählt, das Loth aus der Mitte J von S_m auf die Axe gefällt sei y_m, die Projection des Theils S_m auf die Axe sei z_m. Dann ist das Trägheitsmoment von S_m

$$\mathfrak{M}_m = m S_m \cdot y_m^2.$$

Denkt man sich nun das Dreieck EGH als ein sehr kleines rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse S_m und dessen wagerechte Cathete z_m ist, ferner von J den Halbmesser $JN = r$ gezeichnet, also das zweite Dreieck, wo der Halbmesser r die Hypotenuse und y_m die der z_m ähnlich liegende Cathete ist, so hat man

$$S_m : z_m = r : y_m$$

woraus
$$S_m = r \frac{z_m}{y_m}$$

mithin $\mathfrak{M}_m = m \cdot r \cdot z_m \cdot y_m$.

Es ist also das Trägheitsmoment des ganzen Bogens $= m \cdot r \leqq (z_m \cdot y_m)$.

Da nun $z_m \cdot y_m$ die Fläche ist, die von $S_m \cdot z_m$ und den Endordinaten gebildet wird, so ist das Trägheitsmoment der ganzen Linie $= m \cdot r \cdot F$.

3. Das Trägheitsmoment einer mit Masse gleichmäfsig versehenen Umdrehungsfläche, wenn die Axe der Fläche zugleich die Drehaxe ist.

Ist CD, Fig. 808, der Bogen der Curve, von der bei der Umdrehung um AB die krumme Fläche durchlaufen wird; sind x, y die Endordinaten des Bogens, die Drehaxe AB zur Abscissenlinie genommen, die krumme Fläche $= u$ und die auf die Flächeneinheit kommende Masse $= m$, das Trägheitsmoment der ganzen Masse $= \mathfrak{M}$, so hat man unter der Voraussetzung wie bei No. 2:

$$y^2 \cdot m \cdot \Delta u \leqq \Delta \mathfrak{M} \leqq (y+\Delta y)^2 \cdot m \Delta u$$

Diese drei Vergleichungen durch Δx dividirt und zum Grenzwerth übergegangen gibt

$$\mathfrak{M} = m \int y^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\, \partial x.$$

Nach Bd. II, pag. 194 ist aber das Differenzial der Umdrehungsfläche u

$$= \frac{\partial u}{\partial x} = 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}$$

Mithin ist

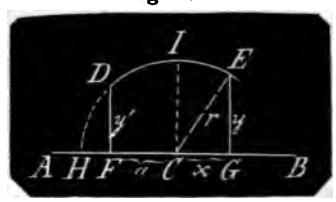
$$\mathfrak{M} = 2m\pi \int y^3 \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, \partial x + C \qquad (18)$$

Beispiel. Es sei, Fig. 809, die Umdrehungsfläche eine Kugelzone, die ihren Mittelpunkt C in der Drehaxe hat; so ist, wenn man den Mittelpunkt zum Anfangspunkt der Abscissen nimmt,

$$y^2 = r^2 - x^2$$

hieraus $$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{y}$$

Fig. 809.



und folglich $$\mathfrak{M} = 2m\pi \int y^2 \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}\,\partial x = 2m\pi \int y^2 \sqrt{y^2 + x^2}\,\partial x$$
$$= 2\pi mr \int y^2 = 2\pi mr \int (r^2 - x^2) + C$$

also das Trägheitsmoment der von dem Bogen EJ gebildeten Kugelzone

$$\mathfrak{M} = 2\pi mr\,(r^2 x - \tfrac{1}{3}x^3) \qquad (19)$$

wo die Constante fortfällt, weil für $x = 0$ auch die Zone = 0 wird.

Hat der Anfangspunkt des Bogens die Abscisse a links von C, d. h. ist die Abscisse für diesen Anfangspunkt $= -a$, so muſs $\mathfrak{M}$ für $x = -a$ verschwinden. Dann ist also

$$0 = 2\pi mr\,(-r^2 a + \tfrac{1}{3}a^3) + C$$

also vollständig für den Bogen DE

$$\mathfrak{M} = 2\pi mr\,[r^2(x + a) - \tfrac{1}{3}(x^3 + a^3)] \qquad (20)$$

Die Klammergröſse multiplicirt mit π ist die körperliche Zone zwischen den Ordinaten y und y' und schreibt man dieselbe

$$(r^2 x - \tfrac{1}{3}x^3) + (r^2 a - \tfrac{1}{3}a^3)$$

so ist π mal der ersten Klammergröſse die von $CJEG$ gebildete körperliche Zone von der Höhe x, und π mal der zweiten die von $CJDF$ gebildete körperliche Zone von der Höhe a.

In dem Art. „Kugel“, No. 26 hat man nämlich die Formel für die körperliche Zone

$$\tfrac{1}{6}\pi h\,(3a^2 + 3b^2 + h^2).$$

Für die Zone rechts von der Höhe x ist hier $a = r$; $b = y$ und $h = x$; demnach hat man die körperliche Zone

$$\tfrac{1}{6}\pi x\,(3r^2 + 3y^2 + x^2) = \tfrac{1}{6}\pi x\,(3r^2 + 3r^2 - 3x^2 + x^2) = \pi\,(r^2 x - \tfrac{1}{3}x^3).$$

Eben so erhält man die links liegende Zone von der Höhe $a = \pi\,(r^2 a - \tfrac{1}{3}a^3)$.

Bezeichnet man den Inhalt der zwischen y und y' begriffenen körperlichen Zone mit K, so ist das Moment der Zonenoberfläche

$$\mathfrak{M} = 2mr \cdot K \qquad (21)$$

Erstreckt sich der Bogen bis H in die Drehaxe, so ist die Fläche eine Calotte, a ist $= r$ und aus Formel 20

$$\mathfrak{M} = 2\pi mr\,[r^2(x + r) - \tfrac{1}{3}(x^3 + r^3)] = 2\pi mr\,[\tfrac{2}{3}r^3 + r^2 x - \tfrac{1}{3}x^3] \qquad (22)$$

Erstreckt sich der Bogen auch auf der zweiten Seite bis zur Drehaxe, so ist auch $x = r$, die Fläche ist eine Kugelfläche, und deren Trägheitsmoment

$$\mathfrak{M} = \tfrac{4}{3}\pi mr^4 \qquad (23)$$

Bezeichnet man mit M die auf die ganze Kugelfläche vertheilte Masse $= 4\pi mr^2$, so ist das Trägheitsmoment

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3}r^2 M \qquad (24)$$

d. h. Das Trägheitsmoment der Masse einer Kugeloberfläche ist = dem von $\frac{1}{3}$ der Masse, wenn diese in dem Abstand des Halbmessers von der Drehaxe angebracht wird.

Die vorstehenden Resultate lassen sich auch durch elementare Betrachtung finden. Ist nämlich die Masse auf eine Zone gleichmäſsig vertheilt, so theile man die Höhe derselben in unendlich viele unendlich kleine Theile und lege durch die Theilpunkte Ebenen normal der Drehaxe, wodurch die Zone in lauter gleich groſse Zonen zerlegt wird, von denen jede $= 2\pi r \frac{h}{n}$ ist; deren Masse $= 2\pi r \frac{h}{n} \cdot m$.

Der Abstand des $m$ten Theils von der Axe sei y_m, so ist dessen Trägheitsmoment $= 2\pi r \frac{h}{n} \cdot m y_m^2$, folglich die Sum-

me aller Momente der n Zonen =

$$2rm \lesssim \pi \frac{h}{n} y_m^2.$$

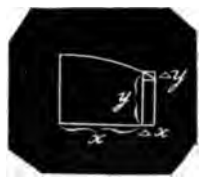
Nun ist $\pi \cdot \frac{h}{n} y_m^2$ der Inhalt des $m$ten Kugelabschnitts, mithin die Summe $\lesssim \pi \frac{h}{n} y_m^2$ der Inhalt des ganzen Kugelabschnitts. Dieser mit K bezeichnet gibt das Trägheitsmoment $= 2rmK$.

Verwandelt sich die Zone in die Kugelfläche, so wird $K = \frac{1}{2}\pi r^2$, folglich das Trägheitsmoment der Kugelfläche $= \frac{1}{2}\pi m r^4 = \frac{2}{3} r^2 M$, wo M die auf die ganze Kugelfläche vertheilte Masse bezeichnet.

4. Das Trägheitsmoment einer mit Masse gleichmäfsig versehenen Figur, die von der Abscisse, den beiden Ordinaten und einer Curve begrenzt ist, in Beziehung auf die Abscisse als Drehaxe.

Die Masse der Flächeneinheit sei $= m$, zwischen den Abscissen x und $x + \Delta x$ sollen die Ordinaten entweder immerfort wachsen oder immerfort abnehmen. Denkt man sich nun zwei Rechtecke von der gemeinschaftlichen Höhe Δx, deren Grundlinien y und $(y + \Delta y)$, so wird von den

Fig. 810.



Trägheitsmomenten beider Rechtecke der Zuwachs $\Delta \mathfrak{M}$ des Moments der Figur eingeschlossen. Die Massen der Rechtecke sind $y \cdot \Delta x \cdot m$ und $(y + \Delta y)\Delta x \cdot m$, deren Trägheitsmomente sind aber = den Trägheitsmomenten ihrer Massen einmal auf y und das andere Mal auf $(y + \Delta y)$ gleichmäfsig vertheilt, daher diese Trägheitsmomente

$$= \tfrac{1}{3} y^3 \cdot y \cdot \Delta x \cdot m \text{ und } \tfrac{1}{3}(y + \Delta y)^3 (y + \Delta y) \Delta x \cdot m$$

Zwischen beide fällt $\Delta \mathfrak{M}$.

Wenn man also die drei Vergleichungen durch Δx dividirt und zu den Grenzwerthen übergeht, so ergibt sich

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} = \tfrac{1}{3} m y^3$$

Woraus das Trägheitsmoment der Figur

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3} m \int y^3 \partial x + C \qquad (25)$$

Beispiel. Es sei, Fig. 811, die begrenzende Curve eine gerade Linie AB, die Figur also ein Trapez. Man hat also

$$x_1 : y_1 = x : y$$

woraus $y = \frac{y_1}{x_1} x$

folglich

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3} m \int \left(\frac{y_1}{x_1} x\right)^3 \partial x + C$$

$$= \tfrac{1}{3} m \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^3 \int x^3 \partial x$$

$$= \tfrac{1}{12} m \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^3 \cdot x^4 + C$$

Für $x = x_1$ mufs $\mathfrak{M}$ verschwinden, daher vollständig

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{12} m \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^3 (x^4 - x_1^4) \qquad (26)$$

Will man das Trägheitsmoment durch die parallelen Seiten y, y_1 und durch die Höhe x ausdrücken, so hat man die Höhe $= h$ gesetzt: $h = x - x_1$,

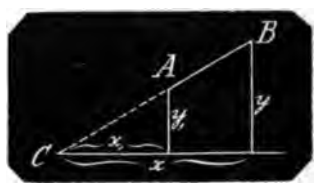
ferner $x = \frac{x_1}{y_1} y$

folglich $x_1 + h = x = \frac{x_1}{y_1} y$

woraus $x_1 = \frac{h y_1}{y - y_1}$

und $x = h + \frac{h y_1}{y - y_1} = \frac{h y}{y - y_1}$

Fig. 811.



Diese Werthe in Formel 26 substituirt gibt das Moment des Trapezes

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{12} m \left(\frac{y - y_1}{h}\right)^3 \cdot \frac{h^4 y^4 - h^4 y_1^4}{(y - y_1)^4} = \tfrac{1}{12} m h \frac{y^4 - y_1^4}{y - y_1} = \tfrac{1}{12} m h (y + y_1)(y^2 + y_1^2) \qquad (27)$$

Ist M die Masse des Trapezes $= \frac{1}{2}h(y+y_1)m$, so hat man

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3}(y^2 + y_1^2)\,M \qquad (28)$$

Ist $y_1 = 0$, so erhält man das Trägheitsmoment des rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Cathete die Drehaxe ist $= \frac{1}{3}y^2 M = \frac{1}{12}xy^2$ (29)

d. h. halb so grofs als wenn die Masse auf der Cathete y vertheilt wäre.

Da jedes Dreieck sich in zwei rechtwinklige Dreiecke theilen läßt, so ist das Trägheitsmoment eines Dreiecks, dessen Grundlinie die Drehaxe ist = dem 6ten Theil der Masse, dieselbe in der Spitze des Dreiecks vereinigt gedacht.

5. Das Trägheitsmoment eines Dreiecks mit darauf gleichförmig vertheilter Masse in Beziehung auf eine Axe, die in der Ebene des Dreiecks durch seine Spitze liegt.

Es sei (Fig. 812) die gegenüberliegende Seite mit der Axe parallel $= b$, deren Abstand von der Axe $= h$, die auf die Flächeneinheit kommende Masse $= 1$. Theile

Fig. 812.

h in n gleiche Theile, ziehe durch die Theilpunkte Parallelen mit der Axe und beschreibe zwischen ihnen inwendig und auswendig Rechtecke, berechne die Trägheitsmomente der inwendigen Rechtecke, als wenn deren Massen auf den der Axe zunächst liegenden Seiten, und die der auswendigen Rechtecke, als wenn deren Massen auf den der Axe entferntest liegenden Seiten vereinigt wären.

Das oberste inwendige Rechteck hat die Breite $\frac{n-1}{n}b$, die Höhe $\frac{1}{n}h$ und sein Abstand $= \left(\frac{n-1}{n}\right)h$, sein Trägheitsmoment ist also

$$\frac{n-1}{n}b \cdot \frac{1}{n}h \cdot \left(\frac{n-1}{n}h\right)^2 = \frac{(n-1)^3}{n^4}bh^3$$

Das oberste auswendige Rechteck hat die Breite b, die Höhe $\frac{1}{n}h$ und den Abstand $= h$, sein Trägheitsmoment ist also

$$b \cdot \frac{1}{n}h \cdot h^2 = \frac{1}{n}bh^3$$

Mithin sind die Summen der Momente sämmtlicher in- und auswendigen Rechtecke

$$\lessgtr \frac{(n-1)^3}{n^4}bh^3 \text{ und } \lessgtr \frac{n^3}{n^4}bh^3$$

Zwischen beiden, deren Unterschied $= \frac{1}{n}bh^3$ ist fällt das Moment des gegebenen Dreiecks.

Nun ist $\lessgtr (n-1)^3 = \frac{1}{4}(n-1)^2 \cdot n^2$

$\lessgtr n^3 \quad = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

Zwischen beiden ist die Zahl eingeschlossen $\frac{1}{4}n^2 \cdot n^2 = \frac{1}{4}n^4$.

Zwischen beiden obigen Summen liegt also auch $\frac{1}{4}\frac{n^4}{n^4} \cdot bh^3 = \frac{1}{4}bh^3$

und da das Moment des Dreiecks ebenfalls zwischen beiden Summen liegt, so ist das Trägheitsmoment eines mit der Spitze in der Drehaxe und mit der Grundlinie $\parallel$ derselben befindlichen Dreiecks $= \frac{1}{4}bh^3$ (30)

Ist M die gesammte Masse des Dreiecks $= \frac{1}{2}bh$, so ist

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}h^2 M \qquad (31)$$

Das Moment ist also gleich dem Moment der halben Masse, dieselbe in einem Punkt unter dem Abstand h vereinigt gedacht.

6. Das Trägheitsmoment eines materiellen Trapezes, dessen eine parallele Seite Drehaxe ist.

Theile das Trapez durch Lothe aus den Endpunkten der oberen Seite auf die untere in ein Rechteck A und zwei rechtwinklige Dreiecke B, C, so ist nach der Bezeichnung, Fig. 813, die Masse des Rechtecks $= \mathfrak{M}$, gesetzt

Fig. 813.

$$\mathfrak{M}_1 = \tfrac{1}{2}h^2 \cdot M_1 = \tfrac{1}{2}h^2 \cdot bh = \tfrac{1}{2}bh^3$$

Das Moment der beiden Dreiecke B

und $C = \mathfrak{M}_2 = \frac{1}{6}h^2 \cdot M_2$, wenn M_2 deren Masse bezeichnet,

$$= \tfrac{1}{6}h^2 \cdot \tfrac{1}{2}(a-b)h = \tfrac{1}{12}(a-b)h^2$$

Mithin das Moment des Trapezes die Summe der beiden Momente

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{12}(a+3b)h^3 \qquad (32)$$

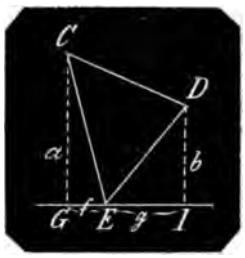
Die Masse M des Trapezes ist $= \frac{a+b}{2}h$ mithin zugleich

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{6}\frac{a+3b}{a+b}h^2 M \qquad (33)$$

7. Das Trägheitsmoment eines beliebigen materiellen Dreiecks in Beziehung auf eine durch eine der Spitzen des Dreiecks und in dessen Ebene liegende Drehaxe.

Ist die auf die Flächeneinheit kommende Masse = 1, so hat man bei der Bezeichnung, Fig. 814, nach Formel 27:

Fig. 814.



Das Moment des Trapezes $CDJG =$

$$\mathfrak{M}_1 = \tfrac{1}{12}(f+g)(a+b)(a^2+b^2)$$

Die Trägheitsmomente der beiden Seitendreiecke sind nach Formel 29

$$\tfrac{1}{12}fa^3 + \tfrac{1}{12}g \cdot b^3.$$

Diese beiden Momente von dem des Trapezes abgezogen gibt das Moment des Dreiecks CDE

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{12}(ag+bf)(a^2+ab+b^2) \qquad (34)$$

Der Inhalt des Dreiecks CDE ist $=$

$$\frac{a+b}{2}(f+g) - \frac{af+bg}{2} = \frac{ag+bf}{2} = M$$

daher das Trägheitsmoment des $\triangle CDE$ auch

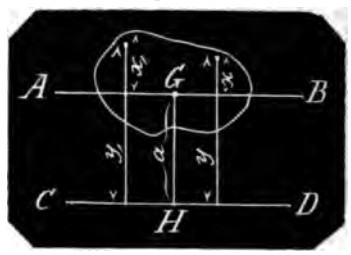
$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{6}(a^2+ab+b^2)M \qquad (35)$$

8. Das Trägheitsmoment eines Massensystems für irgend eine Axe ist = dem Trägheitsmoment für eine mit dieser parallele Axe durch den Schwerpunkt des Systems + dem Trägheitsmoment der gesammten Masse in ihrem Schwerpunkt vereinigt gedacht und dieser in Beziehung auf die erste Axe genommen. D. h. Ist $\mathfrak{M}$ das Trägheitsmoment des Systems in Beziehung auf die durch den Schwerpunkt genommene Axe, M die gesammte Masse, $\mathfrak{M}'$ aber das Trägheitsmoment derselben in Beziehung auf eine mit jener im Abstand a parallelen Axe, so ist

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + a^2 M$$

Denn es sei AB (Fig. 815) die durch den Schwerpunkt G des Systems liegende Axe, CD die in der Entfernuug $GH = a$ mit ihr parallele Axe; m; m_1; m_2 ...

Fig. 815.



seien die einzelnen Massentheile des Systems, ihre Abstände von AB seien x; x_1; x_2 ...; von CD aber y; y_1; y_2 ...; endlich φ; φ_1; φ_2 ... die Winkel, welche die Abstände x; x_1 ... mit den Abständen a der beiden Axen mit den Durchschnittspunkten der Axe AB machen, diese Winkel von 0 bis 360° nach einer Seite hin gezählt (Fig. 816).

Fig. 816.

Da nun die x auf der Axe AB und die y auf der Axe CD normal stehen, so sind die Axen auch auf den Ebenen der Winkel zwischen x und y normal und folglich sind die Abstände der Standpunkte je zweier zusammengehörigen Lothe x und y auf den beiden Axen normal und folglich überall $= a$.

Man hat demnach in jedem Dreieck zwischen a und den x und y:

$y^2 = a^2 + x^2 - 2ax\cos\varphi$

und wenn man mit dem Massenelement m multiplicirt

$my^2 = ma^2 + mx^2 - 2max\cos\varphi$

Eben so hat man

$m, y_,^2 = m, a^2 + m, x_,^2 - 2m, ax, \cos\varphi,$

u. s. w.

Addirt man nun alle diese so gebildeten Gleichungen, so erhält man

$$my^2 + m, y_,^2 + \ldots = (m + m, + \ldots)\, a^2 + mx^2 + m, x_,^2 + \ldots - 2a(mx\cos\varphi + m, x, \cos\varphi, + \ldots)$$

Nun sind die Producte $x\cos\varphi$, $x,\cos\varphi,\ldots$ die Abstände der Massentheile von Ebenen, die sich sämmtlich in der durch den Schwerpunkt G mit CD parallel gelegte Axe durchschneiden, und zwar liegen diese Abstände gegen die Ebenen entweder nach der einen oder der anderen Seite, je nachdem die Producte positiv oder negativ sind. Folglich ist die letzte Klammergröfse die algebraische Summe der statischen Momente sämmtlicher Massentheile in Beziehung auf jene Ebenen aus. Diese Ebenen gehen aber durch den Schwerpunkt G des Systems, folglich ist diese algebraische Summe der Producte = 0.

Die Gleichung reducirt sich also auf folgende:

$$my^2 + m, y_,^2 + \ldots. = (m + m, + \ldots)\, a^2 + mx^2 + m, x_,^2 + \ldots$$

Nach der angenommenen Bezeichnung ist aber

$my^2 + m, y_,^2 + \ldots. = \mathfrak{M}'$

$m + m, + \ldots\ldots\ldots = M$

$mx^2 + m, x_,^2 + \ldots. = \mathfrak{M}$

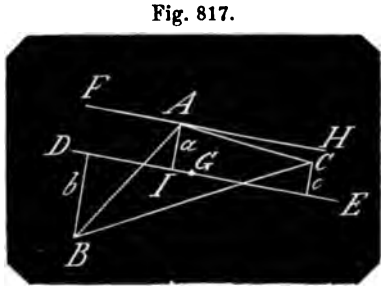
folglich hat man

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + a^2 M \qquad (36)$$

9. Aus dem Satz No. 8 folgt, dafs in Bezug auf parallele Axen das Trägheitsmoment für diejenige Axe, welche durch den Schwerpunkt geht, ein Minimum ist; dafs es aber für alle parallele Axen unter einerlei Abstand vom Schwerpunkt unverändert dasselbe bleibt.

10. Das Trägheitsmoment eines Dreiecks in Bezug auf eine Axe in der Ebene desselben und durch den Schwerpunkt, ferner in Bezug auf jede andere Axe parallel mit der Ebene des Dreiecks (Fig. 817).

Fig. 817.



Ist DE eine durch den Schwerpunkt G des $\triangle ABC$ gelegte Axe, die Masse des Dreiecks = M, die Abstände der drei Winkelspitzen = a, b, c. Man ziehe durch die Spitze A die Linie $FH \fallingdotseq DE$, so sind die Abstände der Punkte B und C von $FH = a + b$ und $a \pm c$, folglich das Trägheitsmoment des $\triangle ABC$ für FH nach Formel 35

$$\mathfrak{M}' = \tfrac{1}{6}[(a+b)^2 + (a+b)(a\pm c) + (a\pm c)^2]\, M$$

Hiervon a^2M abgezogen, gibt das Trägheitsmoment $\mathfrak{M}$ des Dreiecks in Beziehung auf die Axe DE.

Nun ist der Abstand $AJ = a$ des Schwerpunkts G von der Axe FH

$$= a = \frac{(a+b) + (a \pm c)}{3}$$

woraus $a = b \pm c$

folglich ist das Moment des Dreiecks auf FH, wenn man c eliminirt

$$\mathfrak{M}' = \tfrac{1}{6}(7a - ab + b^2)\, M$$

und das gesuchte Moment auf $DE = \mathfrak{M}' - a^2 M$

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{6}(a^2 - ab + b^2)\, M \qquad (37)$$

und wenn man a eliminirt

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{6}(b^2 \pm bc + c^2)\, M \qquad (38)$$

Soll nun das Trägheitsmoment für eine beliebige andere mit der Dreiecksebene parallele Axe gefunden werden, so darf man nur durch den Schwerpunkt des Dreiecks eine Linie $\fallingdotseq$ der Axe ziehen, das Trägheitsmoment für dieselbe nach Formel 37 oder 38 aufstellen und hierzu $a,^2M$ addiren, wenn a, den Abstand beider Axen bezeichnet.

11. Das Trägheitsmoment einer materiellen Figur, wenn diese durch eine Curve und beide Endordinaten begrenzt ist und die Dreh-

axe durch einen Punkt der Abscisse normal auf der Ebene der Figur steht.

Es sei für die Figur *CAGF* der Durchschnittspunkt *E* der Drehaxe zugleich der

Fig. 818.

Anfangspunkt der Coordinaten. Es sei das Trägheitsmoment der Figur = $\mathfrak{M}$, das Flächenstück selbst = u. Aendert sich x um Δx, und hiermit y um Δy, u um Δu, also die Masse mu um $m\Delta u$, so denke man diese zuerst auf y und dann auf $y+\Delta y$ gleichmäfsig vertheilt, so werden beide das wahre Moment $\Delta\mathfrak{M}$ einschliefsen.

Nun ist nach Formel 10

das auf y vertheilte Moment =
$$(x^2+\tfrac{1}{3}y^2)\,m\cdot\Delta u$$
das auf $y+\Delta y$ vertheilte Moment =
$$[(x+\Delta x)^2+\tfrac{1}{3}(y+\Delta y)^2]\,m\cdot\Delta u$$

Zwischen beiden wenn man sie mit Δx dividirt ist also auch $\frac{\Delta\mathfrak{M}}{\Delta x}$ begriffen.

Beide einschliefsende Quotienten haben aber den gemeinschaftlichen Grenzwerth $(x^2+\frac{1}{3}y^2)\,m\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$, folglich hat auch die zwischen fallende Gröfse $\frac{\Delta\mathfrak{M}}{\Delta x}$ denselben Grenzwerth. D. h. es ist

$$\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial x}=m\,(x^2+\tfrac{1}{3}y^2)\,\frac{\partial u}{\partial x}$$

Da nun nach Obigem $\partial u = y\cdot\partial x$, so hat man

$$\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial x}=m\,(x^2+\tfrac{1}{3}y^2)\,y$$

woraus das Moment der Figur

$$\mathfrak{M}=m\int(x^2+\tfrac{1}{3}y^2)\,y\,\partial x+C \qquad (39)$$

12. Beispiel. Es sei die Linie (*AG*) eine gerade, die durch die Drehaxe *E* geht, also die Linie *EG*. Dann ist ihre Gleichung wenn man $a=x\,tg\,\alpha$ setzt

$$x\,tg\,\alpha=y$$

und
$$\mathfrak{M}=m\int(x^2+\tfrac{1}{3}y^2)\,y\,\partial x=m\int(x^3+\tfrac{1}{3}x^3\,tg^2\alpha)\,x\,tg\,\alpha\,\partial x$$
$$=m\,tg\,\alpha\,(1+\tfrac{1}{3}tg^2\alpha)\int x^3\,\partial x=\tfrac{1}{4}m\,tg\,\alpha\,(1+\tfrac{1}{3}tg^2\alpha)\,x^4+C$$

Setzt man $x=b$, $y=h$, so ist $tg\,\alpha=\frac{h}{b}$ und man hat das Trägheitsmoment eines rechtwinkligen Dreiecks für eine durch die Spitze von b normal auf der Dreiecksebene befindliche Drehaxe

$$\mathfrak{M}=\tfrac{1}{12}m\cdot b\cdot h\,(3b^2+h^2) \qquad (40)$$

Die Masse des Dreiecks ist $M=\frac{1}{2}mbh$, mithin hat man auch das Trägheitsmoment

$$\mathfrak{M}=\tfrac{1}{6}(3b^2+h^2)\,M=\tfrac{1}{2}(b^2+\tfrac{1}{3}h^2)\,M=\tfrac{1}{2}bh\,(b^2+\tfrac{1}{3}h^2) \qquad (41)$$

D. h. das Trägheitsmoment eines rechtwinkligen Dreiecks für die Axe, welche durch die Spitze normal auf seiner Ebene steht, ist so grofs, als wenn die halbe Masse auf der gegenüberliegenden Cathete gleichmäfsig vertheilt wäre.

Das Quadrat des Abstandes des Schwerpunkts von der Drehaxe *E* ist
$$=(\tfrac{1}{3}b)^2+(\tfrac{1}{3}h)^2=\tfrac{1}{9}(4b^2+h^2)$$
Also das Moment $\mathfrak{M}'$ des Dreiecks auf eine durch den Schwerpunkt normal auf die Dreiecksebene gerichtete Axe ist

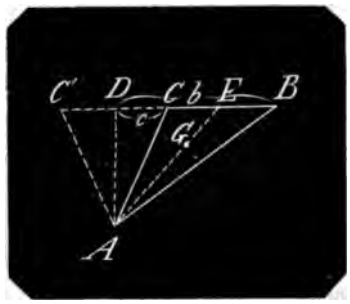
$$\mathfrak{M}'=\tfrac{1}{2}(b^2+\tfrac{1}{3}h^2)\,M-\tfrac{1}{9}(4b^2+h^2)\,M=\tfrac{1}{18}(b^2+h^2)\,M \qquad (42)$$

13. Das Trägheitsmoment eines beliebigen Dreiecks für eine Axe, die auf dessen Ebene normal ist.

Die Axe gehe zuerst durch den Winkelpunkt *A*, dessen Abstand *AD* von der gegenüberliegenden Seite *BC* sei h, und b und c seien die Abstände der beiden anderen Spitzen *B* und *C* von dem Punkt *D*.

Die Masse der Flächeneinheit sei = 1, so ist das Moment des $\triangle ABD$ nach Formel 41

Fig. 819.



$= \frac{1}{2} bh\,(h^2 + \frac{1}{3} b^2)$

das Moment des $\triangle ACD = \frac{1}{2} ch\,(h^2 + \frac{1}{3} c^2)$

folglich das Trägheitsmoment des $\triangle ABC$ in Beziehung auf A

$$\mathfrak{M}' = \tfrac{1}{2} h\,[bh^2 + \tfrac{1}{3} b^3 - ch^2 - \tfrac{1}{3} c^3]$$
$$= \tfrac{1}{2} h\,(b-c)\,[h^2 + \tfrac{1}{3}(b^2 + bc + c^2)] \quad (43)$$

Ist M die Masse des Dreiecks $ACB = \frac{1}{2} h\,(b-c)$, so hat man auch das Trägheitsmoment des $\triangle ABC$ in Beziehung auf A

$$\mathfrak{M}' = \tfrac{1}{2}\,[h^2 + \tfrac{1}{3}(b^2 + bc + c^2)]\,M \quad (44)$$

Der Schwerpunkt G des $\triangle ABC$ liegt auf der BC in E halbirenden Linie AE, und es ist $AG = \frac{2}{3} AE$ daher

$$AG^2 = \tfrac{4}{9}(AD^2 + DE^2) = \tfrac{4}{9}\left[h^2 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2\right]$$

Daher das Trägheitsmoment des $\triangle ABC$ in Beziehung auf die in dem Schwerpunkt G befindliche Axe

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}\,[h^2 + \tfrac{1}{3}(b^2 + bc + c^2)]\,M - \tfrac{4}{9}\left[h^2 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2\right] M$$
$$= \tfrac{1}{18}(h^2 + b^2 + c^2 - bc)\,M \quad (45)$$

14. Ist das Dreieck ACC' gleichwinklig, also $AC' = AC$, so hat man nur das Moment des $\triangle ACC'$ zu bestimmen, das Moment dessen Hälfte, des $\triangle ADC$ wie No. 13 das Moment des $\triangle ABD$, wenn man in demselben c für b setzt

$= \frac{1}{2} ch\,(h^2 + \frac{1}{3} c^2)$

Das Moment des gleichschenkligen $\triangle ACC'$ in Beziehung auf die Axe in A ist demnach

$= \frac{1}{2} ch\,(h^2 + \frac{1}{3} c^2)$

Bezeichnet man wie gewöhnlich die ganze Grundlinie CC' mit einem Buchstaben a, so hat man vom $\triangle ACC'$ das Trägheitsmoment für die Axe in A

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2} ah\,(h^2 + 1\tfrac{1}{2} a^2) \quad (46)$$

und da dessen Masse $M = \frac{1}{2} ah$ auch

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}(h^2 + 1\tfrac{1}{2} a^2)\,M \quad (47)$$

15. Das Trägheitsmoment einer materiellen Kreisebene für eine durch seinen Mittelpunkt normal auf der Ebene befindliche Axe.

Ist M die Masse, also die Masse m der Flächeneinheit $= \dfrac{M}{\pi r^2}$, so sei $\mathfrak{M}'$ das Trägheitsmoment des concentrischen Theils der Kreisebene vom Halbmesser $= x$. Beim Zuwachs von x um $\triangle x$ wächst die Masse um

$$\pi m\,[(x + \triangle x)^2 - x^2] = \pi m\,(2x + \triangle x)\,\triangle x$$

Denkt man sich alle diese Massentheile erst im Abstand x, dann im Abstand $x + \triangle x$ vom Mittelpunkt, so wird das wahre Moment der Zuwachsmasse von beiden Momenten eingeschlossen und es ist

$$\pi m\,(2x + \triangle x)\,\triangle x \cdot x^2 < \triangle \mathfrak{M}' < \pi m\,(2x + \triangle x)\,\triangle x\,(x + \triangle x)^2$$

Die drei Vergleichungen durch $\triangle x$ dividirt und zu den Grenzwerthen übergegangen gibt

$$\frac{\partial \mathfrak{M}'}{\partial x} = 2\pi m x^3$$

woraus $\mathfrak{M}' = 2\pi m \int x^3\,\partial x = \frac{1}{2}\pi m x^4$

wo $C = 0$ ist.

Für $x = r$ hat man das Trägheitsmoment der ganzen Kreisebene

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}\pi m r^4 = \tfrac{1}{2} r^2 M \quad (48)$$

Dies Resultat erhält man elementar, wenn man den Kreis in lauter kleine Dreiecke zerlegt denkt, deren Spitzen im Mittelpunkt liegen; alsdann ist nach No. 12 das Moment jedes der Dreiecke = dem Moment der halben Masse ($\frac{1}{2}\pi r^2 m$) in der Grundlinie, also im Abstand r von der Axe entfernt; mithin gilt dies von allen Dreiecken zusammen genommen, d. h. vom ganzen Kreise.

16. Das Trägheitsmoment eines materiellen Kreisringes von den Halbmessern r und ρ in Beziehung auf die durch den Mittelpunkt normal der Ebene befindliche Drehaxe.

Setzt man die Masse des Ringes $= M$,

die des Ergänzungskreises $= M'$, so ist das Trägheitsmoment des ganzen Kreises
$$= \tfrac{1}{2} r^2 (M + M')$$
das des Ergänzungskreises
$$= \tfrac{1}{2} \varrho^2 M'$$
folglich das des Ringes $= \tfrac{1}{2} r^2 (M + M') - \tfrac{1}{2} \varrho^2 M'$

Nun ist $M' : M + M' = \varrho^2 : r^2$
woraus $M : M' = r^2 - \varrho^2 : \varrho^2$
und $M : M + M' = r^2 - \varrho^2 : r^2$
folglich ist $M' = \dfrac{\varrho^2}{r^2 - \varrho^2} \cdot M$,
$$M + M' = \frac{r^2}{r^2 - \varrho^2} \cdot M$$
folglich ist das Trägheitsmoment des Kreisrings

$$\mathfrak{M} = \left(\tfrac{1}{2} r^2 \cdot \frac{r^2}{r^2 - \varrho^2} - \tfrac{1}{2} \varrho^2 \cdot \frac{\varrho^2}{r^2 - \varrho^2} \right) M = \tfrac{1}{2} \frac{r^4 - \varrho^4}{r^2 - \varrho^2} M = \tfrac{1}{2} (r^2 + \varrho^2) M \qquad (49)$$

17. Das Trägheitsmoment eines Cylinders in Beziehung auf seine Axe als Drehaxe.

Denkt man sich den Cylinder in eine unendliche Menge von Cylindern von unendlich kleinen Höhen zertheilt, so hat jeder einzelne dieser Theile dasselbe Moment mit dem Kreise $\frac{1}{2} r^2 M$ (Formel 48), mithin der ganze Cylinder die Summe dieser Momente zum Moment, also desgleichen das Trägheitsmoment $\frac{1}{2} r^2 M$.

Man kann aber auch für die Ermittelung des Moments die Massentheile des Cylinders parallel mit seiner Axe nach einer Seite hin fortgeführt und auf einen seiner Endkreise gebracht denken, wo dann das Trägheitsmoment in Beziehung auf die Axe dasselbe bleibt. Es ist nun der Cylinder zu einer materiellen Kreisebene geworden und man hat nach Formel 48

Das Trägheitsmoment eines vollen Cylinders in Beziehung auf seine Axe.
$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2} r^2 M \qquad (50)$$
Die Masse M des Cylinders ist $= \pi r^2 h$, mithin hat man auch
$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2} \pi r^4 h \qquad (51)$$

18. Das Trägheitsmoment eines hohlen Cylinders in Beziehung auf seine Axe als Drehaxe.

Es ist dies bei derselben Betrachtung mit No. 17 wie Formel 49
$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2} (r^2 + \varrho^2) M \qquad (52)$$
Die Masse M ist $= \pi (r^2 - \varrho^2) h$, demnach auch
$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2} \pi (r^4 - \varrho^4) h \qquad (53)$$

19. Das Trägheitsmoment einer Kugel in Beziehung auf eine durch ihren Mittelpunkt gelegte Drehaxe.

Es sei AB die Drehaxe, FG der auf AB normale durch den Mittelpunkt gerichtete, DE ein zweiter ihm paralleler Kreisdurchschnitt, der Halbmesser CG der Kugel $= r$, der Abstand beider Kreisebenen $= x$, der Halbmesser von DE $= y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Bezeichnet man das Trägheitsmoment des Kugelabschnitts von der Höhe $r + x$ mit $\mathfrak{M}'$, so ist das Trägheitsmoment dessen Zuwachses $\triangle \mathfrak{M}'$ begriffen zwischen

Fig. 820.

dem zweier Cylinder von der Höhe $\triangle x$ und deren Grundflächen die Halbmesser y und $y + \triangle y$ haben. Ist m die Masse der Cubikeinheit, so sind diese Trägheitsmomente nach Formel 51

$\frac{1}{2} \pi m y^4 \cdot \triangle x$ und $\frac{1}{2} \pi m (y + \triangle y)^4 \triangle x$

folglich $\dfrac{\partial \mathfrak{M}'}{\partial x} = \tfrac{1}{2} \pi m y^4$

folglich
$$\mathfrak{M}' = \tfrac{1}{2} \pi m \int y^4 \, \partial x = \tfrac{1}{2} \pi m \int (r^2 - x^2)^2 \, \partial x$$
$$= \tfrac{1}{2} \pi m (r^4 x - \tfrac{2}{3} r^2 x^3 + \tfrac{1}{5} x^5) + C$$

Das Integral zwischen den Grenzen $x = -r$ und $x = +r$ gibt das Trägheitsmoment der ganzen Kugel. Für $x = -1$ wird $\mathfrak{M}' = 0$, also $C = \frac{4}{15} \pi m r^5$. Diesen Werth eingesetzt und $x = +r$ genommen entsteht das Trägheitsmoment der ganzen Kugel
$$\mathfrak{M} = \tfrac{8}{15} \pi m r^5 \qquad (54)$$
Die Masse der Kugel ist $= \frac{4}{3} \pi m r^3$, folglich ist zugleich
$$\mathfrak{M} = \tfrac{2}{5} r^2 M \qquad (55)$$

20. Ein zweites Verfahren für die Auffindung des Trägheitsmoments der Kugel ist folgendes:

Es sei x der Halbmesser eines concentrischen Theils der Kugel, $\mathfrak{M}'$ dessen Trägheitsmoment, K' dessen Inhalt, so sind die zusammen gehörigen Aenderungen Δx, $\Delta K'$, $m\Delta K'$ und $\Delta\mathfrak{M}'$.

Die Masse zuerst auf den Halbmesser x, sodann auf den Halbmesser $x+\Delta x$ vereinigt gedacht, geben die beiden einschliefsenden Trägheitsmomente. Nun hat man nach Formel 24

$$\tfrac{2}{3}mx^2\Delta K' < \Delta\mathfrak{M}' < \tfrac{2}{3}m(x+\Delta x)^2\Delta K'$$

woraus $$\frac{\partial\mathfrak{M}'}{\partial x} = \tfrac{2}{3}mx^2\frac{\partial K'}{\partial x}$$

Nun ist $K' = \frac{4}{3}\pi x^3$

folglich $$\frac{\partial K'}{\partial x} = 4\pi x^2$$

Mithin $$\frac{\partial\mathfrak{M}'}{\partial x} = \tfrac{8}{3}\pi m x^4$$

und $$\mathfrak{M}' = \tfrac{8}{15}\pi m x^5 + C$$

wo die Constante fortfällt.

Für $x = r$ und $M = \frac{4}{3}\pi r^3$ entsteht das Trägheitsmoment der ganzen Kugel

$$\mathfrak{M} = \tfrac{2}{5}r^2 M$$

21. Die ad No. 19 angewendete Methode beschränkt sich nicht auf die Kugel allein, sondern gilt für alle Umdrehungskörper, wenn ihre Axe als Drehaxe genommen wird.

Ist nämlich die Erzeugungslinie ihrer Oberfläche durch eine Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten gegeben, die Axe des Körpers als Abscissenlinie genommen und ist $\mathfrak{M}$ das Trägheitsmoment des Körpers, der zwischen zweien auf der Drehaxe normal geführten Ebenen begriffen ist, von welchen die eine den Abstand x auf der Abscisse vom Coordinaten-Anfangspunkt genommen hat, so ist nach denselben Schlüssen wie No. 19 bei der Kugel, die zu x gehörige Ordinate der Erzeugungslinie $= y$ gesetzt

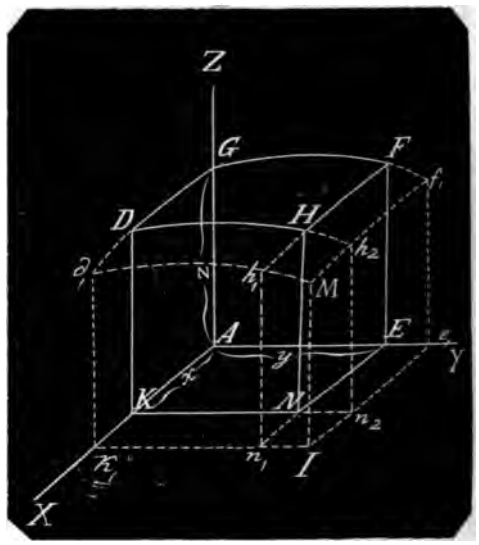
$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}\pi m\int y^4\,\partial x$$

Dies Integral mufs immer zwischen den Grenzen genommen werden, welche die beiden auf der Axe normalen den Körper begrenzenden Ebenen bestimmen.

22. Das Trägheitsmoment eines Körpers, der durch Flächen begrenzt wird, deren Punkte durch eine Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten gegeben sind.

Man nehme die Drehaxe des Körpers zur Axe der Z, A sei der Anfangspunkt der Coordinaten, AX und AY die Axen der X und der Y. $DGFH$ sei die krumme

Fig. 821.



Fläche, welche mit den drei Coordinatenebenen $AENK$, $AGDK$ und $AEFG$ und den beiden, den letzten beiden Ebenen in den Abständen x und y parallel gezogenen Ebenen $EFHN$ und $DHNK$ den Körper begrenzt. Dann ist $EF = z$, die zu $AK = x$ und $AE = y$ gehörige Ordinate des Punkts F und zwischen x, y, z ist eine Gleichung gegeben. Die auf die Körpereinheit kommende Masse sei $= m$.

Das Trägheitsmoment des bezeichneten Körpers in Beziehung auf AZ sei $= \mathfrak{M}$.

Aendert sich x um Δx allein, so ändert sich der Körper um dessen Verlängerung $DHNKd,k,n,h$, das Moment $\mathfrak{M}$ ändert sich um das Moment $\Delta\mathfrak{M}$ dieses Zuwachskörpers, und natürlich dieses auf x als Urvariable genommen hat man nach der Taylor'schen Reihe (Bd. II, pag. 299, Formel 1)

$$\mathfrak{M} + \frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial x} = \mathfrak{M} + \frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial^2\mathfrak{M}}{\partial x^2}\cdot\frac{\Delta x^2}{1\cdot 2} + R'$$

wo R' die übrigen Ergänzungsglieder in Summa bezeichnet.

woraus $$\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial x} = \frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial^2\mathfrak{M}}{\partial x^2}\cdot\frac{\Delta x^2}{1\cdot 2} + R'$$

Aendert sich y um Δy allein, so ändert sich der Körper um dessen Verlängerung $FHNEf,h,n,e$, und man hat wie vorher die Momentsänderung, d. h. das Trägheitsmoment des genannten Zuwachskörpers in Beziehung auf die Axe der Z

$$\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial y} = \frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial^2\mathfrak{M}}{\partial y^2}\cdot\frac{\Delta y^2}{1\cdot 2} + R,$$

Aendert sich x und y zugleich, so ändert sich der Körper um die beiden vorher betrachteten Zuwachskörper + dem Prisma $HNh_1n_1MJh_2n_2$, und man erhält

$$\frac{\partial^2\mathfrak{M}}{\partial x\cdot\partial y}=\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial y}+\frac{\partial^2\mathfrak{M}}{\partial x^2}\cdot\frac{\Delta x^2}{1\cdot 2}+\frac{\partial^2\mathfrak{M}}{\partial y^2}\Delta x\cdot\Delta y+\frac{\partial^2\mathfrak{M}}{\partial x\cdot\partial y}\cdot\frac{\Delta y^2}{1\cdot 2}+R''$$

Zieht man von dieser Gesammtänderung die Summe der ersten beiden Aenderungen ab, so erhält man das Trägheitsmoment des über NJ stehenden Prismas in Beziehung auf die Axe der Z, Abstand AN:

$$\frac{\partial^2\mathfrak{M}}{\partial x\cdot\partial y}\Delta x\cdot\Delta y+R''-R'-R, \quad (I)$$

wo R'', R', R, Grösen sind, die mit $\Delta x\Delta y$ dividirt, bei der beliebigen Abnahme dieser beiden beliebig klein werden können.

Ist V das Volumen des Körpers, so ist $\frac{\partial^2 V}{\partial x\cdot\partial y}$ die Differenz zwischen der Gesammtänderung des Körpers und der Einzeln-Aenderungen nach x und nach y also das Prisma

$$=\frac{\partial^2 V}{\partial x\cdot\partial y}\Delta x\cdot\Delta y+R_{,,} \quad (II)$$

Nun ist offenbar der Unterschied I. das Moment des Volumen II.; das Quadrat des kleinsten Abstandes ist $AN^2=x^2+y^2$, das Quadrat des grösten ist

$$AJ^2=(x+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^2$$

Multiplicirt man also das Volumen mit m und einzeln mit den Quadraten beider Abstände, so begreifen die Producte das oben bestimmte Moment zwischen sich. Man hat demnach:

$$m(x^2+y^2)\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x\cdot\partial y}\Delta x\cdot\Delta y+R_{,,}<\frac{\partial^2\mathfrak{M}}{\partial x\cdot\partial y}\Delta x\cdot\Delta y+\ldots$$

$$<m[(x+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^2]\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x\cdot\partial y}\Delta x\cdot\Delta y+R_{,,}$$

Dividirt man nun die drei Vergleichungen mit $\Delta x\cdot\Delta y$, und geht zu den Grenzwerthen über, so hat man

$$\frac{\partial^2\mathfrak{M}}{\partial x\cdot\partial y}=m(x^2+y^2)\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x\cdot\partial y}$$

Es ist aber $\partial V=z\cdot\partial x\cdot\partial y$

woraus $$\frac{\partial V}{\partial x\cdot\partial y}=z$$

mithin $$\frac{\partial^2\mathfrak{M}}{\partial x\cdot\partial y}=m(x^2+y^2)z$$

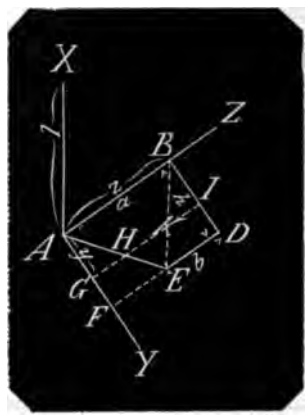
und $$\mathfrak{M}=m\int^x\int^y(x^2+y^2)z\cdot\partial x\cdot\partial y \quad (54)$$

Da diese Integrirung zwei Constanten einführt, so sind diese so zu bestimmen, dafs die Integrale für $x=0$ und $y=0$ verschwinden.

22a. Beispiel. Das Trägheitsmoment eines geraden Prisma, dessen Grundfläche ein Trapez ist, in Beziehung auf die parallele Grundkante als Drehaxe.

Es seien $AB=a$ und $DE=b$ die parallelen Grundkanten der Grundebene des Prisma, AB die Drehaxe, h deren Höhe, l die Länge des Prisma. Nimmt man den einen Endpunkt A der Kante zum Anfangspunkt der Coordinaten, die Kante AB selbst zur Axe der Z, die darauf normale Kante l zur Axe der X und die auf beiden Kanten normale Linie AF zur Axe der Y, so ist nach dem vorigen Satz

Fig. 822.



das Trägheitsmoment des Körpers

$$\mathfrak{M}=m\int^x\int^y(x^2+y^2)z\,\partial x\cdot\partial y$$

Nimmt man nun eine beliebige Länge $AG=y$, zieht die mit AB Parallele GJ, so hat man

$$z=HJ=GJ-GH=a-\frac{a-b}{h}y.$$

Setzt man um z aus dem Integral zu eliminiren, diesen Werth ein, so ist

$$\mathfrak{M} = m\int^2 (x^2+y^2)\left(a-\frac{a-b}{h}y\right)\partial x\cdot\partial y + C$$

Integrirt man $\mathfrak{M}$ auf x, wo also y constant gesetzt wird, so erhält man

$$\mathfrak{M} = m\int^2\left[x^2\left(a-\frac{a-b}{h}y\right)+y^2\left(a-\frac{a-b}{h}y\right)\right]\partial x\cdot\partial y$$

$$= m\cdot\int(\tfrac{1}{3}x^3+y^2x)\left(a-\frac{a-b}{h}y\right)\partial y + C$$

Dieses Integral zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=l$ genommen gibt

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3}ml\int(l^2+3y^2)\cdot\frac{ah-ay+by}{h}\partial y$$

$$= \tfrac{1}{3}\frac{ml}{h}\int[ahl^2-(a-b)l^2y+3ahy^2-3(a-b)y^3]\partial y$$

$$= \tfrac{1}{3}\frac{ml}{h}[ahl^2y-\tfrac{1}{2}(a-b)l^2y^2+ahy^3-\tfrac{3}{4}(a-b)y^4]+C$$

Dieses Integral zwischen den Grenzen $y=0$ und $y=h$ genommen: gibt

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3}mlh\left[\frac{a+b}{2}l^2+\tfrac{1}{4}(a+3b)h^2\right] \quad (55)$$

Die Masse M des Prisma ist $\frac{a+b}{2}\,h\cdot l\cdot m$; daher auch

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3}\left(l^2+\tfrac{1}{2}\frac{a+3b}{a+b}h^2\right)M \quad (56)$$

Ist die Grundfläche des Prisma ein Parallelogramm, also $b=a$, so ist

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3}(l^2+h^2)M \quad (57)$$

23. Diese Formel 57 findet man unmittelbar aus Formel 54, wenn man x constant $= a$ setzt.

Dann ist also

$\mathfrak{M} = ma\int\int(x^2+y^2)\,\partial x\cdot\partial y$

Auf x integrirt

$m = ma\int(\frac{1}{3}x^3+y^2x)\,\partial y$

x zwischen 0 und l genommen

$\mathfrak{M} = m\cdot a\cdot l\int(\frac{1}{3}l^2+y^2)\,\partial y$

Auf y integrirt

$m\cdot a\cdot l(\frac{1}{3}l^2y+\frac{1}{3}y^3)$

y zwischen 0 und h genommen

$\mathfrak{M} = \frac{1}{3}m\cdot a\cdot l(l^2h+h^3) = \frac{1}{3}m\cdot a\cdot l\cdot h(l^2+h^2)$

Nun ist $M = a\cdot h\cdot l\cdot m$, daher auch

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3}(l^2+h^2)M = \tfrac{1}{3}(XF)^2M \quad (58)$$

Wenn also das Parallelepipedum um eine Kante schwingt, so ist sein Trägheitsmoment dasselbe, als wenn der dritte Theil seiner Masse in der diagonal gegenüberliegenden Kante vereinigt wäre.

24. Zur Prüfung der Richtigkeit von vorstehenden und ähnlichen Berechnungen kann man wie folgt verfahren. Man nehme das Moment des rechtwinkligen Parallelepipeds nach No. 23 und ziehe davon ab das Moment des Prisma der Grundebene AEF.

Ersteres ist $\frac{1}{3}m\cdot a\cdot l\cdot h\,(l^2+h^2)$

Letzteres durch x, y, z ausgedrückt Formel 54, in welcher $z = GH = \frac{a-b}{h}y$.

Also $\partial m, = \int\int(x^2+y^2)\frac{a-b}{h}y\,\partial x\cdot\partial y$

$$= m\frac{a-b}{h}\int\int(x^2y+y^3)\,\partial x\cdot\partial y + C$$

Dieses Differenzial nach x integrirt und x von 0 bis l genommen gibt

$$m\frac{a-b}{h}\,l\int(\tfrac{1}{3}l^2y+y^3)\,\partial y + C$$

Dieses Differenzial nach y integrirt und y zwischen 0 und h genommen gibt

$$m(a-b)hl(\tfrac{1}{3}l^2+\tfrac{1}{4}h^2$$

Mithin die Differenz genommen gibt das Trägheitsmoment des Prisma von der Grundebene $ABDE$ =

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3}malh(l^2+h^2) - m(a-b)hl[\tfrac{1}{3}l^2+\tfrac{1}{4}h^2)$$

$$= \tfrac{1}{3}mlh[\tfrac{1}{2}(a+b)l^2+\tfrac{1}{4}(a+3b)h^2] = \tfrac{1}{3}\left(l^2+\tfrac{1}{2}\frac{a+3b}{a+b}h^2\right)M$$

wie Formel 55 und 56.

25. Schreibt man Formel 56:

$$\mathfrak{M} = \left(\tfrac{1}{3}l^2+\tfrac{1}{6}\frac{a+3b}{a+b}h^2\right)M$$

so hat man Formel 12: $\frac{1}{3}h^2M$ als das Trägheitsmoment einer geraden materiellen Linie, die um einen ihrer Endpunkte in einer Ebene schwingt, also auch das Moment eines um eine Grundflächenkante

schwingenden Prisma, wenn dessen Masse auf die Höhe oder Länge l gleichmäfsig vertheilt ist. Ferner ist nach Formel 33 $\frac{a+3b}{a+b}h^2 \cdot M$ das Trägheitsmoment eines Trapezes, wenn es um die gröfsere parallele Seite a schwingt, zugleich also auch das Moment eines Prisma, wenn dessen Masse auf die trapezförmige Grundfläche gleichmäfsig vertheilt ist.

Demnach ist das Trägheitsmoment eines vierseitigen Prisma = der Summe der Trägheitsmomente, wenn die Masse desselben auf dessen Länge und dieselbe Masse auf die Grundebene vertheilt wird

$$= \left(\tfrac{1}{3}h^2 + \tfrac{1}{6}\frac{a+3b}{a+b}h^2\right) M.$$

Für $b = 0$ erhält man hieraus das Trägheitsmoment des dreiseitigen Prisma x von der Länge l, dessen Grundfläche die Seite a und die Höhe h hat, wenn man also das erste h mit l vertauscht

$$\mathfrak{M} = (\tfrac{1}{3}l^2 + \tfrac{1}{6}h^2)M = \tfrac{1}{6}(2l^2 + h^2)M \qquad (59)$$

Es ist $\frac{1}{3}l^2M$ das Trägheitsmoment der Länge, $\frac{1}{6}h^2M$ das des Dreiecks, man hat bei dem dreiseitigen Prisma also dasselbe Gesetz wie bei dem vierseitigen.

26. Man kann diese Formel auch unmittelbar aus Formel 54 entwickeln, wenn man BE zieht und das $\triangle ABE$ als Grundebene betrachtet, alsdann ist $HK = z$ und man hat $a : z = h : h - y$

woraus $\qquad z = \frac{a}{h}(h - y)$

Diesen Werth in Formel 54 gesetzt gibt

$$\mathfrak{M} = m\int^l (x^2 + y^2)\frac{a}{h}(h-y)\partial x \cdot \partial y$$

$$= m\frac{a}{h}\int^l (hx^2 - yx^2 + hy^2 - y^3)\partial x \cdot \partial y$$

Nach x integrirt und x von 0 bis l genommen gibt:

$$\mathfrak{M} = m\frac{a \cdot l}{h}\int(\tfrac{1}{3}hl^2 - \tfrac{1}{2}l^2y + hy^2 - y^3)\partial y$$

Nun wieder nach y integrirt und y zwischen 0 und h genommen:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{12}m \cdot a \cdot l \cdot h\,(2l^2 + h^2)$$

Nun ist $M = \frac{1}{2}ah \cdot lm$

woraus wie Formel 49:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{6}(2l^2 + h^2)\,M.$$

Der Abstand des Schwerpunkts eines Trapezes von der Drehaxe a ist $= \frac{1}{3}\frac{a+2b}{a+b}h$, im Prisma liegt er auf der halben Länge. Daher ist der Abstand des Schwerpunkts dieses Prisma von der Drehaxe im Quadrat $= (\frac{1}{2}l)^2 + \left(\frac{1}{3}\frac{a+2b}{a+b}h\right)^2$.

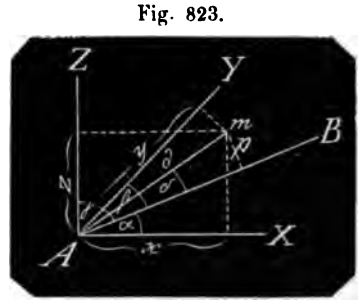
Multiplicirt man das Quadrat mit M und zieht es von dem Moment, Formel 56 ab, so erhält man das Trägheitsmoment des Prisma für die durch den Schwerpunkt, parallel mit einer der beiden Grundkanten genommene Axe:

$$\mathfrak{M} = \left[\tfrac{1}{12}l^2 + \tfrac{1}{18}\frac{a^2+4ab+b^2}{(a+b)^2}h^2\right]M \qquad (60)$$

27. Es sind die Trägheitsmomente eines Massensystems in Beziehung auf drei unter sich normale Coordinatenaxen gegeben. Das Trägheitsmoment in Beziehung auf eine beliebige Axe soll bestimmt werden, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht.

Es sei AB die neue Momentenaxe, X, Y, Z seien die drei gegebenen Axen, α, β, γ die Winkel der neuen Axe mit

Fig. 823.



den alten, m sei ein Massentheilchen des Systems, dessen Abstand von $A = Am = d$; x, y, z dessen Coordinaten, δ der Winkel zwischen d mit AB, p das Loth von m auf AB, so ist das Trägheitsmoment des Elements m auf $AB = p^2 \cdot m$.

Nun ist $p = d\sin\delta$; $\frac{x}{d}$, $\frac{y}{d}$, $\frac{z}{d}$ sind die Cosinus der Winkel, den die Coordinatenaxen mit d bilden. Daher ist

$$\cos\delta = \cos\alpha \cdot \frac{x}{d} + \cos\beta \cdot \frac{y}{d} + \cos\gamma \cdot \frac{z}{d}$$

folglich $d\cos\delta = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$

Aber $p^2 = d^2\sin^2\delta = d^2(1 - \cos^2\delta) = d^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2$

Ferner ist $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Folglich $p^2 = x^2 + y^2 + z^2 - x^2\cos^2\alpha - y^2\cos^2\beta - z^2\cos^2\gamma - 2xy\cos\alpha\cdot\cos\beta$
$- 2xz\cos\alpha\cdot\cos\gamma - 2yz\cos\beta\cdot\cos\gamma$

oder $p^2 = x^2 \sin^2\alpha + y^2 \sin^2\beta + z^2 \sin^2\gamma - 2xy\cos\alpha\cdot\cos\beta - 2xz\cos\alpha\cdot\cos\gamma - yz\cos\beta\cdot\cos\gamma$

daher das Trägheitsmoment in Beziehung auf die neue Axe:

$$mp^2 = mx^2 \sin^2\alpha + my^2 \sin^2\beta + mz^2 \sin^2\gamma - 2m\,xy\cos\alpha\cdot\cos\beta - 2m\,xz\cos\alpha\cdot\cos\gamma - 2m\,yz\cos\beta\cdot\cos\gamma$$

Gleiche Ausdrücke erhält man für alle übrigen Massentheile m_1; m_2; m_3..., deren Coordinaten x, y, z_1; x_2 y_2 z_2; ... sind.

Daher ist das Trägheitsmoment des ganzen Systems

$$\mathfrak{M} = \sin^2\alpha \lesssim mx^2 + \sin^2\beta \lesssim my^2 + \sin^2\gamma \lesssim mz^2 - 2\cos\alpha\cdot\cos\beta \lesssim mxy - 2\cos\alpha\cdot\cos\gamma \lesssim mxz - 2\cos\beta\cdot\cos\gamma \lesssim myz \quad (I)$$

Sind die Coordinatenebenen so angenommen und ist das Massensystem so beschaffen, dafs jede Ebene das System in 2 congruente oder symmetrische Hälften theilt, so werden die drei letzten Glieder einzeln = 0. Denn alsdann gibt es zu beiden Seiten jeder Ebene z. B. XY für z und $-z$ zwei gleiche Massentheile, deren Momente sich gegenseitig aufheben. Da sich nun allgemein darthun läfst, dafs für jedes Massensystem durch jeden beliebigen Punkt sich wenigstens drei rechtwinklige Coordinatenaxen annehmen lassen, für welche jede der drei letzten summarischen Glieder verschwinden, die Hauptaxen, so sollen die Axen hier als Hauptaxen gedacht werden. Dann reducirt sich die Gleichung auf

$$\mathfrak{M} = \sin^2\alpha \lesssim mx^2 + \sin^2\beta \lesssim my^2 + \sin^2\gamma \lesssim mz^2 \quad (II)$$

Bezeichnet man das Trägheitsmoment der Systems für die Axe der X mit A, für die Axe der Y mit B, für die Axe der Z mit C, so ist

$$A = \lesssim m(y^2 + z^2) = \lesssim my^2 + \lesssim mz^2$$
$$B = \lesssim m(x^2 + z^2) = \lesssim mx^2 + \lesssim mz^2$$
$$C = \lesssim m(x^2 + y^2) = \lesssim mx^2 + \lesssim my^2$$

Hieraus folgt

$$\tfrac{1}{2}(A + B - C) = \lesssim mz^2$$
$$\tfrac{1}{2}(A - B + C) = \lesssim my^2$$
$$\tfrac{1}{2}(-A + B + C) = \lesssim mx^2$$

Diese Werthe in den Ausdruck II. für $\mathfrak{M}$ substituirt, gibt

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}(-A + B + C)\sin^2\alpha + \tfrac{1}{2}(A - B + C)\sin^2\beta + \tfrac{1}{2}(A + B - C)\sin^2\gamma$$

oder $\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}A(-\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma) + \tfrac{1}{2}B(\sin^2\alpha - \sin^2\beta + \sin^2\gamma) + \tfrac{1}{2}C(\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma)$

Nun ist $-\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = -1 + \cos^2\alpha + 1 - \cos^2\beta + 1 - \cos^2\gamma$
$= 1 + \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma = 2\cos^2\alpha$

weil $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Eben so findet man den Factor von $\frac{1}{2}B = 2\cos^2\beta$ und den von $\frac{1}{2}C = 2\cos^2\gamma$.

Also hat man endlich

$$\mathfrak{M} = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma \quad (III)$$

Da nun $\cos^2\alpha = 1 - \cos^2\beta - \cos^2\gamma$ so ist aus III.

$$\mathfrak{M} = A - (A - B)\cos^2\beta - (A - C)\cos^2\gamma$$

Eben so weil $\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta$

$$\mathfrak{M} = C + (A - C)\cos^2\alpha + (B - C)\cos^2\beta$$

Sind nun die Momente der Hauptaxen ungleich und $A > B > C$, so ist das Moment A für die Axe der X das gröfste und das C für die Axe der Z das kleinste unter allen Axen, die denselben Anfangspunkt haben, weil $A - B$, $A - C$, $B - C$ positive Gröfsen sind. Ist der Anfangspunkt zugleich Schwerpunkt, so ist C das kleinste Trägheitsmoment für alle Momentenaxen der Trägheit.

Sind zwei der Trägheitsmomente in Beziehung auf die Hauptaxen einander gleich, z. B. $B = C$, so wird aus III.

$$\mathfrak{M} = A\cos^2\alpha + B(\cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$
$$= A\cos^2\alpha + B(1 - \cos^2\alpha)$$
$$= B + (A - B)\cos^2\alpha$$

Folglich bleibt dann das Trägheitsmoment des Systems für alle Axen ein und dasselbe, welche auf dem Mantel eines Kegels liegen, dessen Axe die Axe A und dessen Seite mit ihr den Winkel α bildet.

Sind $A = B = C$, so ist $\mathfrak{M} = A$.

D. h. das Trägheitsmoment für alle Axen, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten geführt werden, bleibt dasselbe.

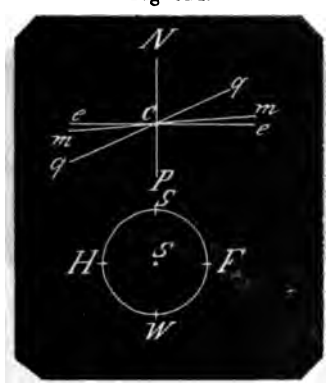
Monat, s. d. Art. „Astronomischer Monat“ und „Cyclus“.

Mond. Der stete Begleiter unserer Erde, e Erhellung unserer Nächte. Seine Be-egung um die Erde und mit dieser um e Sonne, so dafs fortdauernd der zwi-hen beiden gemeinschaftliche Schwer-ankt in der Ekliptik sich befindet und rin fortschreitet, s. den Art. „Cen-ralbewegung“ mit Fig. 279. Es ist erbei zu beachten, dafs wegen der Kreis-ewegung des Mondes um die Erde der edachte Schwerpunkt in jedem Augen-ick verrückt wird und dafs dies aufser n Kreisbewegungen des zwischen Erde nd Mond bestehenden Massensystems och geradlinige Bewegungen zur Folge at.

Die Mondbahn um die Erde durchschnei-et die Ekliptik unter einem nur kleinen Winkel von 5° 8′ 47″ im Mittel und weicht höchstens 5¼° von derselben ab.

Es sei *C* der Mittelpunkt der Erde, *qq* e Durchschnittslinie der Aequatorebene, die unter 23½° mit derselben geneigte r Ekliptik und *mm* die der Mondbahn, ist ∠ *ecm* = 5° 8′ 47′. Diese Mondbahn-ene bleibt (die Schwankungen des Sy-ems vorläufig unberücksichtigt gelassen)

Fig. 824.



en so constant parallel mit sich selbst s die Erd-Aequatorebene. Der Mond links ehend hat südliche Breite (gegen *ee*) und örd liche Abweichung (gegen *qq*), rechts örd liche Breite und südliche Abweichung. Die consequent bleibende Parallelität r einzelnen Bahnen veranlafst Aende-ngen in den Lagen zwischen *ee* und m.

Es ist im Profil der Herbstpunkt *H* als tandpunkt *C* gedacht, und der Mond eht aufserhalb der Ekliptik *FSHW* nterhalb und innerhalb, oberhalb rselben. Dasselbe ist mit dem Erd-aequator der Fall, und in beiden Lagen ist der Winkel *mcq* zwischen der Mond-bahn und dem Erdaequator (*ecq* − *ecm*) = 23½° − 5° 8½′ = 18° 21½′.

Schreitet man nun im Kreise der Ekliptik mit der Erde und dem sie umkrei-senden Mond von *H* über *W* nach *F* mit fort, so erblickt man vor *F* den Erdae-quator innerhalb der Ekliptik unter-halb und aufserhalb der Ekliptik oberhalb derselben. Die Mondbahn da-gegen ist als eine ebenfalls parallel blei-bende Kreislinie mit dem hier links be-findlichen Punkt rechts; aufserhalb ge-kommen und unterhalb geblieben, und der rechts befindliche Punkt *m* ist in-nerhalb der Ekliptik gekommen und oberhalb geblieben; demnach sind in beiden Lagen ∠ *mcq* zwischen Erdaequa-tor und Mondbahn (*ecq* + *ecm*) = 23½° + 5° 8½′ = 28° 38½′.

Der Mond dreht sich während eines siderischen Umlaufs ganz gleichförmig um die Erde herum, und da er keine eigene Rotation um seine Axe hat wie die Erde alle 24 Stunden und die übri-gen Planeten, so macht er während die-ses Umlaufs um die Erde nur eine Axen-drehung, nämlich eine Drehung um die vom Mittelpunkt der Erde als Drehpunkt bis zu seinem Mittelpunkt als Endpunkt reichende Axe. Sein Aequator, die durch seinen Mittelpunkt gelegte mit dem Erd-aequator parallel gedachte Ebene bleibt fortdauernd in constanter Lage und pa-rallel mit sich selbst, wie der Erdaequa-tor; dessen Neigungswinkel mit seiner Bahn *mm* (die Schiefe seiner Ekliptik) be-trägt nur 1½°, (bei der Erde ist diese Schiefe 23½°) und wegen gänzlich man-gelnder Rotation um sich selbst bleibt er nur mit immer derselben Seite der Erde zugewendet.

Der Mond erleidet mehr als irgend ein anderer Weltkörper eine Menge von at-tractorischen Einwirkungen, die während seiner Bewegung um die Erde und mit dieser um die Sonne theils regelmäfsig, theils unregelmäfsig periodisch sich än-dern:

Die grofse Schiefe der Erdekliptik ver-anlafst, dafs der Mond theils den abge-platteten Nord- und Südpolen theils dem Aequator der Erde zunächst kommt, so dafs seine Axe bald unten bald oben der Erde näher gerückt wird und somit fort-dauernd in Schwankungen verbleibt. Hier-zu kommt die periodisch regelmäfsig wie-derkehrende Ungleichheit der Anziehung durch die Sonne, je nachdem er in seinem Rundlauf um die Erde der Sonne sich

nähert und entfernt, welches von Neumond bis Vollmond in einem Längenunterschied von etwa 103000 Meilen statt findet und wodurch die elliptische Mondbahn bald verkürzt, bald verlängert wird. Endlich kommen die Anziehungen dazu, welche die übrigen Planeten auf ihn ausüben und die um so verschiedener an Gröfse ausfallen, je nachdem die Planeten, besonders die gröfsesten Jupiter, Saturn, Uranus in der Erdferne oder in der Erdnähe, und ob sie alle mehr oder weniger auf einer oder auf entgegengesetzten Seiten der Sonne sich befinden.

Der Mond ist aus diesen Gründen der den astronomischen Berechnungen auf das Widerspenstigste entgegentretende Weltkörper gewesen, und erst Laplace ist es durch unsägliche Arbeit gelungen nachzuweisen, dafs derselbe dem von Newton entdeckten Attractionsgesetz eben so wie die übrigen Weltkörper streng unterworfen ist. (Vergleiche den Art. „Centralbewegung“, pag. 15 mit Fig. 280.)

Dafs der Mond immer nur die eine Seite der Erde zuweiset, darüber sagt schon Galilei, dafs die diesseitige Mondhalbkugel eine natürliche Beziehung oder Neigung zu ihrem Hauptplaneten, der Erde habe. Denn als Erde und Mond aus dem formlosen Chaos sich zu bilden anfingen, fügten sich die einzelnen Weltatome nicht völlig concentrisch um den Mittelpunkt, sondern nach der Seite der Erde hin in stärkerem Maafse. D. h. also: Bei der noch weichen zum Theil flüssigen Beschaffenheit des Mondes lagerten sich die schwereren Massen, von der Erde angezogen nach dieser hin, befestigten sich dort, und weil nun auf der entgegengesetzten Halbkugel die leichteren Theile verblieben, wurde eine Axenbildung für eine Rotation unmöglich. (Vergleiche den Art. „Attraction“ mit Fig. 104, pag. 167.)

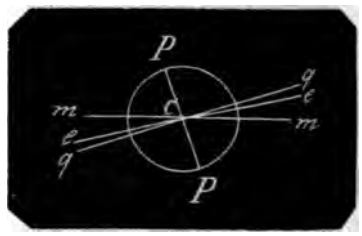
Die oben gedachten Ungleichheiten in der Bewegung des Mondes und in dessen Bahn selbst sind denn auch die Ursach, dafs die Knoten, die Punkte, in welchen der Mond bei seiner Umdrehung die Erdekliptik durchschneidet, eben so sehr veränderlich sind; sie weichen bei jedem einzelnen Umlauf um die Erde nahe 1½° nach Westen zurück und beschreiben innerhalb 18 Jahren 228 Tagen (im Mittel) den ganzen Umkreis von 360 Grad.

Die oben erwähnte geringe Neigung des Mondaequators gegen die Ekliptik von nur 1½ Grad, so dafs beide fast mit einander parallel laufen, ist dann die unmittelbare Ursach, dafs auf dem Mond die Wendekreise nur 3° aus einander liegen und dafs die Polarzonen ebenfalls nur 1½° im Bogen sind. Von klimatischen Unterschieden kann also dort nicht die Rede sein und es mufs auf dem Monde ein ewiger Frühling und Tag- und Nachtgleiche bestehen.

Wenn wir Neumond haben, hat die uns abgekehrte Mondhälfte Tag und zwar auf die ganze Zeitdauer des halben synodischen Monats von ½ mal 29½ Tagen = 354 Stunden; in den darauf folgenden 354 Stunden hat diese Mondfläche Nacht und zur Erleuchtung nur das schwache Licht des gestirnten Himmels. Die uns zugekehrte Mondhälfte hat die Abwechselung von Tag und Nacht in denselben Zeitlängen: bei Nacht, wenn der Mond uns Neumond ist, ist dort Nacht und unsere Erde leuchtet ihm als von der Sonne erleuchteter Mond mit einer Scheibe, die den Mondbewohnern 14 mal gröfser erscheint als uns die Mondscheibe, während ihnen die Sonnenscheibe wie uns gleich grofs ist.

Ist die durch den Mondmittelpunkt C gezogene Linie PP die nach der Erde gerichtete Axe, die darauf normale qq der Aequator, mm die Durchschnittslinie der

Fig 825.



Kreisebene, in welcher der Mond um die Erde sich dreht, ee die Ekliptik, in welcher Erde und Mond um die Sonne läuft, so ist $\angle mCe = 5° 8\frac{1}{2}'$, $\angle eCq = 1° 30'$ folglich der Winkel mCq, der zwischen der Bahn und dem Aequator des Mondes $= 6° 38\frac{1}{2}'$.

Der Mond ist eine Kugel ohne irgend eine Abplattung; um seinen Durchmesser

[Anmerk. Ist Bd. III, pag. 252, Fig. 709, H' der Mittelpunkt des Mondes, C der Mittelpunkt der Erde, O der im Horizont mit H' liegende Ort der Erdoberfläche, so ist $\angle OH'C$ die Horizontalparallaxe des Mondes, also zugleich der Winkel, unter welchem der Halbmesser CO der Erdkugel von dem Monde aus gesehen wird.]

zu finden hat man seinen scheinbaren Durchmesser in seiner Erdnähe 1978 Secunden, seine Horizontalparallaxe zugleich 3629 Sec., mithin der scheinbare Durchmesser der Erdkugel von dem Monde aus gesehen $= 2 \times 3629$ Sec. $= 7258$ Sec.

Demnach hat man

$7258'' : 1978'' = 1719$ Meilen $: x$ Meilen

woraus x der Durchmesser des Mondes 468,4 Meilen.

Der Umfang des Mondes 1470,5 Meilen.

Die Oberfläche des Mondes 68924 □Meilen.

Der körperliche Inhalt 53 800 000 Kubikmeilen.

Die Gröſsen zwischen Erde und Mond sind im Verhältniſs

Durchmesser $= 3\frac{2}{3} : 1$

Oberfläche $= 14 : 1$

Volumen $= 50 : 1$

Die Oberfläche des Mondes hat etwa die Gröſse von Amerika.

Die Masse des Mondes als aliquoter Theil von der unserer Erde wird verschieden angegeben: Laplace bestimmt dieselbe aus der beobachteten Ebbe und Flut auf $\frac{1}{70}$. Dagegen wird in Betrachtung des Schwankens der Erdaxe die jetzt allgemein gültige Zahl $\frac{1}{81}$ angenommen.

Aus Masse und Volumen erhält man die Dichtigkeit des Mondes $= \frac{1}{81} : \frac{1}{50} = \frac{50}{81}$ $= 0{,}58$ der Erddichtigkeit.

Hieraus erhält man die Schwerkraft des Mondes in dem Fallraum für die erste Secunde, der Beschleunigung g:

Die Beschleunigung der Erde ist 15 par. Fuſs, mithin bei $\frac{1}{81}$ Masse die Beschleunigung des Mondes bei einerlei Durchmesser mit der Erde $= \frac{15}{81}$ par. Fuſs. Beim Monde aber beträgt der Halbmesser nur $\frac{1}{3\frac{2}{3}}$ des der Erde, der Sitz dessen Schwerkraft von der Mondoberfläche ist also um so viel geringer und die Mondbeschleunigung beträgt $(3\frac{2}{3})^2 \cdot \frac{15}{81} = 2{,}32$ pariser Fuſs.

Die gröſste Entfernung des Mondes von der Erde ist 55000 Meilen, die kleinste ist 48000 Meilen, wonach die Excentricität $= 3500$ Meilen. Diese Längen sind, wie oben nachgewiesen, und besonders die Excentricität groſsen periodischen Veränderungen unterworfen; die Excentricität wird nach einem Mittelwerth 0,055 der halben groſsen Axe angenommen und beträgt also $\frac{55000+48000}{2} \cdot 0{,}055 = 2832{,}5$ Meilen, noch nicht ganz 3000 Meilen.

Aus demselben Grunde setzt man die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde 52000 Meilen $= 60$ Erdhalbmessern $= \frac{1}{385}$ der Entfernung der Erde von der Sonne.

Monde, die der Planeten, des Jupiter, des Saturn und des Uranus s. u. „Nebenplaneten“.

Mondcyclus, s. u. „Cyclus“.

Mondenjahr, ein Jahr des Alterthums. 1 bei Solon und 2 bei den Juden, s. u. Kalender pag. 1.

Mondfinsterniſs entsteht, wenn der Mond in den Schatten geräth, den die von der Sonne beleuchtete Erde hinter sich wirft; der Mond hat dabei Sonnenfinsterniſs.

1. Um zuerst diesen Erdschatten kennen zu lernen, seien nebenstehend die Sonne und die Erde mit ihren Mittelpunkten S und E, CDF der Schattenkegel. Dessen Höhe CE sei $= h$, der Abstand ES zwischen Erde und Sonne H, so hat man deren Halbmesser $= R$ und r gesetzt:

Fig. 826.

$$R : r = H + h : h$$

woraus $$h = \frac{r \cdot H}{R - r}$$

Es sei $r = 1$, so ist $R = 112$, $H = 24400$ also $h = \frac{1 \cdot 24400}{111} = 220$ Erdhalbmesser, bei cc. 860 Meilen $= 189{,}200$ geogr. Meilen.

Der Mond in der Linie GH hat von der Erde eine Entfernung von 50000 Meilen oder cc. 60 Erdhalbmesser mithin ist der in der Mondbahn liegende Durchmesser GH des Schattenkegels aus der Proportion: $DF : GH = CE : Cm$

$$GH = DF \cdot \frac{Cm}{CE} = 2 \cdot \frac{220-60}{220} = \frac{16}{11}$$

Erdhalbmesser $= \frac{8}{11}$ Erddurchmesser. Da nun der Mond einen Durchmesser $= \frac{1}{3\frac{2}{3}} = \frac{3}{11}$ des Erddurchmessers hat, so haben beinahe drei Monde neben einander in dem Erdschatten Platz.

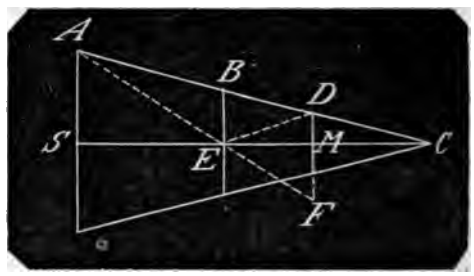
Läge die Mondbahn in der Ebene der Ekliptik, so müſste alle 14 Tage eine totale Finsterniſs statt finden, einmal eine Mond- und die nächsten 14 Tage eine Sonnenfinsterniſs, bei welcher der Mond von E unterhalb um die Länge Em sich befindet. So aber kann eine Finsterniſs nur in den Knoten geschehen, in den Punkten nämlich, in welchen der Mond die Ekliptik bei seinem jedesmaligen Umlauf zweimal durchschneidet, und dann müssen Sonne, Erde und Knoten in einerlei geraden Linie liegen.

Die Knoten sind aber in der Ekliptik nicht constant, im Gegentheil sie rücken jährlich 19° zurück und der Sonne entgegen. Wenn also in einem Jahre bei einem Knoten eine Finsterniſs entsteht, und sie entstände in dem folgenden Jahre wieder in demselben Knoten, so geschähe dies in einer diesem Rückgange entsprechenden Zeit von 10 bis 11 Tagen früher. Es gibt Jahre, in welchen gar keine Finsternisse vorkommen, weil die eben gedachten Gradlinigkeiten des Knotens mit Sonne und Mond nicht statt finden.

Bei den Mondfinsternissen wird zuerst der östliche Rand des Mondes beschattet und die Verdunkelung schreitet fort bis zum westlichen Rande; den Mondbewohnern ist sie eine Sonnenfinsterniſs.

2. Von Wichtigkeit ist die Bestimmung des Durchmessers eines jedesmaligen Schattenkegels innerhalb der Mondbahn, da diese in ihrem Abstande von der Erde zwischen 48 und 55 tausend Meilen variirt und folglich jenen Durchmesser mit variabel macht. Es sei S der Mittelpunkt der Sonne, AS ihr Halbmesser; E der Mittelpunkt der Erde, EB ihr Halbmesser, DF die Linie der Mondbahn und es soll die Breite DM des von dem Monde zu passirenden Schattenkegels gefunden werden.

Fig. 827.



Der $\angle DEF$ ist als Aufsenwinkel $= \angle EAD + \angle EDA$,

$\angle FEM$ in der Verlängerung von AC ist $= \angle AES$

mithin ist

$$\angle DEM = \angle EAD + \angle EDA - \angle ACS.$$

Ob nun A und D die Ränder oder die Mittelpunkte von der Sonne und dem in DM eintretenden Mond sind, jedenfalls ist $\angle EAB$ die Horizontalparallaxe der Sonne, $\angle EDA$ die des Mondes und $\angle AES$ ist der Winkel für den scheinbaren Halbmesser der Sonne. Die ersten beiden Winkel sind an jedem beliebigen Aufgang von Sonne und von Mond zu messen, desgleichen $\angle AES$, der bekanntlich im Mittel 8 Minuten beträgt.

Es ist mithin die verlangte halbe Schattenbreite für die Passage des Mondes die Summe der beiden Horizontal-Parallaxen der Sonne und des Mondes weniger dem halben scheinbaren Durchmesser der Sonne. Je weiter die Sonne von der Erde und je näher der Mond der Erde, desto gröfser wird die Schattenbreite.

3. Der Mond hat vermöge der Neigung seiner Bahn bald nördliche, bald südliche Breite, die wie schon bemerkt $5\frac{1}{2}°$ niemals übersteigt. Aus der Betrachtung des Schattenkegels geht hervor, dafs der Mond, auch wenn er unter oder über der Ekliptik steht, noch verfinstert werden kann; die Grenze, bei welcher eine partiale Verfinsterung noch eintreten kann ist eine Breite von 1° 4'.

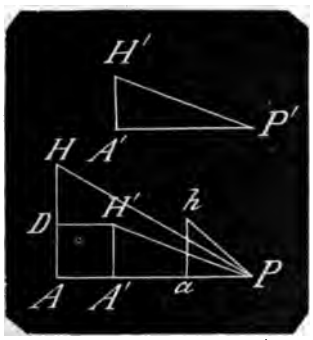
Aufser der ad 2 gedachten nothwendigen Kenntniſs der Horizontalparallaxen und der scheinbaren Gröfsen ist für die specielle Berechnung einer Mondfinsterniſs noch erforderlich, die wahre Zeit der wahren Opposition des Mondes, dessen Breite für diesen Augenblick, die stündliche Bewegung der Sonne in Länge so wie die des Mondes in Länge und Breite, wozu übrigens Hülfstafeln vorhanden sind. Mit diesen Berechnungen wird in jedem

Fall eine zu vermuthende Finsternifs ermittelt, ob die oben gedachten Grenzen innegehalten oder überschritten werden, ob also eine Finsternifs eintritt oder nicht.

Um diese und die ferneren Rechnungen zu erleichtern reducirt man die Bewegung zweier Gestirne auf die eines einzigen, indem man den einen Körper stehend annimmt und die Bewegung des zweiten gegen den ersten als eine relative Bewegung ermittelt. Es geschieht dies folgender Art:

Es seien P, P' zwei Gestirne, deren Bewegungen gegenseitigen Zusammenhang haben. P' hat die stündliche Bewegung $P'A'$ in Länge, $A'H'$ in Breite;

Fig. 828.



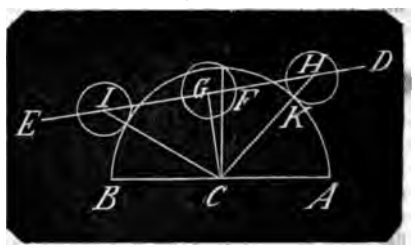
P die stündliche Bewegung PA in Länge, AH in Breite. Trägt man $\triangle P'A'H'$ an PA in $PA'H'$, zieht die Parallele $H'D$ mit PA, so ist $A'A$ der Unterschied beider Bewegungen in Länge, DH der beider Bewegungen in Breite. Macht man nun $Pa = A'A$, $ah = DH$, so ist unter der Voraussetzung, dafs das Gestirn P' stille steht und P allein sich bewegt, Pa die relative Bewegung des Gestirns P in Länge und ah die relative Bewegung desselben in Breite. $P'H'$ ist die wirkliche Bewegung des Gestirns P', PH die des Gestirns P und Ph die relative wirkliche Bewegung des Gestirns P.

Die relativen Seitenbewegungen Pa und ah sind mit den bekannten wahren Seitenbewegungen $P'A'$, $A'H'$ und PA, AH gegeben, dann ist es auch $\angle hPa = \varphi$; denn es ist $tg\,\varphi = \frac{ah}{aP}$. Nun ist $Ph = aP\,sec\,\varphi$.

4. Das Nächste ist die Ermittelung des Zeitpunkts für die Mitte der Finsternifs.

Es sei C der Mittelpunkt des Schattenkegels in der Mondentfernung, CA der ad 1 mit Fig. 826 gefundenen Halbmesser desselben, DE die mit ihrer Neigung gegen die Ekliptik ermittelte Mondbahn, F der Ort des Mondes in der wahren

Fig. 829.



Opposition, CF die Breite des Mondes in demselben Augenblick, CG das auf die Bahnlinie DE gefällte Loth, H und J seien die Mittelpunkte des Mondes bei der ersten und der letzten Randberührung, so ist $\triangle JCG \cong \triangle HCG$ und G ist die gesuchte Mitte. In dem $\triangle CFG$ ist $\angle FCG$ = dem Neigungswinkel der Bahn mit der Ekliptik, die Breite CF ist aus den Tafeln bekannt, und es ist $FG = CF\,sin\,FCG$ = Mondbreite × Sinus des Neigungswinkels.

Dieser Bogen FG in Zeit verwandelt entsteht daraus, dafs die bekannte stündliche Zeit der Mondbewegung zu der Zeit für die Bewegung desselben durch FG sich verhält, wie eine Stunde (= 3600 Bogensecunden) zu der verlangten Zeit. Aufserdem ist der kürzeste Abstand CG der relativen Bahn DE vom Mittelpunkt C des Schattendurchschnitts $= CF\,cos\,FCG$ gefunden worden.

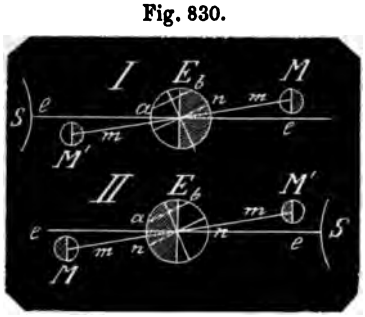
Zur Auffindung der Zeit für die Dauer der Finsternifs hat man den Halbmesser CK des Schattendurchschnitts und den scheinbaren Halbmesser HK, also auch $CK + HK = CH$ bekannt, woraus $HG = JG$, und folglich HJ bekannt wird. Diese Länge verwandelt sich in Zeit durch die Proportion 1 Stunde zu der Dauer auf die Bewegung durch HG, d. h. zur Dauer der halben Finsternifs, wie die stündliche Bewegung auf der relativen Bahn zur Länge GH in Bogengraden. Diese Zeit von dem ermittelten Zeitpunkt für die in G stattfindende Mitte der Finsternifs abgezogen gibt den Zeitaugenblick, in welchem der Mond in H tritt und die Finsternifs beginnt, und zu demselben hinzuaddirt den Zeitaugenblick für den Stand des Mondes in J, wo die Finsternifs endet.

So wie mit dieser partialen so findet man auch bei jeder totalen Mondfinsternifs aufser den Zeitpunkten für den Eintritt und den Austritt der Ränder die Zeitpunkte für den Anfang und das Ende der totalen Verfinsterung der Mondscheibe.

Die längste Dauer einer Mondfinsternifs vom Eintritt des Vorderrandes bis zum Austritt des Hinterrandes beträgt 4 Stunden 38 Minuten und die längste Dauer der totalen Finsternifs vom Eintritt des Hinterrandes bis zum Austritt des Vorderrandes 2 Stunden 18 Minuten.

Mondphasen. Ist *S* die Sonne, *E* die Erde, *ee* die Ekliptik, *M* der Mond, *mmm* seine Bahn, die gegen *ee* etwa 5° 8½′ geneigt ist, so ist die erste Figur der Stand der Erde im Winter-, die zweite der im Sommersolstitium; die vordere Ansicht des Systems s. Fig. 796, pag. 126. Die Bewegungen der Erde und des Mondes geschehen wie die Pfeile anzeigen, also nach einerlei Richtung. Hierbei hat der

Fig. 830.



Mond keine Axendrehung, er dreht sich vielmehr um die Erde wie an einer sich drehenden Radspeiche befestigt. Steht der Mond in *M*, so ist er mit der Sonne in Opposition, es ist Vollmond, steht er in *M′*, so ist er mit der Sonne in Conjunction, es ist Neumond.

Kommt der Mond bei Conjunctionen in die Ebene der Ekliptik (man denke sich *M*, *S* und *E* in einer geraden Linie) so entsteht Sonnenfinsternifs, kommt dies bei Oppositionen vor so ist Mondfinsternifs.

Da die Erde, Fig. I, im Wintersolstitium steht, so ist auf der nördlichen Halbkugel Sommer, Fig. II, Winter. Von dem Punkt *a* des Parallelkreises *ab*, Fig. II, ist der Bogen *an* bis zur Linie nach dem Vollmond viel kleiner als Fig. I, der gleichnamige Bogen *bn*, der Mond, Fig. II, im Winter steht also uns Bewohnern der nördlichen Halbkugel viel höher als im Sommer.

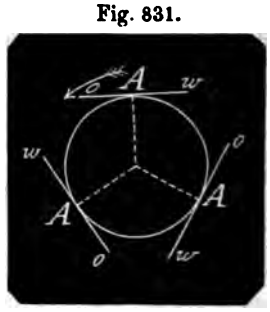
Der Mond hat für uns 4 Hauptlichtwechsel: den Neumond, das erste Viertel, den Vollmond und das letzte Viertel. Neumond und Vollmond führen den gemeinschaftlichen Namen Syzygien, das erste und letzte Viertel den Namen Quadraturen.

Der Neumond zeigt uns seine unbeleuchtete Seite; einige Tage später geht der Mond bald nach Sonnenuntergang am westlichen Himmel auf als schmale Sichel, die Hörner nach oben gerichtet und geht bald wieder unter. Mit jedem Tage geht er östlicher und früher auf, später unter, die Sichel wird gröfser und 7 Tage nach Neumond geht er als halbe Scheibe, die Krümmung (von der Abendsonne) westlich Abends 6 Uhr in Süden auf, zu Mitternacht unter; dies ist das erste Viertel. Von hier ab wird die Scheibe immer voller und 7 Tage später geht er als volle Scheibe, als Vollmond, in Osten auf, wenn die Sonne untergeht. Von hier ab erfolgt der Aufgang alle Tage eine Stunde später; nach etwa 7 Tagen als halbe Scheibe, die Krümmung (von der Morgensonne) östlich um Mitternacht, Untergang bei Tage (letztes Viertel).

Um diese Lichterscheinungen und die damit zusammenhangenden Begebnisse zu verstehen, ist zunächst folgendes zu beachten.

Wenn die Erde nach der Richtung des Pfeils um ihre Axe sich dreht, so ist an jedem Ort *A* auf der Oberfläche in den

Fig. 831.

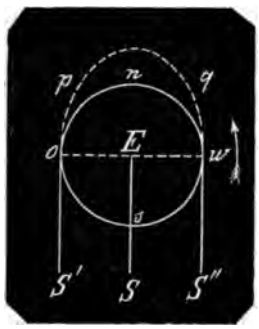


Tangenten als Horizontalen Westen und Osten so gerichtet, wie *w* und *o* bezeichnen. Süd und Nord fallen für *A*, winkelrecht auf *ow* und auf der Papierebene in dem Punkt *A* zusammen.

Wenn *ES* die Richtung nach der Sonne hin ist, so ist wegen der grofsen Entfer-

g derselben auf jedem Ort der Erde auch in *o* und *w* die Richtung *oS'* S'' ∦ *ES*. Den Bewohnern des Ortes scheint die Sonne *S* im Horizont, es Sonnenaufgang: je näher *o* nach *s* mt, desto gröfser wird die Sonnen-, in *s* ist Mittag, von *s* nach *w* hin eht senkt sich die Sonne, in *w* steht

Fig. 832.



m Horizont, es ist Abend und im sten Augenblick der Drehung von *w* r nach *n* geht *S* unter. In Folge r Erdbewegung scheint es uns, als ı die Erde still stände und die Sonne *o* dem Aufgangspunkt über *p* und *q* ıach *w* dem Untergangspunkt, also Osten nach Westen sich drehet.

r Mond ist zwar nicht so weit ent- als die Sonne, allein die Entfer- ist doch so grofs, dafs man auch iesem dieselbe Parallelität der Rich- en seines Erscheinens auf allen Punk- ler Erdoberfläche wie bei der Sonne hmen kann; desgleichen dafs bei je- Standpunkt des Mondes die Sonne lenselben parallel der Linie *ES* ge- ıt ist.

e Sonne geht also in *o* auf, in *w* , in den Nachtgleichen Morgens und ds etwa um 6 Uhr. Genau um 6 früh würde sie aufgehen, wenn die tgleiche ebenfalls genau um 6 Uhr einträte, und pünktlich 6 Uhr Abends e sie untergehen, wenn die Nacht- he ebenfalls pünktlich 6 Uhr Abends ıte. Geht im Frühlingspunkt die e genau 6 Uhr auf, so geht sie spä- ls 6 Uhr Abends unter, weil die e während des Tages bis Abend ı um eine kleine Länge in die nörd- Halbkugel fortgeschritten ist. Geht Herbstpunkt die Sonne früh 6 Uhr tlich auf, so geht sie Abends vor 6 unter, weil sie während des Tages bis Abend schon um eine kleine Länge in die südliche Halbkugel getreten ist.

In der Sommerwende, wenn diese gerade zu Mittag eintritt, geht sie eben so viel vor 6 Uhr Morgens auf als nach 6 Uhr Abends unter, in der Winterwende eben so viel nach 6 Uhr Morgens auf als vor 6 Uhr Abends unter. Ein ähnliches gilt von dem Mond, je nachdem er mit der Erde die Ekliptik schneidet oder nördlich oder südlich derselben näher oder ferner fortschreitet. Hiernach soll von der Zeit, ob um 6 Uhr oder um wie viel vor oder nach 6 Uhr Auf- und Untergang von Sonne und Mond geschieht, abgesehen werden.

In den beifolgenden Figuren ist der gröfsere Kreis die Erde mit dem Mittelpunkt *E*. In der Richtung senkrecht aufwärts steht die Sonne *S*; *n*, *s*, *o*, *w* heifsen der Nord-, der Süd-, der Ost-, der Westpunkt. Die kleinen Kreise bedeuten den Mond, wie er in den Punkten der Erdoberfläche *o*, *s*, *w*, *a*, *b*, *f* der Richtung nach gesehen wird.

Der Neumond, Fig. 833, geht mit der Sonne in *o* auf, in *w* unter, er bleibt

Fig. 833.

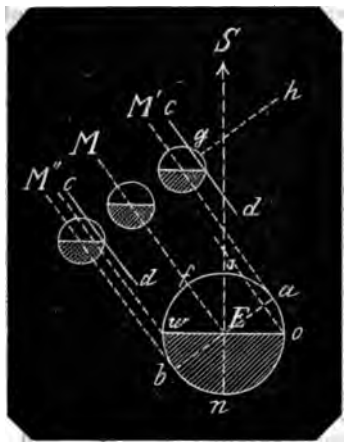
wegen der Tageshelle und weil seine uns zugekehrte Hälfte von der Sonne unbeleuchtet ist, uns unsichtbar.

Ist der Mond in einigen Tagen in die Lage Fig. 834 gekommen, so geht er nicht mit der Sonne in *o*, sondern erst in *a* auf, wenn ∠ *aEM* = 90° ist, wo die Sonne schon den Tagesbogen *oa* beschrieben hat; und wenn er bei der Tageshelle zu sehen wäre, so würde er als schmale Sichel mit der Rundung nach oben, oder wie man sagt, mit den Hörnern nach unten erscheinen. Denn da *aM'* der Horizont von *a* ist, so liegen die durch *dc* abgeschnittenen Hörner unten, die Krümmung *g*

oben, indem gh nach dem Zenith gerichtet ist.

Der Mond beschreibt nun weiter mit der Sonne den Tagebogen, und wenn die

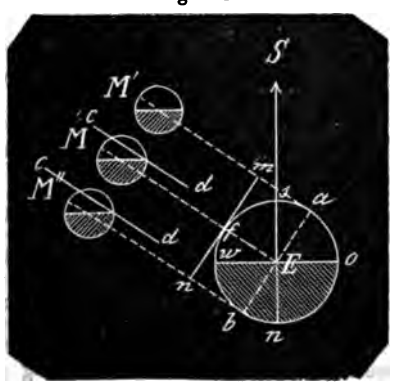
Fig. 834.



Sonne in w untergeht, so erscheint er bei dem schwächer gewordenen Tageslicht und zwar auch schon nahe dem westlichen Horizont und geht in b, der geraden Verlängerung von aE bald darauf unter, nachdem nämlich die Sonne den kleinen Nachtbogen wb beschrieben hat, und zwar als dieselbe Sichel, aber mit oberwärts gerichteten Hörnern, die in dem Horizont bM'' oder dc von b liegen, während die Krümmung g unterhalb befindlich ist, weil hier gh die Richtung nach unterwärts hat.

Die Stellung Fig. 835 des Mondes zeigt ein noch weiteres Fortschreiten desselben.

Fig. 835.

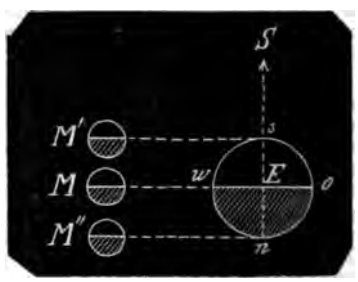


Der Ort a, wo der Mond am Horizont aufgeht, liegt schon nahe dem Mittag s; wegen der Tageshelle ist der Aufgang nicht sichtbar und erst gegen Abend, wenn der Ort o über a in den Punkt f getreten ist, und das Tageslicht nun schwächer geworden, kommt er mit diesem Schein in die Gegend des südlichen Himmels und in der Nähe seines größten Höhenpunkts zum Anblick. cm ist die Richtung des Horizonts von f, EM die Richtung nach dem Zenith, mithin stehen die Hörner in cd ziemlich lothrecht und nach Osten, während die Rundung der nun schon viel breiteren Sichel nach Westen gerichtet ist.

In b, der geraden Verlängerung von aE gegen Mitternacht, wenn die Sonne bis dahin noch den kleinen Nachtbogen bn zu beschreiben hat, geht der Mond unter, und zwar wieder wie Fig. 834, die Sichelhörner nach oben und die Rundung nach unten gerichtet.

In der Stellung des Mondes Fig. 836, geht der Mond zu Mittage in s unsichtbar auf, Abend 6 Uhr bei schon dunklem Lichte, indem die Sonne eben untergeht, hat er in w seinen Culminationspunkt

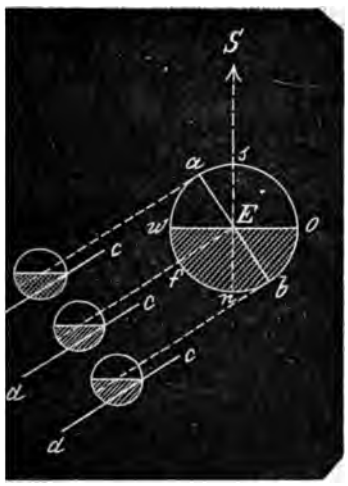
Fig. 836.



und wird als Halbkreis sichtbar; die Krümmung der Scheibe ist westlich. In s zu Mitternacht geht er unter mit der Krümmung der Scheibe nach unten. Diese Lichterscheinung ist das erste Viertel.

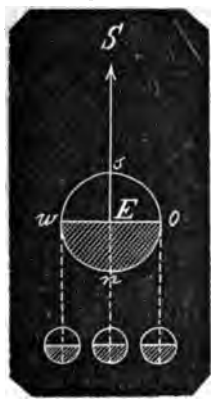
In der Stellung Fig. 837, geht der Mond in a, also Nachmittag auf, wird gegen Abend am östlichen Himmel sichtbar. Zur vollen sichtbaren Scheibe fehlt nur noch das von der Linie cd unterhalb des Horizonts abgeschnittene dunkle Stück; in f gegen Mitternacht culminirt er und in b, eben so weit vom Sonnenaufgang o wie a vom Sonnenuntergang w, geht er, das fehlende Stück der Scheibe nach oben gerichtet unter.

Fig. 837.



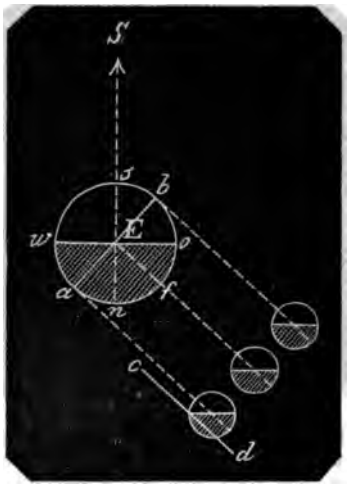
der Stellung Fig. 838 ist der zu-
ende Mond zum Vollmond gewor-
Er geht in *w* bei Sonnenuntergang
n *n* zu Mitternacht culminirt er und
bei Sonnenaufgang geht er unter.
hier an wird der Mond abnehmen-
ſ o n d.

Fig. 838.



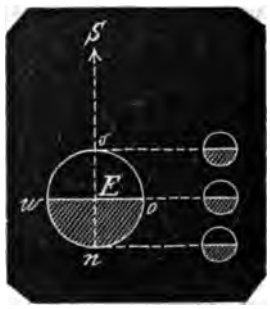
der Stellung Fig. 839, geht der Mond
zwischen Sonnenuntergang und Mit-
cht auf; zur vollen erleuchteten
be fehlt nur das oberhalb von der
cd abgeschnittene dunkle Stück.
zwischen Mitternacht und Morgen
nirt er, in *b* Vormittags geht er
n der Helligkeit des Tages unsicht-
nter.

Fig. 839.



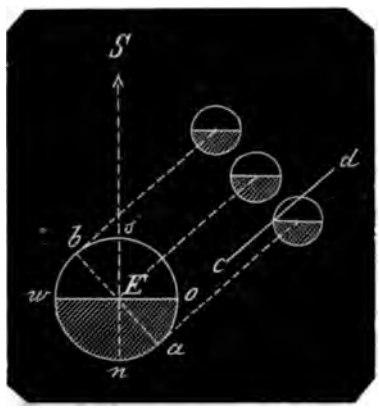
In der Stellung Fig. 840 des Mondes ist das letzte Viertel; der Mond geht Mitternacht in *n* auf als ein Halbkreis, dessen Krümmung unterhalb liegt, in *o* bei Sonnenaufgang steht der Halbmesser lothrecht, die Krümmung liegt nach Osten. Der Mond culminirt hier, verschwindet bei zunehmender Tageshelligkeit immer mehr und geht Mittag in *s* unter.

Fig. 840.



In der Stellung Fig. 841 endlich geht der Mond zwischen Mitternacht und Morgen in *a* auf als eine Sichel, deren Krümmung durch die Linie *cd* in den Hörnern abgeschnitten, unterhalb liegt. Gleich nach Sonnenaufgang in *o* wird er unsichtbar, er culminirt Vormittags und geht Nachmittags unsichtbar unter.

Fig. 841.



Mondzirkel, s. v. w. „Mondcyclus“ s. u. Cyclus.

Monodimetrisches Krystallisationssystem ist das zweite, das zwei und einaxige System, bei welchem drei Axen, von denen zwei gleichartig sind, die dritte mit den ersten beiden ungleichartig ist, unter rechten Winkeln sich schneiden.

Monoklinoedrisches, auch **Monoklinometrisches Krystallisationssystem** ist das fünfte System, das zwei und eingliedrige System, bei welchem eine Axe die beiden anderen ihr ungleichartigen Axen unter rechten Winkeln, diese beiden ebenfalls unter sich ungleichartigen Axen unter schiefen Winkeln sich schneiden.

Monom ist eine einfache, eingliedrige Gröfse im Gegensatz zu zwei- und mehrgliedrigen Gröfsen. a ist ein Monom, $a \pm b$ ein Binom, $a \pm b \mp c$ ein Trinom.

Monotrimetrisches Krystallisationssystem, das dritte System, das drei und einaxige System, bei welchem drei unter einander gleichartige Axen von einer vierten ihnen ungleichartigen Axe rechtwinklig geschnitten werden.

Morgen, Morgenpunkt, s. u. „Abend“.

Morgendämmerung, s. u. „astronomische Dämmerung“.

Morgenseite die durch die Meridianebene eines Orts der Erde abgetheilte Hälfte der Himmelskugel, in welcher der Morgenpunkt liegt. In deren Horizont gehen alle Gestirne auf, während sie in dem Horizont der Abendseite untergehen.

Morgenweite eines Gestirns ist der Bogen im Horizont als Abstand zwischen dem Aufgangspunkt des Gestirns und dem Morgenpunkt. Das Nähere s. in dem Art. „Abendweite“ mit Fig. 2, ferner „Aufgang und Untergang der Gestirne“ mit Fig. 109 und 110, pag. 176.

Multinom oder **Polinom** ist eine aus unbestimmt vielen Gliedern bestehende Gröfse.

Multiplicandus ist eine Gröfse, die vervielfacht, die mit einer Zahl multiplicirt werden soll.

Multiplicator ist eine abstracte Zahl, welche angibt wie oft eine Gröfse genommen, oder mit welcher eine Gröfse multiplicirt werden soll.

Multiplication ist die Rechnungsart oder das Verfahren beim Multipliciren. Multipliciren heifst: eine gegebene Gröfse eine Anzahl Male nehmen oder eine Gröfse finden, in welcher eine gegebene Gröfse eine gegebene Anzahl Male enthalten ist. Die Gröfse, welche mehrere Male genommen, welche vervielfältigt werden soll, heifst der Multiplicandus; die Zahl, welche angibt, wie oft die erstere genommen werden soll, der Multiplicator, beide heifsen Factoren, das Resultat der Rechnung Product.

Hat man nur mit unbenannten Zahlen zu thun, so ist die Multiplication die dritte einfache Rechnungsart, die dritte der vier Species. Die Grundlage derselben ist das Einmaleins, welches auswendig zu lernen ist.

Die Multiplication kann betrachtet werden als eine Addition mit lauter gleichen Summanden. Denn zu dem Product 4 mal 6 gelangt man auch, wenn man vier Zahlen, jede = 6 zusammenaddirt.

Man zählt also 4 horizontale Reihen, jede von 6 Punkten zusammen und erhält 4 mal 6 Punkte, sind zusammen 24 Punkte. Wenn man die 6 vertikalen Reihen jede von 4 Punkten zusammenzählt, also 6 mal 4 Punkte nimmt, erhält man nicht mehr und nicht weniger Punkte als vorhanden sind, nämlich 24 Punkte; man kann also multiplicand und Multiplicator mit einander vertauschen.

Diese Uebereinstimmung der Multiplication mit der Addition ist kein Grund, die Multiplication von den Species auszuschliefsen. Denn offenbar ist das Multipliciren eine von dem Addiren durchaus verschiedene Rechnungsweise. Die

Trennung der Multiplication von den Species geschieht von einigen Rechnenmeistern deshalb, weil man zur Darstellung des Products bei mehrziffrigem Multiplicator die einzelnen Productenreihen addiren muſs, daſs also die Multiplication eine Species zu Hülfe nimmt, also nicht selbstständig, nicht einfach bleibt.

Die theilweise Multiplication aber ist in dem (dekadischen) Zahlensystem begründet. Z. B. 103 mal 75 heiſst: die Zahl soll verfünfundsiebzigfacht werden. Da nun das Einmaleins als Hülfsmittel dem dekadischen System entsprechend für Einer genügt, eine weitere Ausdehnung desselben vielmehr die Vortheile des Systems nur abweist, so geschieht zuerst eine Verfünffachung, hierauf eine Versiebenfachung der Zahl 103 und letztere verzehnfacht, wird nun mit dem ersten Product addirt. Und auf diese Weise müssen alle Rechenexempel ausgeführt werden, wenn man der Vortheile des Einmaleins und des dekadischen Systems theilhaftig werden will. Die Rechenart ist folgende. Man schreibt:

103
75

Es ist 5 mal 103 = ... 515
70 mal 103 = ... 721

Addirt gibt 75 mal 103 = ... 7725

Die einzelnen Producte 515 und 7210, von der man der Bequemlichkeit wegen die Null fortläſst, heiſsen Partial-Producte. Das Zeichen für die Multiplication ist ein Punkt oder ein liegendes Kreuz: die Forderung 75 mal 103 wird geschrieben $75 \cdot 103$ oder 75×103.

Die Multiplication der gemeinen Brüche mit ganzen Zahlen und mit gemeinen Brüchen s. u. „Bruch“, Bd. I., pag. 436, mit Decimalbrüchen s. u. „Decimalbruch“. Die abgekürzte M. ist in einem kurzen Art Bd. I, pag. 5 gezeigt.

Ist ein periodischer Decimalbruch mit einer ganzen oder mit einer geschlossenen Zahl zu multipliciren, so ist nur zu beobachten, daſs die Perioden jedes Partialproducts für die Ermittelung der richtigen Periode des verlangten Products in hinreichender Anzahl neben und unter einander geschrieben werden.

Beispiel 1. $7{,}9 \times 0{,}578\,578\ldots$

5 207 207 207
40 500 500 50

$4{,}5\,707\,707\ldots$

2. $2{,}574 \times 243{,}43257\,43257\ldots$

973 73029 73029 73029
17040 28020 28020 2802
121716 28716 28716 287
486865 14865 14865 14

$626{,}595\,44631\,44631\ldots$

Die Multiplication eines periodischen Decimalbruchs mit einem periodischen Decimalbruch führt zu keinem erwünschten Resultat, denn gesetzt man habe die Zahl $0{,}4646\ldots = \frac{46}{99}$ mit $0{,}111\ldots = \frac{1}{9}$ zu multipliciren, so hat man $\frac{4646}{9999}$ zu berechnen und es können 890 verschiedene Reste entstehen, die Periode kann also 890 Ziffern begreifen. Oder man rechnet $\frac{1}{3} \times 0{,}46\,46\ldots$, so hat man gleichfalls keine Aussicht auf eine kurze, oder vielmehr man hat die Aussicht auf dieselbe lange Periode.

Die Multiplication der Buchstabengröſsen, s. „Buchstabenrechnung“, pag. 438. Die Multiplication mit imaginären Gröſsen s. d. Art. pag. 283.

Eine eigenthümliche Art von Multiplication, bei welcher beide Factoren benannte, gleichartige und ungleichartige Gröſsen sind und ein Product liefern, welches mit keinem der beiden Factoren gleichartig ist, ist die Multiplication geometrischer Gröſsen mit einander. Den Zusammenhang, daſs Linien mal Linien = Flächen, und daſs Linien mal Linien mal Linien oder Linien mal Flächen = Körper sind, siehe die Art. „Flächenmaaſs“ und „cubisches Maaſs“. Wie Linien mit Linien zu Flächen multiplicirt werden, s. den Art. „Algebraische Geometrie“ Bd. I, pag. 45 mit Fig. 41, 42 und 43. Eben so geschieht die Multiplication zu Körpern, z. B.:

$3'\,5'' \times 7'\,4'' \times 6'\,5''$ ist ein rechtwinkliges Parallelepiped, dessen drei Kanten die Factoren zu Längen haben.

$3'\,5'' \times 7'\,4''$ sind = dem zu beiden Factoren als Seiten gehörenden Rechteck $= 25\frac{1}{12}\,\square' = 25\,\square'\,8\,\square''$.

Diese Seitenfläche mit dem dritten Fac-

$$\log \cos (12^\circ\ 50') = 9{,}9890137 - 10$$

also $\log \sqrt[3]{\cos} (12^\circ\ 50' = \frac{1}{3}(9{,}9890137 - 10) = \frac{1}{3} x\ (29{,}9890137 - 30) = 9{,}996$

N.

t ist im gewöhnlichen Sprachge-
, wenn die Sonne unter dem Ho-
sich befindet, und in der Regel
t man noch die Dämmerung von
en aus. Wissenschaftlich heifst
der Zeitraum, welcher begriffen
schen den beiden Augenblicken,
hen der Mittelpunkt der Sonne
n Untergang und Aufgang der-
den Horizont berührt. Es wird
icht nur die Dämmerung ausge-
en sondern auch noch die wirk-
ageszeit, in welcher die Sonne von
Mittelpunkt bis zum Rande und
e der Ablenkung ihrer Strahlen
lie Luftschichten noch länger die
escheint.

ichnet man mit D die Ascensio-
ferenz (s. „Ascension" mit Fig.
Sonne für einen Ort der Erd-
he, mit A die nördliche oder süd-
bweichung der Sonne (Höhe der-
über dem Aequator) und mit H
quatorhöhe des Orts, so hat man

$$\sin D = \frac{tg\ A}{tg\ H}$$

wenn man D durch die Polhöhe
Orts ausdrücken will, weil diese
mit seiner geographischen Breite über
einstimmt,

$$\sin D = tg\ A \cdot tg\ P$$

Nun ist der halbe Tag des Orts in Bogenmaafs, d. h. die Bogenlänge von dem Aufgange des Sonnenmittels bis zu seiner Culmination zu Mittage

$$= 90^\circ \pm D \text{ Bogenmaafs,}$$

also in Zeitmaafs $= \frac{90^\circ \pm D}{360^\circ} \times 24$ Stunden,

wo $+D$ für gleichnamige, $-D$ für ungleichnamige A mit dem Ort genommen wird; also für uns Bewohner der nördlichen Halbkugel $+D$, wenn die Sonne nördliche, $-D$ wenn sie südliche Abweichung hat.

Der ganze Tag hat also
in Bogenmaafs $2(90^\circ \pm D)$
und in Zeitmaafs $\frac{90^\circ \pm D}{180^\circ} \times 24$ Stunden.

Da für jeden Ort der Erde Tag und Nacht zu 24 Stunden und 360° sich ergänzen, so hat man die Nachtdauer
in Bogenmaafs $= 2(90^\circ \mp D)$
in Zeitmaafs $= \frac{90^\circ \mp D}{180^\circ} \times 24$ Stunden.

Oder bei Einführung der Werthe A, H, P

$$\text{htdauer in Bogenmaafs} = 2\left[90^\circ \mp Arc \cdot \sin\left(\frac{tg\ A}{tg\ H}\right)\right] = 2[90^\circ \mp Arc \sin(tg\ A \cdot tg\ P)]$$

$$\text{in Zeitmaafs} = \frac{90^\circ \mp Arc \sin\left(\frac{tg\ A}{tg\ H}\right)}{180^\circ} \times 24 \text{ Stunden.}$$

$$= \frac{90^\circ \mp Arc \cdot \sin(tg\ A \cdot tg\ P)}{180^\circ} \times 24 \text{ Stunden.}$$

diesen Formeln geht nun folgen-
rvor:

A. Die Bewohner des Aequators haben das ganze Jahr hindurch 12 Stunden (Tag

und) Nacht, weil $H = 90°$ oder $P = 0$, folglich $tg\, H = \infty$ oder $tg\, P = 0$, folglich der Sinus $0 = 0$ ist.

B. Dasselbe findet für sämmtliche Erdbewohner an den Nachtgleichentagen statt, wo die Sonne in dem Aequator steht.

Anmerk. Für die Pole erhält man $sin\,(0 \times \infty) = sin\,\frac{0}{0}$, den Sinus also unbestimmt; allein Tag + Nacht sind = 24 Stunden, beide addirt geben $\frac{180° \mp sin\,(?)}{180°} \times 24$ Stunden $= \frac{180°}{180°}\,24$ Stunden $= 24$ Stunden, folglich Tag = Nacht = 12 Stunden.

C. Die kürzesten Nächte haben die Erdbewohner für den Stand der Sonne in den gleichnamigen, die längsten für die Sonne in den ungleichnamigen Wendepunkten, weil dort A sein Maximum $23\frac{1}{2}°$ erreicht

Für die Polarkreise ist ebenfalls $H = 23\frac{1}{2}°$, also $arc \cdot sin\ 1 = 90°$. Mithin die kürzeste Nacht $= \frac{90° - 90°}{180°}\,24 = 0$, die längste Nacht $= \frac{2 \cdot 90°}{180°} \times 24 = 24$ Stunden. Im ersten Falle streift die Sonne zu Mitternacht den Horizont ohne unterzugehen, im zweiten Fall streift sie ihn ohne aufzugehen.

Für die Pole wird der Sinus ∞, also *arc sinus* unmöglich.

In dem Art. „Ascensionaldifferenz" ist berechnet worden für Berlin

der längste Tag = der längsten Nacht = 16 Stund. 36 Min. 22,4 Sec.

der kürzeste Tag = der kürzesten Nacht = 7 Stund. 23 Min. 37,6 Sec.

Nachtbogen eines Gestirns ist der Bogen, den das Gestirn vom Untergang bis zum Aufgange am Himmel beschreibt. Dessen geometrische Construction für die Bewohner des Aequators, s. Bd. I, pag. 175, mit Fig. 108, für die übrigen Erdbewohner mit Fig. 109.

Nachtdämmerung ist die Dämmerung, die sich bis Mitternacht erstreckt, so dafs der Ort keine eigentliche Nacht hat. Ein Stand der Sonne 18° unter dem Horizont eines Orts ist die Dämmerungsgrenze; mit diesem Stande beginnt die Morgendämmerung und endet die Abenddämmerung. Die Orte der Erde in demjenigen Parallelkreise, für welchen während der kürzesten Nacht die Sonnentiefe 18° beträgt, bilden die Grenzorte für permanente Nachtdämmerung. Von diesem Parallelkreise nach dem Pole zu werden die Sonnentiefen immer geringer und mit ihnen die Zahl der um die kürzesten Nächte liegenden permanenten Nachtdämmerungen immer grösser.

In dem Art. „Astronomische Dämmerung", pag. 139, ist nachgewiesen, dafs die Mittagshöhe (Sh) der Sonne gleich ist der Aequatorhöhe (Qh) des Orts ± der Abweichung (A) der Sonne oder gleich dem Complement der geographischen Breite (gB) des Orts ± A:

Dafs die Mitternachtstiefe (Sf) + der Mittagshöhe (Sh) der Sonne gleich ist der doppelten Aequatorhöhe (Qh) = dem doppelten Complement der gB des Orts.

Dafs folglich die Mitternachtstiefe (Sf) der Sonne gleich ist der doppelten Qh weniger der Sh, folglich gleich der Qh ∓ der Abweichung der Sonne.

Also

$$Sh = Qh \pm A = 90° - gB \pm A \quad (1)$$

$$Sf + Sh = 2Qh = 180° - 2gB \quad (2)$$

$$Sf = 2Qh - Sh = Qh \mp A = 90° - (gB \pm A) \quad (3)$$

und $$gB = 90° - (Sf \pm A) \quad (4)$$

In dem vorliegenden Fall, wo die Sonne in dem nördlichen Wendekreise steht und wo Sf für die Nachtdämmerungsgrenze 18° beträgt hat man nach Formel 4

$$gB = 90° - (18° + 23\tfrac{1}{2}°) = 48\tfrac{1}{2}°$$

Es hat also kein Ort der nördlichen Halbkugel vom Aequator bis zu $48\frac{1}{2}°$ geogr. Breite Nachtdämmerung.

Steht die Sonne in dem südlichen Wendekreise, so ist die geringste Mitternachtstiefe der Sonne die negative Sonnenhöhe $= -18°$ für die Dämmerungsgrenze und man hat nach Formel 1

$$-18° = 90° - gB - 23\tfrac{1}{2}°$$

woraus $gB = 84\frac{1}{2}°$, also $5\frac{1}{2}°$ vom Nordpol entfernt, von wo aus nach dem Pol hin während des Winters kein Ort eine Nachtdämmerung erhält. Um zu erfahren, unter welcher südlichen Abweichung die erste Dämmerung am Pol eintritt, hat man die geringste Mitternachtstiefe $= 18°$, wenn die Mittagshöhe der Sonne $-18°$ beträgt, also bei $A = -18°$, d. h. wenn die Sonne eine südliche Breite von 18° besitzt, wie auch Formel 1:

$$-18° = 90° - 90° - A \text{ ergibt.}$$

Während des Steigens der Sonne von diesem Stande aus verbreitet sich die Nachtdämmerungsgrenze nur langsam vom Pole ab nach den Polarkreisen hin, denn erst beim Stande von $12\frac{1}{2}°$ südlicher Breite trifft die Grenze auf jenen Punkt von $5\frac{1}{2}°$ vom Pol ab gerechnet; die Mitternachtstiefe am Pol beträgt nur $-5\frac{1}{2}°$.

Steht die Sonne im Aequator, so ist die Grenze der Nachtdämmerung unter 72° Breite, also 18° unter den Polen, die Pole haben die Sonnentiefe = 0, die Polarkreise dieselbe = 23½° und erst bei 5½° nördlicher Breite der Sonne bilden die Polarkreise die Grenze der Nachtdämmerung.

Nachtfernrohr ist ein Fernrohr, um bei Nacht dunkle Gegenstände zu beobachten oder aufzusuchen. Ersteres geschieht besonders von dem Schiffer, letzteres von dem Astronom, der es deshalb auch Kometensucher nennt. Es liegt bei diesem Instrument mehr an Helligkeit und grofsem Gesichtsfeld als an Vergröfserung und man erreicht dies durch ein flaches und weiteres Objectiv und begnügt sich mit einer 10maligen Vergröfserung bei einfachem Ocular. Die Frauenhofer'schen Kometensucher haben bei 34 Linien Objectiv-Oeffnung, 24 Zoll Brennweite und bei 10maliger Vergröfserung ein Gesichtsfeld von 6 Grad Durchmesser.

Nachtgleichen sollten heifsen Tag- und Nachtgleichen. Diese finden auf der Erde jährlich zwei mal statt in den Augenblicken, wo die Sonne in der Erdaequatorebene, also normal der Erdaxe auf deren Mitte gerichtet sich befindet und wo sie die Erdoberfläche von Pol zu Pol beleuchtet. Die Zeitpunkte dieser Stellungen fallen auf den 21ten März und den 23ten September, den Anfangspunkten des Frühlings und des Herbstes, woher auch der erste Punkt der Frühlingspunkt, der zweite der Herbstpunkt genannt wird.

Bei der Bewegung der Erde in der Ekliptik bleibt ihr Aequator unter einem Neigungswinkel von 23½° mit derselben parallel mit sich selbst. Denkt man sich diesem Aequator parallel durch die Sonne eine Ebene gelegt (den Weltaequator), so schneidet diese die Ekliptik in zweien diametral gegenüberliegenden Punkten, und diese Durchschnittspunkte sind die oben gedachten Nachtgleichenpunkte, der Frühlingspunkt und der Herbstpunkt (vergl. „Aequator der Erde" mit Fig. 14 und „Frühlingspunkt").

Die Nachtgleichenpunkte bleiben nicht constant, sie rücken jährlich um 50,2 Bogensecunden von Ost nach West, also der Bewegung der Erde entgegengesetzt, indem die der Erdaxe parallele Weltaxe um die Axe der Ekliptik in dieser entgegengesetzten Richtung im Kreise sich herumdreht ohne ihre Neigung gegen dieselbe zu ändern und jene Durchschnittspunkte mit nimmt. Man nennt diese Verrückung der Nachtgleichenpunkte das Vorrücken der Nachtgleichen, während es eigentlich ein Zurückrücken ist. Dagegen steht die Sonne still und die Bewegung der Punkte veranlafst, dafs die Erde früher mit ihr in denselben zur Herstellung der Nachtgleichen zusammentrifft und so hat man die gewählte Bezeichnung geeigneter gefunden.

In Folge dieser Verrückung der Nachtgleichen geschieht es nun, dafs alle Sterne jährlich um 50,2 Sec. an Länge und gerader Aufsteigung zunehmen ohne ihre Breite und Abweichung zu ändern. In 71,87 Jahren beträgt dies 1 Grad und in 25873 Jahren 360 Grade, so dafs nach dieser Zeit, welche das grofse platonische Jahr genannt wird, alle Sterne dieselbe Länge wieder erhalten, welche sie in dem vergangenen hatten.

Der Grund der fortdauernden Bewegung der Nachtgleichen liegt besonders in der Abplattung der Erde, vermöge welcher Sonne und Mond, wenn sie in der Aequatorebene der Erde sich nicht befinden eine ungleiche Anziehung auf deren beide Halbkugeln ausüben, sowie in noch mehreren anderen störenden Ursachen.

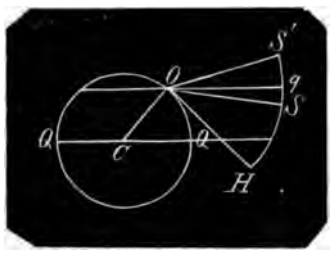
Die Nachtgleichenpunkte zeichnen sich durch keine bestimmten Merkmale am Himmel aus und können es auch ihrer Veränderlichkeit wegen nicht. Es ist aber deren Lage genau zu wissen nothwendig, denn der Frühlingspunkt ist allen nur möglichen astronomischen Bestimmungen der Anfangspunkt. Die Ermittelung dieser Nachtgleichenpunkte geschieht nun dadurch, dafs man zu bestimmten Zeitaugenblicken vor und nach dem Eintreten eines derselben, z. B. des Frühlingspunktes, die Abweichungen der Sonne und die vergleichenden geraden Aufsteigungen derselben mit denen eines oder mehrerer Fixsterne durch genaue Beobachtungen feststellt.

Tritt der Frühlingspunkt ein, sehen wir von mehreren einander sich berichtigenden Beobachtungen ab und nehmen der nachfolgenden Erklärung wegen nur zwei Beobachtungen an, so ist die erste Abweichung der Sonne südlich, die zweite nördlich. Direct sind diese Abweichungen nicht zu finden; allein man mifst zwei Mittagshöhen der Sonne und findet sie aus diesen mit Hülfe der bekannten Aequatorhöhe des Beobachtungsortes.

Es bedeute der Kreis den Erddurchschnitt mit dem Mittelpunkt *C*; *QQ* den Aequator, *O* den Beobachtungsort, *OH* sein Horizont, *Oq* die mit dem Aequator

Parallele; S, S die Richtungen der Sonne an zwei Mittagen, S vor, S' nach dem Eintritt des Frühlingspunkts, so sind die

Fig. 842.



Bogen SH, $S'H$ die beobachteten Mittagshöhen, Sq und $S'q$ die verlangten Abweichungen der Sonne und Bogen qH ist die Aequatorhöhe von Q.

Man sieht, es ist

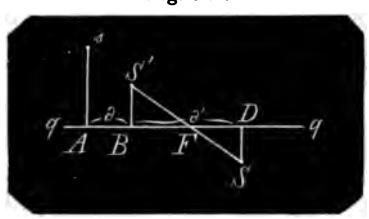
$$Sq = qH - SH = -(SH - qH)$$

und $$S'q = S'H - qH$$

Also, wie schon in dem Art. „Abweichung“ kurz angegeben, die Abweichung der Sonne = ± der Mittagshöhe weniger der Aequatorhöhe des Orts.

Nun sei wieder qq der Aequator. Es sind ermittelt $SD = h$ die südliche, $S'B = h'$ die nördliche Abweichung der Sonne. Ist s ein Fixstern (man nimmt möglichst schnell zu gegenseitiger Berichtigung mehrere), so hat man wie bei der Sonne dessen Abweichungskreis sA bestimmt, und

Fig. 843.



man konnte vor eintretenden Mittagshöhen visiren die Punkte B, D, A der geraden Aufsteigungen dieser Gestirne. Es ergaben sich dadurch die Aufsteigungsunterschiede $AB = d$, $BD = d'$. Setzt man nun die Höhen h, h' auf die Punkte B, D normal mit dem Aequator, zieht die gerade Linie $S'S$, so liegt in dem Durchschnittspunkt F derselben mit qq der Frühlingspunkt F, und zwar sehr nahe, weil man die Bewegung der Erde in der Ekliptik zwischen der kurzen Zeit der Beobachtungen als gleichförmig ansehen kann.

Man hat demnach in den ähnlichen Dreiecken FBS' und FDS, wenn man $AF = x$ setzt:

$$S'B : SD = BF : DF$$

also $$h' : h = x - d : d + d' - x$$

woraus $$x = d + \frac{h'd'}{h + h'}$$

Der Frühlingspunkt ist also festgestellt durch die Rectascension eines Fixsterns, dessen Standpunkt am Himmel constant ist, und man hat nun die Mittel, ihn auch mit Hülfe anderer Fixsterne immer von Neuem aufzufinden.

Desgleichen ist der Zeitaugenblick des Eintritts der Nachtgleiche hieraus zu bestimmen. Denn ist t der Zeitpunkt der beobachteten ersten, t' der der beobachteten zweiten Mittagshöhe, also deren Zeitdifferenz $= t' - t$, so erhält man den Zeitpunkt T des Eintritts der Nachtgleiche aus der Proportion

$$t' - T : T - t = BF : DF = h' : h.$$

woraus $$T = \frac{ht' + h't}{h + h'}$$

und wenn man $t = 0$ setzt, die Zeit T von der ersten Mittagshöhe DS bis zu dem Eintritt der Nachtgleiche F

$$T = \frac{ht'}{h + h'}$$

Es sei $BS' = h' = 11$ Minuten, $DS = h = 5$ Minuten Bogenmaafs, $t' - t = t' = 24$ Stunden, so ist

$T = \frac{5}{16} \times 24$ Stunden $= 7\frac{1}{2}$ Stunden nach der Beobachtung der ersten Mittagshöhe DS.

Nachtgleichenpunkte, s. u. „Nachtgleichen“.

Nachtlänge, s. u. „Nacht“.

Nadir, Fufspunkt ist der dem Zenith entgegengesetzt liegende Punkt der Himmelskugel, der zweite Pol des Horizonts eines Orts der Erde. Wäre die Erde eine vollkommene Kugel, so würde jedes Nadir das Zenith der Antipoden sein.

Näherung. Einer Näherung bedürfen Gröfsen, deren Werth nicht genau anzugeben ist; der durch Näherung gefundene Werth heifst der Näherungswerth, das Verfahren für die Auffindung des Näherungswerthes heifst Näherungsweise.

Brüchen, deren Zähler und Nenner grofse Primzahlen unter sich sind, nähert man sich mit Hülfe der Kettenbrüche (s. d.), man erhält Näherungsbrüche.

Den nicht anzugebenden Zahlengröfsen, len Irrationalzahlen nähert man sich auf rerschiedene Weise: Wurzeln durch successive Wurzelausziehung auf eine beliebige Anzahl von Decimalen. Die Verhältnifszahl π ist in mehreren verschielenen Reihen angegeben, die alle mehr oder weniger convergiren. Für transcenlente Gröfsen, als Logarithmen, goniometrische und cyclometrische Functionen nat man desgleichen convergirende Reihen entwickelt.

Die Differenzialrechnung verfährt nnähernd durch angenommenes Wachsen nd Abnehmen veränderlicher Gröfsen, ntegrirt wird häufig durch Reihenentwickelung.

Die Exhaustionsmethode ist ein Annäherungsverfahren, um den wirklich richtigen Werth einer geometrischen Gröfse zu ermitteln, indem sie zwei Gröfsen einführt, von denen die eine bei beliebiger Vergröfserung immer kleiner, die andere bei beliebiger Verkleinerung immer gröfser bleibt als die aufzufindende Gröfse, die aber einer dritten constanten Gröfse beliebig nahe kommen können, deren Gröfse sie einschliefsen und die deshalb der gesuchten Gröfse gleich sein mufs.

Die Rectification von Curven, die Quadratur, die Cubatur liefern in der Regel nur Näherungs-Resultate.

Näherungsbruch, Näherungsweise, Näherungswerth, s. u. „Näherung".

Name eines Verhältnisses ist die Differenz der beiden Glieder eines arithmetischen Verhältnisses.

Nebenaxe (Kryst.) s. u. „Axensystem der Krystalle", No. 2, pag. 260.

Nebenlast (Mech.) ist die Last, deren Bewältigung nicht Absicht und Zweck ist, welche aufser der zur Ueberwindung gegebenen Nutzlast durch die Zusammensetzung der in einander greifenden Maschinentheile sich erzeugt. Zu dieser gehören:

A. Das Anlassen einer Maschine, d. h. die Versetzung derselben aus der Ruhe in Bewegung, welches langsam beginnen und mit allmählicher Steigerung der Geschwindigkeit bis zum normalen Gange geschehen mufs; als der Nachtheil, dafs mit dem nöthigen Kraftaufwand keine oder eine nur unbedeutende Nutzlast gewältigt wird.

B. Das Ablassen der Maschine, d. h. die Versetzung der Maschine aufser Betrieb mit derselben Wirkung in entgegengesetzter Richtung, wobei desgleichen Kraft auf Nutzlast nicht verwendet wird.

C. Die Reibungen der an einander gleitenden und in einander sich drehenden Maschinentheile.

D. Der Widerstand der Beharrung der in Bewegung befindlichen Massen (s. „Moment der Trägheit").

E. Die durch Stöfse dem gesammten Maschinenwerk mitgetheilten Erschütterungen, durch welche dieselben in ihren geradlinigen und kreisförmigen Bewegungsrichtungen durch schnell auf einander erfolgende Querbewegungen gestört werden, auch durch Elasticität der Massen entgegengesetzte Richtungen, also Rückwirkungen erfahren. Besonders geschieht dies bei Stampf- und Hammerwerken.

F. Klemmungen nicht genau genug bearbeiteter zusammengreifender Radzähne.

G. Die regelmäfsig periodisch eintretenden Richtungswechsel (die sogenannten todten Punkte). Z. B. Bei Dampfmaschinen mit Balancier die regelmäfsig abwechselnden Auf- und Niedergänge. Der Nachtheil dieser Einrichtung ist zusammengesetzt: der Balancierarm beim Aufwärtsgange hat das Bestreben weiter zu gehen, es gehört ein Kraftaufwand dazu, ihn zum Stehen zu bringen. Um nun niederzugehen mufs er aus der Ruhe in Bewegung gebracht werden, wozu wieder ein Kraftaufwand gehört. Beide Kraftäufserungen haben auf die Nutzlast eine nur geringe Wirkung. Man begegnet diesem sehr nachtheiligen Hindernifs durch Einführung einer neuen Nebenlast, nämlich einer permanent wirkenden Schwungmasse, eines Schwungrades.

Nebenmonde, Monde von Monden werden als vorhanden behauptet und bestritten.

Nebenplaneten, Monde. Es gibt nur vier Planeten unseres Sonnensystems, welche Monde haben: die Erde mit einem Mond, der Jupiter mit vier Monden, der Saturn mit sieben und der Uranus mit sechs Monden.

Sämmtliche Monde haben, genauen Beobachtungen zufolge die Eigenschaft unseres Mondes, dafs sie ihrem Hauptplaneten immer nur eine Seite zukehren. Auch ihre Bahnen stimmen mit denen ihrer Hauptplaneten ziemlich genau überein.

1. Die Monde des Jupiter.

Diese Monde sind sogleich nach Erfindung der Fernröhre entdeckt worden, und

zwar von Simon Mayer zu Anspach am 12ten Januar 1609 und von Galilei am 7ten Januar 1610. Erst in neuerer Zeit ist man mit den Monden genauer bekannt geworden und namentlich haben die Beobachtungen deren Verfinsterungen über Bahnen und Umlaufszeiten nähere Kenntnifs gebracht. Die Bahnen der ersten beiden sind wenig elliptisch, die beiden äufseren sind es mehr. Sämmtliche 4 Monde sind merklichen Störungen unterworfen und zwar in Folge der gegenseitigen Einwirkungen auf einander. Deren Bahnen liegen fast alle in der Ebene der Bahn des Jupiter. Die Neigung des ersten wird angegeben 3° 18′ 38″, die des vierten 2° 36′, beide bleiben constant. Die Bahnen des zweiten und dritten sind veränderlich. Der zweite änderte die Neigung gegen den Jupiter-Aequator innerhalb dreifsig Jahren von 2° 46′ bis zu 3° 46′, der dritte in einem Zeitraum von 132 Jahren von 3° 2′ bis zu 3° 26′.

Die Umlaufszeiten der Monde und deren tägliche Bewegung in Bogenmaafs sind

	Periodische Umlaufszeit.	Tägliche Bewegung.
des 1ten Monds	1 Tg. 18 St. 27 Min. 33 Sec.	203° 29′ 20,4″
„ 2„ „	3 „ 13 „ 13 „ 42 „	101° 22′ 29,1″
„ 3„ „	7 „ 3 „ 42 „ 33 „	50° 19′ 3,5″
„ 4„ „	16 „ 16 „ 32 „ 8 „	21° 34′ 16,0″

Abstände der Monde vom Jupiter. Die ersten Zahlen sind die scheinbaren Abstände in Halbmessern des Jupiter nach Delambre, die letzten sind die wahren Abstände in geographischen Meilen, wenn Jupiters Aequatoreal-Durchmesser = 20100 Meilen beträgt.

Der 1te Mond	5,6985 Halbmesser	57300 geogr. Ml.	
„ 2„ „	9,0665 „	91100 „ „	
„ 3„ „	14,4619 „	145300 „ „	
„ 4„ „	25,4359 „	255600 „ „	

Wahre Gröfse der Monde	nach Schröter	nach Struve
Des 1ten Monds	564 geogr. Ml.	532 geogr. Ml.
„ 2„ „	465 „ „	477 „ „
„ 3„ „	818 „ „	780 „ „
„ 4„ „	570 „ „	667 „ „

2. Die Monde des Saturn.

Diese Monde sind mit sehr langen Fernröhren entdeckt worden. Huyghens entdeckte am 25ten März 1655 den sechsten Mond, Cassini am 25ten October 1671 den siebenten Mond, derselbe am 13ten December 1672 den fünften Mond, im März 1684 den dritten und den vierten Mond, Herschel mit einem 40füfsigen Teleskop den 28ten August 1789 den zweiten und derselbe endlich am 17ten September 1789 den ersten Mond.

Die Ebenen der sechs inneren Mondbahnen sind von dem Ring des Saturns wenig abweichend, der siebente dagegen hat eine Neigung von 12 Grad gegen denselben.

Die Umlaufszeiten der Monde und deren tägliche Bewegung in Bogenmaafs sind

	Periodische Umlaufszeiten.	Tägliche Bewegung.
der 1te Mond	0 Tg. 22 St. 37 Min. 33 Sec.	381° 51′ 53″
„ 2„ „	1 „ 5 „ 53 „ 9 „	262° 43′ 38″
„ 3„ „	1 „ 21 „ 18 „ 26 „	190° 41′ 52″
„ 4„ „	2 „ 17 „ 44 „ 51 „	131° 24′ 42″
„ 5„ „	4 „ 12 „ 25 „ 11 „	79° 41′ 25″
„ 6„ „	15 „ 22 „ 41 „ 25 „	22° 34′ 37″
„ 7„ „	79 „ 7 „ 53 „ 43 „	4° 32′ 17″

Abstände der Monde vom Saturn. Die ersten Zahlen sind die scheinbaren Abstände in Winkeln für die mittlere Entfernung; für die zweiten Zahlen ist der Halbmesser des Ringes 38500 geogr. Ml.; für die dritten Zahlen ist der Aequatoreal-Durchmesser des Saturns 17270 geogr. Ml. angenommen.

Scheinbare Abstsände.	Wahre Abstände	
	in Ringhalbmessern	in geogr. Meilen
Des 1ten Monde 28,67 Sec.	1,42	27400
„ 2 „ „ 36,79 „	1,83	35200
„ 3 „ „ 43,05 „	2,16	41600
„ 4 „ „ 56,00 „	2,78	53600
„ 5 „ „ 78,00 „	3,88	74700
„ 6 „ „ 180,00 „	8,95	172300
„ 7 „ „ 522,05 „	25,98	499800

3. Die Monde des Uranus. Herschel entdeckte am 11ten Januar 1787 die beiden größten Monde desselben, den zweiten und den vierten; später die übrigen vier Monde, den ersten am 18ten Januar 1790, den dritten am 26ten März 1794, den fünften am 9ten Februar 1790, den sechsten am 28ten Februar 1794. Die Bahnen sind beinahe senkrecht auf der Uranusbahn um die Sonne, gegen welche dessen Aequator ebenfalls senkrecht steht.

Synodische Umlaufszeiten.	Entfernungen	
	in Halbmessern des Uranus	in geogr. Ml.
Des 1ten Mondes 5 Tg. 21 St. 25 Min. — Sec.	13,0	48900
„ 2 „ „ 8 „ 16 „ 56 „ 5 „	16,5	62000
„ 3 „ „ 10 „ 23 „ 4 „ — „	19,2	72200
„ 4 „ „ 13 „ 11 „ 8 „ 59 „	22,0	82700
„ 5 „ „ 38 „ 1 „ 49 „ — „	44,2	166200
„ 6 „ „ 107 „ 16 „ 40 „ — „	86,5	325200

Nebenwinkel sind Winkel, die einen gemeinschaftlichen Schenkel haben und deren beide andere Schenkel in einer geraden Linie liegen.

Bd. II, pag. 53, Fig. 337 sind $\angle ACD$ und $\angle BCD$ Nebenwinkel, denn CD ist ihr gemeinschaftlicher Schenkel und deren beide andere Schenkel AC, BC liegen in einer geraden Linie AB.

Nebenwohner (Periöci) sind die Bewohner, die unter einerlei Breite auf entgegengesetzten Seiten des Meridians wohnen. Sie haben dieselben Jahreszeiten aber entgegengesetzte Tageszeiten.

Negativ, s. u. „Affirmativ".

Negative Größen, s. u. „Entgegengesetzte Größen", Bd. III, pag. 53.

Neigung ist ein geometrischer Begriff und bedeutet alles was nicht rechtwinklig, was nicht normal auf einander ist. Ein Winkel wird erklärt als die Neigung zweier geraden Linien, wenn man vom sphärischen Winkel absieht; da nun ein rechter Winkel ebenfalls ein Winkel ist, so kann man denselben auch erklären als einen Winkel, dessen Schenkel auf einander normal stehen.

Wird eine gerade Linie in einem beliebigen Punkt von einer anderen mit deren Endpunkt berührt, so bilden sie zwei Winkel mit einander; offenbar ist die Neigung beider Linien auf der Seite des kleineren Winkels, auf der zweiten Seite könnte man sie eher eine Abweichung nennen. Normal sind also gerade Linien mit einander, wenn sie auf beiden Seiten weder Neigung noch Abweichung haben.

Zwei Ebenen, die sich schneiden, schneiden sich in einer geraden Linie. Diese beiden Ebenen bilden auf jeder der bei-

den Seiten alle nur möglichen Winkel von 0 bis 2 Rechten, je nachdem man, von einem Punkt der Durchschnittslinie aus, auf beiden Ebenen gerade Linien in verschiedenen Lagen zieht, oder je nachdem man die Lage einer Durchschnittsebene wählt. Zieht man von einem Punkt der Durchschnittslinie beide Linien in der beiden Ebenen angehörigen Durchschnittslinie nach einerlei Richtung, so wird der Winkel = 0, zieht man sie nach entgegengesetzten Richtungen, so wird der Winkel = 180°. Da nun die Lage zweier solcher Ebenen nur durch einen Winkel bestimmt werden kann, so ist natürlich, dafs man einen bestimmten constanten Winkel als Maafs ihrer Neigung wählen mufs, und es ist dieser der Winkel, den die Durchschnittslinien einer normal durch beide Ebenen gelegten Ebene mit einander bilden.

Wenn eine gerade Linie auf einer Ebene steht, so bilden beide ebenfalls so viele verschiedene Winkel, als Ebenen durch die Linie gelegt werden können. Nur eine dieser Durchschnittsebenen wird mit der gegebenen Ebene normal und in dieser bildet die Durchschnittslinie mit der Standlinie auf einer Seite den möglich kleinsten, auf der anderen Seite den möglich grösten Winkel. Der kleinere dieser beiden Winkel ist der Neigungswinkel der Standlinie mit der Ebene.

Gröfste Kreise, die unter sich und mit Parallelkreisen auf Kugeln sich schneiden, haben desgleichen verschiedene Lagen mit einander, die ebenfalls durch die von den Kreisen oder deren Bogen mit einander gebildete sphärische Winkel gemessen werden. Diese sphärischen Winkel vergleicht man aber erst mit geradlinigen Winkeln, und zwar mit denjenigen, welche die in den Durchschnittspunkten der Bogen in deren Ebenen gezogenen Tangenten mit einander machen. Mit diesen Winkeln werden die sphärischen Winkel als in einerlei Verhältnifs befindlich betrachtet, oder, was zu demselben Ergebnifs führt, beiderlei Winkel werden einander gleich gesetzt. Demnach messen die gedachten Tangentenwinkel mit ihrer Gröfse die Neigungen der Kugelkreisbogen unter einander.

Neigung der Bahn eines Planeten oder eines Kometen bezieht sich auf die Lage dieser Bahn gegen die Bahn unserer Erde, auf der jene Bahnen beobachtet werden. Da sämmtliche Planeten und Kometen in Ebenen umlaufen, die den Mittelpunkt der Sonne in sich schliefsen und die Erde ebenfalls, so schneiden sämmtliche Bahnen die Ekliptik in einer durch den Sonnenmittelpunkt gehenden Linie, der Knotenlinie. Die Durchschnittspunkte einer Bahn mit der erforderlich verbreiterten Ebene der Ekliptik, welche diametral einander gegenüberliegen, sind die Knoten, und die sphärischen Winkel, welche an diesen Punkten beide Bahnen (von der Ekliptik eine Parallele dort gedacht) mit einander bilden, sind die Neigungswinkel beider Bahnen.

Neigung der Bahn von Nebenplaneten, den Monden, ist deren Neigung mit der Bahn ihres Centralgestirns, ihres Hauptplaneten.

Neigung der Magnetnadel, Inclination, s. u. „Magnet".

Neigungscompafs, Inclinatorium ist ein Mefsinstrument zur Messung des Winkels, den eine genau im Schwerpunkt aufgehängte (equilibrirte) Magnetnadel im magnetischen Meridian von der Horizontalen abweicht (vergl. „Abweichung der Magnetnadel").

Neigungsebene ist diejenige Ebene, welche auf jeder von zweien sich schneidenden oder auch blofs geneigten Ebenen normal sich befindet; der von den Durchschnittlinien der Neigungsebene mit den beiden anderen Ebenen gebildete Winkel ist deren Neigungswinkel.

Neigungsnadel ist die Magnetnadel im Neigungscompafs.

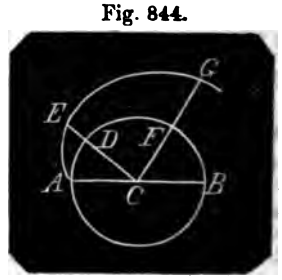
Neigungswinkel, s. u. „Neigung".

Nenner ist die unter dem Bruchstrich, die dividirende Zahl (s. „Bruch").

Neoide. Hierunter versteht man eine Curve, welche für zweckmäfsige Hebung und Senkung der den Spinnmaschinen angehörigen Spindeln angewendet werden soll. Ihre Construction ist folgende.

Man zeichnet in einem Kreise Halbmesser mit Verlängerungen und macht letztere proportional den von denselben abgeschnittenen Bogen.

Fig. 844.



Es sind also

$DE : FG =$ Bogen $AD :$ Bogen AF

Es ist mithin $DE = k \cdot$ Bogen AD; $FG = k \cdot$ Bogen AF, wo k eine ganz beliebige ahl ist.

Zum Ueberfluſs erklärt man auch, daſs er beliebige constante Factor k noch mit em Halbkreisbogen $ADFB$ dividirt wer- en solle, so daſs

$DE = \frac{a}{\pi r}$ Bogen AD; $FG = \frac{a}{\pi r}$ Bogon AF.

Ist der ganze Kreis abgewickelt, so kann ine zweite Windung construirt werden; ie Verlängerung in CE von D aus wird dann der Kreisumfang + dem Bogen AD.

Da k oder $\frac{a}{\pi r}$ jede beliebige Zahl, also ach ein ächter Bruch sein kann, so kann an von den Bogenlängen AD, AF ganz esehen. Man theile die Kreislinie in ne beliebige Anzahl gleicher Theile, ibt der ersten Verlängerung die belie- bige Länge a, der zweiten die Länge $2a$ u. s. w.

Nepersche Analogien. In Beziehung auf das zu dem Art. Gauſs'sche Gleichungen gezeichnete Kugeldreieck, Fig. 652, pag. 137 bestehen die Analogien in folgenden Gleichungen:

1. $tg\,\frac{1}{2}(a+b)\,cot\,\frac{1}{2}c = \frac{cos\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{cos\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$
2. $tg\,\frac{1}{2}(a-b)\,cot\,\frac{1}{2}c = \frac{sin\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{sin\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$
3. $tg\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\,tg\,\frac{1}{2}\gamma = \frac{cos\,\frac{1}{2}(a-b)}{cos\,\frac{1}{2}(a+b)}$
4. $tg\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\,tg\,\frac{1}{2}\gamma = \frac{sin\,\frac{1}{2}(a-b)}{sin\,\frac{1}{2}(a+b)}$

Die Gauſs'schen Gleichungen sind in dem Art. „Kugeldreieck“ am Schluſs pag. 122 entwickelt; aus denselben lassen sich die Analogien leicht ableiten. Man erhält nämlich

Die 1te	Analogie	durch Division von	Gleichung 1 durch Gleichung 3.
Die 2te	„	durch Division von	Gleichung 2 durch Gleichung 4.
Die 3te	„	durch Division von	Gleichung 4 durch Gleichung 3.
Die 4te	„	durch Division von	Gleichung 2 durch Gleichung 1.

Aus den Neper'schen Analogien erhält an nun zwei Winkel, wenn die ihnen egenüberliegenden Seiten und der dritte Winkel gegeben sind, und zwei Seiten, enn die ihnen gegenüberliegenden Win- el und die dritte Seite gegeben sind.

Sind nämlich die beiden Seiten a, b nd der ihnen gegenüberliegende Winkel gegeben, so erhält man aus Gleichung und 2 die Winkel $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ und $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$; ie beiden gefundenen Werthe addirt er- eben α, der zweite Werth von dem er- ten abgezogen ergibt β.

Sind die beiden Winkel α, β und die men gegenüberliegende Seite c gegeben, o erhält man durch Gleichung 3 und 4 ie Längen $\frac{1}{2}(a+b)$ und $\frac{1}{2}(a-b)$.

Nepersche Logarithmen. Die ersten ogarithmen überhaupt bestanden in sei- em logarithmischen Canon für die inus und Tangenten der Winkel von inute zu Minute.

Netz, Dreiecksnetz ist für ausge- hnte Land- oder Feldvermessungen eine neinanderreihung von groſsen Dreiecken, ren Spitzen von der Natur oder von anwerken schon ausgezeichnet sind oder rch besondere Signale bezeichnet wer- n. Deren Vermessung und Berechnung it Hülfe einer Basis und durch Win- kelaufnahmen, s. den Art. „Gradmes- sung“.

Neumond ist der Mond in der Lage zwischen Sonne und Erde, so daſs die uns zugekehrte Seite von der Sonne un- beleuchtet ist (s. „Länge der Sonne und des Mondes und Mondphasen.“)

Neun ist die letzte Ziffer im dekadi- schen System.

Die Zahl 9 hat folgende eigenthümliche Eigenschaften:

1. Wenn die Summe der Ziffern einer Zahl durch 9 ohne Rest theilbar ist, so ist auch die Zahl durch neun ohne Rest theilbar. Z. B. 7425. Denn es ist

$$\begin{aligned} 5 &= 5 \\ 20 &= 2\times 9 + 2 \\ 400 &= 4\times 99 + 4 \\ 7000 &= 7\times 999 + 7 \end{aligned}$$

Demnach

$$7425 = 2\times 9 + 4\times 99 + 7\times 999 + (5+2+4+7)$$

Die ganze Zahl ist also durch 9 theil- bar, wenn die eingeklammerte Summe der Ziffern durch 9 theilbar ist. Es sind also auch alle Zahlen durch 9 ohne Rest theilbar, welche entstehen, wenn man die Ziffern 7, 4, 2, 5 beliebig verstellt, als 2457, 2547 u. s. w.

2 Die Summe der Ziffern einer Zahl, in welche die 9 nicht aufgeht, durch 9 dividirt läfst denselben Rest, welcher entsteht, wenn man die Zahl durch 9 dividirt.

Die Richtigkeit des Satzes geht aus 1 hervor.

3. Jede Potenz von 10 durch 9 dividirt läfst den Rest 1.

4. Soll eine Zahl mit 9 multiplicirt werden, multiplicire mit $(10-1)$; statt mit 99 mit $(100-1)$; statt mit 999 mit $1000-1$

$9 \times 576 = 5760 - 576 = 5184.$

99×7879 schreib das Subtractionsexempel:

787900
7879

gibt $99 \times 7979 = 780021$

u. s. w.

5. Statt eine Zahl, in welche die 9 aufgeht mit 9 zu dividiren, kann man addiren; denn dividirt man durch die zweitheilige Zahl $(10-1)$, z. B. die Zahl 31104, so erhält man folgendes Exempel

$$\begin{array}{r|l} 31104 & 10-1 \\ 31100-3110 & \hline \\ 4+3110=3114 & \text{Oder untereinander geschrieben:} \\ 3110-311 & 3110 \\ =+315 & 311 \\ 310-31 & 31 \\ +36 & 4 \\ & \hline \\ & 3456 = 31104:9 \end{array}$$

2. Beispiel: $979533 : 9$ schreib:

	979533	97953
1. Rest	97956	9795
2. Rest	9801	980
3. Rest	981	98
4. Rest	99	9
5. Rest	18	2

$979533 : 9 = 108837$

3. Beispiel: $35987485 : 999$

$$\begin{array}{r|l} 35987485 & 1000-1 \\ 35987000 & \hline 35987 \\ \left\{\begin{array}{r} 485 \\ +35987 \end{array}\right. & \\ \text{Rest } 36472 & 36 \\ 36000 & \hline \\ \left\{\begin{array}{r} 472 \\ +36 \end{array}\right. & 35923\tfrac{508}{999} = 35987485 : 999 \\ \text{Rest } 508 & \end{array}$$

6. Wenn zwei Zahlen M und N durch 9 die Reste m, n geben, so geben die Producte $M \times N$ und $m \times n$ ebenfalls gleiche Reste.

Denn es sei $M = 9 \cdot a + m$; $N = 9 \cdot b + n$

so ist $M \times N = 81ab + 9(an + bm) + mn$

Demnach mufs $\frac{1}{9} MN$ mit $\frac{1}{9} mn$ denselben Rest geben.

7. Wird eine Zahl M durch eine Zahl N dividirt, und es ensteht der Quotient Q und der Rest R so ist:

$$\frac{M}{N} = Q + \frac{R}{N}$$

oder $M = N \times Q + R$

Hieraus ist zu ersehen, dafs wenn N, Q, R, M einzeln durch 9 dividirt Reste lassen, die Reste von N und Q multiplicirt, dies Product mit dem Rest des Restes addirt einen Rest geben müssen, der dem Rest des Dividendus gleich ist.

Neunerprobe ist ein Prüfungsmittel für Ausrechnungen in den vier Species. Sie gründet sich auf die im vorigen Artikel nachgewiesenen Eigenschaften der Zahl 9. In dem Art. „Addition“ No. 4, ist die Neunerprobe für Addition erklärt; sie gilt auch wenn Minusgröfsen in den Summanden vorkommen, also auch für die Subtraction und gründet sich auf No. 2 des vorigen Art.

Die Probe für Multiplication be-

arin, dafs man Reste, welche aus
ision jedes Factors mit der 9 her-
n multiplicirt. Dies Product der
ait 9 dividirt mufs mit dem Pro-
ır gegebenen Zahlen durch 9 di-
inerlei Rest haben.

$3425 \times 2794 = 9569450.$

hat den Rest 5; 2794 den Rest 4;
duct 20 der Reste gibt den Rest
der Rest der Zahl 9569450 hat
s den Rest 2.

lie eben angegebenen Reste der
zu finden hat man nach No. 1
igen Art. nur nöthig die Summe
iffern dazu zu nehmen. Das an-
e Verfahren selbst gründet sich
6 des vorigen Art.

Probe für Division besteht
). 7 des vor. Art. darin, dafs man
Division durch 9 die Reste des
und des Quotient multiplicirt,
oduct mit dem Rest des mit 9
:n Restes addirt. Diese Zahl und
'idend durch 9 dividirt müssen
nerlei Rest geben.

$9542780 : 248 = 38478 + \frac{116}{248}$

Dividendus hat den Rest = 8

Divisor den Rest 5

Quotient den Rest 3

Rest den Rest 2

$+ 2 = 17$, Rest 8, also mit dem
s Dividend gleich.

alitätsreihen, s. u. „Atomge-
', pag. 165 links.

re Analysis, Analysis des End-
. Hierunter versteht man die ge-
Arithmetik mit Ausnahme der
zial- und Integralrechnung, s. d.
nalysis".

re Benennung ist bei benannten
der Theil eines Ganzen, das Ganze
here Benennung. Bei Geld
Thaler die höhere, Groschen die
Benennung.

u ist der allgemeine Name eines
-Instruments mit Fernrohr und

liren heifst, den Höhenunterschied
und mehrerer auf der Erdober-
befindlichen Punkte zu bestimmen
hieht zur Anlage von Kunststra-
s Chausseen, Eisenbahnen, zu An-
n Kanälen, um das Totalgefälle
n den zu verbindenden Flufsstel-
finden, auf die Kanalstrecke zu
en und das Erfordernifs von Schleu-
rtheilen und dieselben richtig an-
legen zu können; für Entwässerung, Bewässerung, Drainirung von Ländereien. Man bezeichnet das Nivelliren auch mit dem ungeeigneten Namen Wasserwägen. Es hat dies seinen Grund entweder darin, dafs es früher vorzugsweise zu hydrotechnischen Zwecken angewendet worden, oder auch, dafs das erste Nivellirinstrument aus einer mit Wasser angefüllten communicirenden Röhre, der noch heut so genannten Wasserwaage bestanden hat.

Je nach dem Grade der erforderlichen Genauigkeit sind auch die Hülfsmittel, die Längenmaafsstäbe und die Nivellirinstrumente zu wählen.

Ferner wird der Zweck am vollkommensten erreicht, je einfacher und je unmittelbarer dabei verfahren werden kann. Fallen keine Hindernisse, als tiefe Schluchten, hohe Berge in die zu nivellirende Linie, so ist das Nivelliren eine äufserst einfache Arbeit.

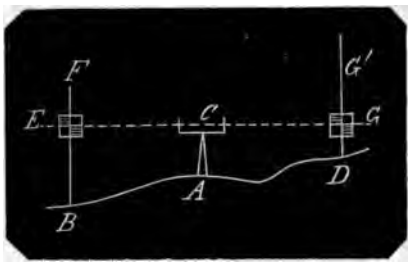
Das einfache Nivelliren erfordert zwei Instrumente, das Nivellirinstrument und die Nivellirlatte mit verschiebbarer Tafel. Jedes Nivellirinstrument hat die Einrichtung, dafs mit demselben eine genau horizontale Linie visirt werden kann. Die Nivellirlatte ist von der Unterkante ab in Fufse, Zolle und Linien eingetheilt, die quadratische Tafel ist durch eine lothrechte und eine waagerechte Mittellinie in vier Quadrate getheilt, welche durch abwechselnd schwarze und weifse Färbung auf die Ferne kenntlich gemacht sind.

Um nun den Höhenunterschied der beiden Punkte *A* und *B* zu finden, stellt der Feldmesser das Instrument über den höheren Punkt *A*, läfst einen geübten Arbeiter die Latte *BF* lothrecht über den Punkt *B* erhalten und vermittelst Handzeichen die Tafel so lange verschieben, bis seine Visirlinie auf die waagerechte Mittellinie der Tafel trifft. Die mit dieser Linie waagerechte Kante eines Schiebers gibt auf dem Maafsstab die Höhe *BE* an, von der die Höhe *AC* der Visirlinie über dem Punkt *A* abgezogen den Höhenunterschied der Punkte *A* und *B* angibt.

Die Visirlinie hat wegen des veränderlichen Stativs bei jeder Aufstellung eine andere Höhe über dem Aufstellungspunkt, sie müfste also jedesmal vermessen werden. Man nivellirt aber aus der Mitte, d. h. man stellt das Instrument in der Mitte zwischen den beiden zu nivellirenden Punkten auf, wo dann deren Höhenunterschied unabhängig von der Höhe der Visirlinie erhalten wird.

Sind nämlich *B* und *D* die beiden zu nivellirenden Punkte, so wird mit dem Instrument erst die Linie *CE*, hierauf die Linie *CG* visirt, das kleinere von dem gröfseren der beiden notirten Maafse abgezogen ergibt den Höhenunterschied beider Punkte *B* und *D*.

Fig. 845.



Für gröfsere Strecken wird das Nivellement auf diese Weise begonnen und fortgesetzt; die Entfernungen je zweier auf einander folgenden Punkte heifsen Stationen, die Punkte selbst Stationspunkte.

Es sei der nächste Stationspunkt *H*, so bleibt der Nivellirstab in *D* stehen, nur die Tafel wird nach *H* gedreht, das Instrument wird in der Mitte zwischen *D* und *H* aufgestellt, nach *D* (rückwärts) und nach *H* (vorwärts) visirt, beide Maafse *DG'* und *HJ* wenn *J* der visirte Punkt ist, werden notirt und deren Unterschied gibt die Höhe zwischen *D* und *H*.

Es sei gefunden: Erste Station.
Rückwärts $BE = 4'\ 3''\ 6'''$
Vorwärts $DG = 1'\ 4''\ 8'''$
gibt $2'\ 10''\ 10'''$ Steigen

Zweite Station.
Rückwärts $DG' = 4'\ 1''\ 2'''$
Vorwärts $HJ = 4'\ 10''\ 7'''$
gibt $0'\ 9''\ 5'''$ Fallen

beträgt von *B* bis *H* $2'\ 1''\ 5'''$ Steigen.

Zur Versicherung, dafs die Maafse richtig abgelesen worden, wird die Tafel nach der Ablesung verschoben und zum zweiten Mal visirt. Zeigt sich eine bemerkbare Differenz, zum dritten Mal.

Die Aufzeichnung der gefundenen Maafse geschieht sofort in einem dazu eingerichteten Journal tabellarisch. Es werden hierin auch Columnen für Hausarbeit zugefügt, um in diese die noch auszurechnenden Zahlen einzuschreiben, welche zum Auftragen des Nivellementsprofils unmittelbar erforderlich sind.

Anbei erfolgt eine Tabelle als Beispiel wie dieselbe eingerichtet werden könnte.

Stations-Nummer	Stations-Länge	Rückwärts		Vorwärts		Steigen	Fallen	Vertikal-Länge
		einzeln abgelesen	Mittel	einzeln abgelesen	Mittel			
1	20	4. 3. 7 4. 3. 8 4. 3. 7	4. 3. 7	2. 6. 5 2. 6. 5	2. 6. 5	1. 9. 2	—	58. 2. 10
2	15	6. 3. 2 6. 3. 2	6. 3. 2	4. 1. 7 4. 1. 8 4. 1. 8	4. 1. 8	2. 1. 6	—	56. 1. 4
3	20	3. 1. 9 3. 1. 8 3. 1. 8	3. 1. 8	5. 3. 4 5. 3. 5 5. 3. 4	5. 3. 4	—	2. 1. 8	58. 3. 0

Die esten beiden Columnen sind Stubenarbeit, welche vor dem Nivellement geschieht. Denn die Stationslängen sind beim Vermessen der zu nivellirenden

:ke dem Terrain entsprechend dem enmaafs nach bestimmt und mit nurten Pfählen bezeichnet. Nur die e und die fünfte Columne sind auf Felde auszufüllen, die übrigen wernach beendigtem Nivellement wieder lause berechnet und ausgefüllt.

e durch Punkte getrennten drei Zahsind Fufse, Zolle und Linien. Die l, die Zahlen, welche als Mittelwerthe den jedesmaligen drei Ablesungen mmen werden, von einander abgezoliefern das Steigen und Fallen, und ifferenzen deren beiden Summen den narischen Höhenunterschied zwischen Anfangspunkt und dem Endpunkt nivellirten Länge.

ı das Nivellementsprofil auftragen zu en, zeichnet man eine Horizontallinie, von einem Anfangspunkt aus die nslängen ab, fällt aus den Stationspunkten Lothe und bestimmt auf diesen die nivellirten Punkte durch Abstände von der Horizontalen, die aus den beiden vorletzten Columnen berechnet worden sind.

Gesetzt der Höhenunterschied zwischen dem tiefsten und dem höchsten Punkt der nivellirten Linie betrage gegen 40 Fufs, so kann man, den kleinsten leerbleibenden Abstand, den des höchsten Punkts von der Horizontalen etwa 10 Fufs gesetzt, die Normalverticale = 50 Fufs annehmen. Die Ermittelungen des tiefsten und des höchsten Punkts sind aber weitläufig uud es ist am einfachsten, wenn man mit dem Anfangspunkt sogleich eine Vertikalhöhe annimmt, weil dann die übrigen alle der Reihenfolge nach berechnet werden können. Setzt man die Vertikale für den Anfangspunkt = 60 Fufs, so hat man die des zweiten Stationspunkts

$$= 60' - 1'\ 9''\ 2''' = 58'\ 2''\ 10'''$$

es dritten $= 58'\ 2''\ 10''' - 2'\ 1''\ 6''' = 56'\ 1''\ 4'''$.

es vierten $= 56'\ 1''\ 4''' + 2'\ 1''\ 8''' = 58'\ 3''\ 0'''$:

ellir-Instrumente. Das einfachste lben ist die Setzwaage mit Bleifür Höhenabmessungen sehr naher te (s. „Bleiwaage“ mit Fig. 225 26). Die nächstfolgende ist die Nirwaage, die gemeine Wasserge, Kanalwaage, welche in dem „Canalwaage“ mit Fig. 275 beben ist. Die dieser unmittelbar sich liefsende ist die Quecksilberge. Dieser besteht aus einer hölı viereckigen Röhre von 1 bis 1½ Länge, welche an beiden Enden in ht stehende genau ausgearbeitete Würfel mündet. Das ganze Instruhat die Form eines Kastens und mit einem an der unteren Fläche lichen Ansatz auf ein Stativ be; auf der oberen Fläche befindet

Fig. 846.

ine Röhrenlibelle. Die Röhre wird mit Quecksilber gefüllt, dafs die de Endhöhlungen eingesteckten und ren Wandungen möglichst anschliefsenden Elfenbeinwürfel darauf schwimmen können. Beide Würfel haben metallene Aufsätze mit Dioptern. Die Objectivdiopter ist ein quadratischer Rahmen mit Fadenkreuz, die Oculardiopter eine kleine runde Durchsheöffnung; besser ist es, wenn jede der beiden Dioptern zugleich Ocular- und Objectivdiopter ist, damit man zur Verificirung die Waage bei fest bleibendem Stativ umdrehen kann. Bei richtig einspielender Libelle wird eine genaue Horizontale visirt.

Die Nivellirwaagen mit Fernrohr sind die an Genauigkeit und Zuverlässigkeit der Leistung vorzüglichsten Instrumente. Das Fernrohr (s. d. Art.) hat etwa 18 Zoll Länge, in dessen Brennpunkt ein Fadenkreuz; dessen Axe ist bei richtig eingestellter Libelle genau horizontal. Um diese genaue Uebereinstimmung hervorzubringen ist das Fadenkreuz nach der Richtung der Axe und senkrecht mit derselben durch Schrauben mikrometrisch verstellbar eingerichtet. Das Fernrohr hat zwei Auszüge, von welchen die Lage des Fadenkreuzes unabhängig ist. Daher wird durch das Ausziehen des Objectivrohrs der entfernte Gegenstand, durch das Ausziehen des Ocularrohrs das Fadenkreuz an Deutlichkeit gröfser.

Das eigentliche Instrument ruht wie alle übrigen Instrumente auf einem Stativ mit drei verstellbaren Füfsen. Eine

Feststellung desselben und eine Construction seiner Theile, dafs bei der Umkehrung oder überhaupt bei einer Drehung des Fernrohrs um jeden beliebigen Bogen die Lage dessen Axe in der Horizontale richtig bleibt ist Hauptbedingung, was jeder Mechaniker auf seine eigenthümliche Weise herzustellen weifs.

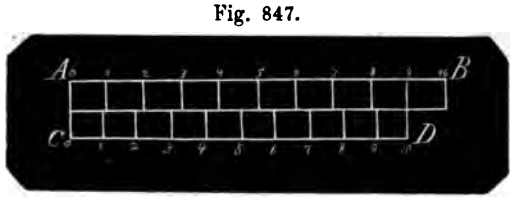
Nivellirstäbe mit Tafel (Zielscheibe) gehören sich von gutem festem Holz. Sie haben etwa 10 Fufs Länge, und damit sie nicht schwanken, von 3 bis 4 Zoll □ Stärke. Die Zielscheibe ist ungefähr 12 Zoll im □ von Holz oder von Eisenblech. Sie wird entweder horizontal gehälftet oder in vier gleiche Quadrate getheilt und deren Hälften oder Viertel durch abwechselnd weifsen und schwarzen Anstrich auf die Ferne kenntlich gemacht. Im ersten Fall ist die horizontale Mittellinie, im zweiten der Mittelpunkt das Visirziel.

Nonius ist ein gegen den eingetheilten Kreisring oder Kreisbogenring eines Winkelmessers verschiebbar liegender zweiter kleinerer ebenfalls eingetheilter Kreisbogenring, durch welchen man in den Stand gesetzt wird, noch viel kleinere Winkeltheile, nämlich aliquote Theile der auf jenem Kreisring angegebenen kleinst möglich zu verzeichnen gewesenen Winkeltheile anzugeben und abzulesen.

Je gröfser der Halbmesser einer einzutheilenden Kreislinie ist, desto kleinere Unterabtheilungen können demselben gegeben werden. Bei 6 Zoll Halbmesser kann man jeden der 360 Grade noch in 6 gleiche Theile richtig und lesbar abtheilen, so dafs man unmittelbar Winkel von 10 Minuten ablesen kann.

Um nun die Möglichkeit klar darzustellen, dafs man mit Hülfe des Nonius noch kleinere Unterabtheilungen ablesbar erhält, sei Fig. 847 ein geradliniger Maafsstab AB von 10 gleichen Theilen. Will

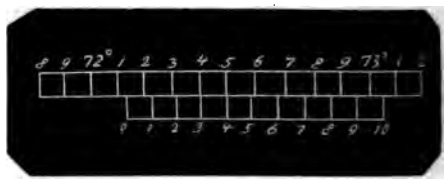
Fig. 847.



man nun einen Nonius construiren, der Zehntel dieser Theile wahrnehmen und ablesen läfst, ohne dafs man jene Theile einzeln direct durch Theilstriche in Zehntel verkleinert, so nimmt man einen zweiten Stab CD, trägt auf diesem eine Länge von 9 Theilen des ersten Maafsstabes ab und theilt diese in 10 gleiche Theile. Jeder dieser 10 Theile hat also eine Länge von $^9/_{10}$ eines Theils von AB, und legt man die Nullpunkte beider Maafsstäbe genau aufeinander, so sind die ersten beiden Theilstriche $^1/_{10}$ eines der Theile von AB von einander entfernt, die beiden zweiten Theilstriche $^2/_{10}$ eines solchen Theils u. s. f. Die beiden 9ten Theilstriche $^9/_{10}$ und die beiden 10ten Theilstriche $^{10}/_{10}$ Theile = einem ganzen Theil von AB von einander entfernt.

Nun verbindet man den Nullpunkt des Nonius mit der Axe des Fernrohrs so, dafs beide in derselben vertikalen Ebene sich befinden. Gesetzt nun, man habe den zweiten Schenkel eines Winkels visirt und fände ihn, wie Fig. 848 zeigt,

Fig. 848.



zwischen 72,1 und 72,2 Grad, so sucht man mit Hülfe einer scharfen Lupe denjenigen Theilstrich des Nonius, der mit einem Theilstrich des Limbus in einerlei gerade Linie fällt. Man findet den vierten Theilstrich. Es ist also Noniusstrich 3 von Limbusstrich 4 um 0,01 Grad auseinander, Noniusstrich 2 von Limbusstrich 3 um 0,02 Grad, Noniusstrich 1 von Limbusstrich 2 um 0,03 Grad und Noniusstrich 0 von Limbusstrich 1 um 0,04 Grad. Man hat also den Winkel gemessen = 73,14 Grad.

Will man von den kleinsten Theilen des Limbus noch $m$tel ablesen, so nimmt man auf dem Nonius die Länge von $(m-1)$ Theilen und theilt dieselbe in m gleiche Theile.

Nordpunkt eines Orts der Erdoberfläche ist einer der 4 Cardinalpunkte seines Horizonts, sowohl des wahren als des scheinbaren, nämlich der im Horizont liegende nördliche Endpunkt seines Meridians (s. „Cardinalpunkte“).

Nordstern ist der Polarstern.

Nordsüdlinie ist die Mittagslinie (s. „Cardinalpunkte").

Normal (Norma, Richtmaafs), s. v. w. winkelrecht. Normal sind gerade Linien, wenn sie rechte Winkel mit einander bilden; normal ist eine gerade Linie auf einer Ebene, wenn sie mit jeder durch den Standpunkt in derselben gezogenen geraden Linie rechte Winkel bildet; normal sind zwei Ebenen auf einander, wenn deren Neigungswinkel ein rechter Winkel ist (vergl. „Neigung").

Normalaxe in einem Krystall ist die zur Bestimmung dessen Form senkrecht gestellte Hauptaxe (s. „Axen und Axensystem der Krystalle").

Normale ist eine Linie, die normal, die winkelrecht ist; man hat also Normalen auf Linien und Ebenen (s. „Ebene"). Die Normale in dem Punkt einer Curve ist die in diesem Punkt auf dem Curven-Element normale Linie also zugleich die auf der in diesem Punkt an die Curve gezogenen Tangente normale Linie. Der Winkel dieser Normalen mit der rechtwinkligen Ordinate ist gleich dem Winkel (α) zwischen Tangente und Abscisse und $tg\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$ (s. Bd. II., pag 185, Formel 2 mit Fig. 536).

Ist $\frac{\partial y}{\partial x}$ positiv, so liegt die Normale nach der Richtung der wachsenden Abscisse; ist $\frac{\partial y}{\partial x}$ negativ, so liegt die Normale entgegengesetzt. Die Subnormale (Formel 3) DN ist $= y \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$; ist diese positiv, so liegt die Subnormale vom Standpunkt D der Ordinate nach der Abscissenrichtung.

In Bd. II, pag. 185 mit Fig. 536 ist für rechtwinklige Coordinatengleichungen ermittelt:

Für den Winkel $BTD = \alpha$ zwischen der Curventangente und der Abscisse

$$tg\,\alpha = \frac{y}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}$$

Da nun $\angle DBN = \angle BTD$, so gilt auch die Formel für diesen Winkel der Normalen mit der Ordinate.

Die Normale BN macht mit der Abscisse den $\angle BNT = 90° - \alpha$, mithin gilt die Formel auch für die Cotangente dieses Winkels.

Die Normale BN ist $= y\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$

Die Subnormale DN ist $= y\frac{\partial y}{\partial x}$

Daselbst, pag. 186 mit Fig. 537 ist für Polarcoordinaten entwickelt:

Für den Winkel CBT zwischen der Ordinate z und der Tangente

$$cot\,CBT = \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)}{z} \text{ oder } tg\,CBT = \frac{z\,\partial\varphi}{\partial z}$$

Folglich ist für den Winkel CBN zwischen der Normale und der Ordinate

$$cot\,CBN = \frac{z\,\partial\varphi}{\partial z} \text{ oder } tg\,CBN = \frac{\partial z}{z\,\partial\varphi}$$

Der Winkel CBD zwischen Polar- und rechtwinkliger Ordinate $= (\varphi - 90°)$.

Die Normale $BN = \sqrt{z^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}$

Die Subnormale $CN = \frac{\partial z}{\partial q}$

Normalmaafs ist für jedes Land das gesetzliche Maafs. Des jetzt fast ganz allgemeinen Verkehrs wegen zwischen allen Völkern der Erde sollte ein Normalmaafs ein Maafs für alle Erdbewohner sein; ein solches Maafs sollte aber offenbar die Beschaffenheit haben, dafs sämmtliche Erdbewohner einerlei Ursach haben, es als Norm anzunehmen und anzuerkennen.

Das Hauptsächlichste aller Normalmaafse ist ein Normallängenmaafs, und ich habe in dem Art. „Längenmaafs" am Schlufs nachgewiesen, dafs es kein angemesseneres geben könne als die Länge des im Aequator schwingenden Secundenpendels, welche mit der Länge des Meters übrigens ziemlich nahe übereinstimmt.

Aus dem allgemein geltenden Längenmaafse gingen unmittelbar die allgemein geltenden Flächen- und Körpermaafse hervor, und hierauf die allgemein geltenden Gewichtsmaafse, wenn jeder einzelne Staat damit einverstanden ist, dafs man das Gewicht des von der Natur auf der ganzen Erde in gleicher Beschaffenheit verbreiteten Stoffs zu Grunde legt, nämlich das Gewicht des destillirten Wassers in seiner gröfsten Dichtigkeit bei 4 Grad C.

Null ist ein Begriff, der nicht gegeben ist, und da man den Begriff erst entwickeln mufs, ein zusammengesetzter Begriff. Der Begriff Null kann auf die verschiedenste Weise definirt werden:

Null ist der Anfang des Entstehens

eines Etwas; denn jeder gegenwärtige Zeitaugenblick ist eine Null, der Anfangspunkt jeder zu ziehenden geraden Linie ist eine Null; Null ist die Differenz zwischen gleichem Minuend und Subtrahend; Null ist die Grenze des gleichartig Entgegengesetzten, z. B. in der Reihe der additiven und subtractiven Logarithmen. Null und Nichts sind unterschieden, denn Nichts ist das Nichtdasein, das Nichtvorhandensein eines Etwas. Null als Gröfse betrachtet und damit gerechnet gibt ungereimte Resultate (vergl. „Absurd). Gleichwohl wird Null als eine im Verschwinden begriffene Gröfse betrachtet und damit rechnungsweise verfahren.

Nullpunkt ist der Anfangspunkt einer Skala, einer Reihe, eines Winkelmessers.

Nullzeichen (0) das Zeichen für Null ist schon beim Zahlenschreiben und Zahlenrechnen von Wichtigkeit, wo mit demselben die Ordnungsstellen, welche leer bleiben sollen, ausgefüllt werden.

Numeriren heifst jede nach dem dekadischen System geschriebene Zahl richtig aussprechen und jede ausgesprochene Zahl dem dekadischen System entsprechend niederschreiben.

Numerisch ist was bestimmte Zahlen betrifft als: numerische Gleichungen, solche, deren bekannte Gröfsen bestimmte Zahlen sind, sie heifsen auch Zahlengleichungen im Gegensatz zu den Literal- oder Buchstabengleichungen.

Numerus, die Zahl. Man nennt besonders Numerus die Zahl in Beziehung auf ihren Logarithmus und sagt: die Numeri und ihre Logarithmen.

Nutation (Schwanken) der Erdaxe ist die fortdauernde Aenderung der Erdaxe in ihrer Parallelität mit sich selbst. Die Axe hat gegen die Axe der Ekliptik eine Neigung von 23½ Grad, nämlich gerade so viel als die Schiefe der Ekliptik beträgt. Die Nutation besteht nun darin, dafs dieser Winkel fortdauernd bald vergröfsert, bald verkleinert wird. Es liegt dies in den verschiedenen Anziehungen, welche die Sonne und der Mond und besonders dieser auf unsere Erde ausüben, je nachdem deren gegenseitige Lagen verschieden werden:

Die Bahn des Mondes ist gegen die Ekliptik etwa 5 Grad geneigt, die Ekliptik gegen den Erdaequator 23½ Grad. Nun stellen die Lagen des Mondes gegen die Erde sich folgender Art: Tritt der aufsteigende Mondknoten in den Frühlingspunkt, so hat der Erdaequator gegen die Mondbahn eine Neigung von $(23\frac{1}{2}+5) = 28\frac{1}{2}$ Grad, und tritt er in den Herbstpunkt, so haben beide eine Neigung von $(23\frac{1}{2}-5) = 18\frac{1}{2}$ Grad. In dem ersten Fall wird die Erdaxe von dem Pol der Ekliptik um 9 Secunden entfernt, in dem zweiten um 9 Secunden genähert, so dafs die jährlichen Neigungsänderungen durch den Mond allein 18 Secunden betragen.

Hierzu kommen noch die Aenderungen, welche aus dem Vorrücken der Nachtgleichen hervorgehen, welche also die Sonne durch Attraction, und zwar ebenfalls regelmäfsig periodisch bewirkt.

Ferner die Störungen durch Annäherung gröfserer Planeten in verschiedenen Richtungen, besonders des Jupiters.

O.

albkugel, Himmels- und Erd- s. v w. „Nördliche Halb- ine uneigentliche Bezeichnung.

he ist Begrenzung eines geo- Körpers, als Fläche ist sie desselben, durch ihre Form nmt sie zugleich die des Kör- t. Sie ist eben oder uneben. erflächen sind drei- und mehr- uren, die wiederum regelmäfsig gelmäfsig sein können. Sind e Oberflächen regelmäfsig, so er Körper ein regelmäfsiger.

e Oberflächen gibt es von un- len Formen, dagegen werden e geometrisch betrachtet, die n bestimmten Gesetz gekrümmt am meisten vorkommenden Oberflächen sind die Umdre- en, Flächen, die durch Umdre- Linien um Axen entstanden sind oder auch wirklich so worden. Die durch Umdrehung Linien erzeugten Oberflächen Cylinder- und die Kegelfläche. Fall liegt die erzeugende ge- ⊥ der Axe, im zweiten Fall ch ist in diesem zweiten Fall ig, dafs sie mit der Axe in bene liege. Liegt eine gerade mal der Axe und dreht sich in der Axe normalen Ebene, so in Kreisring. Von den durch Linien beschriebenen Flächen man nur diejenigen, deren Er- inien selbst eine geometrisch htende Form besitzen; als die e, die Flächen aus den Kegel- ien, der Cycloide u. s. w.

mmen Oberflächen sind entweder erhaben (convex) oder hohl, (concav). Concave Oberflächen schliefsen niemals einen Raum, sie begrenzen nur Körper in Verbindung entweder mit erhabenen Oberflächen und geben mit diesen ring- oder schalenförmige Körper, oder mit ebenen Endflächen.

Die Gröfsenbestimmung einer von Curven begrenzten Ebene, s. Bd. II, pag. 192 mit Fig. 540, die einer durch Umdrehung von Curven erzeugten Umdrehungsfläche pag. 193 mit Fig. 541.

Objectiv, s. v. w. „Objectivglas“ in einem Fernrohr.

Objectivdiopter die dem zu visirenden Punkt zugewandte Diopter.

Oblongum ist ein rechtwinkliges Parallelogramm mit ungleichen Seiten.

Occidens, s. v. w. „Abend, Abendpunkt“.

Octaeder ist einer der 5 vieleckigen regulären Körper oder Polyeder, welche zur Untersuchung ihrer Eigenschaften einen Artikel in diesem Wörterbuch erhalten sollen.

Das Octaeder wird von 8 regelmäfsigen Dreiecksflächen eingeschlossen, es hat 12 gleich grofse Kanten und 6 vierflächige Ecken mit 24 gleichen ebenen Winkeln.

Bedeuten m, n, N, α, k, r und R, ferner J^2 und J^3 dasselbe wie in dem Art. „Dodekaeder“ so ist hier:

$$m = 4,\ n = 3,\ N = 8$$

$$\sin \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{\cos \frac{180^\circ}{m}}{\sin \frac{180^\circ}{n}} = \frac{\cos 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \tfrac{1}{3}\sqrt{6}$$

$\alpha = 109° 28' 16''$

$R = \frac{1}{2} k \, tg \frac{1}{2}\alpha \cdot tg\, 45° = \frac{1}{2} k \sqrt{2}$	$= 0{,}707\,1068 \times k$
$= r \cdot \frac{tg\, 45°}{cot\, 60°} = r\sqrt{3}$	$= 1{,}732\,0508 \times r$
$r = \frac{1}{2} k \, tg \frac{1}{2}\alpha \cdot cot\, 60° = \frac{1}{6} k \sqrt{6}$	$= 0{,}408\,2483 \times k$
$= R \cdot \frac{cot\, 60°}{tg\, 45°} = \frac{1}{3} R \sqrt{3}$	$= 0{,}577\,3503 \times R$
$k = 2R \, cot \frac{1}{2}\alpha \cdot cot\, 45° = R\sqrt{2}$	$= 1{,}414\,2136 \times R$
$= 2r \, cot \frac{1}{2}\alpha \cdot tg\, 60° = r\sqrt{6}$	$= 2{,}449\,4897 \times r$
$J^3 = \frac{1}{6} nk^3 \, cot\, 60° = \frac{1}{4} k^3 \sqrt{3}$	$= 0{,}433\,0127 \times k^3$
$= nR^3 \, cot^3 \frac{1}{2}\alpha \cdot cot\, 60° \cdot cot^3 45° = \frac{1}{4} R^3 \sqrt{3}$	$= 0{,}866\,0254 \times R^3$
$= nr^3 \, cot^3 \frac{1}{2}\alpha \cdot tg\, 60° = \frac{3}{2} r^3 \sqrt{3}$	$= 2{,}598\,0762 \times r^3$
$J^3 = \frac{1}{2}\frac{1}{4} n \, Nk^3 \, tg \frac{1}{2}\alpha \cdot cot^2 60° = \frac{1}{8} k^3 \sqrt{2}$	$= 0{,}471\,4045 \times k^3$
$= \frac{1}{3} n \, NR^3 \, cot^2 \frac{1}{2}\alpha \cdot cot^2 60° \cdot cot^3 45° = \frac{4}{9} R^3$	$= 1{,}333\,3333 \times R^3$
$= \frac{1}{3} n \, Nr^3 \, cot^2 \frac{1}{2}\alpha \cdot tg\, 60° = 4r^3 \sqrt{3}$	$= 6{,}928\,2032 \times r^3$

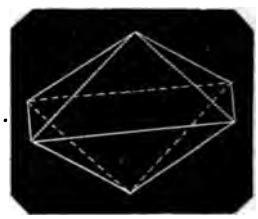
Octaeder (Kryst.) 1. wie das geometrische regelmäfsige O. gestaltet (s. Bd. I, pag. 257, Fig. 138 punktirt) ist eine der Grundformen des regulären oder isometrischen Systems.

2. Das quadratische Octaeder. (Die quadratische Pyramide) mit quadratischer Basis *BDEG* (Fig. 138, Bd. I, pag. 257) gehört zu dem tetragonalen, dem quadratischen System und ist eine Grundform desselben. Es hat 8 gleiche gleichschenklige Dreiecke, 8 gleiche Scheitelkanten *AB*, *AD*, *FE*..., 4 gleiche Randkanten *BG*..., 2 gleiche gleichkantige Scheitelecken *A*, *F*; 4 ungleichkantige Randecken, *B*, *D*, *E*, *G*. *AF* zwischen den Scheitelecken ist die Hauptaxe, *BE*, *DG* zwischen den Randecken sind die Nebenaxen. Ist die Hauptaxe länger als die Nebenaxen sind, so heifst das O. ein spitzes, ist sie kleiner, ein stumpfes Octaeder.

3. Das rhombische Octaeder, Orthotyp, gehört zu dem rhombischen, dem orthotypen System und ist eine Grundform desselben. Es hat eine rhombische Basis, 8 congruente ungleichseitige Dreiecke; 12 Kanten, nämlich 4 schärfere und 4 stumpfere Scheitelkanten und 4 gleiche Randkanten. Von den 6 Ecken sind die beiden Scheitelecken gleich, die Randecken sind 2 gleiche spitzere und 2 gleiche stumpfere. Ist die Hauptaxe gröfser als die Nebenaxen, so heifst das O. ein spitzes, ist sie kleiner, ein stumpfes Octaeder.

4. Rectanguläres Octaeder gehört zu dem rhombischen System und ist eine Grundform desselben. Die Basis ist ein Rectangel. Es hat 4 gröfsere und 4 kleinere gleiche gleichschenklige Dreiecke, 12 Kanten, und zwar 8 gleiche Scheitelkanten, 2 kürzere und 2 längere; gleiche Randkanten; 6 Ecken, wovon die beiden

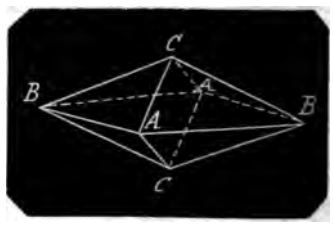
Fig. 849.



Scheitelecken gleich und gleichkantig; die vier Randecken gleich und ungleichkantig sind. Die Hauptaxe verbindet die Scheitelecken.

5. Klinorhombisches Octaeder, 2 und 1 gliedriges O., gehört zu dem klinorhombischen System. Es hat 8 ungleichseitige Dreiecke zu Flächen, von

Fig. 850.



welchen je 4 gegenüberliegende einander gleich sind, nämlich die beiden oberen vorderen mit den beiden unteren hinteren und die beiden unteren vorderen mit den beiden oberen hinteren Flächen. 12

Kanten, die viererlei sind: Nämlich 4 Scheitelkanten AC, von denen je 2 gegenüberliegende gleich sind, 4 gleiche Scheitelkanten BC und 4 gleiche Seitenkanten AB. Die 6 Ecken sind dreierlei, nämlich die beiden dreierlei kantigen Endecken C an den Enden der Hauptaxe, 2 dreierlei kantige Seitenecken A und 2 symmetrische Seitenecken B.

Octaederecken (Kryst.) heifsen die vierflächigen Ecken, so wie Hexaederecken die dreiflächigen (vergl. „Dodekaeder“).

Octaedralzahlen, s. u. „Figurirte Zahlen“, pag. 101 mit Fig. 639 und 640.

Octangel, Octangulum, s. v. w. „Achteck“.

Octant ist der achte Theil einer Kreislinie. Auch wird so jeder Ort des Mondes genannt in der Mitte zwischen den Orten des Vollmonds, des Neumonds und der beiden Viertel.

Octogon, Octogonum, s. v. w. „Achteck“.

Octogonalzahlen sind diejenigen Polygonalzahlen, deren Bildung das Achteck zu Grunde liegt. Es verhält sich mit diesen Zahlen wie mit den Dekagonalzahlen und ihre Entstehung ist wie Fig. 556, pag. 252, wenn man Achtecke statt der Zehnecke construirt. Die Zahlenreihe ist

$$1 \cdot 8 \cdot 21 \cdot 40 \cdot 65 \ldots\ldots n(3n-2)$$

1. Differenzenreihe $7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 25 \ldots\ldots$
2. Differenzenreihe $6 \cdot 6 \cdot 6 \ldots\ldots$

Die Summe der ersten n Octogonalzahlen ist $\frac{1}{2}n(n+1)(2n-1)$.

Ocular, s. v. w. „Ocularglas in einem Fernrohr“ (s. auch „astronomisches O.).

Ocular dioptér ist die dem Auge zugewandte Dioptér.

Oelmühle mit Stampfen und Schlägerzeug, wobei Wasser die wirkende Kraft ist.

Annahmen.

1. Die Mühle soll 10 Paar, oder 20 Stück Stampfen haben.

2. Sie soll zweihebig sein, d. h. für jeden Stampfer sollen sich zwei Daumen auf der Welle befinden, mithin wird die Welle 40 Daumen enthalten.

3. Die Hubhöhe eines jeden Daumens soll wie gewöhnlich 16 bis 17 Zoll betragen.

4. Wird angenommen, dafs immer fünf Stampfen in Bewegung sind.

5. Das Wasserrad sei 16 Fufs hoch.

6. Der eingetauchte Theil der Schaufeln betrage 9 Zoll.

7. In Bezug auf 3 und 4 ist 1 Fufs 8 Zoll = 1⅔ Fufs eine zweckmäfsige Abmessung für den Theilungshalbmesser der Daumwelle.

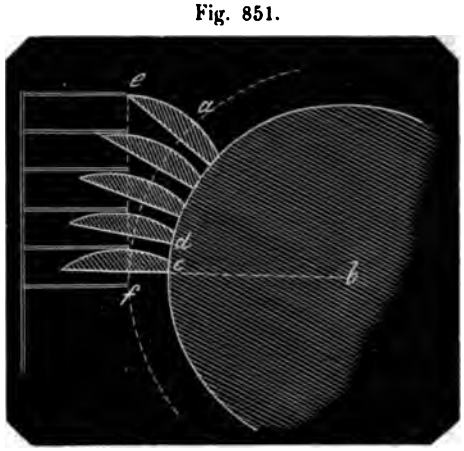
Berechnung einiger Dimensionen.

Wie bemerkt sollen 5 Stampfen zugleich auf der Daumwelle hangen, mithin ist ef die Hubhöhe, die zu 1,309′ angenommen wird.

Aus der Figur ist ersichtlich, dafs der sechste Daumen bei f angreift, wenn der erste bei e losläfst. Die 40 Daumen werden, wie im Maschinenbau gelehrt wird, nach gewissen Regeln auf dem Mantel der Welle neben einander eingelocht. Den Abstand nimmt man gewöhnlich zu 7 Zoll an.

Der Winkel abc ist = 45°; denn da 40 Daumen in gleichen Entfernungen in der

Fig. 851.



Welle eingelocht werden, so wird die Entfernung von Mitte zu Mitte je zweier Daumen 9° betragen, mithin $\angle abc = 45°$ sein.

Mach Eytelw. Statik §. 282 bezeichnet β den $\angle ebf$, der noch bestimmt werden muſs. Zu dem Ende verhält sich $bf : fe = 1 : tg\,\beta$ oder $1\frac{1}{3}' : 1{,}309' = 1 : tg\,\beta$, es ist also $tg\,\beta = \frac{1{,}309}{1\frac{1}{3}} = 0{,}7854 = tg\ 38°\ 8'\ 46''$. Die schon angegebene Hubhöhe ef ist bekanntlich = dem Bogen $fa = h$.

Demnach $2 \cdot \pi bf = \frac{360°}{45°} h$

oder $2 \cdot 1\frac{1}{3} \cdot \frac{22}{7} = \frac{360°}{45°} h = 8h$,

daher $h = 2 \cdot \frac{1\frac{1}{3} \cdot \frac{22}{7}}{8} = 1{,}309'$

Umgekehrt kann man aus der gegebenen Hubhöhe die Anzahl der Daumen, und den Durchmesser des Theilrisses der Daumenwelle finden.

Es ist nun noch zu untersuchen, ob es auch zweckmäſsig sei, 5 Stampfen zugleich auf die Welle zu hängen.

Nähme man statt 5 nur 4 Stampfen, so wäre in Bezug auf die Figur $\angle abc = 4 \cdot 9° = 36°$, daher $r \cdot arc\ 36° = h$, also $r = \frac{h}{arc\ 36°}$. Da aber schon ein Baum vom Halbmesser $1\frac{1}{3}'$ auf die hier erforderliche Länge selten ist, so ist es nicht rathsam, den Halbmesser noch gröſser anzunehmen. Nimmt man aber 6 statt 5 Stampfen, so ist $abc = 6 \times 9° = 54°$ mithin $r = \frac{h}{arc\ 54°}$.

Es ist also hier $r < \frac{h}{arc\ 45°}$, so daſs die Welle sehr leicht zu schwach werden könnte, und ein Zusammendrehen möglich wäre. Diesem Zufolge ist die angenommene Zahl von 5 Stampfen zweckmäſsig und beizubehalten.

Uebrigens ändert sich der Moment der Last wenig, ob man 4, 5 oder 6 Stampfen annimmt. Denn so wie die Anzahl der Stampfen, die zugleich auf der Welle hangen, zunimmt, nimmt der Theilungshalbmesser der Daumenwelle ab, und umgekehrt. Nur ist die Reibung bei 6 Stampfen etwas gröſser als wie bei 5, und eben so bei 5 gröſser als bei 4 Stampfen.

Bestimmung der im Theilriſs der Daumenwelle erforderliche Kraft.

Die hier zu überwältigenden Widerstände sind dreierlei Art.

1. Der statische Widerstand (Gewicht der Stampfen).

2. Der Reibungswiderstand an den Scheidelatten.

3. Der mechanische Widerstand.

Bestimmung des statischen Widerstandes.

Gewicht des Holzes.

1. Ein Stampfer zu $13\frac{1}{2}$ Fuſs lang (gewöhnlich 15 Fuſs) 5 Zoll und $5\frac{1}{2}$ Zoll ins Geviert, also $13\frac{1}{2} \times \frac{5}{12} \times \frac{5\frac{1}{2}}{12} = 2{,}4305$ Cubikfuſs.

2. Eine Hubelatte 8 Zoll lang, 5 Zoll □ stark = 0,1158 Cubikfuſs.

Summa an Holz für die Stampfer 2,5463 Cubikfuſs, daher das Gewicht = $2{,}5463 \times 66 \times 0{,}755 = 126{,}9$ Pfund.

Gewicht des Eisens für einen Stampfer.

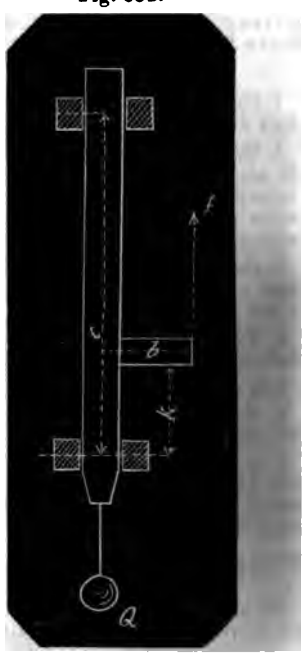
Ringe und Nägel etwa	10,66 Pfund
Summa	137,56 Pfund.

Dieses macht für die 5 Stampfen, die zugleich auf der Welle hangen $5 \times 137{,}56 = 687{,}80$ Pfund.

Bestimmung des Reibungswiderstandes.

Wenn f die Kraft bezeichnet, welche am Ende der Hubelatte vertikal aufwärts angebracht, die Reibungen an den Scheidelatten und am Daumen das Gleichgewicht hält, so ist

Fig. 852.



$$f = \mu \frac{2 \cdot b + \mu(c-2k)+(c-2\mu a+2ab)tg\beta}{(1-\mu^2)c+(2k+2a\,tg\beta\,\mu^2}$$

Es sei nun

$\mu = \frac{1}{10} = 0{,}107$ (Eichen auf Eichen)

$b = 8$ Zoll $+ \frac{5\frac{1}{2}\text{ Zoll}}{2} = \frac{1}{6}$ Fufs

$c = 7\frac{1}{2}$ Fufs (so grofs wie möglich siehe Statik.)

$k = 1$ Fufs (so klein wie möglich)

$a = 1\frac{1}{2}$ Fufs der Theilungshalbmesser der Welle

$\beta = 38°\ 8'\ 46''$ und $Q = 687{,}80$ Pfund.

Setzt man diese Werthe in obige Formel, so ergiebt sich:

$$f = 50{,}65 \text{ Pfund.}$$

Nur in demjenigen Falle, wo $tg\,\beta < \frac{b(1-\mu^2)-\mu k}{\mu a}$ findet die Formel III. für f ihre Anwendung; im entgegengesetzten Falle aber die Formel II.

Bestimmung des mechanischen Widerstandes.

Die bewegende Kraft, welche zu der trägen Masse von 5 Stampfen erforderlich, ist

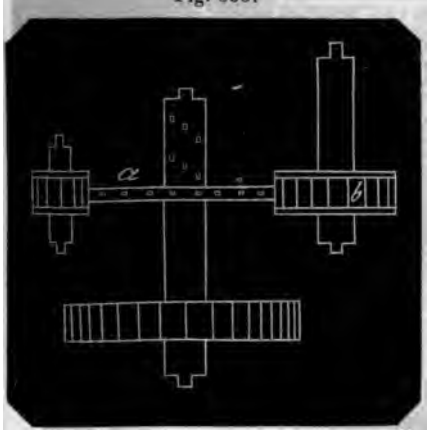
$$P = \frac{S}{gT^2} N$$

In diesem Falle ist $S = 1{,}309$, $N = 687{,}80$ Pfund (5 Stampfen) $g = 15{,}625$ Fufs.

Die Zeit T, die dem durchlaufenen Wege g zugehört, ergibt sich auf folgende Weise:

Es wird angenommen dafs das Wasserrad sich 7mal in einer Minute herumdrehe, so dafs es zu einer Umdrehung $\frac{60}{7} = 8{,}57$ Secunden nöthig hat. Es habe

Fig. 853.



ferner das Stirnrad a 68 Zähne und der Drehling b habe 32 Stöcke, bei einer Theilung von $4\frac{1}{2}$ Zoll. Dann ist 68 : 1 Umgang = 32 zu der Anzahl der Umläufe des Drehlings $= \frac{68}{32} = 2{,}125$, d. h. der Drehling dreht sich 2,125 mal herum, wenn sich das Wasserrad und mit diesem das Stirnrad einmal herumdreht. Nun aber braucht das Wasserrad 8,57 Sekunden, man hat also die Gleichung

$$1 \cdot 8{,}57 \text{ Sec.} = 2{,}125 \cdot x \text{ Secunden}$$

also $x = \frac{8{,}57}{2{,}125} = 4{,}033$ Secunden,

welche der Drehling, oder die Daumenwelle zu einem Umgange braucht.

Nun verhält sich:

Ein Umgang : 4,033 Sekunden $= \frac{45}{360}$ Umgänge : T und hieraus ist $T = 4{,}033 \cdot \frac{45}{360}$ $= 0{,}504$ Sekunden = die Zeit, welche jeder Daumen vom Angriffe bis zum Loslassen der Hebelatte gebraucht, oder in welcher letztere die Hubhöhe $S = 1{,}309$ Fufs erreicht hat.

Substituirt man diese Werthe in P, so ergibt sich:

$$P = 226{,}83 \text{ Pfund}$$

Die Summe der im Theilrifs der Daumenwelle erforderlichen Kraft zur Bewegung der 5 Stampfen ist also

$= 687{,}8 + 50{,}65 + 226{,}83 = 965{,}28$ Pfd. $= Q$.

Es ist aber noch nicht auf das Schlägelzeug Rücksicht genommen worden, wozu die erforderliche Kraft weiterhin bestimmt werden wird.

Reduktion der Kraft Q auf den Theilrifs des Drehlings.

Es ist hier a der Halbmesser des Drehlings, mithin 32 mal der Theilung des Drehlings $= 2\pi a$ und hieraus

$$a = \frac{32\left(\frac{4\frac{1}{2}}{12}\right)}{2\pi} = \frac{32\left(\frac{4\frac{1}{2}}{12}\right)}{2 \cdot \frac{22}{7}} = 1{,}9 \text{ Fufs}$$

r der Halbmesser des Theilrisses der Welle $= 1\frac{1}{2}$ Fufs.

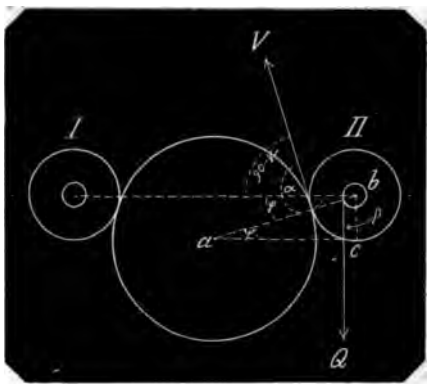
$\mu = \frac{1}{10}$, ϱ der Halbmesser der Zapfen $= \frac{1}{24}$ Fufs.

$Q = 965{,}28$ Pfund.

M nach einer ungefähren Schätzung $= 6355$ Pfund, d. h. das Gewicht der Daumenwelle nebst Zubehör.

Die Bestimmung der Welle α und β ist hier etwas schwieriger. Es bezeichne a das Stirnrad, II. den Drehling für den

Fig. 854.



Stampfer und I. den für das Schlägelzeug, welcher Letztere jedoch hier

= der im Theilrisse des Drehlings erforderlichen Kraft zur Bewegung der 5 Stampfen.

Bestimmung der Kraft zur Bewegung des Schlägelzeuges.

Beiläufig wird bemerkt, dafs nach Beobachtungen in gut eingerichteten Oelmühlen, die gröfste Abweichung des Schlägels von der Vertikalen zwischen 18° bis 19° fällt. Es ist hier dafür 18° 15′ angenommen.

Das Moment der Kraft wächst mit dem Abweichungswinkel des Schlägels von der Vertikalen, so dafs also für diesen Fall das Moment der Kraft bei 18° 15′ ein Maximum ist. Man wird also, indem man dieses Maximum sucht, sicher gehen und einen Ueberschufs an Kraft erhalten.

Wollte man das Moment von 2 und 2 Graden suchen, und die Summe dieser Momente durch die Anzahl derselben dividiren, so würde man sich unnöthiger Weise in eine weitläufige Rechnung verwickeln, indem doch am Ende das gefundene Resultat dem obigem Maximum gleich gesetzt werden müfste.

Es sind hier wiederum 3 Widerstände in Betracht zu ziehen, und zwar:

1. Der statische Widerstand.
2. Der Reibungswiderstand und endlich
3. Der mechanische Widerstand.

noch aufser Acht gelassen werden kann.

Die Lage der Drehlinge gegen ac hängt von Umständen ab, die bei jeder Mühle verschieden sind.

Bei diesem Fall ist der Abstand $bc = 2\frac{1}{4}$ Fufs.

Ferner ist $\frac{68 \frac{4\frac{1}{2}}{12}}{2 \cdot \frac{22}{7}} = 4{,}06$ Fufs des Halbmessers des Stirnrades, also $ab = 4{,}06 + 1{,}91 = 5{,}97$ Fufs.

$$\sin \psi = \frac{bc}{ab} = \frac{2{,}25}{5{,}97} = \sin 22° 8' 27''$$

Nun ist nach der Figur $\alpha = 3k - \psi = 270° - 22° 8' 27'' = 247° 51' 33''$ und $\beta = 90°$.

Setzt man diese Werthe in die gedachte Formel, so kommt:

$$V^2 = 2V \cdot \frac{3072{,}81 - 2{,}99}{3{,}65} + \frac{2588238{,}4 - 23631{,}61}{3{,}65}$$

oder $$V^2 - 2V \cdot 841{,}04 + 7026{,}32 = 0,$$

also $$V = 841{,}04 \pm \sqrt{4716{,}28} = 841{,}04 + 68{,}7 = 909{,}74 \text{ Pfund}$$

Fig. 855.

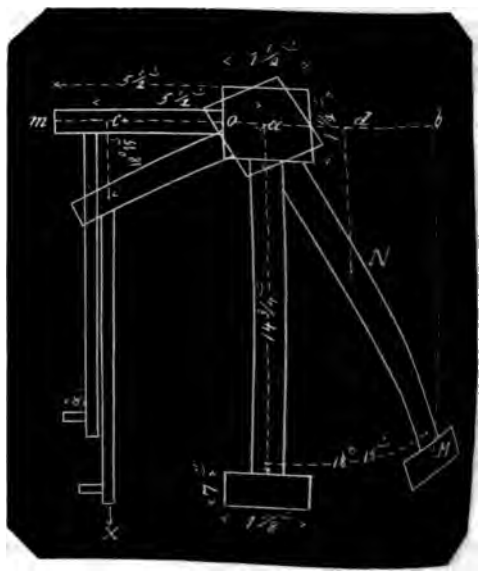
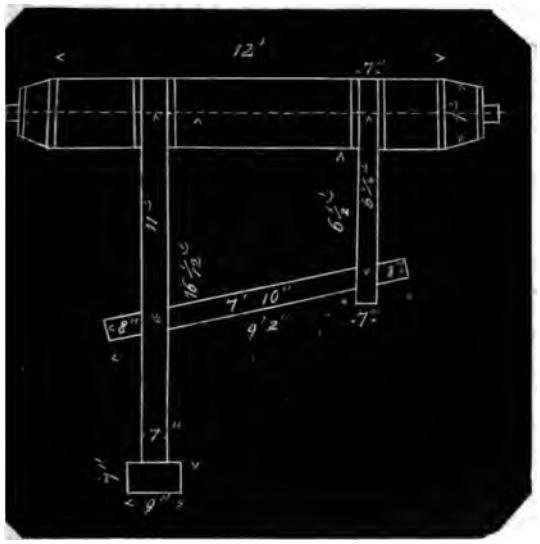


Fig. 856.



estimmung des statischen Widerstandes.

Die hier folgenden statischen Momente ind auf dem Mittelpunkt der Schlägelwelle als Drehpunkt bezogen, folglich liegen auch die Abstände für die einzelnen Momente in einer durch diesen Mittelpunkt gedachten horizontalen Ebene. Die Summe der Momente auf der linken Seite von der Vertikalen mufs von der Summe der Momente auf der rechten Seite abgezogen werden, weil jene der Kraft zu Hülfe kommen.

Die Momente auf der rechten Seite sind:

1. Vom Schlägel. Dieser ist von Eisen. Das Stielloch kommt in Abzug, es ist 7" im □. Der Abstand vom Mittelpunkt der Welle bis zum Schwerpunkt des Schlägels ist 15½ Fufs oder eigentlich 15½½ Fufs, indem dieser Abstand um 1" zu lang genommen ist. Bezeichnet nun x die Kraft in Pfunden, die an der Zugstange erforderlich ist, um dem Momente des Schlägels bei 18° 15' das Gleichgewicht zu halten, so ist: $ab^2 \cdot M = ac\,x$ oder:

$$(1\tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{1}{4} - \tfrac{7}{12} \cdot \tfrac{7}{12}) \tfrac{7}{12} \times 66 \times 7{,}2 \cdot 15\tfrac{1}{8} \times \sin 18^\circ 15' = 5{,}5\,(\cos 18^\circ 15')$$

$$\text{also} \quad x = \frac{1\tfrac{1}{8} : \tfrac{1}{4} - \tfrac{7}{12} \times \tfrac{7}{12} \times 66 \times 7{,}2 \times 15\tfrac{1}{8} \times \sin 18^\circ 15'}{5{,}5 \cos 18^\circ 15'} = 132{,}371 \text{ Pfund.}$$

2. Vom Schlägelarme. Dessen der Welle entfernt. Seine Länge ist
chwerpunkt liegt mit dem Stück im 15½ Fufs, Breite und Höhe = 7 Zoll, also
chlägel auf $8\frac{7}{12}$ Fufs vom Mittelpunkt $ad \cdot N = ac\,x$

$$\text{ler} \quad \frac{8\frac{7}{12} \sin 18^\circ 15' \cdot 15\tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{7}{12} \cdot \tfrac{7}{12} \cdot 66 \cdot 0{,}755}{5{,}5 \cos 18^\circ 15'} = 131{,}148 \text{ Pfund.}$$

s erforderliche Kraft an der Zugstange.

3. Von der Schlägelscheere. Hierwerden, um Weitläufigkeiten zu vereiden, die ausgescheerten Theile für voll gerechnet. Sie ist 6½ Fufs lang, 7 Zoll im □ stark. Ihr Schwerpunkt ist 4 Fufs von der Mitte der Welle entfernt, mithin ist

$$\frac{4 \sin 18^\circ 15' \cdot 6\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{7}{12} \cdot \tfrac{7}{12} \cdot 66 \cdot 0{,}755}{5{,}5 \cos 18^\circ 15'} = 10{,}786 \text{ Pfund}$$

s erforderliche Kraft an der Zugstange.

4. Von der Schlägelschiene. Ihr dem Mittelpunkt der Welle entfernt. Sie
chwerpunkt liegt $\frac{11+6\frac{1}{2}}{2} = 8\frac{1}{4}$ Fufs von ist 9½ Fufs lang, ¼ Fufs breit, ⅛ Fufs stark; es ergibt sich also

$$\frac{8\frac{1}{4} \sin 18^\circ 15' \cdot 9\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{8} \cdot 66 \cdot 0{,}755}{5{,}5 \cos 18^\circ 15'} = 22{,}143 \text{ Pfund.}$$

als erforderliche Kraft an der Zugstange.

Addirt man diese einzelnen Kräfte zusammen, so erhält man die Summe derselben = 297,048 Pfund, welche an der Zugstange angebracht werden müfsten, wenn der Schlägel um 18° 15′ von der Vertikalen abgewichen ist. Es kommen aber noch zuvor die Momente auf der linken Seite in Abrechnung. Diese sind:

1. Von dem Zugarme. Sein Schwerpunkt liegt um $\frac{5\frac{1}{2}}{2} + \frac{1}{4}$ Fufs von der Mitte der Achse entfernt. Er ist $5\frac{1}{2}$ Fufs lang, $\frac{1}{4}$ und $\frac{7}{12}$ Fufs breit. Demnach ist, wenn x die Kraft bezeichnet, die in dem Abstande von 5,5 *cos* 18° 15′ vom Drehpunkte angebracht, dem Momente $\left(\frac{5\frac{1}{2}}{2} + \frac{1}{4}\right) cos\ 18° 15'$ mal dem Gewichte des Hebelarmes das Gleichgewicht hält, oder:

$$\frac{\frac{5\frac{1}{2}}{2} + \frac{1}{4}\ cos\ 18° 15' \cdot 5\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{12} \cdot 66 \cdot 0{,}755}{5{,}5\ cos\ 18° 15'} = x = 24{,}22 \text{ Pfund.}$$

2. Von der Zugstange. Von dieser kommt nicht das Moment in Betracht, sondern die gesuchte Kraft besteht schon in dem Gewichte der Stange selbst, weil sie vertikal herabhängt, und während der Bewegung des Schlägels keine Winkelbewegung, sondern nur eine Seitenbewegung macht.

Sie ist 11 Fufs lang, $\frac{1}{4}$ Fufs im □ stark und von Tannenholz, mithin ihr Gewicht $= 11 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 66 \cdot 0{,}725 = 32{,}896$ Pfund.

3. Von der Zuglatte. Mit dieser verhält es sich eben so. Sie ist 8 Zoll lang und $\frac{1}{3}$ Fufs im □ stark, also ihr Gewicht $= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 66 \times 0{,}755 = 3{,}69$ Pfund (Eichenholz). Es ist also die Summe der auf der linken Seite wirkenden Kraft = 60,809 Pfund. Man hat also 297,048 − 60,809 = 236,239 Pfund als Kraft, die in dem Augenblicke, wo der Schlägel seinen höchsten Stand erreicht hat, an der Zuglatte erforderlich ist, um dem statischen Momente das Gleichgewicht zu halten.

Bestimmung des Reibungswiderstandes.

Das Gewicht der Schlägelwelle mit Zubehör beträgt:

Für Welle	$\left[12 \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} + 2\left(1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) \frac{22}{7}\right] 0{,}755 \cdot 66$	= 1423,643 Pfund
„ Schlägelarm	$= 15\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} \cdot 66 \cdot 0{,}755$	= 259,9 „
„ Schlägelscheere	$= 6\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{12} \cdot 66 \cdot 0{,}755$	= 44,985 „
„ Zugscheere	$= 5\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{12} \cdot 66 \cdot 0{,}755$	= 38,064 „
„ Scheere	$= 9\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 66 \cdot 0{,}755$	= 42,822 „
„ Zugstange	$= 11 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 66 \cdot 0{,}725$	= 32,896 „
„ Zuglatte	$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 66 \cdot 0{,}755$	= 3,691 „
„ Schlägel	$= \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{3}{4} - \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12}\right) \frac{7}{12} \cdot 66 \cdot 7{,}2$	= 139,71 „
„ Zapfen *a* 4 Zoll lang 3 Zoll Durchm. incl. Blätter 1 und 1 Zoll stark		= 94,56 „
„ 4 Ringe $1\frac{1}{2}$ Zoll breit und $\frac{7}{12}$ Fufs stark		= 23,335 „
„ 4 viereckige Ringe neben den Armlöchern	$= 4 \cdot 4 \cdot 1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{12} \cdot 66 \cdot 7{,}2$	= 79,2 „
		Summa 2182,811 Pfund.

Hierzu kommt noch die Kraft, welche dem statischen Widerstande das Gleichgewicht hält, weil sie durch ihre senkrechte Wirkung die Reibung vermehrt. Demnach ist das Gewicht, welches Reibung verursacht = 2182,811 + 236,239 = 2419,049 Pfund, und setzt man die in der Zugstange erforderliche Kraft für das Gleichgewicht mit der Reibung = *f*, so ist $f a\ cos\ \psi = \mu \varrho Q$,

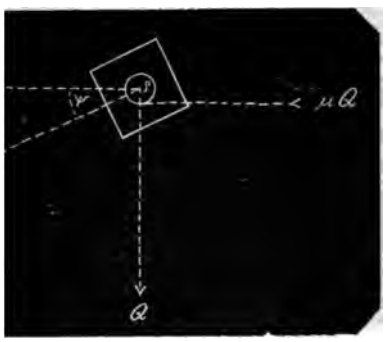
also $$f = \frac{\mu \varrho Q}{a\ cos\ \psi}$$

wo $Q = 2419{,}049$ Pfund, $\varrho = \frac{1}{4}$ Fufs = Halbmesser des Zapfens, $a = 5{,}5$; $\mu = 0{,}1$; $\psi = 18° 15'$ ist. Es ist also $f = 5{,}789$ Pfund.

Bestimmung des mechanischen Widerstandes.

Die Momente der Trägheit sind:

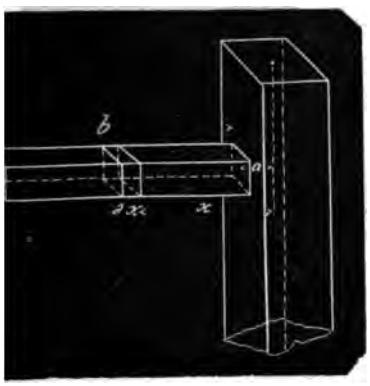
Fig. 857.



Des Schlägels. Wenn man an-
ıt, dafs die ganze Masse des Schlä-
von 139,71 Pfund im Schwerpunkt
lben vereint ist, so hat man
· $14\frac{1}{4} + \frac{7}{24})^2$ 139,71 = 34840,43 Pfund
ıe Masse in dem Abstande von 1
von dem Mittelpunkt der Welle ab,
mit derselben Geschwindigkeit be-
n würde, als die Masse von 139,71
d im Abstande von $(\frac{1}{4} + 14\frac{1}{4} + \frac{7}{24})$ Fufs.

Des Schlägelarms. Dessen Quer-
itt sei f und die ganze Masse sei in
fittellinie vereinigt, so dafs der Schlä-
m als eine schwere Stange anzuse-
ist. Ist nun der Abstand eines be-
gen **Punktes des Schlägelarms** von
Schlägelwelle $= x$, so ist der Inhalt
der Höhe $\partial x = f\partial x$, also des Gewichts

Fig. 858.



$\partial x\, g\gamma$, mithin das Moment der Träg-
$= x^2 f\, \partial x\, g\gamma$, mithin das Moment des
ägelarms von der Länge x

$$= fg\gamma \int x^2 \cdot \partial x = fg\gamma \frac{x^3}{3} + C.$$

Für $x = a$ ist das Moment $= 0$, indem das Stück des Schlägelarms, welches in der Welle sitzt, zu letzterer gerechnet wird.

Also $fg\gamma \frac{x^3}{3} + C = 0$

also Const. $= - fg\gamma \frac{a^3}{3}$

mithin das vollständige Moment für die Länge des Arms

$$= x = fg\gamma \left(\frac{x^3 - a^3}{3}\right)$$

und für $x = b$ oder die ganze Länge des Hebelsarmes ist daher das Moment der Trägheit $= fg\gamma \left(\frac{b^3 - a^3}{3}\right)$. Nun ist $f = \frac{7}{12} \times \frac{7}{12} = \frac{49}{144}$ □Fufs; $\gamma = 66$ Pfund, $g = 0{,}755$ = (spec. Gewicht) $b = 9$ Zoll + 14 Fufs 9 Zoll + 7 Zoll = $16\frac{7}{12}$ Fufs, $a = \frac{1}{4}$ Fufs, also $fg\gamma \left(\frac{b^3 - a^3}{3}\right) = 23512{,}37$ Pfund.

3. Der Schlägelscheere. Dazu kann man wieder die eben gefundene Formel anwenden. Nun ist aber $f = \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{24}$, $\gamma = 66$, $g = 0{,}755$; $b = 6\frac{1}{2}$ Fufs + $\frac{1}{4}$ Fufs = $7\frac{1}{4}$ Fufs; $a = \frac{1}{4}$ Fufs.

Also $fg\gamma \left(\frac{b^3 - a^3}{3}\right) = 878{,}13$ Pfund.

4. Der Zugarme. Da hier $f = \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{2}$ $= \frac{5}{24}$ □Fufs, $\gamma = 66$, $g = 0{,}755$; $b = 5\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ $= 6\frac{1}{4}$ Fufs, $a = \frac{1}{4}$ Fufs,

so ist $fg\gamma \left(\frac{b^3 - a^3}{3}\right) = 562{,}24$ Pfund

5. Der Schlägelschiene. Es sei $dh = x$, $hi = dx$, $dg = a$, $dv = b$, $\angle cdA = \varrho$.

Nimmt man in der Schiene AB einen beliebigen Punkt n an, so ist die diesem Punkt zugehörige Ordinate $nh = x\, tg\, \varrho$ und wenn $dh = x$ und $hi = nr = dx$ wächst, so ist $\partial x\, sec\, \varrho = nk$,

also $x^2\, tg\, \varrho^2 \cdot f \cdot \partial x\, sec\, \varrho\, g\gamma =$ dem Momente der Trägheit der Schlägelschiene von der Länge $\partial x\, sec\, \varrho$.

Mithin $fg\gamma\, sec\, \varrho \cdot tg\, \varrho^2 \int x^2\, \partial x + C$

$$= fg\gamma\, sec\, \varrho \cdot tg\, \varrho^2 \cdot \frac{x^3}{3} + C$$

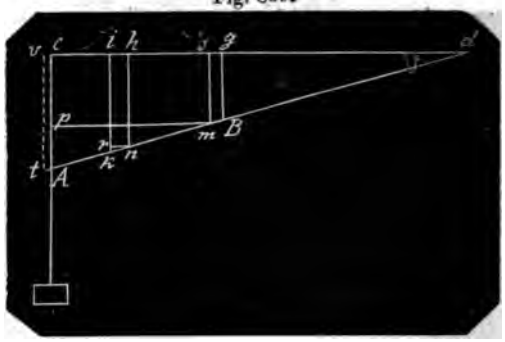
= dem Momente von der Länge der Schiene $= mn$.

Für $x = dg = a$ ist aber

$$fg\gamma\, sec\, \varrho \cdot tg\, \varrho^2 \frac{a^3}{3} + C = 0$$

also $C = - fg\gamma \cdot sec\, \varrho \cdot tg\, \varrho^2 \frac{a^3}{3}$

Fig. 859.



mithin das vollständige Moment für die Länge der Schiene

$$= fg\gamma \sec\varrho \cdot tg\,\varrho^2\left(\frac{a^3-a^3}{3}\right)$$

Für $x = dc = b$ erhält man nun endlich das Moment der ganzen Schiene

$$= fg\gamma \sec\varrho \cdot tg\,\varrho^2 \cdot \left(\frac{b^3-a^3}{3}\right)$$

Es ist aber

$f = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{576}$,
$g = 0{,}755$,
$\gamma = 66$,

$$\sin\varrho = \frac{Ap}{Am} = \frac{Ac - ms}{Am} = \frac{11 - 6\frac{1}{2}}{7\frac{1}{8}} = \frac{4\frac{1}{2}}{7\frac{1}{8}} = \sin 37^\circ\,47'\,36'',$$

also $\varrho = 37^\circ\,47'\,36''$. Um a und b zu bestimmen, so verhält sich

$$tp : tm = ms : md \text{ oder } 4\tfrac{1}{2} : 7\tfrac{1}{8} = 6\tfrac{1}{2} : md,$$

woraus $$md = \frac{7\frac{1}{8} \cdot 6\frac{1}{2}}{4\frac{1}{2}} = 10{,}2' \text{ und } dB = md - mB = 10{,}2' - 8'' = 9{,}534'$$

mithin $$dg = a = dB \cdot \cos\varrho = 9{,}534 \cos \cdot 37^\circ\,47'\,36'' = 7{,}53'.$$

Ferner ist $$Ad \cdot \cos\varrho = dc \text{ oder } (At + tm + md)\cos\varrho$$

oder $$(8'' + 7\tfrac{1}{8}' + 10{,}2') \cdot \cos 37^\circ\,47'\,36'' = b = 14{,}77'.$$

Es ist also $$f \cdot g \cdot \gamma \cdot \sec\varrho \cdot tg\,\varrho^2\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right) = 3312{,}63 \text{ Pfund.}$$

6. Die Schlägelwelle.

a, der Theil zwischen den beiden Hälsen ist 18 Fuſs lang und $1\frac{1}{4}$ Fuſs im □ stark.

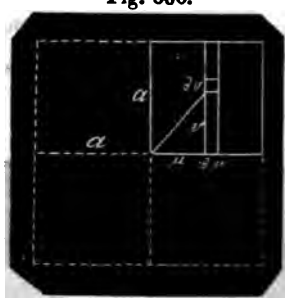
In Bezug auf nebenstehende Figur ist $\sqrt{\mu^2 + \nu^2}$ die Entfernung des Elements vom Mittelpunkt der Welle.

Setzt man nun die Wellenlänge $= l$, so ist das Gewicht des Elements

$$= \partial\nu \cdot \partial\mu\, l \cdot g \cdot \gamma$$

also das Moment der Trägheit dieses Elements

Fig. 860.



$$= \sqrt{\mu^2+\nu^2}^2 \partial\nu \cdot \partial\mu \cdot l\gamma = (\mu^2+\nu^2)\,\partial\nu \cdot \partial\mu\, l\gamma = lg\gamma \cdot \partial\mu\,(\mu^2 \cdot \partial\nu + \nu^2 \cdot \partial\nu)$$

Batrachtet man nun zuerst $\partial\mu$ als Const. so ist

$$lg\gamma\,\partial\mu \int(\mu^2\,\partial\nu + \nu^2\,\partial\nu) = lg\gamma\,\partial\mu\left(\mu^2\nu + \frac{\nu^3}{3}\right) + C$$

C ist hier $= 0$, denn für $\nu = 0$ verschwindet der ganze Ausdruck.

Für $\nu = a$ ist obiger Ausdruck

$$= lg\gamma\,\partial\mu\left(\mu^2 a + \frac{a^3}{3}\right)$$

Betrachtet man nun ν als constant, so ergibt sich durch Integration das Moment

$$= lg\gamma\,\frac{\mu^3}{3}a + \frac{a^3\mu}{3} + C$$

Für $\mu = 0$ verschwindet der ganze Ausdruck, mithin ist $C = 0$.

Für $\mu = a$ erhält man das Moment der Trägheit vom 4ten Theil der Welle

$$= lg\gamma\,\tfrac{2}{3}a^4,$$

t das Moment der ganzen Welle
$= \frac{1}{2} a^4 l \gamma g.$
t $a = \frac{1}{2}$ Fuſs, $l = 12$ Fuſs, $\gamma = 66$,
$a^4 l g \gamma = 504{,}50$ Pfund.
r Schärfe wäre es auch noch er-
, das Moment der Trägheit für
n, die Halsringe, die Zapfenblät-
Armringe in der Welle u. s. w.
umen. Da diese aber gegen die
habte höchst unbedeutend sind,
man, ohne einen merklichen
begehen, sie auſser Betracht
Was die beiden Hälse der Welle
, welche eine konische Form ha-
ann man diese als Cylinder von
Durchmesser betrachten. Dann
oment der Trägheit $\frac{1}{2} \pi r^4 l g \gamma$.
esen Fall ist $r = \frac{1}{2}$, $l = 1$ Fuſs,
$= 0{,}755$, mithin das Moment der
der beiden Hälse $= 9{,}8$ Pfund.
mme sämmtlicher Momente ist
23620,1 Pfund, welche einem
von 1 Fuſs von der Welle zu-
Reducirt man diese auf den
r Zugstange, und bezeichnet die
n Abstande erforderliche träge
mit die Beschleunigung der Ma-
n allen Theilen dieselbe bleibt
ist

$$1^2 \cdot 23620{,}1 = (5\tfrac{1}{2})^2 \cdot x$$

$$= \frac{23620{,}1}{(5{,}5)^2} = 2103{,}14 \text{ Pfund.}$$

kommt noch die träge Masse
ange und Zuglatte
$= 36{,}58$ Pfund.

t die ganze träge Masse
$= 2139{,}727$ Pfund $= N$.

mmung der bewegenden Kraft P,

e träge Masse von 2139,727 Pfund
nden durch einen Raum von
u führen im Stande ist.

d angenommen, daſs der Dreh-
das Schlägelzeug nicht wie der
tampfen 32, sondern 40 Stöcke
es Stirnrad erhält, wie schon
gegeben worden 68 Zähne, aus
Grunde die Theilung von $4\frac{1}{4}$ Zoll
selbe bleibt.

hon früher angegeben, dreht sich
erad, mithin auch das auf der
dwelle befindliche Stirnrad 7mal
ute $= 60$ Secunden herum, also
$\frac{40}{7}$ Sekunden. Nun verhält sich
lei Theilung die Zeit eines Um-
rie die Anzahl der Zähne. Be-
also x die Zeit, in welcher der Drehling der Schlägelwelle sich einmal herumdreht, so ist:

$$68 : \tfrac{40}{7} \text{ Sek.} = 40 : x \text{ Sekunden}$$

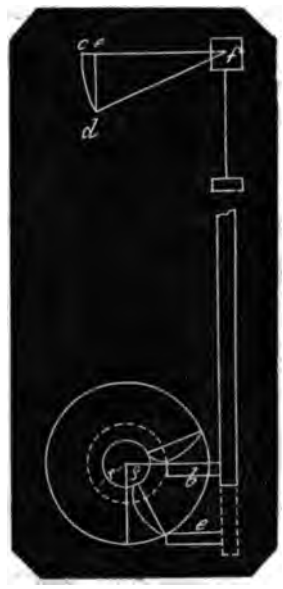
woraus $x = 5{,}04$ Sekunden.

Der Raum S, welcher die auf dem Bolzen der Zugstange reducirte träge Masse N bei jedem Hube der Zugstange durchlaufen muſs, ist genau genommen gleich dem Bogen cd; dafür kann man dessen Sinus nehmen, und dann ist

$$S = ce = fd \sin 18^\circ 15' = 5{,}5 \sin 18^\circ 15' = 1{,}77'$$

Um nun die Zeit T zu bestimmen, welche zu dem Durchlaufen des Raumes S erforderlich ist, sei der Halbmesser vom Theilrisse der Daumenwelle $= r = 1{,}25$ Fuſs; der Winkel, welcher der Höhe $eb = S$ zugehört $= \varrho$, alsdann ist, da die Daumen nach der Kreis-Evolvente construirt sind $r \operatorname{arc} \varrho = eb$ oder $1{,}25 \operatorname{arc} \varrho = 1{,}77$ Fuſs also $\operatorname{arc} \varrho = \frac{1{,}77}{1{,}25} = 81^\circ 8'$.

Fig. 861.



Nimmt man nun die Bewegung des Wasser- also auch des Stirnrades durchaus gleichförmig an, so müssen die 360° des Drehlings sich zu der Geschwindigkeit von 5,04 Sekunden, mit welcher er einmal herumläuft verhalten wie der Winkel ϱ zu der Zeit T, welche zu dem Durchlaufen des Raumes $S = eb = \operatorname{arc} \varrho$ erforderlich ist,

oder $360 : 5{,}04 = arc\ \varrho : T$

und daraus ist $T = 1{,}136$ Sekunden.

Dieser Werth für T ist aber zu klein, indem die Geschwindigkeit des Daumens nicht gleichförmig ist, sondern abnimmt, wenn der Winkel (ϱ) zunimmt. Es mufs also, wenn die Geschwindigkeit des Daumens kleiner wird, die Zeit, in welcher es den Weg eb durchläuft, gröfser werden.

Setzt man also diesen Werth von T in Gleichung $P = \frac{S}{g\,T^2}\,N$, so erhält man, da in diesem Falle $N = 2139{,}727$ Pfund, $S = 1{,}77$ Fufs, $T = 1{,}36$ Sekunden, $g = 15\frac{1}{2}$, P oder die Kraft, welche dem mechanischen Widerstande in Pfunden gleich ist $= 187{,}8$ Pfund zu grofs, indem T zu klein ist.

Näherungsweise ist also im Theilrifs der Daumenwelle eine Kraft erforderlich $= (236{,}239 + 187{,}8) + 5{,}789 = 429{,}828$ Pfund = dem statischen, mechanischen und Reibungswiderstande.

Heifst diese Kraft V', so ist in Beziehung auf den Theilrifs des Drehlings, wenn man dessen Halbmesser mit a bezeichnet $a\,V' = r \cdot 429{,}828$

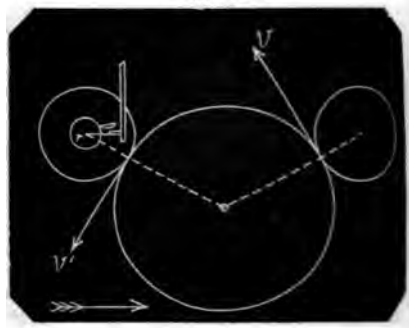
oder $$\frac{40 \cdot \frac{41}{2}}{2 \cdot \frac{22}{7}}\,V' = 1{,}25 \cdot 429{,}828$$

also ist $V' = \frac{1{,}25 \cdot 429{,}828}{2{,}4'} = 223{,}87$ Pfund

näherungsweise die auf dem Theilrifs des Drehlings reducirte Kraft, wobei die Kraft, die zur Ueberwältigung der Reibung zwischen Daumen und Zuglatte, und Zahn und Stock erforderlich, ganz aufser Acht gelassen ist, indem V' doch nur näherungsweise bestimmt werden kann.

Bezeichnet nun W' die Geschwindigkeit des Stirnrades, wenn das Schlägel- und Stampfwerk beide im Gange sind, $V + V'$ die dazu gehörige Kraft, W aber die Geschwindigkeit, wenn blos das Stampfwerk betrieben wird, und V die dazu gehörige Kraft, so ist im ersten Falle das Moment $= W' \cdot (V + V')$ und im zweiten Falle $= W \cdot V$.

Fig. 862.



Es müfste also, wenn eine gleiche Geschwindigkeit stets stattfände

$$W \cdot V = W'(V + V') \text{ sein,}$$

woraus $W : W' = V + V' : V$

oder $W : W' = 909{,}74 + 223{,}87 : 909{,}74$
$= 1133{,}61 : 909{,}74$

woraus $$W' = \frac{909{,}74}{1133{,}61} \cdot W = 0{,}803\,W$$

Bezeichnet nun ferner v' die Geschwindigkeit des Theilrisses der Daumenwelle, wenn der Daumen arbeitet, hingegen v die Geschwindigkeit, wenn der Daumen nicht arbeitet; so ist klar, dafs W' eben so oft in W enthalten sein mufs, als v' in v und daher $v : v' = W : W'$ oder $v : v' = W : 0{,}803\,W$ oder $v : v' = 1 : 0{,}803$ woraus näherungsweise ebenfalls $v' = 0{,}803\,v$.

Ist ferner t die Zeit, in welcher der Daumen während einer Umdrehung arbeitet, und t' die Zeit, in welcher er während einer Umdrehung nicht arbeitet, so ist v' der Zeit t und der Zeit t' zugehörig, und man hat

$$360 : 2\pi r = \varrho : tv' = \varrho : arc\ \varrho,$$

weil $arc\ \varrho = tv'$ ist,

also ist $$t = \frac{\frac{\varrho}{360} \cdot 2r\pi}{v'} = \frac{\frac{81° 8'}{360} \cdot 2 \cdot 1{,}25 \cdot \frac{22}{7}}{0{,}803\,v} = \frac{1{,}777}{0{,}803\,v}$$

Eben so ist $360 : 360 - \varrho = 2\pi r : t'v$

oder $360° : 360° - 81° 8' = 2 \cdot 1{,}25 \cdot \frac{22}{7} : t'v$

woraus $$t' = \frac{6{,}084}{v}$$

Nun verrichtet aber der Drehling in 5,04 Sekunden einen Umgang, daher ist auch $t + t' = 5{,}04$

mithin $$5{,}04 = \frac{1{,}777}{0{,}8030} + \frac{6{,}084}{v}$$

also $$v = \frac{2{,}204 + 6{,}048}{5{,}04} = 1{,}644'$$

und $v' = 0{,}8030 = 0{,}803 \cdot 1{,}644 = 1{,}320'$

Hieraus geht nun hervor, daſs $v'T = S$ = der Hubhöhe oder dem Wege ist, in welchem der Daumen arbeitet, mithin ist auch $v(5{,}04 - T)$ der Weg, in welchem der Daumen nicht arbeitet; beide Wellen zusammengenommen müssen aber der Länge des Theilrisses der Welle gleich sein, mithin hat man

$$v'T + v(5{,}04 - T) = 2 \cdot 1{,}25 \cdot \tfrac{22}{7}$$

oder

$$1{,}320 \cdot T + 1{,}644\,(5{,}04 - T) = 2 \cdot 1{,}25 \cdot \tfrac{22}{7},$$

woraus T, als zweiter Näherungswerth = 1,325 Sekunden.

Setzt man diesen Werth von T mit Beibehaltung der übrigen Werthe in die Formel $P = \frac{S}{gT^2} N$, so ergibt sich ein zweiter Näherungswerth für die bewegende Kraft $P = 138{,}06$ Pfund, der aber zu klein, weil T zu groſs ist.

Hiernach ist also die Kraft, welche näherungsweise im Theilrisſs der Welle erforderlich ist

$= 236{,}239 + 138{,}06 = 380{,}088$ Pfund.

Diese wie oben auf den Theilrisſs des Drehlings reducirt, gibt

$$V' = \frac{380{,}088 \cdot 1{,}25}{2{,}4} = 197{,}96 \text{ Pfund.}$$

Man hat also wiederum

$$W : W' = V' + V : V$$

oder $W : W' = 197{,}96 + 909{,}74 : 909{,}74$

oder $W : W' = 1107{,}70 : 909{,}74$

woraus $W' = \frac{909{,}74}{1107{,}70} W = 0{,}821\ W$

auch haben wiederum t, t', v und v' dieselben Bezeichnungen von vorher und daher $v : v' = W : W'$

oder $v : v' = W : 0{,}821\ W$

also ist näherungsweise

$$v' = 0{,}821\ v$$

ferner $360 : 2\pi r = \varrho : tv'$

woraus $$t = \frac{2\pi r \cdot \varrho}{360 \cdot v'} = \frac{2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 1{,}25\,(81° 8')}{360 \cdot 0{,}821\ v} = \frac{2{,}165}{v}$$

und $360 : 360 - 81° 8' = 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 1 \cdot 25 : t'v$

woraus $t' = \frac{(278° 52') \cdot 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 1{,}25}{360 \cdot v} = \frac{6{,}084}{v}$

Da nun $t + t' = 5{,}04$ Sekunden sein muſs, so ist auch

$$5{,}04 = \frac{6{,}084}{v} + \frac{2{,}165}{v}$$

also $$v = \frac{6{,}084 + 2{,}165}{5{,}04} = 1{,}636 \text{ Fuſs}$$

als zweiter und zwar kleinerer Näherungswerth weil der erste $v = 1{,}644'$ gefunden wurde.

Der erste Näherungswerth für v war

$$= 0{,}803 \cdot v = 0{,}803 \cdot 1{,}644$$

der zweite Näherungswerth ist aber

$$= 0{,}821 \cdot v = 0{,}821 \cdot 1{,}636$$

Da nun $0{,}821 \cdot 1{,}636 > 0{,}803 \cdot 1{,}644$, so ist auch der zweite Näherungswerth für $v' >$ als der erste, also die dazu gehörige Zeit oder der dritte Näherungswerth von T kleiner. Diesen findet man, wenn man auf dieselbe Weise wie vorher verfährt = 1,324 Sekunden, welche dem zweiten Werthe von $T = 1{,}325$, aber beinahe gleich ist.

Setzt man also $T = 1{,}324$ in die Gleichung $P = \frac{S}{gT^2} N$, so erhält man $P = 138{,}168$ Pfund als dritter Näherungswerth der bewegenden Kraft.

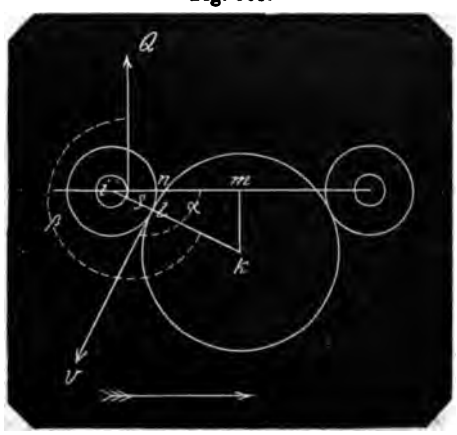
Behält man diese etwas zu groſse Kraft bei, so erhält man

$236{,}239 + 138{,}168 + 5{,}789 = 380{,}196$ Pfd. $= V'$

als Kraft, welche in der Zuglatte dem statischen, mechanischen und Reibungswiderstande gleich ist.

Zur Ueberwältigung dieser Kraft, oder was einerlei ist, dieses Widerstandes, und der Reibung zwischen Daumen und Zuglatte ist nach Eytelw. Stat. §. 282 eine

Fig. 863.



Kraft in dem Theilriſs der Daumenwelle erforderlich.

$$V = (1 + \mu\, tg\, \beta)\, V'$$

Für diesen Fall ist $tg\, \beta = \frac{1{,}77}{1{,}25} = 54° 1' 50''$,

$V' = 380{,}96$ Pfund, $\mu = \frac{1}{14} = 0{,}07$.

Daher $V = 416{,}87$ Pfund.

Reducirt man nun diese im Theilriſs der Daumenwelle erforderliche Kraft auf den Theilriſs des Drehlings, so ist nach Eytelw. Statik §. 238

$$V^2 - 2V\frac{arc\, Q + \mu^2 \varrho^2 [Q \cos(\beta - \alpha) + M \sin\alpha]}{a^2 - \mu^2 \varrho^2} + \frac{r^2 Q^2 - \mu^2 \varrho^2 (Q^2 + M^2 + 2QM \sin\beta)}{a^2 - \mu^2 \varrho^2} = 0$$

Für diesen Fall ist nun $a = 2{,}4$ = dem Halbmesser vom Theilriſs des Drehlings, $r = 1{,}25$ = dem Halbmesser der Daumenwelle, V, oder für die Formel $Q = 416{,}87$ Pfd., $\mu = \frac{1}{16}$, $\varrho = \frac{1}{8}$ = dem Halbmesser der Zapfen, M = dem Gewicht der Welle nebst Zubehör = 902,47 Pfund. Es ist nämlich:

1. Das Gewicht des Holzes.

1. Welle 8 Fuſs lang, 1 Fuſs stark	= 6,285 Cubfuſs.
2. Drehlingskränze $2\frac{1}{2}$ Fuſs Halbmesser auswendig, $1\frac{1}{2}$ Fuſs inwendig, und $\frac{1}{2}$ Fuſs stark, 2 Fuſs breit $= (2\frac{1}{2}^2 - 1\frac{1}{2}^2)\frac{22}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2$ . .	= 6,053 „
3. 8 Arme, à $1\frac{1}{2}$ Fuſs lang, $\frac{1}{12}$ und $\frac{1}{2}$ Fuſs stark $= 8 \cdot 1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2}$	= 1,666 „
4. 40 Stöcke $1\frac{1}{2}$ Fuſs lang, $\frac{1}{12}$ im Radius $= 1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{22}{7}$ . .	= 1,717 „
5. 1 Zugdaumen, im Durchschnitt $\frac{1}{4}$ Fuſs lang, $\frac{1}{12}$ Fuſs im □ stark $= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12}$	= 0,130 „
Summa	15,851 Cubfuſs.

Das Gewicht davon ist $= 15{,}851 \cdot 0{,}755 \cdot 66 = 789{,}85$ Pfund.

2. Das Gewicht des Eisens.

1. 4 Ringe $= 4 \cdot 1 \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{24}$	= 0,065 Cubfuſs.
2. 2 Zapfen $= 2\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{22}{7} + \frac{16}{6} \cdot \frac{1}{12}$	= 0,172 „
Summa	= 0,237 „

also das Gewicht $= 0{,}237 \cdot 66 \cdot 7{,}2 = 112{,}62$ Pfund, mithin der obige Werth für $M = 902{,}47$ Pfund.

Um nun ferner α und β zu bestimmen, so ist $ki \sin\varrho = km$. Es ist aber km die Entfernung des Mittelpunktes des Drehlings von dem Mittelpunkte des Stirnrades $= 2{,}25$ Fuſs festgesetzt. Ferner ist

$$ki = kl + li = 4{,}06 + 2{,}4 = 6{,}46$$

also $\sin\varrho = \frac{km}{ki} = \frac{2{,}25}{6{,}46}$ also $\varrho = 20° 23'$.

Mithin $\alpha = mnl = 180° - inl = 180° - (90 - \varrho) = 90° + \varrho = 90° + 20° 23' = 110° 23'$,
$\beta = 270°$.

Opposition (Astr.), s. u. „Conjunction und Aspecten".

Ordinaten sind gerade Linien als Längen zu Bestimmung der verschiedenen Punkte einer krummen Linie oder Fläche, mit welchen diese selbst bestimmt werden. Die Ordinaten sind also zuerst selbst ihrer Lage nach zu bestimmen, und dies geschieht durch einen gegebenen festen Punkt, eine durch diesen Punkt gerichtete gerade Linie und Winkel zwischen dieser Linie und den Ordinaten. Das nähere Bestimmungsstück der Ordinaten heiſst Abscisse, Abscisse und Ordinaten heiſsen Coordinaten.

Werden nun von dem gegebenen Punkt als Anfangspunkt ab auf der durch ihn liegenden Linie in Abständen Punkte genommen und von diesen Punkten die Ordinaten unter dem constant bleibenden Winkel, also parallel unter einander nach den zu bestimmenden Curven gezogen, so ist die Linie mit den fortschreitenden Abständen die Abscisse und das Coordinatensystem heiſst das der Parallel-Coordinaten.

Bleibt aber der Anfangspunkt auch als Fuſspunkt der Coordinaten derselbe und werden die Ordinaten unter verschiedenen Winkeln mit der gegebenen durch

len Punkt gehenden Linie radical gezogen, so ist dies System das der Polarcoordinaten. Der feste Punkt heifst der Pol, die constante durch den Pol gehende Linie die Polaraxe und die verschieden genommenen Winkel sind die Polarabscissen. Das Nähere hierüber s. in den Art. „Abscisse, Coordinaten, Coordinatenaxen, Coordinatengleichung.

Ordnungen krummer Linien, s. den Art. „Curven", Einleitung pag. 161 und No. 4, pag. 162.

Organische Beschreibung einer krummen Linie ist die Verzeichnung der Curve im stetigen Zuge mit Hülfe eines Instruments, wie mit dem Zirkel die Kreislinie beschrieben wird. Die Cycloide, die Epicycloide und die Hypocycloide werden bei ihrer Construction durch die Umwälzung des Erzeugungskreises im stetigen Zuge verzeichnet. Auf ähnliche Weise lassen sich auch andere Curven construiren. Die stetige Verzeichnung der Ellipse aus den Brennpunkten gibt Bd. I, pag. 418 mit Fig. 256; Bd. III, pag. 45 mit Fig. 611 zeigt eine zweite stetig mögliche Verzeichnung blofs mit Hülfe der beiden gegebenen halben Axen.

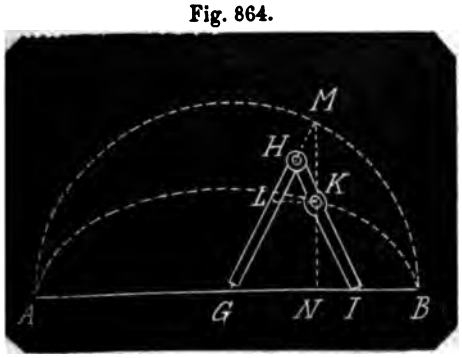
1. In dem Art. „Ellipse", pag. 42 hat man in Fig. 609 den Halbkreis $AHT'B$ und es ist nach No. 13, pag. 45:

$$AC : CD = HJ : FJ$$

Dieser Proportion gemäfs ist ein einfaches Instrument zu stetiger Verzeichnung der Ellipse erfunden worden:

HG und HJ sind zwei gleich lange Lineale, beide zusammen gleich der halben Summe $(a + c)$ beider Axen. Das Lineal GH hat eine Spitze zum festen Einstich in die feste Linie AB, das Lineal HJ eine Abrundung zum Verschieben, beide Lineale sind in H mit einem Charnier drehbar befestigt.

Fig. 864.



Nimmt man nun die Länge JK = der halben kleinen Axe c, also $GH + HK$ = der halben grofsen Axe $= a$, so geschieht mit der Fortschreitung des Endes J auf der Linie AB durch einen in K befindlichen Stift die Zeichnung der Ellipse.

Denn macht man HL = der Verlängerung $HM = HK$, so ist $LM = 2HK$, folglich K ein Punkt in dem über LM beschriebenen Halbkreise; folglich $\angle MKL = R$.

Nun ist $HG = HJ$
$HL = HK$
folglich $LG = KJ$ und $LK \doteq GJ$

Verlängert man daher MK bis N, so ist auch $\angle KNJ = R$, also MNG ein Winkel im Halbkreise und M beschreibt um den Punkt G bei der Umdrehung von A nach B einen Halbkreis mit dem Halbmesser GM = der halben grofsen Axe a, während KN für jeden Punkt von M die rechtwinklige Ordinate einer Ellipse von der halben kleinen Axe $JK = c$ und der halben grofsen Axe $GM = a$ ist.

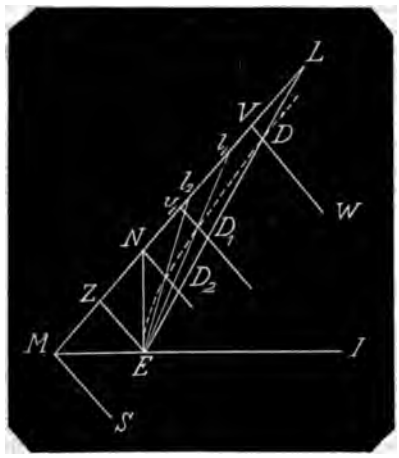
Denn es ist $GM : GL = MN : KN$
oder in Fig. 609 $AC : CD = HJ : FJ$.

2. Bd. III, pag. 265, Fig. 718 zeigt den Durchschnitt einer Hyperbel. M ist der Mittelpunkt, ME die halbe Hauptaxe a, EN die halbe Nebenaxe c, ML die obere Asymptote, $MZ = NZ$, also EZ die Richtung und $\doteq$ der unteren Asymptote MS; Mv eine beliebige Länge, $DV \doteq EZ$.

Nun ist pag. 270, No. 18 nachgewiesen, dafs $MV \times DV = MZ \times EZ$ und dieser Satz hat das Mittel zu folgendem Verfahren für stetiges Verzeichnen der Hyperbel gegeben.

Nimmt man für die zu verzeichnende Hyperbel eine gerade Linie MJ zur Richtung der Hauptaxe, M als Mittelpunkt, ME = der halben Hauptaxe a, also E zum Scheitel, das Loth EN zur halben Nebenaxe c, so hat man die durch MN gezogene gerade Linie ML als obere Asymptote. Halbirt man nun MN in Z, zieht EZ, so ist EZ mit der Richtung der unteren Asymptote MS parallel. Nimmt man nun ein Lineal von irgend einer Breite VW, deren vordere Schiebekante in LM, und markirt auf dieser eine Länge $VL = MZ$; ferner ein zweites Lineal, dessen vordere Schiebekante nach LE gerichtet ist, und befestigt dies mit dem ersten Lineal in dem markirten Punkt L durch ein Charnier drehbar, so ist der Zeichenapparat fertig. Denn verschiebt man das erste Lineal mit dem Punkt L

Fig. 865.



nach LM abwärts und läfst das zweite Lineal immer durch den Punkt E gehen, was sehr leicht ist, wenn man in M und E dünne Stifte einsteckt, so beschreibt der Durchschnittspunkt D beider Linealkanten die Hyperbelpunkte (wie D, D', D^2, E).

Denn es ist $LZ : LV = EZ : dV$

und da $LV = MZ$

auch $LZ : MZ = EZ : dV$

oder $MV : MZ = EZ : dV$

woraus $MV \times DV = MZ \times EZ$.

3. In dem Art. „Brennpunkt der Parabel", pag. 417, No. 6 und 7 mit Fig. 254 und 255 sind zwei Constructionen der Parabel angegeben, aber keine stetig zu machende Zeichnung. Dagegen gibt der Satz 4, pag. 417 das Mittel dazu. Nimmt man nämlich (Fig. 253) ein Winkelmaafs $B'NK$, befestigt an der Lineal-Kante NK in einem nach K hin gelegenen Punkt einen Faden von der Länge KN, wenn K selbst der Befestigungspunkt ist, den zweiten Endpunkt aber in dem Brennpunkt B, schiebt das Winkelmaafs längs der Directrice $B'N$ von der Axe $B'F$ ab in die Höhe und hält zwischen Faden und Linealkante NK einen Stift, so beschreibt dieser die Parabel. Denn in jeder Lage des Winkelmaafses ist der Stift in der Spitze J eines Winkels wie $\angle BJK$, so dafs der Brennstrahl BJ immer $= JN = DB' = x + \frac{1}{4}p$ verbleibt.

Orientirboussole ist ein Hülfsinstrument zu Orientirung eines Meßtisches nach dem magnetischen Meridian, welches besonders nothwendig ist, wenn die Meßtischaufnahme mit einer gröfseren Vermessung, bei welcher die Boussole angewendet worden, Zusammenhang hat. Sie besteht in einer etwa 4 bis 5 Zoll langen möglichst empfindlichen Magnetnadel, die mit ihrem Agathütchen auf einer Stahlspitze sich bewegt und arretirt werden kann. Diese befindet sich in einem Kästchen von etwa 6 Zoll Länge, 4 Zoll Breite. Die Richtung, welche die Magnetnadel annehmen soll, ist auf dem Boden des Kastens mit scharfer und deutlicher Linie markirt und mit Nord und Süd bezeichnet und zwar so, dafs sie unmittelbar durch Zeichenpunkte auf die Meßtischplatte übertragen werden kann. Man setzt nun das Kästchen auf den Meßtisch und dreht es so lange bis die Magnetnadel über diese Linie einspielt und darin verbleibt, wo dann die unmittelbare Verzeichnung auf der Meßtischplatte geschieht.

Orientirung eines grofsen Dreiecksnetzes. Hierunter versteht man die Auftragung auf dem Papier einer sehr genau gefertigten gröfseren Vermessung von einander anschliefsenden grofsen Dreiecken mit Hülfe nur einer oder zweier direct vermessenen Standlinien und möglichst genauer und einander berichtigender Winkelaufnahmen. Es wird also vorausgesetzt, dafs die grofsen Seiten der Dreiecke und zur gegenseitigen Berichtigung deren Diagonalen sowie Verbindungslinien mit anderen Dreiecken trigonometrisch berechnet und kleinere sich erwiesene Differenzen ausgeglichen worden.

Wollte man nun diese berechneten Dreiecke, so wie sie aneinander liegen, successive auch auf der Zeichnung aneinander reihen, so würde jeder einzelne aus der Stärke der Punkte und der Breite der Bleistiftlinien von einer Dreiecklinie auf die andere sich übertragen und man läuft Gefahr, ein nicht ganz richtiges, oder wie man auch sagt, ein verschobenes Netz auf dem Papier zu erhalten.

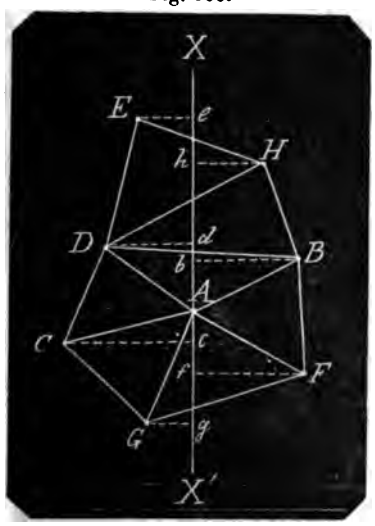
Man vermeidet diesen Uebelstand, wenn man jeden einzelnen Punkt unabhängig von jedem anderen auftragen kann und erreicht dies durch Abscissen und Ordinaten, wenn man zu der ersten eine Linie wählt, welche zwei Hauptdreieckspunkte des Netzes mit einander verbindet, oder dafs man schon Anfangs die Basis in ihrer Lage zu einer Abscisse geeignet nimmt, die dann auf dem Papier nach beiden Seiten hin verlängert wird. Ordinaten darauf sind dann die von den

trigonometrisch festgestellten Dreieckspunkten auf die Abscisse gefällten Lothe.

Jedenfalls kann man die Abscissenlinie durch einen der festgestellten Dreieckspunkte legen. Wenn die Vermessung eine Gradvermessung ist (s. d), so mufs die Abscisse der Arbeitsersparung und der Sicherheit wegen eine Mittagslinie sein und man wählt den einen der Anfangspunkte der Vermessung so, dafs durch diesen die Mittagslinie genommen werden kann.

Es sind also sämmtliche hier verzeichnete Dreiecksseiten in ihren Längen bekannt. Nun sei XX' die durch einen Dreieckspunkt A gedachte Abscisse, so wird diese möglichst lang auf dem Felde abgesteckt, in möglichst weiter Ferne mit einem Signal bezeichnet und der $\angle BAX$, womöglich noch ein zweiter Winkel, z. B. FAX' oder GAX' vermessen.

Fig. 866.



Mit Hülfe von AB erhält man die Abstände Ab und Bb.

Aus AB, AF, BF ist schon berechnet der $\angle BAF$, dieser $+ \angle BAX$ ist $\angle FAX$ und $\angle FAX' = 180° - \angle FAX$, woraus mit Hülfe von AF gefunden werden die Abstände Af und Ff.

Aus AF, AG, GF hat man berechnet $\angle FAG$; hiervon $\angle FAX'$ gibt $\angle GAX'$ und man erhält mit Hülfe von AG die Abstände Ag und Gg. Man sieht hieraus, dafs die Berechnung der Abscissen und der Ordinaten aller einzelnen Punkte nur mit Hülfe rechtwinkliger Dreiecke geschehen und es ist gewonnen, dafs jeder einzelne Dreieckspunkt unabhängig von jedem anderen aufs Papier gebracht wird.

Ort, absoluter, ist ein Ort ohne Beziehung auf einen anderen. Euler versteht darunter den Ort, welchen ein Körper in dem unendlichen Weltraum einnimmt, und wenn er denselben verläfst, so ist er in absoluter Bewegung. Hutton sagt: die absolute Bewegung besteht in der Veränderung des einen Orts und dem Uebergang in einen anderen, wenn man sowohl diesen als jenen absolut und ohne ihr Verhältnifs (Relation) zu einem dritten Ort betrachtet.

Ort, astronomischer, s. den Art. „Astronomischer Ort“ pag. 155.

Ort, geocentrischer, ist ein Ort, ein Punkt am Himmel, wo er aus dem Mittelpunkt der Erde betrachtet dem Auge erscheinen würde, im Gegensatz von heliocentrischen Ort, wo er dem im Mittelpunkt der Sonne befindlichen Beobachter erscheinen würde (s. den Art. „Geocentrisch“ mit Fig. 656, Bd. III, pag. 143). Bei Fixsternen fällt wegen deren unmefsbaren Entfernung von unsrem Sonnensystem der geocentrische Ort mit dem heliocentrischen zusammen; bei Planeten ist der Unterschied sehr bemerkbar. Der auf der Erdoberfläche beobachtete Ort ist auch noch nicht der richtige, er mufs noch mit Hülfe der Parallaxe corrigirt werden, wie dies in dem Art. „Höhenparallaxe“, pag. 251 mit Fig. 709 erklärt ist.

Ort, geometrischer, ist in Art „Geometrischer Ort“ mit Beispielen erklärt. Es soll noch hinzugefügt werden, dafs die Aufgabe: den geometrischen Ort für Dreiecke von einerlei Grundlinie und gleichen Winkeln an der Spitze, welcher eine Kreislinie ist auf folgende Art ausdrückt: Es sind zwei Punkte gegeben, von welchen aus zwei unter einem bestimmten Winkel sich schneidende gerade Linien gezogen werden sollen. Der geometrische Ort ist eine Kreislinie oder vielmehr eine Kugeloberfläche. Um deren Mittelpunkt zu finden verbindet man beide Punkte durch eine gerade Linie, halbirt diese, errichtet in dem Halbirungspunkt auf derselben ein Loth, trägt an einem beliebigen Punkt des Loths an dieses den gegebenen Winkel und zieht mit dem zweiten Schenkel durch den dahin gerichteten der gegebenen Punkte eine Parallele, so ist deren Durchschnittspunkt der Mittelpunkt. Denn es ist der Peri-

pheriewinkel als halber Centriwinkel abgetragen.

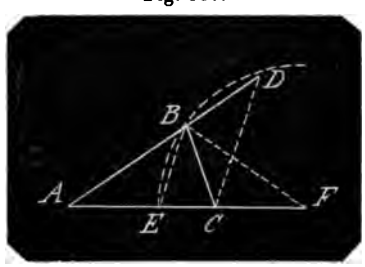
Es gibt sehr viele Aufgaben über den geometrischen Ort und solche, die nur algebraisch zu lösen sind. Man hat hierbei immer weniger Gleichungen als Bestimmungsstücke und somit die Auflösung von diophantischen Aufgaben, in deren Resultat noch Unbekannte sind, aus deren Zusammenhang mit den Bekannten dann die Construction des geometrischen Orts ermittelt wird.

Es erfolgt hier noch eine interessante und nicht schwierig zu lösende Aufgabe nebst dem Beweise für die Richtigkeit.

Den geometrischen Ort für Dreiecke zu finden, die eine gemeinschaftliche Grundlinie haben und deren beide andere Seiten in einem gegebenen Verhältnifs stehen.

Es sei ABC das Dreieck, AC die constante Grundlinie. Man findet den geometrischen Ort in einem Kreise, wenn man nämlich AB bis D verlängert, so dafs $BD = BC$, man zieht DC und aus B die Parallele BE mit DC, so liegt der Mittelpunkt des Kreises in der verlängerten AC und B, E sind Punkte dessen Kreisumfangs.

Fig. 867.



Denn ist F dieser Mittelpunkt und sind FB, FC Radien des Kreises, so ist, weil $CD \fallingdotseq BE$

$$\angle BCD = \angle ABE$$

aber $\angle BEF = \angle BAF + \angle ABE$

und $\angle BEF = \angle EBF$

folglich $\angle EBF = \angle BAC + \angle BCD$
$= \angle BAF + \angle CBE$

Also $\angle CBE + \angle CBF = \angle BAF + \angle CBE$

oder $\angle CBF = \angle BAF$

Hieraus ist $\triangle CBF \sim \triangle BAF$

folglich $AB : AF = BC : BF$

oder $AB : BC = AF : EF$

Die beiden Linien AF, EF haben also das Verhältnifs $AB : BC$, d. h. das Verhältnifs zweier von den festen Punkten A und C nach dem Kreisumfang gezogenen Linien. Da nun die Linien AF, EF constant sind, so ist auch das Verhältnifs aller von A und C nach dem Kreisumfang gezogenen Linienpaare dasselbe constante Verhältnifs.

Ort, heliocentrischer, ist der Ort am Himmel wo ein Planet, von dem Mittelpunkt der Sonne aus betrachtet, dem Auge zu sein erscheinen würde (vergl. „Ort, geocentrischer").

Ort, optischer, ist der Ort einer Fläche, auf den das Auge einen vor derselben befindlichen Gegenstand projicirt.

Ort, scheinbarer, ist der Ort, in den das Auge einen gesehenen Gegenstand dem Urtheil nach versetzt.

Ort eines Planeten. Dieser ist geocentrisch oder heliocentrisch. Der erstere ist scheinbarer Ort, wie er von dem scheinbaren Horizont aus, wahrer Ort, wenn er von dem wahren Horizont aus beobachtet gedacht; mittler Ort eines Planeten, s. den Art. „Ein reducirter Ort" ist der auf die Ekliptik projicirte wahre Ort des Gestirns.

Man denke sich einen Planeten P in einer concentrischen Bahn um die Sonne S mit der Erde E in gleicher Umlaufrichtung sich bewegen, dessen Bahn aber gegen die Ekliptik geneigt ist, und man verbinde die 3 Weltkörper durch gerade Linien zu einem Dreieck, so zeigt die

Fig. 868.

gerade Gesichtslinie SP von der Sonne zu dem Planeten an der scheinbaren hohlen Himmelskugel den heliocentrischen Ort P, und die Gesichtslinie EP von der Erde zu demselben an der scheinbaren hohlen Himmelskugel den geocen-

:hen Ort P_2 des Planeten, und $\angle EPS$ ist der Unterschied zwischen n Orten an der hohlen Himmels-l.

r Artikel „Anomalie“ zeigt, wie den heliocentrischen Ort eines in r Bahn bekannten Planeten für je-Augenblick seines Laufs finden kann. kennt nämlich die Zeit, in welcher on seinem Perihel, oder auch von Knoten K mit unserer Ekliptik ab u einem bestimmten Zeitpunkt zu-cht hat; beträgt diese Zeit m Tage ist seine siderische Umlaufszeit n , so ist seine mittlere Anomalie =

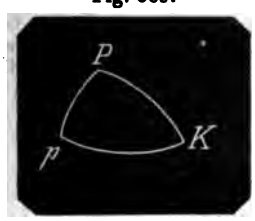
nal seiner Umlaufsbahn. Nun lehrt

Art. „Anomalie“ die wahre Ano-oder den wirklichen heliocentrischen les Planeten aus der mittleren Ano-ableiten und hiernach den Radius-r SP in seiner Länge bestimmen.

r auf der Erde befindliche Beobach-will aber wissen, wo er in diesem Blick den Planet P von der Erde findet, er will den geocentri-n Ort P_2 desselben kennen lernen. Dies mit Hülfe des heliocentrischen P_2 zu erreichen, reducirt er den Pla-P auf die Ekliptik in p, um diesen t in Länge und Breite angeben zu n. Demnach fällt er aus P einen schten Bogen Pp auf die Ekliptik schält in dem Fußpunkt p desselben reducirten Ort p.

Nun PK der Bogen der Planeten-vom Planeten P bis zum Knoten rselben mit der Ekliptik pK, Pp das

Fig. 869.



lte Loth, also der Breitenkreisbogen P, so ist der Neigungswinkel PKp r Bahnen jederzeit gegeben, desglei-der Ort des Knotens K und man t in dem bei p rechtwinkligen sphä-en $\triangle PKp$:

$$tg\, Kp = tg\, KP \sin K$$

ist mithin der Knotenabstand Kp reducirten Orts durch den Knoten-nd KP des Planeten und den Neigungswinkel K der Planetenbahn mit der Ekliptik bestimmt.

Ferner hat man in demselben Dreieck

$$\sin Pp = \sin KP \cdot \sin K$$

womit der Breitenbogen Pp bestimmt ist, und mit beiden Bestimmungen der reducirte Ort p des Planeten. Durch die bekannten Längen PS, Pp und den rechten $\angle PpS$ hat man auch den reducirten Radiusvector pS. Nun ist $\angle pSE$ = dem Unterschied der heliocentrischen Länge von p und E, folglich aus 2 Seiten pS, ES und dem eingeschlossenen $\angle pSE$ die Elongation $\angle SEp$ bekannt, womit der reducirte geocentrische Ort p und durch pP auch der wirkliche geocentrische Ort des Planeten P gefunden ist.

Orthobasisch (Kryst.) ist die rechtwinklige Lage der Basis gegen die Axe des Krystalls.

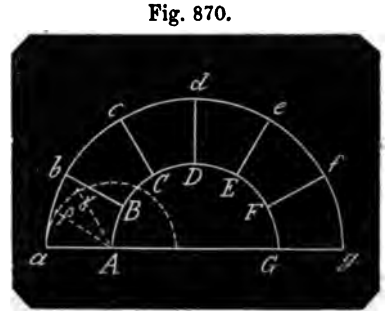
Orthogon, s. v. w. „rechtwinklig“.

Orthographische Projectionen sind rechtwinklige P.

Ortsänderung ist Bewegung (s. d.). Jede Ortsänderung ist entweder wirklich oder scheinbar. Ohne eine wirkliche O. findet keine scheinbare statt. Die scheinbare O. beruht auf Augentäuschung, indem entweder das Object ruht und das Auge sich bewegt, oder indem beide in verschiedenen Richtungen sich bewegen. Bewegen sich Auge und Object parallel gleichgerichtet und mit gleicher Geschwindigkeit, so ist das Object in scheinbarer Ruhe. Reiter und Pferd, Schiff und Schiffer sind in relativer Ruhe, obgleich sie gemeinschaftlich in Bewegung sind. Fixsterne sind in relativer Ruhe aber gemeinschaftlich in einerlei scheinbaren Bewegung.

Bewegt sich ein Körper durch die Punkte a, b, c, d, e, f, g, das Auge zugleich durch die Punkte A, B, C, D, E, F, G, so erhält es den Ort des Körpers für seinen

Fig. 870.



Ort *B* durch die mit *Bb* aus *A* parallel und gleich lang gezogene Linie *Aβ* in *β*; den Ort des Körpers für seinen Ort *C* in *γ* wenn *Aγ* = und ∓ *Cc* gezogen wird. Die ganze scheinbare Bewegung des Körpers wird durch den punktirten Kreis angegeben.

Ortsbestimmung ist die Bestimmung der Lage von Hauptörtern gröfserer Landflächen und des ganzen Landes, wenn eine Vermessung darüber sich erstrecken soll. Sie ist das erste Unternehmen bei beabsichtigter Landesvermessung und wird die geographische Ortsbestimmung genannt. Sie besteht in der Ermittelung der Länge und Breite jeder einzelnen Stadt in Beziehung auf einen ausgezeichneten weit bemerkbaren Punkt derselben, welches nur auf astronomischem Wege geschehen kann. Astronomisch-geographische Ortsbestimmung hierauf in der den Vermessungsresultaten gemäfsen Verbindung dieser Hauptorte unter einander und mit den nächsten der angrenzenden Länder. An diese Hauptorte werden dann die zwischen liegenden Städte und Dörfer durch Messung einiger Basen und Triangulirung der Winkel in grofsen Dreiecken angeschlossen. Ueber die Vermessung dieser Dreiecke, dem Auftragen derselben s. die Art. „Orientirung eines grofsen Dreiecksnetzes, Gradmessungen, Mefstisch".

Orthotypes System (Kryst.), s. v. w. „Ein und einaxiges System, das vierte Krystallisations-System".

Oscillation, s. v. w. „Schwingung". Oscillationsaxe, s. v. w. „Schwingungsaxe". Oscilliren, s. v. w. „schwingen", in einer oscillirenden Bewegung sich befinden.

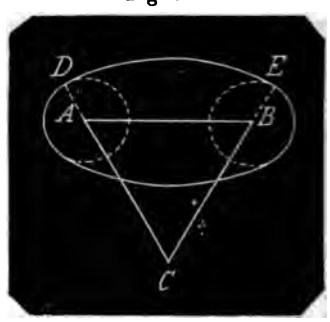
Osten einer der Cardinalpunkte des Horizonts eines Orts, der Morgen, die Morgengegend. Ostpunkt, s. v. w. „Morgenpunkt".

Ostwestlinie die gerade Linie zwischen dem Ostpunkt und dem Westpunkt des Horizonts eines Orts, s. „Cardinalpunkte".

Ovale ist eine aus Kreisbogen verzeichnete in sich geschlossene symmetrische Figur mit zwei ungleichen Hauptaxen; in der Geometrie wird sie nicht betrachtet. Dagegen ist sie als Einfassung deshalb geeigneter als eine Ellipse, weil man ihre Form nach Belieben abändern kann und weil sie leicht zu construiren ist.

Man zeichnet ein gleichschenkliges Dreieck *ABC*, aus *A* und *B* zwei gleiche beliebige Kreise, verlängert die Seiten *CA*, *CB* bis zu den Kreisumfängen und verbindet diese Punkte *D* und *E* durch einen aus *c* beschriebenen Bogen. Die andere Hälfte wird aus dem *C* gegenüberliegenden Punkt geschlossen.

Fig. 871.



Descartes hat Ovalen construirt zu dem Zweck, dafs die von einem leuchtenden Punkt auf die convexe Seite der Curve fallenden Strahlen durch das Glas alle nach einem innerhalb der Ovale liegenden Punkt gebrochen werden; die Optik kann aber keinen Gebrauch davon machen.

P.

π, die Verhältnifszahl des Kreisumfangs am Durchmesser. In dem Art. „Arcus“, No. 2, pag. 108 ist angegeben, wie diese Zahl auf dem Wege der geometrischen Construction nach und nach immer annähernder gefunden werden kann, wenn man regelmäfsige Vielecke von gleich vielen Seiten in und um die Kreislinie beschreibt, deren Seitenzahl wiederholentlich verdoppelt, aus den Umfängen der jedesmaligen Necke die der 2 Necke berechnet und somit immer zwei nähere die Länge des Umfangs einschliefsende Grenzen erhält.

In demselben Art. No. 17 und 18, pag. 114 und 115 sind aus den als allgemein gültig erwiesenen Reihen für $arc \cdot sin\, x$ und $arc \cdot tg\, x$ zwei ziemlich convergirende Reihen für π entwickelt.

Eine Zusammenstellung der numerischen Werthe für π, für Brüche und Wurzeln von π und deren Logarithmen befindet sich in dem Art. „Kreis“, No. 11, pag. 95.

Paar. Ein Paar ist eine Anzahl von zweien gleichartigen Gröfsen.

Pallas (♁). Einer der kleinen Planeten zwischen den Bahnen des Mars und des Jupiter, der sechste der oberen Planeten. Seine gröfste Entfernung von der Sonne ist 71, seine kleinste 43, seine mittlere 57 Millionen Meilen. Seine gröfste Entfernung von der Erde 91, seine kleinste 14 Millionen Meilen. Die Neigung seiner Bahn gegen die Ekliptik $34^{\circ}\ 35'\ 49{,}1''$; die gröfste unter allen Planeten; die Excentricität = 0,24199 der halben grofsen Axe = 2,77263 halbe Erdbahnaxen. Sein siderisches Jahr, (Umlaufszeit) = 1686 Tage 3 Stunden; seine mittlere tägliche siderische Bewegung = 768,55421 Secunden, Länge des Perihels $121^{\circ}\ 5'\ 0{,}5''$; Länge des aufsteigenden Knotens $172^{\circ}\ 38'\ 29{,}8''$. Die Pallas erleidet vom Jupiter nicht unbedeutende Störungen, weshalb die Orte der Pallas aus den Elementen nicht zuverlässig anzugeben sind. Der Durchmesser der Pallas hat 440 bis 460 Meilen.

Pantograph, der bekannte sogenannte Storchschnabel, ein Instrument, mit welchem man Figuren in demselben oder auch in einem beliebig verjüngten Maafsstabe abzeichnet, blofs dadurch, dafs man die abzuzeichnenden Linien mit einem Stift überfährt. Es wird nämlich ein System von gelenkigen Stäben um einen festen Dorn drehbar befestigt; auf der einen Seite des Dorns ist ein Weiserstift, auf der anderen Seite ein Zeichnenstift in einen der Stäbe eingesteckt und das Ganze so zusammengesetzt, dafs beide Stifte in einem zu wählenden Verhältnifs der Abstände vom Dorn mit diesem immer in einer geraden Linie verbleiben, so dafs in diesem Längenverhältnifs die Figur auch abgezeichnet wird.

Parabel (vergleiche die Art. „Ellipse und Hyperbel“) ist eine Linie der zweiten Ordnung oder eine Curve der ersten Klasse, indem sie einer Gleichung vom zweiten Grade zugehört; ferner ist sie eine Kegelschnittslinie. Aus beiden Gesichtspunkten, dem analytischen und dem synthetischen oder dem arithmetischen und dem geometrischen ist sie bereits in diesem Wörterbuch behandelt.

In dem Art. „Curven“, III. Abtheilung, pag. 172 ist die der ganzen Klasse von Curven zu Grunde liegende allgemeine Gleichung (1) aufgestellt:

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0 \quad (1)$$

Nachdem zuerst die Bedeutung und der Einfluſs der einzelnen Coefficienten gezeigt worden, ist unter der Bedingung

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2a}\left[-\left(b+\frac{d}{x}\right) \pm \sqrt{(b^2-4ac)+\frac{2(bd-2ae)}{x}+\frac{d^2-4af}{x^2}}\right] \quad (2)$$

und die beliebige Gröſse der Abscisse x bis zur Unendlichkeit ausgedehnt, wo dann die Glieder, welche x im Nenner haben, als Null fortfallen und die Gleichung die allgemeine Form annimmt (Gl. 10)

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2-4ac}\right) \quad (3)$$

Hierauf sind für sämmtliche Curven derselben Klasse drei mögliche Fälle gezeigt:

1. $b^2 > 4ac$
   $b^2 < 4ac$
   $b^2 = 4ac$

woraus nun drei mögliche Formen von Curven nachgewiesen worden, welche durch folgende drei Gleichungen (19, 20, 21, pag. 175) ausgesprochen werden.

1. $y^2 = Ax + Bx^2$
2. $y^2 = Ax - Bx^2$
3. $y^2 = Ax$

Für die erste und die dritte Gleichung sind bei unendlichen Abscissen auch unendliche Ordinaten vorhanden, für die zweite Gleichung sind für unendliche Abscissen Ordinaten unmöglich. Die erste Gleichung gehört der Hyperbel, die zweite der Ellipse und die dritte der Parabel an.

Die allgemeine Gleichung der Parabel, wenn deren Axe die Abscissenlinie und der Scheitel der Anfangspunkt der Abscissen ist, hat man also

$$y^2 = Ax \quad (4)$$

2. In No. 15, pag. 176 ist, um auf den Character der Kegelschnitte specieller zu kommen, Bezug genommen auf den Art. „Brennpunkte der Kegelschnitte", Bd. I, pag. 420 mit Fig. 257. Hier werden die Constructionen der Kegelschnitte aus dem Kegel bildlich dargestellt und die Hauptformeln für dieselben abgeleitet, wobei die Axen als die Abscissenlinien mit dem Scheitel F als Anfangspunkt gelten. Die Abtheilung A handelt speciell von der Parabel.

Mit Bezug auf die Bezeichnung, Fig. 257 ist die rechtwinklige Coordinatengleichung entwickelt (pag. 421)

$$y^2 = 2k \sin\frac{\alpha}{2} \cdot x \quad (5)$$

Hier ist k der Durchmesser EF des Kegels in dem Scheitel F der Parabel und α der $\angle EAF$ des Axenquerschnitts an der Kegelspitze. Oder $2k \sin\frac{\alpha}{2}$ durch p (Parameter) ausgedrückt.

$$y^2 = px \quad (6)$$

An diese Gleichung knüpft sich der Grund für den Namen Parabel (παρα gleichkommend), weil das Quadrat der Ordinate gleich ist dem Rectangel zwischen dem Parameter (p) und der Abscisse (x).

3. Die Gleichungen 4 bis 6 für die Parabel haben die Beschränkung, daſs die Abscissenlinie die Axe mit dem Scheitel als Anfangspunkt ist und daſs die Ordinaten rechtwinklig sind. Eine allgemeine Gleichung für die Parabel ist aber eine solche, die eine gegen die Axe ganz beliebig liegende Abscissenlinie, einen beliebigen Anfangspunkt hat und deren Ordinaten einen beliebigen Winkel mit der Abscissenlinie bilden. Nur liegt das ganze Coordinatensystem mit der Parabel in einerlei Ebene.

Eben so wie für die Ellipse und Hyperbel (s. „Ellipse", No. 3 und 4, pag. 39 und „Hyperbel", No. 5, pag. 261) und mit denselben in dem erstgenannten Art. angegebenen Hülfsmitteln sollen nun hier die der Parabel angehörenden allgemeinen Gleichungen geordnet und auf Fig. 608, Bd. III, pag. 40 bezogen zusammen gestellt, auch noch einige andere Fälle hinzugefügt werden.

A bedeutet den Parameter der allgemeinen Gleichung (4)

$$y^2 = Ax$$

AC ist die Axe, A der Scheitel, E der Anfangspunkt der Abscissen, $EF = s$ die Abscisse, $FD = z$ die Ordinate. Die allgemeine Gleichung für den Parabelpunkt (Bd. II, pag. 177, Formel 29) ist

$$\text{I. } \sin^2(\beta+\delta)z^2 - 2\sin(\beta+\delta)\sin\beta \cdot zu + \sin^2\beta \cdot u^2 - [2g\sin(\beta+\delta)\sin\beta + A\cos(\beta+\delta)]z + (2g\sin^2\beta + A\cos\beta)u + g^2\sin^2\beta - A(p - g\cos\beta) = 0$$

Dreht man (Fig. 608) die Abscissenlinie CF um C in die Axe AC, so kommt F in F', E in E', der Anfangspunkt E' der Abscissen ist um die Länge $p - g$ vom Scheitel A entfernt. Ist dann $\angle D'F'C = \delta$, $E'F' = u$, $D'F' = z$, so hat man für den Parabelpunkt D' die Gleichung (Bd. II, Formel 33, pag. 177).

II. $\sin^2\delta \cdot z^2 - A\cos\delta \cdot z + Au - A(p-g) = 0$

Setzt man in diese Gleichung $p - g = 0$; $u = -u$, so erhält man die Gleichung für die in der Axe liegende Abscissenlinie, für den Scheitel A als den Anfangspunkt der Abscissen und den Coordinatenwinkel δ.

III. $\sin^2\delta \cdot z^2 - A\cos\delta \cdot z - Au = 0$.

Nimmt man (Fig. 608) in der beliebigen Entfernung $E'L = h$ eine der Axe parallele GJ, verlängert $D'F'$ bis G, setzt $GD' = z'$, so ist für Gleichung II.

$D'F' = z = z' - F'G = z' - h\,\mathrm{cosec}\,\delta$.

Setzt man daher in Gleichung II. $z - h\,\mathrm{cosec}\,\delta$ für z, so erhält man die Gleichung, wenn die Abscissenlinie in dem Abstand h mit der Axe parallel läuft, der Art, dafs die Axe zwischen Curve und Abscissenlinie liegt. Bezeichnet man die Länge $AE' = p - g$ mit s, zieht von E' eine gerade Linie $E'H$ unter dem Coordinatenwinkel $E'HJ = \delta$, so ist H der Anfangspunkt der Abscissen; für den Parabelpunkt D' ist dann $HG = u$ und die Gleichung ist

IV. $\sin^2\delta \cdot z^2 - (A\cos\delta + 2h\sin\delta)z + Au + h^2 + Ah\cot\delta - As = 0$

Setzt man in diese Gleichung $s = 0$, $u = -u$, so erhält man die Gleichung der Parabel für dieselbe Abscissenlinie GJ, für denselben Coordinatenwinkel δ und mit dem unter dem Scheitelpunkt A belegenen Anfangspunkt M der Abscissen.

V. $\sin^2\delta \cdot z^2 - (A\cos\delta + 2h\sin\delta)z - Au + h^2 + Ah\cot\delta = 0$.

Setzt man in diese Gleichung $h = 0$, so erhält man Gleichung III.

Setzt man in Gleichung IV. für h den Werth $-h$, so erhält man die Gleichung unter denselben Bedingungen mit IV, nur dafs die Abscissenlinie in dem Abstand h von der Axe entgegengesetzt, nämlich nach oben der Curvenhälfte zu liegt.

VI. $\sin^2\delta \cdot z^2 - (A\cos\delta - 2h\sin\delta)z + Au + h^2 - Ah\cot\delta - As = 0$

Setzt man in diese Gleichung $h\sin\delta$ für h, so erhält man die Gleichung Bd. II, pag. 177, Formel 37.

Setzt man in den vorstehenden Gleichungen I. bis VI. den Coordinatenwinkel, in I. $\angle(\beta + \delta) = 90°$, in II. bis VI. $\angle\delta = 90°$, so erhält man Gleichungen unter denselben Voraussetzungen, nur dafs die Ordinaten mit der Axe normal sind.

Aus Gleichung I. entsteht

VII. $z^2 - 2\sin\beta \cdot zu + \sin^2\beta \cdot u^2 - 2g\sin\beta \cdot z + (2g\sin^2\beta + A\cos\beta)u + g^2\sin^2\beta - A(p - g\cos\beta) = 0$

Aus Gleichung II. entsteht

VIII. $z^2 + Au - A(p-g) = 0$.

Aus Gleichung III. entsteht

IX. $z^2 - Au = 0$.

Aus Gleichung IV. entsteht

X. $z^2 - 2hz + Au + h^2 - As = 0$.

Aus Gleichung V. entsteht

XI. $z^2 - 2hz - Au + h^2 = 0$

Aus Gleichung VI. entsteht

XII. $z^2 + 2hz + Au + h^2 - As = 0$

4) Band II, pag. 178, No. 23 von I. bis VI. sind für alle Kegelschnitte die Werthe der in der allgemeinen Gleichung (1) vorkommenden Coefficienten erwiesen und angegeben. Es sollen diese Werthe für die Parabel allein hier zusammengestellt werden und zwar in Beziehung auf Gleichung 1, wenn man darin für Fig. 608 und zur Uebereinstimmung mit den Formeln I. bis XII. den Werth u für x und z für y setzt, Gleichung 1 wird sodann

zu der Gleichung

$$as^2 + bsu + cu^2 + ds + eu + f = 0$$

I. Der Coefficient a ist = 1 wenn (Fig. 608) $\angle DKC = (\delta + \beta)$, d. h. der Winkel, den die Ordinate mit der Axe bildet, ein Rechter ist. Dividirt man daher eine mit as^2 gegebene allgemeine Gleichung für die Parabel mit a, so verwandelt man dieselbe in eine Gleichung, für welche die Ordinaten mit der Parabelaxe normal sind.

Da diese einfache Operation überall auszuführen ist und die übrigen Coefficienten vereinfacht, so sollen die Gleichungen I. bis VI. für die Untersuchung der Coefficienten aufser Betracht bleiben. Die letzten sechs Gleichungen gehören also der allgemeinen Gleichung an

$$s^2 + bsu + cu^2 + ds + eu + f = 0$$

II. Der Coefficient b von su ist = dem doppelten negativen Sinus des Winkels (β) zwischen der Abscissenlinie und der Axe (Gl. VII). Wo die Abscissenlinie in der Axe oder mit derselben ∓ liegt, ist $\beta = 0$ und das Glied mit su fällt fort (Gl. VIII. bis XII.).

III. Der Coefficient c von u^2 ist ebenfalls nur von demselben Winkel β abhängig und = dem Quadrat seines Sinus. Für den Fall, wie ad II. gedacht, für die Gleichungen VIII. bis XII. wird $\beta = 0$, also $\sin^2\beta = 0$ und das Glied mit u^2 fällt aus.

IV. Der Coefficient d von s ist = der doppelten Entfernung des Anfangspunkts der Abscissen von der Axe; negativ, wenn die Axe zwischen der Parabelhälfte und der Abscissenlinie liegt (Gl. VII, X, XI.); positiv, wenn die Abscissenlinie zwischen der Axe und der Parabelhälfte liegt (Gl. XII.). Ist die Axe die Abscissenlinie, so fällt das Glied mit s fort.

V. Der Coefficient e von u hängt von 3 Elementen ab. 1. Von dem Winkel β zwischen der Abscissenlinie und der Axe. 2. Von der Entfernung des Anfangspunkts E der Abscissen von der Axe ($g \cdot \sin\beta$) und von dem Parameter A.

Ist die Abscissenlinie die Axe oder läuft sie mit derselben parallel, so ist $\beta = 0$ und $e = A$ (Gl. VIII, X, XII.); ist hierbei der Scheitel zugleich Anfangspunkt der Abscissen (IX, XI.) so ist $e = -A$.

VI. Der Coefficient f, das bekannte Glied. Liegt die Abscissenlinie in der Axe, der Anfangspunkt der Abscissen in der Entfernung $p - g = s$ vom Scheitel (Gl. VIII.) so ist $f = -As$.

f wird = 0, wenn der Anfangspunkt der Abssissen im Scheitel liegt (Gl. IX.). Siehe den Grund hiervon in dem Art. „Curven", pag. 173, No. 4.

Liegt die Abscissenlinie ∓ der Axe und fällt die Projection des Anfangspunkts auf die Axe in den Scheitel (Gl. XI.) so ist f = dem Quadrat des Abstandes h beider Parallelen; $f = h^2$.

Läuft die Abscissenlinie in der Entfernung h ∓ der Axe und ist die Projection des Anfangspunkts auf die Axe um s von dem Scheitel entfernt (Gl. X, XII.), so ist $f = h^2 - As$.

Setzt man $h^2 - As = 0$, so erhält man dasjenige s, für welches der Anfangspunkt der Abscissen in einem Parabelpunkt liegt. (S. den Grund hiervon in dem Art. „Curven", pag 173, No 4.)

Setzt man in der allgemeinsten Gleichung (VII.) die Entfernung $g \sin\beta$ des Anfangspunkts von der Axe $= h$; die Entfernung $(p - g\cos\beta)$ der Projection des Anfangspunkts vom Scheitel $= s$, so hat man ganz allgemein

$$f = h^2 - As$$

In Band II, pag. 180, No. 25 mit Fig. 534 wird die geometrische Construction des Parameter A bei gegebenem Kegel gezeigt.

5. Um nun fernere speciellere Untersuchungen über die Parabel anzustellen, ist an die No. 1 und 2 aufgestellten 6 Formeln anzuknüpfen und fortzufahren. Zugleich ist auf einige elementare Entwickelungen und geometrische Constructionen in dem Art „Brennpunkt der Parabel" aufmerksam zu machen.

In Fig. 872 sei EDO eine halbe Parabel, E deren Scheitel, EK deren Axe. Für den Parabelpunkt D ist $EG = x$ die Abscisse, $GD = y$ die Ordinate, und nach Formel 5 und 6

$$y^2 = 2k \sin\frac{\alpha}{2} \cdot x = px$$

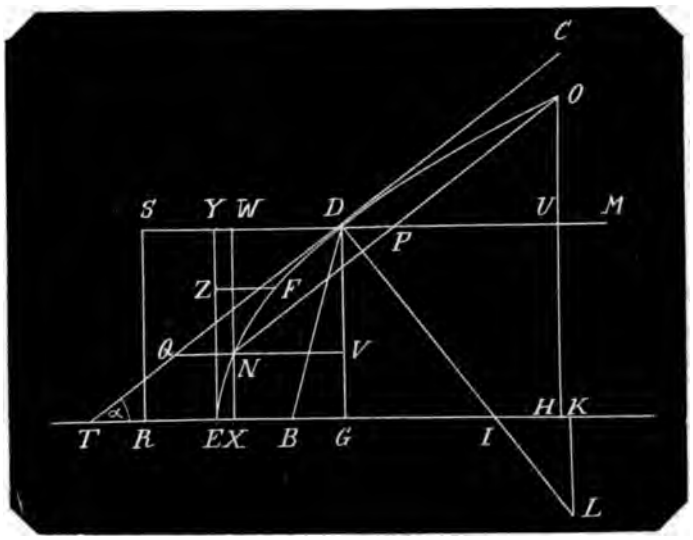
Berührt CT die Parabel in D und ist DL normal auf DT, so ist für den Punkt D: DT die Tangente, DJ die Normale, GT die Subtangente, GJ die Subnormale. Band II, pag. 185 sind die allgemeinen Formeln für diese 4 Linien angegeben.

Nämlich die trigonometrische Tangente des Winkels DTG zwischen der Tangente und der Axe: $tg\,\alpha = f'x = \frac{\partial y}{\partial x}$

die Tangente $DT = \frac{fx}{f'x} \sqrt{1 + (f'x)^2}$

die Normale $DJ = fx \sqrt{1 + (f'x)^2}$

Fig. 872.



die Subtangente $GT = \frac{fx}{f'x} = \frac{y}{\partial y}$

die Subnormale $GJ = fx \cdot f'x$

Nun ist für die Parabel $y^2 = px$

mithin $tg\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{2y} = \frac{y}{2x}$ (7)

Tangente $DT = \sqrt{4x^2 + y^2} = \sqrt{4x^2 + px}$

$= \frac{y}{p}\sqrt{4y^2 + p^2}$ (8)

Normale $DJ = \frac{y}{2x}\sqrt{y^2 + 4x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + 4px}$

$= \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + y^2}$ (9)

Subtangente $GT = 2x = \frac{2y^2}{p}$ (10)

Subnormale $GJ = \frac{1}{2}p$ (11)

Ist DL der Krümmungshalbmesser r für D, so hat man nach Bd. II, pag. 188, Gleichung 9 bis 11.

Abscisse $EK = 3x + \frac{1}{2}p$ (12)

Ordinate $LK = \frac{4x^2}{y} = \frac{4x}{p} = \frac{4y^3}{p^2}$ (13)

Radius $DL = \sqrt{\frac{(4x+p)^3}{4p}}$ (14)

6 In Betracht, dafs die Ellipse und die Hyperbel Durchmesser haben, ist es angemessen zu untersuchen, ob dies nicht auch für die Parabel der Fall sei.

Setzt man in Formel I. das Bekannte $g^2 \sin^2\beta - A(p - g\cos\beta) = 0$, so ist (Fig. 608, pag. 40) der Anfangspunkt E der Abscissen ein Parabelpunkt. Es fragt sich nun, unter welchem Winkel β die verlängerte Linie FC ein Durchmesser wird; d. h. unter welchem Winkel β für ein jedes einzelne u zwei gleiche entgegengesetzte z entstehen.

Die Gleichung I. hat nun die allgemeine Form

$$a^2z^2 - bzu + cu^2 + dz + eu = 0$$

und es ist ein einziges $\pm z$ als Wurzel der Gleichung nur möglich, wenn diejenigen Glieder, welche uz und z zum Factor haben, fortfallen.

Diese beiden Glieder sind nun

$$-2\sin(\beta+\delta)\sin\beta \cdot zu - [2g\sin(\beta+\delta)\sin\beta + A\cos(\beta+\delta)]z$$

Das erste Glied wird $= 0$ für $\beta = 0$ und für $(\beta + \delta) = 0$; für die zweite Annahme wird das zweite Glied $= -Az$, verschwindet also nicht. Es mufs also jedenfalls $\beta = 0$, d. h. die Abscisse, wenn sie Durchmesser werden soll, mit der Axe $\parallel$ laufen. Für diesen Werth erhält man die Gleichung I.

$$\sin^2\delta \cdot z^2 - A\cos\delta \cdot z + Au = 0$$

Die Abscisse ist hier die Axe und die Gleichung spricht aus, dafs sie nur für $\delta = 90°$, so dafs $-A\cos\delta \cdot z = 0$ wird, als Durchmesser existirt, dafs also schief-

winklige Ordinaten durch die Axe nicht halbirt werden.

Um nun zu untersuchen ob für eine mit der Axe parallele Abscisse ein Winkel δ existirt, für welchen die Ordinaten durch dieselbe halbirt werden, hat man auf die Gleichungen überzugehen, welche in Abständen von der Axe und $\mp$ mit derselben die Abscisse annehmen, also auf Gleichung IV. und VI. Mit Hinfortlassung der bekannten Glieder erhält man

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Gl. IV.} & \sin^2\delta \cdot z^2 - (A\cos\delta + 2h\sin\delta)z + Au = 0 \\ \text{Gl. VI.} & \sin^2\delta \cdot z^2 - (A\cos\delta - 2h\sin\delta)z + Au = 0 \end{array}\right\} \quad (15)$$

Man hat also zur Bedingung:

$$A\cos\delta \pm 2h\sin\delta = 0 \quad (16)$$

woraus

$$tg\,\delta = \mp\frac{A}{2h} \quad (17)$$

d. h. befindet sich die Abscisse unterhalb der Axe (Gl. IV.), so ist δ stumpf, und befindet sie sich oberhalb der Axe spits.

Dieser Ausdruck für $tg\,\delta$ gilt für jeden Punkt der Parabel, also auch für den in der Parabellinie liegenden Anfangspunkt der Abscissen. Fällt man von diesem ein Loth auf die Axe, und bezeichnet man den Abstand dessen Fufspunkts vom Scheitel mit x, so ist $h = y$ und $tg\,\delta = \frac{A}{2y} = \frac{p}{2y}$. Mithin ist δ = dem $\angle\alpha$ den die Tangente des Parabelpunkts mit der Axe bildet. Wenn also Fig. 872 $DM \mp EK$, so ist DM unter dem Abstand $UH = h = DG = y$ von der Axe ein Durchmesser der Parabel und die mit der Tangente DT parallelen Ordinaten werden, wie ON in P, von DM halbirt.

7. Bei Bildung der Gleichungen 15 ist zum Anfangspunkt der Abscissen der Parabelpunkt E, Fig. 608, (Bd. III, pag. 40) festgestellt. Für die Bezeichnung, Fig. 872 hat man also den Punkt D für E, die Abscissen x, haben die entgegengesetzte Lage von u, mithin $-x$, für u; y, für z; α für δ und es ist $A = p$.

Man hat nun aus Gl. 15 und 16:

$$A\cos\delta \pm 2h\sin\delta = 0$$

mithin ist auch die Summe der übrigen Glieder

$$\sin^2\delta \cdot z^2 + Au = 0$$

oder

$$\sin^2\alpha \cdot y_1^2 - px_1 = 0$$

hieraus erhält man also, einen Durchmesser zur Abscissenlinie genommen, die schiefwinklige Coordinatengleichung

$$y_1^2 = \frac{p}{\sin^2\alpha} \cdot x_1 \quad (18)$$

oder wenn man die Entfernung GD des Durchmessers von der Axe wieder mit h bezeichnet, da aus Gl. 17 $tg\,\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta}$ gesetzt $\sin^2\alpha = \frac{p^2}{4h^2+p^2}$

$$y_1^2 = \frac{4h^2+p^2}{p} \cdot x_1 \quad (19)$$

8. Nimmt man eine Tangente zur Abscissenlinie, den Berührungspunkt zum Anfangspunkt, die Ordinaten $\mp$ der Axe, so erhält man die Coordinatengleichung

$$z = \frac{p}{4h^2+p^2}u^2$$

Denn ist (Fig. 872) $DQ = u$, $QN = z$, $DG = h$, $\angle DTG = \alpha$, so hat man in Formel 19: z für x_1; u für y_1 gesetzt:

$$u^2 = \frac{4h^2+p^2}{p} \cdot z \quad (20)$$

woraus

$$z = \frac{p}{4h^2+p^2} \cdot u^2 \quad (21)$$

zu gleichen entgegengesetzten Abscissen u gehören also gleiche Ordinaten z.

9. Nimmt man die Ordinate DG als Abscisse (x), D als deren Anfangspunkt und die Ordinaten (y) rechtwinklig, so hat man für einen Punkt N

$$DV = x = u\sin\alpha$$

$$VN = y = u\cos\alpha - z$$

Also nach Gl. 18:

$$y = u\cos\alpha - \frac{\sin^2\alpha}{p}u^2 \quad (22)$$

Aus der ersten Gleichung ist $u = \frac{x}{\sin\alpha}$ und diesen Werth in die zweite Gleichung gesetzt

$$y = x\cot\alpha - \frac{x^2}{p} \quad (23)$$

woraus die Coordinatengleichung

$$x^2 - p\cdot\cot\alpha\cdot x + py = 0 \quad (24)$$

Setzt man aus Gleichung 17: $tg\,\alpha = \frac{p}{2h}$, so hat man

$$x^2 - 2hx + py = 0 \quad (25)$$

Die Auflösung der Gleichung gibt

$$x = +h \pm \sqrt{h^2 - py} \quad (26)$$

für jedes y also liefert die Summe der beiden zugehörigen x den Werth $2DG = 2h$.

Für $\lambda = 0$, wenn also DM in der Axe liegt, erhält man

$$x^2 + py = 0$$

also gleich der ursprünglichen Gleichung $x^2 - px = 0$, wenn man y statt von G nach E hin von E nach G hin rechnet.

10. Nimmt man $EB = \frac{1}{2}p$, so hat der Punkt B die Eigenschaft, daſs eine von ihm nach irgend einem Parabelpunkt D gezogene Linie BD mit der durch D parallel der Axe gezogenen Linie DM einen Winkel BDM bildet, der durch die Normale DJ halbirt wird.

Denn es ist $BD^2 = BG^2 + DG^2 = (x - \frac{1}{2}p)^2 + px = (x + \frac{1}{2}p)^2$

also $BD = x + \frac{1}{2}p$ (27)

und $BJ = EG + GJ - EB = x + \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}p = x + \frac{1}{2}p$

folglich $BD = BJ$ und $\angle BDJ = \angle BJD = \angle JDM$

Ist also der Punkt B ein leuchtender Punkt, so werden alle von ihm nach der Parabel geworfene Strahlen in Linie $\neq$ der Axe reflectirt. Der Punkt B heiſst deshalb der Brennpunkt und die von ihm nach der Parabel gezogenen Linien Brennstrahlen (s. den Art. „Brennpunkt der Parabel“).

11. Rectification der Parabel. Dieselbe ist als Beispiel ausgeführt Bd. II, pag. 191.

Es ist der Bogen $ED =$

$$\lambda = \frac{1}{4p}\left[2y\sqrt{p^2+4y^2} + p^2 ln \frac{2y+\sqrt{p^2+4y^2}}{2}\right] \quad (28)$$

durch p und x ausgedrückt, indem man $y^2 = px$ setzt

$$\lambda = \frac{1}{2}\left[2\sqrt{px+4x^2} + p\, ln \frac{2\sqrt{x}+\sqrt{p+4x}}{\sqrt{p}}\right] \quad (29)$$

durch x und y ausgedrückt

$$\lambda = \frac{1}{4x}\left[2x\sqrt{y^2+4x^2} + y^2 ln \frac{2x+\sqrt{y^2+4x^2}}{y}\right] \quad (30)$$

12. Quadratur der Parabel. Dieselbe ist als Beispiel ausgeführt, Bd. II, pag. 192. Wird der Anfangspunkt im Scheitel E genommen, so ist die Parabelfläche $GDOH$ zwischen den Abscissen $EG = x$ und $EJ = x'$, den dazugehörigen Ordinaten

$$y, y' = F = \frac{2}{3}\sqrt{p}\,[x'\sqrt{x'} - x\sqrt{x}] \quad (31)$$

13. A. Das Parabelstück zwischen dem Scheitel E, der Abscisse x und der Ordinate y

$$F = \frac{2}{3}xy \quad (32)$$

B. Die Fläche EDT zwischen der Parabel und der Tangente ist

$$F = \frac{1}{2}xy \quad (33)$$

Denn das $\triangle DGT$ ist $= \frac{1}{2}TG \times DG = xy$.

C. Die Fläche EDB zwischen der Parabel und dem Brennstrahl ist

$$F = \frac{1}{12}(4x + 3p)\sqrt{px} = \frac{1}{12}\frac{y}{x}(4x^2 + 3y^2) = \frac{1}{12}\cdot\frac{4y^2+3p^2}{p} \quad (34)$$

D. Die Fläche $ODNPO$ eines Abschnitts zwischen einer auf einem Durchmesser DM genommenen schiefwinkligen Ordinate ON und der von ihr abgeschnittenen Parabel ist $=$

$$F = \frac{2}{3}x, y, \sin\alpha$$

Denn nimmt man Bd. II, pag. 192, Fig. 540 die Ordinate EB unter einem $\angle\alpha$, so erhält man das Zuwachsparallelogramm $EFHG = \triangle x\,(y + \triangle y)\sin\alpha$

mithin auch $$F = \sin\alpha \int y\,\partial x = \sin\alpha \int y \frac{\partial x}{\partial y}\cdot\partial y = \sin\alpha \int \frac{2y^2}{p}\,\partial y = \frac{2}{3}xy\sin\alpha$$

Mithin die Ebene $ODNPO$

$$= \frac{2}{3}x, y, \sin\alpha \quad (35)$$

14. Die Calotte aus dem Parabelbogen, wenn derselbe um die Axe sich herumdreht, ist für den Fall, daſs der Bogen zwischen den zu den Abscissen x und x' gehörenden Ordinaten sich befindet in

Bd. II, pag. 194 als Beispiel berechnet

$$F = \tfrac{1}{6}\pi \sqrt{p}\left[(4x+p)^{\frac{3}{2}} - (4x'+p)^{\frac{3}{2}}\right] \quad (36)$$

Ist $x' = 0$, also für die Calotte des Bogens ED um EG

$$F = \tfrac{1}{6}\pi \sqrt{p}\left[(4x+p)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}\right] = \pi \frac{(4px+p^2)^{\frac{3}{2}} - p^3}{6p}$$

$$= \pi y \frac{\sqrt{4x^2+y^2} - y^2}{6x^2} = \pi \frac{(4y^2+p^2)^{\frac{3}{2}} - p^3}{6p} \quad (37)$$

15. Dreht sich der Bogen OD um seinen Durchmesser DM, so hat man in der Quadraturformel Bd. II, pag. 194:

$$F = 2\pi \int y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, \partial x$$

für $DU = x$ den Werth $x' + y' \cos\alpha$ für $OU = y$ den Werth $y' \sin\alpha$ zu setzen. Es ist demnach

$$F = 2\pi \cdot \int y \sin\alpha \sqrt{1 + \left[\frac{\partial y \sin\alpha}{\partial (x + y\cos\alpha)}\right]^2}\, \partial (x + y\cos\alpha)$$

die Wurzelgröfse nebst Differenzial ist umgeändert und reducirt

$$= \sqrt{[\partial (x + y\cos\alpha)]^2 + (\partial y \sin\alpha)^2} = \sqrt{(\partial y)^2 + (\partial x)^2 + 2\,\partial x \cdot \partial y \cdot \cos\alpha}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 1 + 2\frac{\partial y}{\partial x}\cos\alpha}\, \partial x = \sqrt{\frac{p^2}{4y^2} + 1 + 2\frac{p}{2y}\cos\alpha} \cdot \frac{2y}{p}\, \partial y$$

Mithin $F = \frac{2\pi \sin\alpha}{p} \int y \sqrt{4y^2 + 4p\cos\alpha \cdot y + p^2} \cdot \partial y$

Man hat nun das Integral nach Formel 233, pag. 342, wenn man $c = 4$; $b = 4p\cos\alpha$; $a = p^2$ setzt. $(4y^2 + 4p\cos\alpha \cdot y + p^2) = Y$ gesetzt

$$\int y \sqrt{Y} = \tfrac{1}{12} \cdot Y^{\frac{3}{2}} - \frac{p\cos\alpha}{2} \int \sqrt{Y}$$

Aus Formel 232, pag. 342

$$\int \sqrt{Y} = \frac{p\cos\alpha + 2y}{4} \sqrt{Y} + \tfrac{1}{2} p^2 \sin^2\alpha \int \frac{\partial y}{\sqrt{Y}}$$

Endlich aus Formel 229, pag. 342

$$\int \frac{\partial y}{\sqrt{Y}} = \tfrac{1}{2} ln\,(p\cos\alpha + 2y + \sqrt{Y})$$

Mithin

$$F = \frac{2\pi \sin\alpha}{p}\left[\tfrac{1}{12} Y \sqrt{Y} - \frac{p\cos\alpha}{2} \cdot \left[\frac{p\cos\alpha + 2y}{4}\sqrt{Y} + \tfrac{1}{2} p^2 \sin^2\alpha \cdot \tfrac{1}{2} ln\,(p\cos\alpha + 2y + \sqrt{Y})\right]\right]$$

$$= \frac{2\pi \sin\alpha}{p}\left[\left[\frac{y^2}{3} + \frac{p\cos\alpha}{12} y + \frac{p^2}{24}(2 - 3\cos^2\alpha)\right]\sqrt{Y} - \tfrac{1}{8} p^3 \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha\, ln\,(p\cos\alpha + 2y + \sqrt{Y})\right].$$

Für $y = 0$ wird $F = 0$. Es wird dann $\sqrt{Y} = p$ und man hat für die Constante

$$0 = \frac{2\pi \sin\alpha}{p}\left[\frac{p^2}{24}(2 - 3\cos^2\alpha) - \tfrac{1}{8} p^3 \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha\, ln\,(p\cos\alpha + p)\right] + C$$

den negativen Werth als den der Constante in die Formel für F gesetzt gibt reducirt vollständig die Umdrehungsfläche

durch den Bogen OD um den Durchmesser DM:

$$F = \frac{2\pi \sin\alpha}{p}\left[\left[\frac{y^2}{3} + \frac{p\cos\alpha}{12} y + \frac{p^2}{24}(2 - 3\cos^2\alpha)\right]\sqrt{4y^2 + 4p\cos\alpha \cdot y + p^2}\right.$$

$$\left. - \frac{p^3}{24}(2 - 3\cos^2\alpha) - \tfrac{1}{8} p^3 \sin^2\alpha \cos\alpha\, ln \frac{p\cos\alpha + 2y + \sqrt{4y^2 + 4p\cos\alpha\, y + p^2}}{p\,(1 + \cos\alpha)}\right] \quad (38)$$

Setzt man $\alpha = 90°$, so sind die Ordinaten rechtwinklig, die Abscissenlinie ist die Parabelaxe und man hat:

$$F = \frac{2\pi}{p}\left[\left(\frac{y^2}{3} + \frac{p^2}{12}\right)\sqrt{4y^2 + p^2} - \frac{p^3}{12}\right] = \tfrac{1}{6}\frac{\pi}{p}\left[(4y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}} - p^3\right] \quad (39)$$

16. Dreht sich der Bogen ND um den Durchmesser DM, so hat man die Abscisse $PW = y' \cos\alpha - x'$ die Ordinate $NW = y' \sin\alpha$

also $F = 2\pi \int y \sin\alpha \sqrt{[\delta(y\cos\alpha - x)]^2 + (\delta y \sin\alpha)^2}$

folglich ist hier die Wurzelgröfse

$$\sqrt{(\delta y)^2 + (\delta x)^2 - 2\delta x \cdot \delta y \cdot \cos\alpha} = \sqrt{\frac{p^2}{4y^2} + 1 - 2\frac{p}{2y}\cos\alpha}\,\frac{2y}{p}\cdot\delta y$$

und $$F = \frac{2\pi\sin\alpha}{p}\int y\sqrt{4y^2 - 4p\cos\alpha\cdot y + p^2}\cdot\delta y.$$

Nach den in No. 15 citirten Integralformeln hat man nun, wenn man in diesen Formeln $a = p^2$; $b = -4p\cos\alpha$; $c = 4$, und $4y^2 - 4p\cos\alpha\cdot y + p^2 = Y$ setzt: ferner

$$\int y\sqrt{Y} = \tfrac{1}{12} Y\sqrt{Y} + \frac{p\cos\alpha}{2}\int\sqrt{Y}$$

$$\int\sqrt{Y} = -\frac{p\cos\alpha + 2y}{4}\sqrt{Y} + \tfrac{1}{2}p^2\sin^2\alpha\int\frac{\delta y}{\sqrt{Y}}$$

endlich $$\int\frac{\delta y}{\sqrt{Y}} = \tfrac{1}{2}ln(-p\cos\alpha + 2y + \sqrt{Y})$$

Mithin

$$F = \frac{2\pi\sin\alpha}{p}\left[\left(\frac{4y^2 - 4p\cos\alpha\cdot y + p^2}{12} + \frac{p\cos\alpha}{2}\cdot\frac{-p\cos\alpha + 2y}{4}\right)\sqrt{Y} + \frac{p\cos\alpha}{2}\cdot\tfrac{1}{2}p^2\sin^2\alpha\cdot\tfrac{1}{2}ln(-p\cos\alpha + 2y + \sqrt{Y})\right]$$

$$= \frac{2\pi\sin\alpha}{p}\left(\left[\frac{y^2}{3} - \frac{p\cos\alpha}{12}y + \frac{p^2}{24}(2 - 3\cos^2\alpha)\right]\sqrt{4y^2 - 4p\cos\alpha\cdot y + p^2} + \tfrac{1}{8}p^3\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha\, ln\left[-p\cos\alpha + 2y + \sqrt{4y^2 - 4p\cos\alpha\cdot y + p^2}\right]\right)$$

Für $y = 0$ wird auch $F = 0$; es wird dann $\sqrt{y} = p$ und man hat für die Constante

$$0 = \frac{2\pi\sin\alpha}{p}\left[\frac{p^3}{24}(2 - 3\cos^2\alpha) + \tfrac{1}{8}p^3\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha\, ln(-p\cos\alpha + p)\right] + C$$

den negativen Werth dieses Ausdrucks in die Formel für F eingesetzt, reducirt gibt vollständig die Umdrehungsfläche durch den Bogen ND um den Durchmesser DM

$$F = \frac{2\pi\sin\alpha}{p}\left(\left[\frac{y^2}{3} - \frac{p\cos\alpha}{12}y + \frac{p^2}{24}(2 - 3\cos^2\alpha)\right]\sqrt{4y^2 - 4p\cos\alpha\cdot y + p^2} - \frac{p^3}{24}(2 - 3\cos^2\alpha) + \tfrac{1}{8}p^3\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha\cdot ln\frac{-p\cos\alpha + 2y + \sqrt{4y^2 - 4p\cos\alpha\cdot y + p^2}}{-p\cos\alpha + p}\right) \quad (40)$$

Setzt man $\alpha = 90°$, so sind die Ordinaten rechtwinklig, die Abscissenlinie ist die Parabelaxe und man hat:

$$F = \frac{2\pi}{p}\left[\left(\frac{y^2}{3} + \frac{p^2}{12}\right)\sqrt{4y^2 + p^2} - \frac{p^3}{12}\right] \quad (41)$$

17. Der Körper, welcher durch die Umdrehung der Ebene DEG um die Axe entsteht, ist in Bd. II, pag. 195 entwickelt.

$$K = \tfrac{1}{2}\pi xy^2 = \tfrac{1}{2}\pi px^2 \quad (42)$$

Liegt die erzeugende Ebene zwischen den zu den Abscissen x, x' gehörenden Ordinaten y, y' so ist

$$K = \tfrac{1}{2}\pi(xy^2 - x'y'^2) = \tfrac{1}{2}\pi p = (x^2 - x'^2) \quad (43)$$

18. Dreht sich die Fläche ODP um den Durchmesser DM, so würde für rechtwinklige Coordinaten der Körper = sein $K = \pi\int y^2\,\delta x$. Für schiefwinklige bleibt der Halbmesser der sich drehenden Zuwachsfläche dasselbe Loth OU von O auf DM, mithin hat man den Werth des verlangten Körpers

$$K = \pi\int(y_1\sin\alpha)^2\delta x_1 = \pi\sin^2\alpha\int y_1^2\cdot\frac{\delta x_1}{\delta y_1}\delta y_1,$$

Nach Formel 18 ist

$$y_1^2 = \frac{p}{\sin^2\alpha} x_1, \qquad \text{woraus} \quad \frac{\partial x_1}{\partial y_1} = \frac{2y_1 \sin^2\alpha}{p} \tag{44}$$

also $2y_1 \partial y_1 = \frac{p}{\sin^2\alpha} \partial x_1$,

Diesen Werth in das Integral für K gesetzt gibt

$$K = \pi \sin^2\alpha \int y_1^2 \frac{2y_1 \sin^2\alpha}{p} \partial y_1 = 2\frac{\pi}{p} \sin^4\alpha \int y_1^3 \partial y_1$$

mithin $K = \frac{1}{2}\frac{\pi}{p} \sin^4\alpha \cdot y_1^4$ (45)

wo die Constante fortfällt, weil für $y_1 = 0$ auch $K = 0$ wird.

und es dreht sich die Fläche ODU um den Durchmesser, so hat man den Körper

$$K = \pi \int (y, \sin\alpha)^2 \frac{\partial x}{\partial y} \partial y$$

19. Fällt man (Fig. 872) von O eine Ordinate OU auf den Durchmesser DM, wo DU unter x und OU unter y verstanden wird, also

$$\begin{aligned} K &= \pi \int (y, \sin\alpha)^2 \cdot \frac{\partial (x_1 + y_1 \cos\alpha)}{\partial (y_1 \sin\alpha)} \partial (y_1 \sin\alpha) \\ &= \pi \sin^2\alpha \int y_1^2 \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \partial y_1 + \pi \sin^2\alpha \int y_1^2 \partial y_1 \cdot \cos\alpha \\ &= \pi \sin^2\alpha \int y_1^2 \frac{2y_1 \sin^2\alpha}{p} \partial y_1 + \pi \sin^2\alpha \cos\alpha \int y_1^2 \cdot \partial y_1 \\ &= \tfrac{1}{2}\frac{\pi}{p} \sin^4\alpha \cdot y_1^4 + \frac{\pi}{3} \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha \cdot y_1^3 \\ &= \tfrac{1}{6}\pi \frac{y_1^3}{p} \sin^2\alpha (3y_1 \sin^2\alpha + 2p \cos\alpha) \end{aligned} \tag{46}$$

wo wie ad 18 die Constante fortfällt.

20. Der Unterschied der beiden Körper Formel 45 und 46 ist = dem zweiten Gliede in Formel 46

$$= \tfrac{1}{3}\pi \sin^2\alpha \cos\alpha \cdot y^3.$$

Dieser Unterschied ist offenbar der Körper, welcher entsteht, wenn das Dreieck POU um den Durchmesser sich dreht; man findet denselben sofort nach der Guldinschen Regel (pag. 229):

Es ist nämlich der Flächeninhalt von $\triangle OPU = \frac{1}{2} \cdot y_1^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

Die Entfernung seines Schwerpunkts vom Durchmesser $= \frac{1}{3} \cdot y_1 \sin\alpha$.

Die Peripherie vom Halbmesser $1 = 2\pi$.

$$\text{Daher der Körper} = 2\pi \cdot \tfrac{1}{3} y_1 \sin\alpha \cdot \tfrac{1}{2} y_1^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \tfrac{1}{3}\pi \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha \cdot y^3 \tag{47}$$

21. Bezeichnet man die Entfernung HU des Durchmessers von der Axe mit h, so findet man die Formel für den Körper, den die Fläche DOU bei ihrer Drehung um DU beschreibt, wenn man $OU = y_1$, $DU = x_1$ setzt.

Nun hat man für den Parabelpunkt O in Beziehung auf die Axe $EH = x$ und $HO = y$

1. $HO^2 = p \cdot EH$ oder $y^2 = px$.

Ferner ist $EH = EG + GH$

2. oder $x = \frac{h^2}{p} + x_1$,

Ebenso $HO = HU + UO$

3. oder $y = h + y_1$,

folglich ist x und y durch x_1 und y_1 ausgedrückt die obige Coordinatengleichung.

4. $(h + y_1)^2 = p\left(\frac{h^2}{p} + x_1\right) = h^2 + px_1$,

5. und $p = \frac{(h + y_1)^2 - h^2}{x_1} = \frac{y_1}{x_1}(2h + y_1)$

Dieselbe Gleichung (4) differenzirt gibt

$$2(h + y_1)\partial y_1 = p \partial x_1,$$

6. woraus $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{2(h + y_1)}{p}$

Nun hat man den Körper

$$K = \pi \int y_1^2 \partial x = \pi \int y_1^2 \frac{2(h + y_1)}{p} \partial y_1,$$

$$= \frac{2\pi}{p} \left(\int h y_1^2 \partial y_1 + \int y_1^3 \partial y_1\right)$$

$$= \frac{2\pi}{p} \left(\tfrac{1}{3} h y_1^3 + \tfrac{1}{4} y_1^4\right) = \tfrac{1}{6}\frac{\pi}{p} y_1^3 (4h + 3y_1) \tag{48}$$

und wenn man aus (5) p durch h, x, und y, ausdrückt

$$K = \tfrac{1}{8}\pi x_1 y_1^2 \frac{4h + 3y_1}{2h + y_1} \qquad (49)$$

Setzt man h negativ, liegt also D' statt D um die Entfernung $HU' = h$ unterhalb der Axe, so ist $U'O = y$, und der Körper K ist der, welcher durch die Drehung der Ebene $D'EDOU'$ um den Durchmesser $D'U'$ erfolgt

$$K = \tfrac{1}{8}\pi x_1 y_1^2 \frac{3y_1 - 4h}{y - 2h} \qquad (50)$$

für $h = 0$ entsteht der Körper durch die Drehung der $ODEH$ um die Axe EK

$$K = \tfrac{1}{2}\pi x_1 y_1^2$$

22. Der Körper, welcher entsteht, wenn die Ebene ODU um die Ordinate OU sich herumdreht.

Setzt man die Höhe des Parabelpunkts O von der Axe, also $HO = h$, die Endordinate $OU = y$; die Abscisse $DU = x$ so ist

$$UH = DG = h - y \qquad (1)$$

$$EG = EH - GH = \frac{h^2}{p} - x \qquad (2)$$

und es ist

$$(h - y)^2 = p\left(\frac{h^2}{p} - x\right) = h^2 - px \qquad (3)$$

Nun ist für den Fall, dafs die Ebene $UDEH$ um die Ordinate OH sich dreht:

$$K = \pi \int x^2 \frac{\partial (h - y)}{\partial x} \cdot \partial x \qquad (4)$$

Nun ist aus Gleichung 3

$$-\ 2(h - y)(-\partial y) = -p\,\partial x$$

woraus $$\frac{\partial (h - y)}{\partial x} = \frac{p}{2(h - y)}$$

und

$$K = \pi \int x^2 \cdot \frac{p}{2(h - y)} \cdot \partial x = \frac{p\pi}{2} \int \frac{x^2\,\partial x}{\sqrt{h^2 - px}}$$

Setzt man, um das zu integrirende Differenzial rational zu machen

$$h^2 - px = z^2$$

so ist $$x = \frac{h^2 - z^2}{p}$$

$$-p\,\partial x = 2z\,\partial z \text{ und } \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{2z}{p}$$

folglich

$$K = -\frac{\pi p}{2} \int \frac{(h^2 - z^2)^2}{p^2 z} \cdot \frac{2z\,\partial z}{p} = -\frac{\pi}{p^2} \int (h^2 - z^2)^2\,\partial z$$

$$= -\frac{\pi}{p^2} \int (h^4 - 2h^2 z^2 + z^4)\,\partial z$$

$$= -\frac{\pi}{p^2}\left(h^4 z - \tfrac{2}{3}h^2 z^3 + \tfrac{1}{5}z^5\right) + C$$

$$= -\frac{\pi}{15\,p^2}\left(8h^4 + 4h^2 px + 3p^2 x^2\right)\sqrt{h^2 - px} + C.$$

Für $x = 0$ wird $y = 0$ und $K = 0$ mithin ist

$$0 = -\frac{\pi}{15\,p^2} \cdot 8h^4 \cdot h = -\frac{8\pi}{15\,p^2} h^5 + C$$

und es ist vollständig. Der Körper aus der Drehung der Ebene ODU um $OH =$

$$K = \frac{\pi}{15\,p^2}\left[8h^5 - \left(8h^4 + 4h^2 px + 3p^2 x^2\right)\sqrt{h^2 - px}\right] \qquad (51)$$

Für $x = EH = \dfrac{h^2}{p} - x$ wird $\sqrt{h^2 - px} = 0$ und man hat den Körper der durch die Umdrehung der ganzen Ebene $ODEH$ um die Ordinate OH hervorgeht

$$K = \frac{8\pi}{15} \cdot \frac{h^5}{p^2} \qquad (52)$$

23. Den Körper, welchen die Ebene DNW durch ihre Umdrehung um die Linie DW erzeugt.

Setzt man $DG = h$, $GE = \dfrac{h^2}{p}$, $WN = y$, $DW = x$, so ist

$$(WX - WN)^2 = p\,(GE - WD)$$

oder $$(h - y)^2 = p\left(\frac{h^2}{p} - x\right) = h^2 - px$$

hieraus $$2(h - y)(-\partial y) = -p\,\partial x$$

mithin $$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{2(h - y)}{p}$$

Nun ist, wenn man y als den Anfangspunkt der Abscissen annimmt und die Fläche $YWEN$ um YW sich drehend denkt

$$K = \pi \int y^2\,\partial x = \pi \int y^2 \cdot \frac{2(h - y)}{p}\,\partial y = \frac{2\pi}{p} \int (hy^2 - y^3)\,\partial y = \frac{\pi y^3}{6p}(4h - 3y) \qquad (53)$$

wo die Constante fortfällt, weil für $y = 0$ auch $K = 0$ wird, und es ist dieser Werth = dem Inhalt des Umdrehungskörpers wenn die Ebene DNW um DW sich herumdreht.

Setzt man $y = h$, so hat man den Körper, der von der Umdrehung des Bogens DBE um DY erzeugt wird

$$K = \frac{\pi}{6p} \cdot h^4 = \tfrac{1}{6}\pi\, DG^2 \times EG \qquad (54)$$

Die Formel wird sehr weitläufig entwickelt, indem man x statt y einführt. Man erhält sie auch, wenn man aus der obigen Formel $(h - y)^2 = h^2 - px$ $y = h - \sqrt{h^2 - px}$ entwickelt und diesen Werth in Formel 53 einsetzt

$$K = \frac{\pi}{6p}\left[4h^3 - 3hpx - (4h^2 - px)\sqrt{h^2 - px}\right](h + 3\sqrt{h^2 - px})$$
$$= \frac{\pi}{6p}\left[-8h^4 + 12h^2 px - 3p^2x^2 + 8h(h^2 - px)^{\frac{1}{2}}\right]. \qquad (55)$$

24. Dreht sich die Ebene EFZ um die Linie EY, so erhält man den Umdrehungskörper durch folgende Gleichung:

Man setze $EZ = x$, $FZ = y$, so ist

$$K = \pi \int y^2\, \partial x$$

Nun ist $EZ^2 = p \cdot FZ$ oder $x^2 = py$

woraus $y^2 = \frac{x^4}{p^2}$

also

$$K = \frac{\pi}{p^2}\int x^4 \cdot \partial x = \frac{\pi}{5} \cdot \frac{x^5}{p^2} = \tfrac{1}{5}\pi x y^2 \qquad (56)$$

Parabeln höherer Ordnung, auch Paraboloiden genannt (vergl. „Apollonische Parabel") sind Linien von der allgemeinen Gleichung

$$y^{m+n} = a^m x^n.$$

1. Ist $(m + n)$ gerade, n ungerade, so gibt es für jedes positive x zwei gleiche und entgegengesetzte y. Denn man hat

$$y^{2(p+q+1)} = a^{2p+1} \times x^{2q+1}$$

es ist also

$$y = \pm\sqrt{\left(a^{\frac{2p+1}{p+q+1}} \times x^{\frac{2q+1}{p+q+1}}\right)}$$

2. Sind $(m + n)$ und n ungerade, so gibt es nur einen möglichen Werth für y und zwar mit dem Vorzeichen von x. Denn man hat

$$y^{2p+1} = a^{2(p-q)} \times (\mp x)^{2q+1}$$

woraus $y = a^{\frac{2(p-q)}{2p+1}} \times \mp \sqrt[2p+1]{x^{2p+1}}$

die einzig mögliche Wurzel.

3. Sind $(m + n)$ ungerade und n gerade, so existirt nur ein positiver Werth von y, x mag positiv oder negativ sein. Denn haben in der Gleichung

$$y^{m+2p} = a^m \times (\mp x)^{2p}$$

$(m + 2p)$ und $2p$ keinen gemeinschaftlichen Factor, so ist

$$y = a^{\frac{m}{m+2p}} \times \sqrt[m+2p]{+x^{2p}}$$

4. Sind $(m + n)$ und n gerade, so können alle drei vorhin betrachteten Fälle vorkommen. Denn es sei

$$y^{2np} = a^{2n(p-q)} \times (\mp x)^{2nq}$$

so entsteht durch Ausziehung der 2nten Wurzel

$$y^p = a^{(p-q)} \times (\mp x)^q$$

Haben nun p und q keinen gemeinschaftlichen Factor, so kann sein:

Entweder p gerade und q ungrade (erster Fall); oder p und q ungerade (zweiter Fall) oder p ungerade und q gerade (dritter Fall).

Die Parabeln von der Form $y^m = a^{m-1}x$ heifsen eine quadratische, wenn $m = 2$ ist; eine cubische, wenn $m = 3$ ist, eine biquadratische oder sursolide, wenn $m = 4$ ist.

5. Die höhere Parabel $x^3 = py^2$ hat die merkwürdige Eigenschaft, dafs sie der Parabel Evolute ist. In dem Art. „Evolute", pag. 62 ist die Formel II. die Länge deren Abscisse a, die Formel III. die der Ordinate b beide rechtwinklig und entsprechen der Abscisse x und der Ordinate y der Parabel, den Scheitel als Anfangspunkt und die Axe als Abscissenlinie genommen.

Nun ist $y^2 = px$

also $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{2y}$

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 1 + \frac{p^2}{4y^2} = \frac{p^2 + 4y^2}{4y^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{p\partial y}{2y^2}$$

Diese Werthe in den Ausdruck für a gesetzt, gibt

$$a = x - \frac{p^2 + 4y^2}{4y^2} \cdot \left(-\frac{2y^2}{p\partial y}\right) \cdot \frac{p}{2y} = x + \frac{p^2 + 4y^2}{4y\,\partial y} = x + \frac{p^2 + 4y^2}{2p} = \tfrac{1}{2}p + \frac{3y^2}{p}$$

Dieselben Werthe in den Ausdruck für b gesetzt gibt

$$b = y + \frac{p^2 + 4y^2}{4y^2} \cdot \left(- \frac{2y^2}{p \partial y} \right) = y - \frac{p^2 + 4y^2}{2p\,\partial y} = y - \frac{p^2 + 4y^2}{p^2} \cdot y = - 4 \frac{y^3}{p^2}$$

Um nun die obere allgemeine Form der Gleichung zwischen a und b (als x und y) nachzuweisen hat man

aus $\quad a = \frac{1}{2} p + \frac{3y^2}{p}$

$$(a - \tfrac{1}{2} p)^3 = \frac{27 y^6}{p^3}$$

und $\quad b^2 = 16 \frac{y^6}{p^4}$

Hieraus ist

$$(a - \tfrac{1}{2} p)^3 = \left(\frac{27}{16} p \right) b^3$$

Parabolisch ist was in Beziehung zur Parabel steht.

Parabolische Asymptote ist an einer krummen Linie höherer Ordnung eine Asymptote in der Form einer Parabel.

Parabolische Curve ist eine Curve, welche der Gleichung angehört

$$y = a + bx + cx^2 + \ldots . mx^m$$

von einer unbestimmten Anzahl Gliedern, wogegen eine Curve von der Gleichung

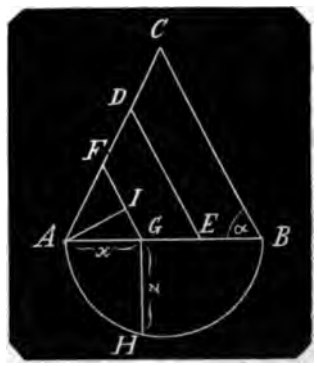
$$y = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2} + \frac{e}{x^3} + \ldots .$$

eine hyperbolische Curve heifst.

Parabolischer Hufabschnitt ist der durch eine Parabelebene vom Kegel abgeschnittene Huf.

Es sei CAB der Axendurchschnitt eines geraden Kegels, C dessen Spitze, AB die Grundlinie. Ist $DE \fallingdotseq BC$, so gibt der Schnitt durch DE eine Parabel, und es soll der von dieser Parabelebene DE, der Kegelfläche DA und der Grundfläche AE eingeschlossene hufförmige Körper ermittelt werden.

Fig. 873.



Bezeichnet man BC mit b AB mit $2r$, legt zwischen A und DE eine zweite Fläche durch die mit DE parallele FG, fällt das Loth AJ, so hat man

$$FG = \frac{b}{2r} x$$

$$AJ = x \sin \alpha$$

Beschreibt man über AB den Halbkreis, so ist diese die halbe Grundfläche des Kegels, und errichtet man die Ordinate GH, bezeichnet diese mit z, so ist

$$z^2 = AG \times BG = x(2r - x)$$

die durch FG gelegte Parabelfläche ist

$$F = \tfrac{2}{3} FG \times 2z = \tfrac{4}{3} z \cdot \frac{b}{2r} x = \tfrac{2}{3} \frac{b}{r} x \sqrt{2rx - x^2}$$

Bezeichnet man den Abschnitt des Hufs von A bis FG mit Z, so ist $\partial Z =$ der Parabelebene F mal dem Differenzial der Höhe $AJ = \partial x \cdot \sin \alpha$

mithin $\partial Z = \frac{2}{3} \cdot \frac{b}{r} x \sqrt{2rx - x^2} \cdot \sin \alpha \cdot \partial x$

und $Z = \frac{2b}{3r} \cdot \sin \alpha \int x \sqrt{2rx - x^2}\, \partial x$

Nun ist $\int x \sqrt{2rx - x^2}\, \partial x = - \frac{1}{3} (2rx - x^2)^{\frac{3}{2}} + r \int \sqrt{2rx - x^2}\, \partial x$

$$\int \sqrt{2rx - x^2}\, \partial x = - \tfrac{1}{2} (r - x) \sqrt{2rx - x^2} + \tfrac{1}{2} r^2 \, Arc \cdot cos \frac{r - x}{r}$$

Mithin

$$Z = \frac{2b}{3r} \sin \alpha \left[- \tfrac{1}{3} (2rx - x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{r(r - x)}{2} \sqrt{2rx - x^2} + \tfrac{1}{2} r^2 \, Arc \cos \frac{r - x}{r} \right]$$

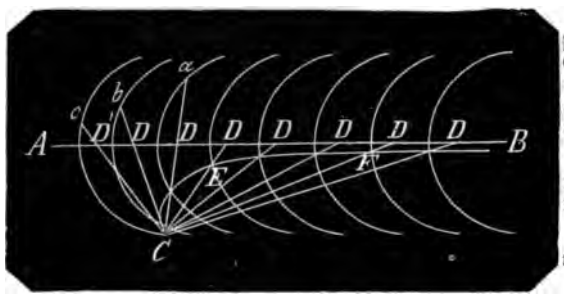
$$= \frac{2b}{3r} \sin \alpha \left[- \tfrac{1}{3} (r + x)(3r - 2x) \sqrt{2rx - x^2} + \tfrac{1}{2} r^2 \, Arc \cos \frac{r - x}{r} \right]$$

$$Z = -\tfrac{1}{3}\frac{b}{r}\sin\alpha\cdot(r+x)(3r-2x)\sqrt{2rx-x^2} + \tfrac{1}{3}br^2\sin\alpha\cdot Arc\cos\frac{r-x}{r}$$

Geht der Schnitt DE durch den Mittelpunkt der Grundfläche, so ist $x = r$ und $Z = \frac{1}{3}br^2\sin\alpha\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)$.

Parabolische Konchoide. Auf eine gerade Linie AB legt man eine Parabel mit ihrer Axe und schiebt diese auf derselben fort. Zieht man von irgend einem festen Punkt C durch irgend einen und immer denselben Punkt D der Parabelaxe gerade Linien, so sind deren Durchschnittspunkte mit der Parabel Punkte der parabolischen Konchoide CEF....

Fig. 874.



Auf ähnliche Weise entstehen elliptische und hyperbolische Konchoiden. Die parabolische Konchoide hat noch einen zweiten Zweig, der durch die zweiten Durchschnittspunkte, wie a, b, c in denselben Parabeln bestimmt werden. Der Anfangspunkt der unteren Konchoide ist der Erzeugungspunkt C und die gerade Linie CD' nach derjenigen Parabel, welche den Punkt C schneidet, ist als Tangente die Grenze der Curve, die Parabelaxe AB ist eine Asymptote derselben.

Die obere Konchoide fängt in unendlicher Ferne links auf einem Axenpunkt an, die Axe ist also diesem Zweige auf entgegengesetzter Seite gegen den unteren Asymptote, und rechts entfernt sie sich mit den Ordinaten unendlich weit von der Axe.

Parabolisches Konoid ist der Körper, welcher entsteht, wenn ein Parabelbogen mit seiner rechtwinkligen Ordinate um die Absisse dreht. Also der Körper im Art. „Parabel", No. 17 mit Fig. 872. Sein Inhalt ist (Formel 42)

$$K = \tfrac{1}{2}\pi xy^2.$$

Ein abgekürztes Konoid (Formel 43)
$= K = \frac{1}{2}\pi(xy^2 - x_1y_1^2) = \frac{1}{2}\pi p(x^2 - x_1^2)$.

Parabolischer Spiegel, s. den Art. „Brennspiegel".

Parabolische Spindel ist der Körper, welcher entsteht, wenn eine parabolische Ebene um ihre Doppelordinate sich dreht, also der Körper in dem Art. „Parabel" No. 22, dessen Hälfte, nämlich der aus der Drehung der halben Parabelfläche EOH um OH (Fig. 872) hervorgeht.

Es ist mithin der ganze Körper $K = \frac{8}{15}\pi\frac{h^5}{p^2}$.

Setzt man $p\cdot EH = OH^2$, d. i. $pr = h^2$, so ist $K = \frac{8}{15}\pi r^2 h$
$= \frac{4}{15}\pi r^2(2h)$.

Mithin beträgt dieser Körper $\frac{4}{15}$ des Cylinders, der denselben Halbmesser $EH = r$ und die Höhe OH zur halben also $2OH$ zur ganzen Höhe hat.

Paraboloide, s. v. w. „Parabeln höherer Ordnung (s. d.).

Parallaktisch ist was sich auf die Parallaxe bezieht.

Parallaktischer Winkel, s. v. w. „Parallaxe".

Parallaxe. Was unter P. verstanden wird, ist in dem Art. „Höhenparallaxe" mit Fig. 709 genau erklärt. Die P. ist am gröfsten, wenn der am Himmel befindliche Punkt im Horizont des Beobachtungsorts sich befindet (Horizontal-P.). Es ist nämlich, wenn r der Halbmesser der Erde, R den Abstand zwischen Erde und Himmelspunkt bezeichnet, die Horizontal-P.

$$P = Arc\cdot\sin\frac{r}{R} \text{ oder } \sin P = \frac{r}{R}$$

und bezeichnet z die Zenithdistanz des Himmelspunkts von dem Beobachtungsort, jede Höhen-P.

$$P' = arc\sin\left(\frac{r}{R}\sin z'\right) \text{ oder } \sin P' = \frac{r}{R}\sin z'$$

R im Nenner zeigt an, dafs die P. mit der Entfernung des Gestirns abnimmt; da Fixsterne eine unermefsliche Weite haben, so haben dieselben auch keine P.

Bei der Horizontal-P. ist $z = 90°$; steht der Himmelspunkt im Zenith so ist $z = 0$, mithin ist für jeden solchen Punkt die P. = 0.

Die Entfernung des Mondes von der Erde ist im Mittel 51500 Meilen, der Halbmesser der Erde 860 Meilen, mithin ist die Horizontal-P. desselben $= arc\,sin\,\frac{860}{51500}$ $= arc\,sin\,0{,}01699 = 58$ Min. 25 Sec. In seiner gröfsten Nähe zur Erde ist die Horizontal-P. 53° 52″, in seiner gröfsten Ferne 61′ 32″ am Aequator. Die Horizontal-P. der Sonne ist bei ihrer mittleren Entfernung von der Erde 8′ 5″ bis 8′ 6″.

r im Zähler zeigt an, dafs mit dem Halbmesser der Erde die P. zunimmt. Nun ist am Aequator der Halbmesser am gröfsten und nimmt nach den Polen hin wegen der dortigen Erdabplattung immer mehr ab. Daher ist die P. am Aequator (Aequatoreal-P.) am gröfsten, am Pol (Polar-P.) am kleinsten, zwischen Pol und Aequator mit der geographischen Breite des Orts abnehmend (Lokal-P.). Die im Aequator gemessene, oder für denselben berechnete P. ist immer die Aequatoreal-Horizontal-P.

Der Unterschied zwischen der Aequatoreal- und einer Lokal-P. und selbst der Polar-P. ist unbedeutend. Bei der Sonne ist sie fast = 0.

Denn der Erdhalbmesser im Aequator ist 859,5 Meilen, in der Axe 856,5 Meilen, die mittlere Entfernung der Sonne von der Erde ist circa 20,660000 Meilen.

Nun ist $log\ 20660000 = 7{,}3151303$
$log\ 859{,}5 = 2{,}9342459$
$log\ 856{,}5 = 2{,}9327274$

mithin $P = Arc\left(sin = \frac{859{,}5}{20660000}\right) = Arc\,(log \cdot sin = 5{,}6191156 - 10) = 8{,}597$ Secunden

$P' = Arc\left(sin = \frac{856{,}5}{20660000}\right) = Arc\,(log \cdot sin = 5{,}6175971 - 10) = 8{,}525$ Secunden

Gibt $P - P'$ = dem Unterschied zwischen der Aequatoreal- und der Polar-P. = 0,072 Secunden, eine durch kein Winkel-Instrument zu beobachtende Gröfse.

Dagegen beträgt der Unterschied zwischen beiden Parallaxen beim Monde 61′ 32″ − 61′ 20″ = 12 Secunden. Ueber die P. der Sonne vergleiche den Art. „Breite, geographische“, pag. 408, No. 5 mit Fig 243.

Noch ist zu bemerken, dafs die Höhenparallaxen (s. d.) wie die Cosinus der scheinbaren Höhen der Himmelspunkte oder wie die Sinusse deren Zenithdistanzen sich verhalten.

2. Die bisher betrachtete P. zwischen Mittelpunkt und Beobachtungsort der Erde heifst die tägliche Parallaxe; dagegen betrachtet man auch die P. für die Fälle, wo Sonne und Erde, oder wo die in der Ekliptik diametral entgegengesetzt liegenden Punkte die Beobachtungsörter sind. Erstere P. heifst die jährliche Parallaxe, wenngleich sie eigentlich nur die vierteljährliche ist. Jährliche P. eines Gestirns ist also der Winkel, den ein in dem Gestirn befindlicher Beobachter zwischen Sonne und Erde durch Visiren mifst. Die Parallaxe ist von der Erde aus dadurch zu finden, dafs man das Gestirn am Anfang und Ende eines halbjährigen Zeitraums jedes Mal während seiner Culmination visirt. In dem Dreieck ist nun die Grundlinie der Durchmesser der Ekliptik; die beiden visirten Höhenwinkel von 180° abgezogen geben den Winkel an der Spitze und dessen Hälfte ist die jährliche Parallaxe.

3. Aus der jährlichen Parallaxe ist aber auch die Entfernung des Gestirns von beiden Beobachtungsorten, der Erde und der Sonne zu ermitteln und zwar von jedem einzeln in den visirten Dreieckseiten.

Nur sehr wenige Fixsterne haben eine mefsbare P.; sie beträgt höchstens eine Secunde. Nimmt man das Dreieck gleichschenklig, setzt die Entfernung zwischen Erde und Sonne $= R$, so hat man die Entfernung des beobachteten Fixsterns von unsrem Sonnensystem $L = R\,cosec(\frac{1}{2})''$, und wenn man das Dreieck rechtwinklig nimmt $L = R \cdot cot\,(\frac{1}{2})'' = \frac{R}{tg\,(\frac{1}{2})''}$.

Es ist $tg\,\alpha = \alpha + \frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{2}{3 \cdot 5}\alpha^5 + \ldots$.

der Bogen $\alpha = \frac{1}{2}'' = 0{,}000\,002424\ldots$.

Man ersieht also, dafs es an dem ersten Gliede schon genug ist, und setzt man $tg\,(\frac{1}{2})'' = 0{,}000\,0025$, so erhält man $L = 400\,000 \cdot R$.

Mithin ist die Entfernung des nächsten Fixsterns von der Sonne mindestens das 400000fache des Halbmessers der Ekliptik.

4. Hat das Gestirn einen im Winkel mefsbaren Durchmesser, so kann man

dieses Winkelmaafs sowohl als auch die von dem Gestirn aus gemessene Parallaxe als Kreisbogen betrachten und beide Bogen sind die den Beobachtern scheinbaren Längen der wirklich gemessenen Längen. Da nun beide Winkel einerlei Radien haben, so verhalten sich die gemessenen Bogen, die scheinbaren Gröfsen, wie die wirklichen Gröfsen. Ist also die P. der halben Erdbahn $= p$, die scheinbare Gröfse des Gestirnsdurchmessers $= d$, so ist da die wirkliche halbe Ekliptik = 20 Millionen Meilen beträgt, der Durchmesser D des Gestirns wirklich

$$= \frac{d}{p} \times 20 \text{ Millionen Ml.}$$

5. Man hat Doppelsterne (s. d.). Durch langjährige Beobachtung mehrerer Sternsatelliten ist es mit Hülfe des Gravitationsgesetzes gelungen, die scheinbaren Durchmesser deren Bahnen zu berechnen und mit Hülfe der dritten Kepler'schen Regel die Umlaufszeiten derselben zu ermitteln. Hieraus kennt man also die Parallaxe der Erde in Beziehung auf die Satellitenbahn E, nämlich den scheinbaren Durchmesser derselben für einen auf der Erde befindlichen Beobachter.

Nach No. 2 ist nun auch die P. der Erdbahn (S) in Beziehung auf den Sternsatelliten zu berechnen, und diese scheinbaren Gröfsen verhalten sich bei den gleichgroſsen Visirlinien wie die wirklichen Gröfsen. Ist also wieder der Halbmesser der Ekliptik $= R$, so hat man den scheinbaren Durchmesser (S) der scheinbaren Satellitenbahn: dem scheinbaren Halbmesser (P) der Erdbahn = dem wirklichen Durchmesser der Satellitenbahn: dem wirklichen Halbmesser R der Erdbahn also

$$S : P = X : R$$

woraus der wirkliche Durchmesser der Satellitenbahn $X = \frac{S}{P} \cdot R$

Parallelen. Parallel sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und so weit sie auch an beiden Seiten verlängert werden doch an keiner Seite zusammentreffen. Diese Erklärung ist die älteste, nämlich die 35te des Euklid und man hat dieselbe als nicht streng wissenschaftlich und gewifs mit Recht angegriffen. Aufser den vielen Gründen gegen diese Erklärung will ich noch einen anführen, den man vielleicht als zu weit hergeholt ansehen könnte, dem aber doch eine erwiesene Wahrheit zu Grunde liegt:

Man hat an Curven Asymptoten, beide Linien kommen sich mit ihrer Verlängerung immer näher ohne sich jemals zu schneiden. Die Asymptote ist geradlinig, die Curve nähert sich mit ihrer Verlängerung immer mehr der geraden Linie und kann in unendlicher Entfernung als gerade betrachtet werden, sie schneiden sich niemals, kommen einander immer näher und sind nicht einander parallel.

Unter den statt der Euklidischen Erklärung aufgestellten Erklärungen, die alle mehr oder weniger Einwendungen zulassen, ist keine augenfälliger als die: Parallelen sind gerade in einerlei Ebene liegende Linien, welche, man mag sie auf beiden Seiten noch so viel verlängern, immer einerlei Abstand von einander behalten. Aber auch gegen diese ist der Einwand zu erheben, dafs Abstand erst erklärt werden müfste, dessen Erklärung aber auf Parallelen sich gründet. Man könnte nun erklären: .... liegende Linien, zwischen welchen alle unter einem und demselben Winkel gezogene gerade Linien einerlei Länge haben

In dem Art. „Axiom" habe ich von parallelen Linien eine genetische Erklärung gegeben, nachdem ich mich über den Character der Grundsätze im Allgemeinen und im Besondern und über die für die Geometrie vorhandenen möglichst ausführlich geäufsert. Nach dem meiner Ansicht nach einzig nothwendigen Grundsatz: „Gerade Linien decken sich in allen Punkten" sollen mehrere gerade Linien auf einander liegen, eine derselben soll man von den darunter liegenden fortbewegen ohne ihre Richtung zu ändern, wo dann beide Linien Parallele heifsen und die also beliebig auf beiden Seiten verlängert sich nirgend schneiden können.

Abgesehen von allen eifrigen Bemühungen ingeniöser Mathematiker, die Lehre von den Parallelen streng wissenschaftlich zu begründen ist es nicht Recht, dafs ein so an sich geometrisch einfacher Gegenstand mit Hülfe schneidender Linien und Winkelbestimmung definirt wird.

Die uns aufbehaltene älteste Theorie der Parallelen von Euklid ist die ungeschickteste die es nur geben kann.

Der 11te Grundsatz mufs einen Knaben, der geometrische Kenntnisse sich erwerben soll, sofort abschrecken. Ich frage jeden Lehrer, ob dieser Grundsatz für einen Knaben in Rücksicht auf den Standpunkt seiner noch geringer Begriffsfähigkeit nicht viel zu zusammengesetzt ist. Nun kommt dazu, dafs Euklid auf

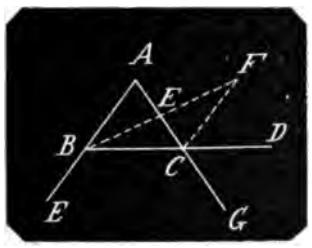
› gegebene Erklärung (10) des rechten inkels sich beruft, welcher durch den griff Nebenwinkel erklärt wird, über lchen in den vorherstehenden Erklärungen gar nicht die Rede ist, so dafs ıklid den Nebenwinkel, als wenn rselbe nichts geometrisches, sondern ı allgemein bekanntes Ding wäre anıht. Der 11te Grundsatz heifst:

Zwei gerade Linien, die von einer dritn so geschnitten werden, dafs die beiin inneren an einerlei Seite liegenden inkel zusammen kleiner als zwei rechte ıd, treffen genugsam verlängert an eben r Seite zusammen.

Dieser Grundsatz ist offenbar der umkehrte 16te Lehrsatz: An jedem Trigel *ABC* ist, wenn man eine seiner iten *BC* verlängert, der äufsere Winl *ACD* gröfser als jeder der beiden neren ihm gegenüber liegenden Winkel *BA*, *BAC*.

Euklid halbirt *AC* in *E*, zieht *BF* durch , macht *EF* = *BE*, zieht *CF* und beıist aus den gleichen Dreiecken *FEC* ıd *BEA*, dafs ∠*FCE* = ∠*BAC*, also *ACD* > *BAC*. Die Halbirung von *BC*

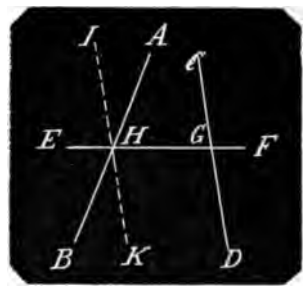
Fig. 875.



r ∠*ACD* > *ABC* ist nicht nöthig, wenn an *AC* verlängert; denn ∠*ACD* ist = *BCG*, also nach dem ersten Theil des eweises ∠*ACD* > ∠*ABC*.

Man kann nun den Lehrsatz auch folnder Art ausdrücken: Wenn 2 sich hneidende Linien *AC*, *BC* von einer en *BD* geschnitten werden, so ist der ıfsere Winkel *ACD* an der schneidenın Linie gröfser als der auf derselben ›ite liegende ihm entgegengesetzte inre Winkel *ABC*. Dieser Satz umgehrt würde lauten: Wenn 2 gerade Lien *AB*, *CD* von einer 3ten *EF* so gehnitten werden, dafs der äufsere Winkel *GF* gröfser ist als der auf derselben ›ite der schneidenden Linie ihm gegenıerliegende innere Winkel *AHF*, so hneiden sich die beiden geraden Linien ach dieser Seite hin.

Fig. 876.



Einen streng wissenschaftlichen Beweis dieses umgekehrten Satzes ist noch keinem Mathematiker gelungen, der Grund hiervon soll durch folgende beispielsweise Behandlung anschaulich gemacht werden:

Gesetzt, die Linie *BA* schnitte die Linie *CD* nach *HA* hin nicht, sondern nach *HB* hin, so wäre nach Euklid Satz 16

$$\angle DGF > \angle BHF$$

Es ist aber

$$\angle DGF + \angle CGF = \angle BHF + \angle AHF = 2R$$

Da nun $\angle CGF > \angle AHF$

so ist $\angle DGF < \angle BHF$

folglich schneidet *AC* nach *B* hin die *CD* nicht.

Es wäre also nur noch möglich, dafs beide Linie *AB*, *CD*, beliebig nach beiden Seiten hin verlängert, sich nirgend schneiden. Man ziehe die mit *CD* Parallele *JK*, so sind *JK* und *CD* 2 Linien, die noch so weit auf beiden Seiten verlängert sich nirgend schneiden. Dreht man nun *AB* so, dafs die gleichen Scheitelwinkel *AHJ* und *BHK* immer kleiner werden, so bleibt das Verhältnifs zwischen den beiden Paar Winkeln *AHF* mit *CGF* und *BHF* mit *DGF* immer dasselbe, so lange noch *BH* aufserhalb und *AH* innerhalb *JK* sich befindet. Denkt man sich, dafs *AB* über *JK* hinaus die entgegengesetzte Lage annimmt, so kehrt sich das Verhältnifs um: *HA* schneidet die *CD* ganz gewifs nicht und bei *HB* ist die Schneidung zweifelhaft wie vorher bei *HA*.

Diese Zweifel aber bleiben Zweifel und es liegt dies offenbar an der schlechten Wahl des 11ten Grundsatzes.

Wenn der 11te Euklidische Grundsatz lautete: Zwei in einer Ebene liegende gerade nicht parallele Linien entfernen sich nach der einen und nähern sich nach der anderen Seite hin und treffen, nach dieser Richtung hinreichend verlängert

in einem Punkt zusammen, so ist dieser Grundsatz nichts weniger als auffallend, im Gegentheil ganz hingehörig, einfach zu begreifen und beseitigt alle Schwierigkeiten.

Denn aus Satz 16 geht unmittelbar hervor: Wenn zwei gerade nicht parallele Linien von einer dritten geschnitten werden, so sind die auf der schneidenden (der convergirenden) Seite die inneren Winkel immer kleiner als zwei rechte Winkel und auf der entgegengesetzten (der divergirenden) Seite die inneren Winkel immer gröfser als zwei rechte Winkel. Sind nun die Linien parallel, so dafs sie sich nach keiner Seite hin schneiden, so mufs das Gesetz der inneren Winkel auf beiden Seiten dasselbe sein. Da nun auf beiden Seiten zugleich die inneren Winkel nicht kleiner und auch nicht gröfser als zwei rechte Winkel sein können, so müssen sie auf jeder von beiden Seiten gleich zweien rechten Winkeln sein.

Hiermit ist denn auch der umgekehrte 16te Satz erwiesen, nämlich: Wenn zwei gerade Linien von einer dritten geschnitten werden und die inneren Winkel auf einer Seite der schneidenden Linie sind kleiner als zwei rechte Winkel, so schneiden sich beide Linien nach dieser Seite hin. Denn wären sie einander parallel, so müfsten die inneren Winkel zusammen gleich zweien rechten sein, und schnitten sie sich auf der entgegengesetzten Seite, so müfsten die beiden inneren Winkel gröfser als zwei rechte sein.

Wenn zwei gerade Linien (Fig. 877) AB, CD von einer dritten EF geschnitten werden, so entstehen 8 Winkel, vier äufsere Winkel AHE, CGF, BHE, DGF; vier innere Winkel AHG, CDH, BHG, DGH.

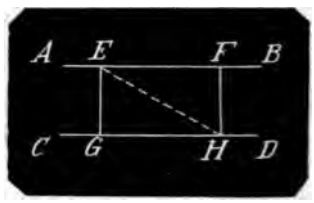
Von diesen heifsen noch je zwei Winkel auf einer Seite der schneidenden Linie, von welchen der eine äufserer, der andere innerer ihm gegenüberliegender Winkel ist, Gegenwinkel. Es sind diese BHE und DGE, DGF und BHF, AHE und CGE, CGF und AHF.

Ferner je zwei innerhalb der beiden Linien auf verschiedenen Seiten der schneidenden Linie liegende Winkel: Innere Wechselwinkel; nämlich AHG und DGH, CGH und BHG.

Endlich je zwei aufserhalb der beiden Linien auf verschiedenen Seiten der schneidenden Linie liegende Winkel: Aeufsere Wechselwinkel; nämlich AHE und DGF, BHE und CGF. Sind die beiden Linien einander parallel, so sind jedes Paar Gegenwinkel und Wechselwinkel einander gleich, welches daraus folgt, dafs die inneren auf einer Seite der schneidenden Linie gleich zweien rechten Winkeln sind.

Parallellinien sind überall gleich weit von einander entfernt. Denn fällt man Fig. 877 von beliebigen Punkten E, F der einen der Parallelen AB auf die zweite CD die Lothe EG, FH, zieht EH, so sind als Gegenwinkel $\angle GEH = \angle EHF$, $\angle GHE = \angle FEH$. Hierzu in beiden Dreiecken die gemeinschaftliche Seite EH gibt nach Euklid I. Buch, Satz 26 $\triangle EGH \cong \triangle HFE$, mithin $EG = FH$.

Fig. 877.



Aus der Lehre von den Parallelen folgen noch folgende wichtige Sätze über Dreiecke, nämlich:

1. In jedem Dreieck ist der Aufsenwinkel gleich den beiden ihm gegenüberliegenden inneren Winkeln.

2. In jedem Dreieck ist die Summe sämmtlicher drei Winkel gleich zweien Rechten. Denn zieht man Fig. 875 die mit der Seite BA parallele CF, so hat man

$\angle ACF = \angle CAB$ als innere Wechselwinkel,
$\angle FCD = \angle ABC$ als Gegenwinkel,
woraus $\angle ACD = \angle CAB + \angle ABC$.

Da nun $\angle ACD + \angle ACB = 2R$
so ist auch
$\angle CAB + \angle ABC + \angle ACB = 2R$.

Parallelen abstecken. Man soll auf dem Felde durch den Punkt C eine mit der durch Signale markirten Linie AB parallele Linie abstecken (Fig. 877).

Es gibt zwei Fälle: Entweder man kann von AB aus visiren oder nicht. Im ersten Fall bestimmt man den Punkt D, in welchem CD normal auf AB ist, und dies geschieht mit dem Diopterkreuz, einem mit Dioptern versehenen rechtwinklig zusammengearbeiteten Kreuz von Linealen, mit dem man in AB das eine Lineal nach AB richtet und es nach und nach auf den richtigen Punkt D bringt, wo das andere Lineal nach DC zeigt,

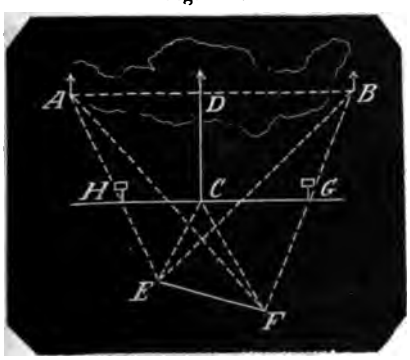
und dann in *D* ein Signal stellt. Man bedient sich auch hierbei des Meſstisches, mit dem man eine ähnliche Einrichtung verbunden hat. Hierauf begibt man sich mit dem Instrument nach *C*, richtet das eine Lineal von *C* nach *D*, visirt mit dem andern Lineal nach rechts einen Punkt *G*, setzt dort ein Signal und *CE* ist die verlangte mit *AB* parallel abgesteckte Linie.

Kann man von *D* nach *C* nicht visiren, so nimmt man einen Punkt *A* in der Richtung *AB*, von dem man *C* sehen kann, stellt dort den Meſstisch auf, visirt nach *C*, verzeichnet auf demselben die Richtungen *AB*; *AC*, bringt den Meſstisch über *C*, stellt ihn dort auf, so daſs die gezeichnete Linie *AC* nach *CA* gerichtet wird, dann wird die gezeichnete Linie *AB* visirt, ein Signal *H* errichtet und *HC* ist die verlangte Parallele.

Ist nicht von *AB* und von keinem Punkt in *AB* nach *C* zu visiren, so wendet man die Boussole an. Man stellt diese in irgend einem Punkt der Linie auf und beobachtet den Winkel zwischen *AB* und der Magnetnadel. Diese wieder über *C* gebracht und unter demselben Neigungswinkel visirt, gibt die richtige Parallele *GH*.

Gesetzt aber, auch das wäre nicht möglich, es wären bloſs die Punkte *A* und *B* markirt, man könnte aber weder von *A* nach *B* noch von *B* in die Richtung nach *A* visiren und man solle eine durch *C* laufende mit der unbekannten Richtung *AB* parallele Linie abstecken, von *C* sei aber auch weder nach *A* noch nach *B*

Fig. 878.



zu visiren, so ermittele zwei beliebig liegende Punkte *E*, *F*, von welchen aus *A* und *B* zugleich gesehen werden kann. Messe die Längen *EF*, *EC*, *FC*, trage diese verjüngt auf den Meſstisch, visire mit demselben von *E* aus die Richtungen *EA*, *EC*, *EB*, *EF* und von *F* aus die Richtungen *FA*, *FC*, *FB*, *FE*, verzeichne sie sofort auf dem Tisch bis zu den Durchschnittspunkten *A* und *B*, so hat man die ganze Figur im verjüngten Maaſsstab, zeichnet die Parallele *HG* und steckt sie den verjüngten Maaſsen entsprechend ab.

Parallele Himmelskugel ist die, welche von einem Pole der Erde aus gesehen wird, weil es dort scheint, als ob sämmtliche Sterne parallel dem Horizont sich umdrehten, und wo kein Auf- und Untergang statt findet.

Parallelebene, s. Bd. III, pag. 5.

Parallelepipedum ist ein Prisma, dessen Grundfläche ein Parallelogramm ist, welches also von sechs Parallelogrammen eingeschlossen wird, von denen die einander gegenüber befindlichen parallel und congruent sind. Die vier Parallelogramme zwischen den beiden Grundflächen heiſsen Seitenflächen. Aus der Form des Körpers geht hervor, daſs man jede der Begrenzungsflächen zur Grundfläche nehmen kann. Die Begrenzungslinien der Grundflächen heiſsen Grundkanten, die der Seitenflächen Seitenkanten. Stehen die Seitenkanten normal auf den Grundkanten, so heiſst das P. normal, sonst ist es ein schräges, ein schiefes P.

Jedes P. wird durch eine Diagonalebene in zwei gleiche dreiseitige Prismen getheilt.

2. P. von einerlei Grundebene, deren gegenüberliegende Seitenflächen, sowie die den Grundflächen parallele obere Flächen paarweise in denselben Ebenen liegen, sind einander gleich.

Bei den beiden P. Fig 879 auf derselben Grundfläche *abcd* liegen die oberen Flächen *efgh* und *iklm* in einer der Grundfläche parallelen Ebene; ferner liegen die vorderen beiden Seitenflächen in einerlei Ebene und die Hinterflächen desgleichen.

Nun ist Prisma *geacli* ≅ Prisma *hfbdmk*
hiervon Prisma *hfgrli* = Prisma *hfqrñ*

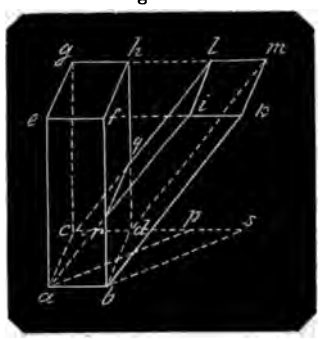
bleibt Parallelep. *abcdefgh* = Par. *abcdlikm*

3. P. von einerlei oder congruenten Grundebenen und gleichen Höhen sind einander gleich.

Sind die Grundflächen nicht einerlei, so stelle man die beiden P. auf eine und

dieselbe Grundebene, so kann man zwei Seitenebenen des einen P. so weit verbreitern, dafs sie die verbreiterten Ebenen

Fig. 879.



zweier Seitenflächen des anderen P. überschneiden. Betrachtet man nun das zwischen den 4 Durchschnittsebenen entstandene neue P., so ist dieses nach Satz 2 dem einen wie dem andern der gegebenen P. gleich, folglich sind die gegebenen unter sich gleich.

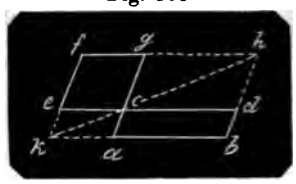
4. P. von gleichen Höhen, deren Grundebenen Parallelogramme von einerlei oder gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind, sind gleich.

Man denke sich ein P., dessen Grundfläche mit *abps* congruent ist und mit dem P. *abcdefgh* einerlei Höhe hat, so lege man dasselbe auf *abps* und construire ein P. über *abps*, dessen Seitenkanten mit *ae* parallel laufen, so sind diese beiden über *abps* befindlichen P. nach Satz 3 einander gleich. Das neu construirte P. hat mit dem P. *abcdefgh* die Seitenkanten *ae*, *bf* gemeinschaftlich; betrachtet man daher in beiden P. die Ebene *abef* als gemeinschaftliche Grundebene, so ist *ac* beider Höhe, folglich ist nach Satz 3 das P. *abcdefgh* gleich dem über *abps* neu construirten und also auch gleich dem über *abps* gegebenen P.

5. P. von gleichen Höhen auf Grundebenen von gleicher Gröfse und gleichen Winkeln sind gleich.

Da die beiden gleichen Grundebenen *cefg*, *abcd* gleiche Winkel haben, so kann man sie, wie Fig. 880 zu Ergänzungsparallelogrammen an einander setzen. Zieht man die Diagonale *hk*, so ist Prisma über *cke* = Prisma über *cka*, Prisma über *ckg* = Prisma über *chd* und Prisma über *hkf* = Prisma über *hkb*. Die beiden Prismen rechts der Diagonale von dem Prisma *hkb* und die beiden Prismen links der

Fig. 880.



Diagonale von dem Prisma *hkf* fortgenommen, bleibt P. über *cefg* = P. über *abcd*.

6. P. von gleichen Grundebenen und gleichen Höhen sind gleich.

Hat das eine P. eine Grundfläche von der Seite = *ce*, das andere von der Seite = *cd*, so verwandle beide in Grundflächen von einerlei Winkel, dann sind nach Satz 4 die P. von denselben Seiten *ce* und *cd* einander gleich, beide letzten P. aber gleich nach Satz 5, mithin der Satz erwiesen.

Aus den vorgetragenen Sätzen gehen noch folgende hervor:

7. P. von gleichen Grundebenen verhalten sich wie ihre Höhen und P. von gleichen Höhen wie ihre Grundebenen.

Sind die Grundebenen Rechtecke von einer gleichen Seite, so verhalten sich P. von gleichen Höhen wie die ungleichen Grundkanten.

Sind die Grundebenen Rechtecke von ungleichen Seiten, so verhalten sich die P. von gleichen Höhen wie die Producte der Grundkanten.

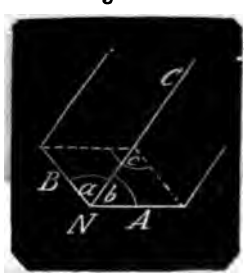
Gerade P. mit rechteckigen Grundebenen verhalten sich wie die Producte der drei ungleichen Kanten.

8. P. sind ähnlich, wenn ihre homologen Winkel einander gleich sind und wenn zugleich ihre homologen Kanten in Proportion stehen.

Die Inhalte ähnlicher P. verhalten sich wie die Cubi ihrer homologen Seitenkanten.

9. Den Inhalt eines P. durch seine Kanten und Winkel auszudrücken.

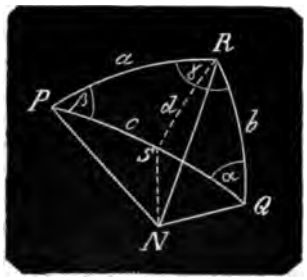
Fig. 881.



:s seien A, B, C die Längen der drei :anten eines P.; der Winkel zwischen t und B sei c, der zwischen A und C : b und der zwischen B und $C = a$. Der leigungswinkel der Kante C gegen die rundfläche (A, B) sei $= d$. Es ist mit- in der Inhalt der Grundfläche $= A \cdot B \sin c$ nd der Inhalt des P. $= A \cdot B \cdot C \cdot \sin c \cdot \sin d$.

Man beschreibe nun aus der Ecke N wischen den Kanten A und B eine Ku- elfläche, so bilden die Durchschnitts- unkte der Kanten mit der Kugelfläche pitzen für ein sphärisches Dreieck, wel- es entsteht, wenn man diese Punkte rch gröfste Kreisbogen verbindet. Die iten des sphärischen Dreiecks sind die antenwinkel, und zwar $PR = a$, $QR = b$ id $PQ = c$; der normale Bogen von dem rchschnittspunkt R zwischen a und b f die Seite c ist der Neigungswinkel

Fig. 882.



(der Kantenwinkel der Kante NR gegen die Seite c) d.

Nun ist dieser Neigungswinkel d auf die Seite c nach dem Art. „Körpertrigonometrie, No. 18, Formel III. gegeben:

$$\sin d = \frac{2}{\sin c}\sqrt{\sin\frac{a+b+c}{2}\cdot\sin\frac{a+b-c}{2}\cdot\sin\frac{a+c-b}{2}\cdot\sin\frac{b+c-a}{2}}$$

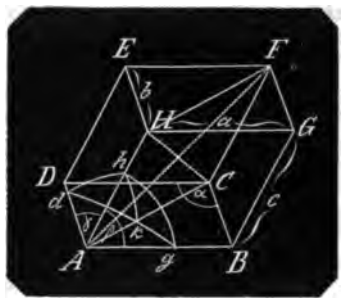
Es ist wie oben erwiesen der Inhalt des P. $= ABC \sin c \cdot \sin d$.

Mithin P. $= 2ABC\sqrt{\sin\frac{a+b+c}{2}\cdot\sin\frac{a+b-c}{2}\cdot\sin\frac{a+c-b}{2}\cdot\sin\frac{b+c-a}{2}}$

10. Bei gegebenen Kanten und Win- ln eines P. die Figur und den Flächen- halt eines Diagonalschnitts zu bestim- en.

Es sei $ACFH$ der zu berechnende Durch- hnitt, gdh ein aus A beschriebenes sphä- sches Dreieck, hk ein Bogen von der pitze h nach dem Durchschnittspunkt k s Bogens dg mit der Diagonale. Ist ın die Kante $AB = a$, die Kante AD b, die Kante $AH = c$; $\angle BAD = \alpha$, $BAH = \beta$, $\angle DAH = \gamma$, so hat man in m geradlinigen Dreieck ACD e Diagonale $AC = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$ (1) Da nun $AC : DC = \sin ADC : \sin DAC$

Fig. 883.



ist $\sin DAC = \sin dk = \frac{DC}{AC}\sin ADC = \frac{a\sin\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}}$ (2)

Nun ist in dem sphärischen Dreieck dgh nach No. 10

$$\cos gdh = \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cdot\cos\gamma}{\sin\alpha\cdot\sin\gamma} \quad (3)$$

ad in dem sphärischen Dreieck dhk nach No. 11

$$\cos hk = \cos dh\cdot\cos dk + \sin dh\cdot\sin dk\cdot\cos hdk$$

. h. $$\cos hk = \cos\gamma\cdot\cos dk + \sin\gamma\cdot\sin dk\cdot\frac{\cos\beta - \cos\alpha\cdot\cos\gamma}{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}$$

$$= \cos\gamma\cdot\cos dk + \sin dk\,\frac{\cos\beta - \cos\alpha\cdot\cos\gamma}{\sin\alpha} \quad (4)$$

Aus Gleichung 2 hat man

$$\cos^2 dk = 1 - \sin^2 dk = 1 - \frac{a^2 \sin^2\alpha}{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}$$
$$= \frac{a^2\cos^2\alpha + b^2 + 2ab\cos\alpha}{a^2+b^2+2ab\cos\alpha} = \frac{(b+a\cos\alpha)^2}{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}$$

woraus $$\cos dk = \frac{b+a\cos\alpha}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}} \quad (5)$$

Diese Werthe von $\sin dk$ und $\cos dk$ in Formel 4 substituirt gibt

$$\cos hk = \cos\gamma \cdot \frac{b+a\cos\alpha}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}} + \frac{a(\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma)}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}}$$

oder $$\cos hk = \cos CAH = \frac{a\cos\beta + b\cos\gamma}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}} \quad (6)$$

Hieraus erhält man nun

$$\sin hk = \sin CAH = \frac{\sqrt{[a^2\sin^2\beta + b^2\sin^2\gamma + 2ab(\cos\alpha - \cos\beta\cdot\cos\gamma)]}}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}} \quad (7)$$

womit also der Winkel zwischen einer Seitenkante und der Diagonale der Grundfläche gefunden ist.

Der Flächeninhalt des Diagonalschnitts $ACFH = J$ ist also $= AC \times AH \times \sin CAH$.

Nun ist $AH = c$, $AC = \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}$, mithin ist

$$J = c\cdot\sqrt{[a^2\sin^2\beta + b^2\sin^2\gamma + 2ab(\cos\alpha - \cos\beta\cdot\cos\gamma)]} \quad (8)$$

11. Aus den gegebenen Winkeln, welche die drei Kanten eines P. mit einander bilden, die Neigungswinkel dessen Seitenflächen zu finden.

Verfährt man wie No. 10, so hat man in dem sphärischen Dreieck, weil die die Winkel gdh, dgh und dhg repräsentirenden Bogen auf einander normal stehen, die eben genannten Winkel als Neigungswinkel der Flächen. Es sind also in dem sphärischen Dreieck die Seiten α, β, γ gegeben und man hat nach dem Art. „Körpertrigonometrie", No. 10, Formel I, pag. 41,

den Neigungswinkel dhg zwischen den Seitenflächen AE und BH

$$\sin\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\cdot\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}}$$

den Neigungswinkel dgh zwischen den Seitenflächen BD und BH

$$\sin\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(\beta+\alpha-\gamma)\cdot\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}}$$

den Neigungswinkel gdh zwischen den Seitenflächen BD und AE

$$\sin\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(\gamma+\alpha-\beta)\cdot\sin\frac{1}{2}(\gamma+\beta-\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}}$$

12. Bei gegebenen Kanten und Winkeln eines P. die Diagonale des P. und den Neigungswinkel des Diagonalschnitts gegen die Grundfläche zu bestimmen.

Ziehe die Diagonalen AF, CH, so ist in den geradlinigen Dreiecken ACH und ACF: $\cos ACF = -\cos CAH$, daher

$$CH^2 = AH^2 + AC^2 - 2AH\cdot AC\cdot\cos CAH$$
$$AF^2 = AH^2 + AC^2 + 2AH\cdot AC\cdot\cos CAH:$$

die Werthe von AC aus Gleichung 1 und $\cos CAH$ aus Gleichung 4 No. 10 genommen ($AH = c$), gibt

$$\left.\begin{matrix}CH^2\\AF^2\end{matrix}\right\} = c^2 + (a^2+b^2+2ab\cos\alpha) \mp 2c\cdot\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}\cdot\frac{a\cos\beta + b\cos\gamma}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}}$$
$$= a^2+b^2+c^2+2ab\cos\alpha \mp 2ac\cos\beta \mp 2bc\cos\gamma$$

Den Neigungswinkel dkh zwischen den Ebenen $ACHF$ und $ABCD$ erhält man aus dem sphärischen Dreieck dhk und es ist bei gegebenem $\angle dk = \angle DAH = \gamma$,

$\angle hk = \angle HAF$ und $\angle dk = \angle DAC$

$$\cos dkh = \frac{\cos dh - \cos hk \cdot \cos dk}{\sin hk \cdot \sin dk}$$

Nun ist $dh = \gamma$, $\cos hk$ siehe Gleichung 6, $\sin hk$ siehe Gleichung 7 und $\cos hk$ s. Gleichung 6, No. 10.

13. Der Art. „Maximum und Minimum“ enthält in No. 8, 10, 12, 14 die Nachweise über die kleinsten Oberflächen der P. und in No. 9, 11, 13, 15, 16, 17 über die gröfsten körperlichen Inhalte derselben.

Parallelepipedum der Kräfte, s. „Kräfte im Gleichgewicht“, No. 27, pag. 66.

Parallelflächig, (Kryst.), im Gegensatz von geneigtflächig, sind Krystalle der homoedrischen Form, bei welchen die parallelen Flächen durch die Vergröfserung der abwechselnden Flächengruppen zum Theil geblieben, während sie bei den geneigtflächigen verloren gegangen sind.

Parallelkreise sind Kreise auf einer Kugeloberfläche, die mit einander parallel laufen. Besonders nennt man solche Kreise P., die auf der hohlen Himmelskugel und den Weltkörpern, so auch auf der Erde, mit dem Aequator, der immer der gröfste der Parallelkreise ist, parallel laufen. Die P. an der Himmelskugel sind die astronomischen, die auf der Erde die geographischen P. Alle unter demselben P. liegenden Orte haben einerlei geographische Breite. Die P. werden um so kleiner, je näher sie den Polen kommen und verhalten sich in ihren Längen wie die Cosinusse der geographischen Breiten. Jeder P. wird in 360 Grade getheilt, die Grade der P. nehmen also ebenfalls in dem Verhältnifs der Cosinusse ihrer geographischen Breiten ab.

Parallellineal ist ein Zeichneninstrument, mit welchem man parallele Linien auf dem Papier zieht. Es besteht aus zwei genau gearbeiteten neben einander gelegten Linealen und ist mit zwei parallelen um ihre Befestigungsdorne drehbaren Metallbändern zusammengefügt, an welchen die Lineale leicht in der nöthigen Entfernung auseinander geschoben werden.

Parallelogramm ist ein Viereck, in welchem die gegenüberliegenden Seiten parallel sind. Die P. sind dieser Erklärung zufolge Vierecke mit Seiten als Parallelen zwischen Parallelen; demnach sind je 2 gegenüberliegende Seiten und je 2 gegenüberliegende Winkel einander gleich.

Ferner sind je 2 an einer der Seiten liegende Winkel zusammengenommen gleich zweien Rechten, sämmtliche 4 Winkel zusammen also = 4 Rechten.

Aus diesen Gründen können P. ihrer Form nach auf zweierlei Weise verschieden sein.

1. Es können die 4 Seiten entweder alle gleich oder ungleich sein, und 2. Es können alle Winkel entweder alle gleich oder ungleich, d. h. rechte oder schiefe Winkel sein. Man hat demnach viererlei P.:

1. P. mit lauter gleichen Seiten und lauter gleichen (rechten) Winkeln.

2. P. mit lauter gleichen Seiten und ungleichen (schiefen) Winkeln.

3. P. mit ungleichen Seiten und lauter gleichen (rechten) Winkeln.

4. P. mit ungleichen Seiten und ungleichen (schiefen) Winkeln.

Das erstgenannte P. eine reguläre Figur, ist das Quadrat.

Das zweite P. der Rhombus, die Raute.

Das dritte P. das Oblongum, Rectangulum, Rechteck.

Das vierte das Rhomboid, die längliche Raute.

Euklid hat den allgemeinen Namen: Parallelogramm nicht. Nur die vier einzelnen genannten P. und er setzt sie schon zu Anfang unter die Erklärungen mit Angabe ihrer Eigenschaften.

Erklärung 30 lautet: Unter den vierseitigen Figuren heifst diejenige ein Quadrat, welche gleichseitig und rechtwinklig ist, ohne also vorher nachzuweisen, dafs beide Eigenschaften möglich sind. Dieselben Fehler finden auch bei den drei folgenden Erklärungen von Oblongum, Rhombus und Rhomboid statt, und es ist dies um so auffallender, da er erst die Erklärung von Parallel die 35te sein läfst. Die spätere Einführung des Ausdrucks, Parallelogramm, zuerst Buch I, Satz 41, ist wohl von dem Uebersetzer geschehen.

Parallelogramme werden von jeder Diagonale in 2 congruente Dreiecke getheilt.

In rechteckigen P. sind beide Diagonalen einander gleich, in schiefwinkligen ungleich.

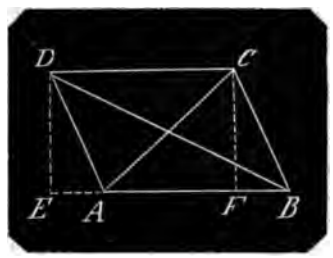
Nimmt man eine Seite eines P. zur Grundlinie, so heifst die zwischen ihr und der gegenüberliegenden Seite gezogene Normale die Höhe des P.

P. von gleichen Grundlinien und Höhen sind einander gleich.

Der Inhalt eines P. ist gleich dem Product: Grundlinie mal Höhe.

Die Summe der Quadrate beider Diagonalen ist gleich der Summe der Quadrate der vier Seiten.

Fig. 881.



Also
$AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 + AD^2 + BC^2$
Denn es ist
$BD^2 = DE^2 + BE^2 = AD^2 - AE^2 + BE^2$
$AC^2 = CF^2 + AF^2 = BC^2 - BF^2 + AF^2$

Addirt gibt
$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 - 2AE^2 + (AB + AE)^2 + (AB - AE)^2 = AD^2 + BC^2 + AB^2 + CD^2$

In dem Art. „Constructionen aus der Elementargeometrie" sind der Reihenfolge nach folgende Zeichnenaufgaben gelöst pag. 67 u. f.:

1. No. 71. Dasselbe Quadrat im Halbkreise in ein Rectangel im Halbkreise zu verwandeln.

2. No. 72. In einen Kreis ein Rectangel zu beschreiben, dessen anliegende Seiten wie $n : m$ sich verhalten.

3. No. 85. Eine gegebene gerade Linie um ein Stück zu verlängern, dafs das Rechteck zwischen der ganzen verlängerten Linie und dem Verlängerungsstück einem gegebenen Quadrat gleich werde.

4. No. 86. Eine gegebene gerade Linie in 2 Theile zu theilen, so dafs das Quadrat des einen Theils gleich wird dem Rectangel zwischen dem anderen Theil und einer zweiten gegebenen geraden Linie.

5. No. 87. Eine gegebene gerade Linie so zu schneiden, dafs das unter der ganzen und einem der beiden Abschnitte enthaltene Rectangel dem Quadrat des übrigen Abschnitts gleich sei (Euklid II, 11).

6. No. 99. Ein Parallelogramm in ein Rechteck zu verwandeln.

7. No. 100. Ein Parallelogramm in ein anderes P. mit denselben Winkeln und einer gegebenen Seite zu verwandeln.

8. No. 101. Ein Parallelogramm in ein Dreieck zu verwandeln.

9. No. 102. Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

10. No. 133. Ein Parallelogramm gleich der Hälfte eines gegebenen Vierecks zu zeichnen.

Parallelogramm der Geschwindigkeiten, s. u. „Mittelgeschwindigkeit."

Parallelogramm der Hyperbel ist das Rectangel, dessen eine Seite eine vom Mittelpunkt der Hyperbel ab auf einer Asymptote gemessene beliebige Länge und dessen zweite Seite die von diesem genommenen zweiten Punkt der Asymptote parallel der anderen Asymptote bis zum nächsten Hyperbelzweig gezogene gerade Linie ist.

In dem Art. „Hyperbel", pag. 265, Fig. 718 ist M der Mittelpunkt beider zusammengehörigen Hyperbeln, von denen die eine $QDEF$ gezeichnet ist. ML, MX sind die beiden Asymptoten. Die eine Seite des P. ist MV, die zweite ist die mit MX parallele VD und das gezeichnete P. der Hyperbel ist $MV \times VD$.

In No. 18 desselben Art. pag. 270 ist nachgewiesen, dafs jedes dieser P. einen constanten Werth $= \frac{1}{4}e^2$ hat, wo e die Excentricität $= \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{ME^2 + NE^2}$. $\frac{1}{4}e^2$ heifst die Potenz der Hyperbel.

Parallelogramm der Kräfte, s. u. „Kräfte im Gleichgewicht", No. 11, pag. 60.

Parallelograph ist ein Instrument, um auf dem Papier Parallelen zu zeichnen.

Paralleltrapez oder Trapez ist ein Viereck mit zwei parallelen Seiten, die beiden anderen gegenüberliegenden Seiten sind nicht parallel. Der Flächeninhalt desselben ist, wenn die Höhe zwischen beiden mit h, die parallelen Seiten mit a, b bezeichnet werden $= \frac{a+b}{2} \cdot h$.

Parameter sind constante Gröfsen, die sich auf die Durchmesser, zunächst auf die Axen der Kegelschnitte beziehen. Die Parabel hat nur eine Axe, daher nur einen P. $y^2 = Ax$. x die Abscisse, vom Scheitel aus genommen, ist eine Länge, ein Theil der Axe, y die rechtwinklige Ordinate und der Parameter A also die dritte Proportionale zwischen beiden.

Ellipse und Hyperbeln haben zwei Axen, also auch zwei P.

Die Gleichung für die Ellipse ist $y^2 = Ax - Bx^2$; die Parameter A und B bestimmen die Gröfsen der Axen: die eine

Axe ist $\frac{A}{B}$, die zweite $\frac{A}{\sqrt{B}}$ (s. „Ellipse“, No. 6, pag. 42). Ist $B > 1$, so ist $\frac{A}{\sqrt{B}}$ die grofse, $\frac{A}{B}$ die kleine Axe; ist $B < 1$, so ist $\frac{A}{B}$ die grofse, $\frac{A}{\sqrt{B}}$ die kleine Axe. Bezeichnet man die eine Axe (wie „Ellipse“ pag. 43) mit $2a$, die andere mit $2c$, so ist

$$A = \frac{2c^2}{a} \text{ und } B = \frac{c^2}{a^2}$$

Die Gleichung für die Hyperbel ist $y^2 = Ax + Bx^2$. Auch hier ist die eine Axe $= \frac{A}{B}$, die zweite $= \frac{A}{\sqrt{B}}$ (s. „Hyperbel“, No. 3, Formel 16, 17, pag. 262) und es ist

$$A = \frac{2c^2}{a}, \; B = \frac{c^2}{a^2}$$

Partialdivision, Partialdividend, Partialquotient, s. u. „Buchstabenrechnung“, No. 3, pag. 439 und unter „Division“, pag. 317.

Partialmultiplication, P.-multiplicandus, P.-multiplicator, P.-product, s. u. „Buchstabenrechnung“ und „Multiplicator“, pag. 438.

Partielle Differenzen von Funtionen. Wenn man in einer Function U die Veränderlichen x, y, z... derselben, jede um eine kleine Gröfse Δx, Δy, Δz wachsen läfst, die neue Function bildet, und zieht die erstere von der zweiten ab, so erhält man die Differenz beider Functionen, die von denselben Veränderlichen abhängt.

1tes Beispiel.

$$U = ax + by$$
$$U + \Delta U = a(x + \Delta x) + b(y + \Delta y)$$

woraus $\Delta U = a\,\Delta x + b\,\Delta y$

2tes Beispiel.

$$U = ax^2 + by^2$$

also $U + \Delta U = a(x+\Delta x)^2 + b(y+\Delta y)^2$

Die Klammern aufgelöst und abgezogen gibt

$$\Delta U = (2ax + a\,\Delta x)\,\Delta x + (3by^2 + 3by\,\Delta y + b\,\Delta y^2)\,\Delta y$$

Die aus beiden Gliedern bestehende Differenz heifst die Totaldifferenz oder die vollständige D., jedes der beiden Glieder ist eine partielle Differenz. Die erste D. ist diejenige D., wenn x allein veränderlich und y constant, die zweite D. diejenige D., wenn y allein veränderlich und x constant betrachtet wird.

3tes Beispiel.

$$U = x^2 + axy + y^2$$
$$U + \Delta U = (x + \Delta x)^2 + a(x + \Delta x)(y + \Delta y) + (y + \Delta y)^2$$

und $$\Delta U = (2x + \Delta x + ay)\,\Delta x + (ax + 2y + \Delta y)\,\Delta y + a\,\Delta x \cdot \Delta y$$

Diese partielle D. hat noch ein drittes Glied, welches das Product beider Zuwachse zum Factor hat, und dieser Fall tritt jedesmal ein, wenn in der Function zwei und mehrere Veränderliche ein Product bilden. Dieses dritte Glied ist die partielle D. des ersten Gliedes, wenn man darin allein y variabel und x constant setzt, oder die partielle D. des zweiten Gliedes, wenn man darin x allein variabel und y constant setzt. Es ist mithin die Formel mit dreien Gliedern die allgemein gültige; denn man sieht, dafs in den beiden ersten Beispielen das Glied mit $\Delta x \cdot \Delta y = 0$ werden mufs, weil in jeder das erste Glied kein y und das zweite kein x enthält.

4tes Beispiel.

$$U = y^2x + yx^2 + ax^3$$
$$U + \Delta U = (y + \Delta y)^2(x + \Delta x) + (y + \Delta y)(x + \Delta x)^2 + a(x + \Delta x)^3$$

hieraus $$\Delta U = (y^2 + 2yx + y\,\Delta x + 3ax^2 + 3ax\,\Delta x + a\,\Delta x^2)\,\Delta x + (2yx + x\,\Delta y + x^2)\,\Delta y + (2y + \Delta y + 2x + \Delta x)\,\Delta x \cdot \Delta y$$

5tes Beispiel. $U = \frac{x}{y}$

also $U + \Delta U = \frac{x+\Delta x}{y+\Delta y} - \frac{x}{y} = \frac{y\Delta x - x\Delta y}{y(y+\Delta y)}$

Nimmt man die Differenz auf die blofs Variabele x, so erhält man

Das erste Glied $\frac{y\,\Delta x}{y^2} = \frac{\Delta x}{y}$

Die Differenz auf die bloſs Variabele y genommen,

das zweite Glied $-\frac{x\Delta y}{y(y+\Delta y)}$

Und wenn man das erste Glied auf y oder das zweite auf x sich ändern läſst, das dritte Glied

$$\frac{\Delta x}{y+\Delta y}-\frac{\Delta x}{y}=-\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{y(y+\Delta y)}$$

oder

$$-\frac{(x+\Delta x)\Delta y}{y(y+\Delta y)}+\frac{x\Delta y}{y(y+\Delta y)}=-\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{y(y+\Delta y)}$$

2. Es sei Z eine Function zweier veränderlichen Gröſsen x, y, und gegeben ist die Differenzengleichung:

$$\Delta Z=A\,\Delta x+B\,\Delta y$$

wo $A\,\Delta x$ und $B\,\Delta y$ die partiellen Differenzen von ΔZ, erstere auf x, letztere auf y allein und A und B Functionen von x und y sind. Ist ferner die partielle Differenz von A in Beziehung auf $y=p\,\Delta y$, die von B in Beziehung auf $x=q\,\Delta x$, so hat man die partiellen Differenzengleichungen

$$\Delta A=p\,\Delta y$$
$$\Delta B=q\,\Delta x$$

und wenn bloſs A veränderlich und B constant genommen wird:

$$\Delta Z=(A+\Delta A)\,\Delta x+B\,\Delta y \qquad (1)$$
$$=(A+p\,\Delta y)\,\Delta x+B\,\Delta y$$
$$=A\,\Delta x+B\,\Delta y+p\,\Delta x\cdot\Delta y \qquad (2)$$

Setzt man (statt 1) A constant und B veränderlich, also

$$\Delta Z=A\,\Delta x+(B+\Delta B)\,\Delta y$$

und verfährt wie so eben, so erhält man

$$\Delta Z=A\,\Delta x+B\,\Delta y+q\cdot\Delta x\cdot\Delta y \qquad (3)$$

Es geht also hervor, daſs die auf x und y von A und B genommenen Partial-Differenzen p und q einander gleich sind.

Partielle Differenzialgleichungen. Der Begriff von Partiellem Differenzial ist in dem Art. „Differenzial“, No. 45, pag. 273 angegeben. So wie partielles Differenzial dem Totaldifferenzial, so bildet die partielle Differenzialgleichung den Gegensatz von Totaldifferenzialgleichung.

Man ersieht übrigens aus dem vorstehenden Art. daſs partielle Differenzen gegen die vollkommenen Differenzen in demselben Verhältniſs stehen, wie es bei den Differenzialen der Fall ist.

Ist eine Differenzialgleichung gegeben, in welcher mehr als zwei Veränderliche vorkommen, die alle eine Beziehung, eine gegenseitige Abhängigkeit zu einander haben, und man differenzirt in Beziehung auf irgend eine derselben, diese als die Urveränderliche betrachtet, alle übrigen als abhängig veränderliche genommen, so entsteht eine Total-Differenzialgleichung. Differenzirt man aber nur eine einzige der übrigen Veränderlichen als veränderlich, die anderen Veränderlichen dagegen als constant angesehen, so entsteht eine partielle Differenzialgleichung.

Es sei z. B. gegeben die Differenzialgleichung

$$A\,\partial x+B\,\partial y=C\,\partial z$$

so sind folgende sechs Gleichungen Total-D.-Gleichungen:

1. $\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{A}{B}=\frac{C}{B}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$
2. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{A}{C}+\frac{B}{C}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}$
3. $\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{B}{A}=\frac{C}{A}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$
4. $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{B}{C}+\frac{A}{C}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}$
5. $\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{B}{A}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{C}{A}$
6. $\frac{\partial y}{\partial z}+\frac{A}{B}\cdot\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{C}{B}$

Die folgenden sechs Gleichungen, in welchen jedesmal eine dritte der Veränderlichen constant gesetzt ist, sind partielle D.-Gleichungen.

1. $\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{A}{B}$; 2. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{A}{C}$; 3. $\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{B}{A}$
4. $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{B}{C}$; 5. $\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{C}{A}$; 6. $\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{C}{B}$

2. Eine Function von einer einzigen Veränderlichen wird allgemein bezeichnet: $F(x)$; $f(x)$; $\varphi(x)$, wo x die einzige Urveränderliche ist und die also keine partiellen D.-Gleichungen zuläſst.

Eine Function von mehreren Veränderlichen: $F(x,y)$; $f(x,y,z)$; $\varphi(x,y,z,u)$ u. s. w.

Die Differenzialquotienten der Functionen werden bezeichnet: von $F(x)$ mit $F'(x)$; von $\varphi(x)$ mit $\varphi'(x)$: von $f(x,y)$ mit $f'(x,y)$.

Die Totaldifferenziale der Functionen werden bezeichnet

von $F(x)$ mit $\partial x\, F'(x)$; von φx mit $\partial x\, \varphi'(x)$; von $f(x, y)$ mit $\partial x\, f'(x, y)$ und $\partial y\, f'(x, y)$, je nachdem x oder y als Urveränderliche gilt.

Die Partialdifferenzialquotienten einer Function z. B. von z werden bezeichnet:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right); \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

Die Partialdifferenziale der Function einer Function, z. B. von z werden bezeichnet

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\partial y; \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\partial x; \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\partial u$$

Die Partial-Differenziale einer Function von mehreren Veränderlichen werden bezeichnet

$$\left(\frac{F'(x, y)}{\partial x}\right)\partial x; \left(\frac{F'(x, y)}{\partial y}\right)\partial y; \left(\frac{\varphi'(x, y, z)}{\partial z}\right)\partial z,$$

je nachdem x, y, z als Urveränderliche angesehen wird.

Die eingeklammerten Quotienten bedeuten Functionen von y, x, u, z, die Nenner derselben sind also mit den gleich bezeichneten Factoren, welches Differenziale sind, nicht aufzuheben. Die eingeklammerten Gröfsen sind einzige untrennbare Gröfsen.

Das vollständige Differenzial einer Function z. B. u wird allgemein geschrieben

$$\partial u = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\partial z + \ldots.$$

Die Partial-Differenziale derselben Function können (allgemein) immer nur in einem einzigen Gliede des Total-Differenzials bestehen

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\partial y; \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\partial x; \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\partial z; \ldots.$$

3. Es sei Z eine gleichartige Function von x und y, d. h. die Summe der Exponenten von x und y haben in allen Gliedern dieselbe Dimension m. Ist nun gegeben

$$\partial Z = A\,\partial x + B\,\partial y \qquad (1)$$

so läfst sich beweisen, dafs

$$mZ = Ax + By$$

Setzt man nämlich $y = ux$, wo u eine von y abhängige veränderliche Gröfse ist, so hat man

$$\partial y = u\,\partial x + x\,\partial u \qquad (2)$$

und aus Gleichung 1

$$\partial Z = A\,\partial x + Bu\,\partial x + Bx\,\partial u \qquad (3)$$

Es ist mithin Z allein abhängig von x dargestellt und man kann Z als ein Product vx^m betrachten, in welchem v nur von y oder von u abhängig ist. Aus $Z = vx^m$ und aus 3 entstehen die Differenzialgleichungen

$$\partial Z = mvx^{m-1}\,\partial x + x^m\,\partial v$$

Hierzu Gleichung 3

$$\partial Z = A\,\partial x + Bu\,\partial x + Bx\,\partial u$$

woraus $mv\,x^{m-1}\,\partial x + x^m\,\partial v$
$= A\,\partial x + Bu\,\partial x + Bx\,\partial u$

Da aber hier nur von Partial-Differenzialen die Rede ist, so fallen die Differenziale auf andere Veränderliche als Urvariabele enthaltende Glieder, also $x^m\,\partial v$ und $Bx\,\partial u$ aus, und man hat

$$mv\,x^{m-1}\,\partial x = A\,\partial x + Bu\,\partial x$$

Für den Werth von vx^m den Werth Z gesetzt und mit ∂x dividirt, gibt

$$\frac{mZ}{x} = A + Bu$$

woraus erwiesen

$$mZ = Ax + Bux = Ax + By \qquad (4)$$

1. Beispiel.

Gegeben $Z = \dfrac{y^3 + x^3}{y - x}$

Man erhält das Differenzial

$$\partial Z = \frac{(y-x)(3y^2\,\partial y + 3x^2\,\partial x) - (y^3 + x^3)(\partial y - \partial x)}{(y-x)^2}$$

Dieses Differenzial in Beziehung auf x genommen, also y als constant betrachtet, gibt

$$\partial Z = \frac{(y-x)\cdot 3x^2\,\partial x - (y^3 + x^3)(-\partial x)}{(y-x)^2} = \frac{-2x^3 + 3x^2 y + y^3}{(y-x)^2}\,\partial x$$

$$\partial Z = \frac{(y-x)\,3y^2\,\partial y - (y^3+x^3)\,\partial y}{(y-x)^2} = \frac{2y^3 - 3y^2x - x^3}{(y-x)^2}\,\partial y$$

Also mit ∂x und ∂y dividirt

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = A = \frac{-2x^3+3x^2y+y^3}{(y-x)^2}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = B = \frac{2y^3-3y^2x-x^3}{(y-x)^2}$$

Nun A mit x, B mit y multiplicirt, beide Producte addirt geben

$$\frac{2(y^4-x^4)-2xy(y^2-x^2)}{(y-x)^2} = 2(y^2-x^2) = \frac{2(y^2-x^2)(y-x)}{y-x} = 2\,\frac{y^3+x^3}{y-x} = 2Z$$

Da nun in der gegebenen Gleichung der Zähler drei, der Nenner eine Dimension hat, so ist $m=2$ und das Resultat stimmend.

2. Beispiel.

Gegeben $Z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (also $m=-1$)

Man erhält das Differenzial $\frac{x\,\partial x + y\,\partial y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$

Also $\frac{\partial Z}{\partial x} = A = \frac{-x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$ und $\frac{\partial Z}{\partial y} = B = \frac{-y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$

folglich $Ax + By = -\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = mZ = -Z$

4. Es ist Z irgend eine Function von x und y und es sind folgende Differenzialgleichungen gegeben:

$$\partial Z = A\,\partial x + B\,\partial y$$
$$\partial A = r\,\partial x + p\,\partial y$$
$$\partial B = q\,\partial x + s\,\partial y$$

so ist in allen Fällen $p=q$

Dann legt man Satz 3 des vorigen Art. zu Grunde, nämlich

Gleichung 1:

$$\Delta Z = A\Delta x + B\Delta y + p\Delta x\cdot\Delta y$$

Gleichung 2:

$$\Delta Z = A\Delta x + B\Delta y + q\Delta x\cdot\Delta y$$

so entsteht, wenn man zu den Grenzwerthen übergeht:

$$\partial Z = A\,\partial x + B\,\partial y + p\,\partial x\cdot\partial y$$
$$\partial Z = A\,\partial x + B\,\partial y + q\,\partial x\cdot\partial y$$

woraus die Richtigkeit des Satzes $p=q$ hervorgeht.

Beispiel.

Es sei $Z = x\sin y + y\cos x$

so ist

$$\partial Z = (x\cos y + \cos x)\,\partial y + (\sin y - y\sin x)\,\partial x$$

also $A = \sin y - y\sin x$

und $B = x\cos y + \cos x$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} = \cos y - \sin x$$

Es ist $r = s = \cos y$

$p = q = -\sin x$

5. Den Erläuterungen No. 2 zu Folge hat man folgende symbolische Bezeichnung des Satzes 4. Es werden ausgedrückt:

Die partiellen Differenzialquotienten A mit $\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)$; B mit $\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)$; p mit $\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)$ und q mit $\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)$.

$A\,\partial x$ mit $\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\partial x$; $B\,\partial y$ mit $\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)\partial y$

Der behauptete Satz mit: $\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)$

6. Der Satz No. 4 ist in sofern wichtig, weil man bei einer vorliegenden Differenzialgleichung mit $p=q$ prüfen kann, ob dieselbe reell ist oder nicht, d. h. ob sie aus einer vollkommenen Stammgleichung abgeleitet ist oder nicht. Vergleiche No. 33, pag. 305 des Art. „Integral", wo erwähnt ist, dafs es Functionen gibt, von welchen kein Integral möglich ist; ferner vergleiche No. 4 des Art. „Differenzialgleichung", pag. 287, wo dasselbe ausführlicher nachgewiesen ist.

Beispiel. Gesetzt es sei von einer unbekannten Function Z das auf x genommene Differenzial $A = 2axy$ gegeben: es ist mithin auch B unbekannt, so hat man die Gleichung

$$\partial Z = 2axy\,\partial x + B\cdot\partial y$$

woraus

$$Z = \int 2axy\,\partial x + \int B\,\partial y = ayx^2 + \int B\cdot\partial y$$

Es könnte nun scheinen, als wäre B ganz willkührlich zu nehmen, allein das ist nicht der Fall, es hat B einen ganz bestimmten Werth, und dieser Umstand führt zu folgender wichtigen Aufgabe:

7. Es sei Z eine Function zweier Veränderlichen x, y; das partielle Differenzial nach x sei $A\,\partial x$ gegeben, es soll aus diesem das zweite partielle Differenzial $B\,\partial y$, das vollständige Differenzial von Z und die Function Z selbst gefunden werden.

Nach No. 5 ist $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$ d. i. $p = q$

daher $$\frac{\partial A}{\partial y}\,\partial x = \frac{\partial B}{\partial x}\,\partial x$$

Nun ist aber $\frac{\partial B}{\partial x}\,\partial x$ das partielle Differenzial von B nach x bei constantem y, und somit B das Integral von

$$\frac{\partial A}{\partial y}\,\partial x = \int \frac{\partial A}{\partial y}\,\partial x$$

d. h. Es wird das Differenzial von A auf die alleinige Veränderliche y genommen, und die daraus hervorgegangene Gröfse nach x integrirt:

1. Bei dem Beispiel des vorigen Satzes ist $A = 2axy$,

Hieraus

$$B = \int \frac{\partial (2axy)}{\partial y}\,\partial x = \int 2ax\,\partial x = ax^2$$

Es ist demnach

$$\partial Z = 2a\,xy\,\partial x + ax^2\,\partial x$$
$$\partial A = 2ay + 2ax$$
$$\partial B = 2a.x + 0$$

die Function

$$Z = \int 2a\,xy\,\partial x + \int ax^2\,\partial y = ax^2y + ax^2y$$

2. Beispiel. Gegeben $A = x$.

Hieraus $$B = \int \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \partial x = y \cdot \partial x$$

folglich
$$\partial Z = x\,\partial x + y\,\partial y$$
$$\partial A = \partial x + 0$$
$$\partial B = 0 + \partial y$$
$$Z = \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}y^2$$

3tes Beispiel.

Es ist gegeben $A = \frac{x-y}{\sqrt{x^2-2xy}}$

Mithin $$B = \int \frac{\partial A}{\partial y}\,\partial x = \int \frac{x-y}{\partial y\sqrt{x^2-2xy}}\,\partial x = \int \frac{xy}{(x^2-2xy)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x\,\partial y}{\sqrt{x^2-2xy}}$$

Hieraus $$\partial Z = \frac{(x-y)\,\partial x}{\sqrt{x^2-2xy}} - \frac{x\,\partial y}{\sqrt{x^2-2xy}}$$

Man erhält $$\partial A = \partial \frac{x-y}{\sqrt{x^2-2xy}} = -\frac{y^2}{(x^2-2xy)^{\frac{3}{2}}} + \frac{xy}{(x^2-2xy)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\partial B = \partial \frac{xy}{(x^2-2xy)^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2}{(x^2-2xy)^{\frac{1}{2}}}$$

und $$Z = \int \frac{x-y}{\sqrt{x^2-2xy}}\,\partial x + \int \frac{x}{\sqrt{x^2-2xy}}\,\partial y = \sqrt{x^2-2xy}$$

Pascals Dreieck, Arithmetisches Dreieck; eine Reihe von Zahlen wird so genannt, weil man sie als von Pascal erfunden angenommen hat, wiewohl sie schon früher dagewesen ist. Sie besteht in der Untereinanderstellung der Binomial-Coefficienten sämmtlicher Grade vom 0ten Grade ab, weshalb man auch die Reihen mit der 0ten anfangend bezeichnet.

Die 0te Reihe enthält eine, die erste 2 u. s. w., die $m$te $(m+1)$ Zahlen. Die Reihen sind also arithmetische Reihen der 0ten, 1ten, 2ten .... $m$ten Ordnung.

Wenn man in jeder verticalen Reihe jede obere von der zunächst unteren abzieht, so entsteht die links neben stehende verticale Reihe, und auch die verticalen Zahlen bilden Reihen nach steigenden Ordnungen: die erste eine Reihe der 0ten Ordnung, die 2te eine der ersten, die $m$te eine der $(m-1)$ten Ordnung.

Nach der untenstehenden Reihenbezeichnung hat die 0te Reihe die einzige Zahl 1; jede Reihe hat 1 zum ersten Gliede, die erste Reihe 2 Zahlen, die 2te 3 Zahlen .... die $m$te $(m+1)$ Zahlen. Bezeichnet man die Zahl der Reihe, (den Grad der Potenz) allgemein mit n und die Zahl des Gliedes darin allgemein mit m, so hat man für eine $n$te Reihe die Gröfsen der Glieder der Reihenfolge nach

Glieder 1 2 3 4

Gröfse $1;\ \frac{n}{1};\ \frac{n(n-1)}{1\cdot 2};\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\ \ldots\ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+2)}{1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ m-1}$

Dies gibt folgende Zusammenstellung, wobei zugleich die Summe S angegeben ist, welche für jeden Grad $= 2^n$ ist.

Potenzgrade.	Reihe der Binomial-Coefficienten.	Summe.
0	1	$2^0 = 1$
1	1. 1	$2^1 = 2$
2	1. 2. 1	$2^2 = 4$
3	1. 3. 3. 1	$2^3 = 8$
4	1. 4. 6. 4. 1	$2^4 = 16$
5	1. 5. 10. 10. 5. 1	$2^5 = 32$
6	1. 6. 15. 20. 15. 6. 1	$2^6 = 64$
7	1. 7. 21. 35. 35. 21. 7. 1	$2^7 = 128$
8	1. 8. 28. 56. 70. 56. 28. 8. 1 . .	$2^8 = 256$
9	1. 9. 36. 84. 126. 126. 84. 36. 9. 1 .	$2^9 = 512$
10	1. 10. 45. 120. 210. 252. 210. 120. 45. 10. 1	$2^{10} = 1024$

Passageninstrument, s. v. w. „Mittagsfernrohr“, auch „Durchgangsinstrument“ genannt.

Pedometer, ein Instrument, welches auf einer Reise zu Wagen die Länge des zurückgelegten Weges angibt, ein Schrittzähler von den verschiedensten Constructionen.

Pendel. In dem Art. „Fall durch einen Kreisbogen“, pag. 72, ist die Theorie des einfachen Pendels ausführlich vorgetragen, dessen Schwingungszeit t ermittelt und mit Formel 15 ausgedrückt.

Dieses einfache Pendel besteht nun in einem Massenpunkt, der an einer massenlosen unbiegsamen geraden Linie in der Entfernung r von der Drehaxe befestigt ist.

Die Formel ist weitläufig. Wenn man aber den Schwingungsbogen klein annimmt, so ist die Zeit der Schwingung näherungsweise

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{2g}}$$

Die Schwingungszeit ist also um so gröfser, je gröfser der Abstand des Massenpunkts von der Drehaxe ist.

Hängt man also eine grofse Anzahl einfacher Pendel neben einander auf, deren Abstände des Massenpunkts von der Drehaxe von der kleinsten Länge bis zu einer Länge l allmählich gesteigert sind, so schwingt der kürzeste eine viel kürzere, der längste eine viel längere Zeit, als die oben gedachte Zeit t beträgt, und es wird das Pendel von der Länge $= r$ gerade die Zeit t zu einer Schwingung gebrauchen.

Stellt man sich nun alle diese Massenpunkte in einer einzigen geraden unbiegsamen massenlosen Linie neben einander fest vereinigt vor, so hat man ein physisches Pendel, und es hat dieses die Eigenschaft, dafs die der Drehaxe näheren Massenpunkte in der ihrer Lage entsprechenden Schwingung verzögert und die der Drehaxe entfernteren Massenpunkte in der ihrer Lage entsprechenden Schwingung beschleunigt werden. Oder dafs die der Drehaxe näheren Punkte die Schwingung des unter dem Abstand r befindlichen Punkt beschleunigen, die entfernteren Punkte sie verzögern.

Die Länge r des einfachen Pendels, welches mit dem physischen Pendel gleiche Schwingungen macht, erhält man folgender Weise.

Es sei C die Drehaxe, G der Schwerpunkt des Systems, S der Schwingungs-

Fig. 885.

unkt, d. h. CS sei die Länge r des mit iesem physischen Pendel gleich schwinenden einfachen Pendels, M das Volum oder die Masse oder das Gewicht) des ystems. Es sei das Trägheitsmoment n Beziehung auf den Schwerpunkt G als Drehaxe $= \mathfrak{M}'$, das Trägheitsmoment in Beziehung auf die Axe C als Drehaxe $= \mathfrak{M}$, der Abstand CG des Schwerpunkts von der Axe $C = a$, der Abstand $SG = k$, so ist nach dem Art. „Momente er Trägheit“, No. 8, pag. 165 mit ig. 815

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + a^2 \cdot M$$

Nun hat die durch das Moment $\mathfrak{M}'$ uf den Schwerpunkt G reducirte Masse M in Beziehung auf die Drehaxe C den Hebelsarm $CG = a$; die durch das Moment $\mathfrak{M}$ in S befindlich gewesenen auf reducirte Masse M den Hebelsarm r.

Ferner bei Reduction der in S vereinigten Masse M auf G

$$\mathfrak{M}' = k^2 M$$

ei Reduction derselben aus G nach C

$$\mathfrak{M} = a^2 M$$

Es ist also $r a^2 M = a(k^2 + a^2) M$

der $$ra = k^2 + a^2$$

oraus die verlangte Länge $r = \frac{k^2}{a} + a$

Pendel, ballistisches, s. „Ballistiches Pendel“.

Pentaeder wird mitunter ein Prisma enannt, welches gleichseitige Dreiecke u Grundflächen hat.

Pentagon, s. v. w. „Fünfeck“.

Pentagonalzahlen, fünfeckige Zahen sind die Reihe von Zahlen, deren Bildung das Fünfeck zu Grunde liegt vergl. „Dekagonalzahlen“). Die Zahlenreihe ist

$$1 \cdot 5 \cdot 12 \cdot 22 \cdot 35 \ldots . \tfrac{1}{2} n (3n - 1)$$

1te Differenzenreihe

$$4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13 \ldots .$$

2te Differenzenreihe

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \ldots .$$

Summe der ersten n Glieder

$$S = \tfrac{1}{2} n^2 (n + 1)$$

Pentedekagon, s. v. w. „Fünfzehneck“.

Perikaustika, ist eine von Jacob Bernoulli aus der Kaustika hergeleitete Linie: In Fig. 251, pag. 415, Bd. I. sind die punktirten Linien die aus dem leuchtenden Punkt A gesendeten Strahlen wie A_1, A_2, A_3 u. s. w., die ausgezogenen Linien die von diesen Strahlen zurückgeworfenen Strahlen. Der Strahl A_1 reflectirt nach $1 \cdot 2$, der Strahl A_2 nach $2 \cdot 4$ u. s. w. Wenn man nun den Strahl A_1 über 1 hinaus verlängert und diese Verlängerung dem zugehörigen reflectirten Strahl gleich macht, so ist der Endpunkt der über 1 verlängerten Linie ein Punkt der Perikaustika. Eben so ist der Endpunkt des um die Linie 3, 6 verlängerten Strahls A_3 ein Punkt der P.

Perigeum ist bei der um die Erde liegenden Mondbahn der der Erde nächste Punkt, er liegt im Scheitel der grofsen Axe (s. „Apogeum“).

Perihelium ist bei den Planetenbahnen der der Sonne zunächst liegende Punkt. Er liegt im Scheitel der grofsen Bahnaxe.

Perimeter ist der Umfang einer Figur.

Periodischer Decimalbruch, s. Bd. II, pag. 249; Verwandlung derselben in gemeine Brüche und die 4 Species mit denselben.

Periodischer Kettenbruch ist ein solcher, dessen Nenner periodisch abwechseln, wie bei den periodischen Decimalbrüchen die Decimalstellen.

$$x = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a \text{ (in inf.)}}}}}$$

$$y = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b \text{ (in inf.)}}}}}}}$$

$$z = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c \text{ (in inf.)}}}}}}}$$

Diese periodischen Kettenbrüche haben die merkwürdige Eigenschaft, dafs sie auf eine quadratische Gleichung gebracht werden können.

Z. B. $x = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{x}}$.

Was dem zweiten Gliede 1 des Nenners zugefügt werden mufs, nämlich die un-

endliche Anzahl von $\frac{1}{a+\frac{1}{a}}$ ist offenbar $=x$ und man hat

1. $x=\frac{1}{a+x}$, woraus $x^2+ax-1=0$, woraus $x=-\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+1}$.

2. $x=\frac{1}{a+\frac{1}{b+x}}$;

hieraus $x^2+bx-\frac{b}{a}=0$ und $x=-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{b}{a}}$

3. $x=\frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+x}}}=\frac{bx+bc+1}{abx+ab+abc+a+c}$

woraus

$(ab+1)x^2+(abc+a+c-b)x-bc-1=0$

also $x=-\frac{abc+a-b+c}{2(ab+1)}+\sqrt{\left(\frac{abc+a-b+c}{2(ab+1)}\right)^2+(bc+1)}$

Periodischer Monat, s. „Astronomischer Monat“, No. 3, pag. 153.

Periöci, s. v. w. „Nebenwohner“.

Perioptrik, Perioptik ist der Theil der Optik, welcher mit dem auf Oberflächen von Körpern fallenden und von denselben reflectirten Lichtstrahlen sich beschäftigt.

Peripherie ist dem Worte nach dasselbe mit Perimeter, dem Umfang jeder Figur, es bedeutet aber ausschliefslich einen Kreisumfang.

Peripheriewinkel ist jeder Winkel, den zwei Sehnen in einem Punkt der Peripherie mit einander bilden. Der P. ist halb so grofs als der mit ihm auf gleichem Kreisbogen stehende Centriwinkel.

Periscii, Umschattige sind die Bewohner der kalten Zone, weil dort zur Zeit des Tages, indem die Sonne einen Kreis um sie beschreibt, ihr Sonnenschatten nach allen Richtungen fällt.

Pariscopische Brillen sind solche, deren eines Glas für Kurzsichtige, das andere für Weitsichtige eingerichtet ist, um den Nachtheil von den Augen abzuwenden, welche aus der Kugelgestalt der Gläser zu befürchten ist.

Permutationen, Versetzung von Elementen. Die Elemente *abcde* sollen in geordneter Reihenfolge so verschiedenartig versetzt werden, dafs die letzte *edcba* hervorgeht.

1 Element a P. $= a$
2 Elemente a, b P. $= ab, ba$
3 Elemente a, b, c P $= abc, acb, bac, bca, cab, cba$
4 Elemente a, b, c, d P. $= abcd, abdc, acbd, acdb, adbc, adcb$
$bacd, badc, bcad, bcda, bdac, bdca$
$cabd, cadb, cbad, cbda, cdab, cdba$
$dabc, dacb, dbac, dbca, dcab, dcba$

Dieser Darstellung zufolge ist nun die Bestimmung der Anzahl von möglichen Versetzungen sehr leicht. Geht man nämlich von einem Element aus, so hat dieses nur eine Versetzung. Bei Hinzutritt eines zweiten Elements hat jedes für sich diese eine, beide also 2 Versetzungen. Tritt nun ein drittes Element hinzu, so haben die Versetzungen von zwei Elementen jedes einzelne Element zum Begleiter und es entstehen mithin 3×2 Versetzungen, mit 4 Elementen, also $4\times3\times2=24$, folglich mit n Elementen $n\cdot(n-1)(n-2)\ldots3\cdot2\cdot1$ Versetzungen.

Sind unter n Elementen 2 gleiche, so geben die n Elemente $1\cdot2\cdot3\ldots n$ Versetzungen, wenn man sie sämmtlich als ungleich ansieht, die beiden gleichen aber veranlassen, dafs nur die Hälfte von denselben wahrnehmbar bleibt. Bei 3 gleichen Elementen bleiben so viele unbemerkbar, als drei ungleiche Elemente Versetzungen geben, also $1\cdot2\cdot3$; es ist also nur der 6te Theil der Versetzungen von ungleichen Elementen wahrzunehmen. Bezeichnet man der Kürze wegen die Anzahl, in welcher ein Element vorhanden ist, mit dieser Zahl als Exponent, so schreibt man beiden Elementen $a, bb, ccc,$

$dddd$, a, b^2, c^3, d^4 und hat nun bei 10 Elementen die mögliche Anzahl der wahrnehmbaren Versetzungen.

$$\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{1\times1\cdot2\times1\cdot2\cdot3\times1\cdot2\cdot3\cdot4}=4\cdot5\cdot7\cdot9\cdot10 \text{ Versetzungen}$$

Allgemein bei $a^p\cdot b^q\cdot c^r\cdot d^s$ in Summa n Elementen

die Anzahl der Versetzungen $=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\ldots\ldots\ldots\ldots(n-2)(n-1)n}{1\cdot2\cdot3\ldots p\times1\cdot2\cdot3\ldots q\times1\cdot2\cdot3\ldots r\times1\cdot2\cdot3\ldots s}$

Permutiren, Versetzen, die Permutationen geordnet darstellen.

Perpendiculär, lothrecht, nach dem Mittelpunkt der Erde hin gerichtet; Linien, die rechte Winkel mit einander bilden, sollten winkelrecht oder normal genannt werden.

Perpendiculärmethode. Dies ist in der Feldmefskunst die Arbeit bei Aufnahme von unregelmäfsig gekrümmten Linien, gewöhnlich Grenzlinien mit Hülfe von Abscissen und rechtwinkligen Ordinaten darauf, die um so näher an einander abgesteckt werden, je krummer und unregelmäfsiger die aufzunehmende Linie ist. Die Abscisse oder mehrere unter Neigungswinkeln an einander wählt man möglichst nahe der aufzumessenden Linie, so dafs sie dieselbe auch durchschneiden kann.

Die Absteckung der Ordinaten, wie diese einfache Arbeit mit Kette und Stäben oder Maafsstäben geschieht, ist in dem Art. „Baculometrie“ mit Hülfe von Fig 159 und 160 beschrieben. Man bedient sich aber auch des Diopterkreuzes oder des Mefstisches, wie dies im Art. „Parallelen abstecken“ erklärt worden ist.

Perpendikel ist die nach dem Mittelpunkt der Erde gerichtete Linie. Auch werden Linien so genannt, welche rechte Winkel mit einander bilden, aber mit Unrecht; sie sollten winkelrecht oder normal heifsen.

Perpendikelwaage, s. v. w. „Setzwaage, Bleiwaage“.

Perpetuum mobile ist eine Idee, welche schon viele sonst intelligente aber in diesem Punkt mit gänzlichem Mangel an Einsicht behaftete Leute unglücklich gemacht hat. Dem Begriff nach ist P. m. eine Maschine, welche die zu ihrer mechanischen Thätigkeit consumirte Kraft aus sich selbst heraus fortwährend wieder ersetzt.

Es hat seine Richtigkeit, dafs in Folge des von der Natur gegebenen Beharrungsstandes ein in Ruhe befindlicher Körper nur durch eine äufsere Kraft in Bewegung und ein in Bewegung befindlicher Körper in Ruhe gebracht werden kann. Hat ein Stofs oder ein anhaltender Druck ein System von Körpern in Bewegung gebracht, so kann sie fortgenommen werden und das System bleibt des Beharrungsstandes wegen in Bewegung.

Dies würde unausbleiblich in jedem einzelnen Fall statt finden, wenn nicht die Ursache, welche diese Regel zu einer Regula falsi macht, in dem bewegten Körper selbst eingegraben wäre.

Wenn nämlich ein Körper in Berührung mit einem ruhenden Körper ist, so hat er das Bestreben diesen in die Bewegung mit hinein zu ziehen; da aber der zweite Körper in Ruhe bleiben will, so widersteht er dem sich bewegenden Körper, er übt einen Widerstand gegen ihn aus, der seine Bewegung offenbar hemmend vermindert. Jeder nur einen Augenblick ausgeübte Widerstand vermindert die Kraft, und soll sie nicht vermindert werden, so bedarf sie des Ersatzes. Da nun der Widerstand perpetuell geschieht, so ist er ein Perpetuum immutabile, welches mit dem Perpetuum mobile in gleichem Grade sich schwächt und endlich erschöpft zu Null wird.

Diese Behauptung bestätigt die Natur: der liebe Gott hat die Welt nicht aus Nichts geschaffen; das ist nicht möglich, es ist jedenfalls der Stoff dazu vorhanden gewesen. Die bis heut vollendete Welt aber ist immer kein Perpetuum mobile; man ersieht dies aus den Aenderungen, welche sichtbar vorkommen, und welche mit dem Namen Störungen belegt werden.

Jedenfalls sind diese sogenannten Störungen Ortsänderungen von Kräften und mit diesen Abänderungen der Kräftegröfsen selbst, also weise Maafsregeln sind diese sogenannten Störungen, dafs das Weltgebäude in seinem Laufe und Bestande nicht gestört werde.

Perturlationen sind die attractorischen Einwirkungen der Weltkörper auf einander, durch welche sie aus den elliptischen Bahnen, denen sie, um ihren Cen-

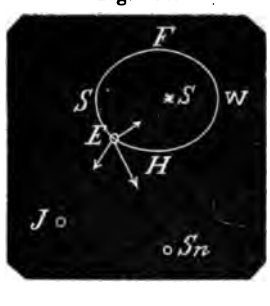
tralkörper laufend, ohne solche eintretenden Gegenwirkungen, dem allgemein geltenden Anziehungsgesetz gemäfs streng folgen würden, abgelenkt werden.

Es ist nicht ein einziger Planet, der einem anderen Planeten diese Ablenkung verursacht, sondern es geschieht dieselbe von jedem einzelnen der anderen Planeten des ganzen Sonnensystems, weil dasselbe Attractionsgesetz jedem einzelnen Weltkörper inne wohnt, so dafs die verursachten Seitenbewegungen die nothwendigen Folgen desselben Gesetzes und an Gröfse und Richtung denselben streng unterworfen sind.

Es sei *S* die Sonne, *E* die Erde, *FSHW* die elliptische Ekliptik, welche die Erde um die Sonne herum durchläuft, so kann die Erde auch um die geringste Länge nicht aus derselben sich entfernen, wenn nicht andere Weltkörper ihr attractorisch entgegenwirken.

Ist aber ein anderer Weltkörper, z. B. der Jupiter *J*, da wo er gezeichnet ist, der Erde nahe gekommen, so übt er mit

Fig. 886.



seiner grofsen Masse sein attractorisches Recht auf die Erde aus, und während die Erde nach *H* ihren Lauf ruhig fortsetzen will, zieht er die Erde zu sich aus der Ekliptik heraus.

Ist zugleich ein zweiter Weltkörper, z. B. der Saturn (*Sn*) auf die gezeichnete Stelle gekommen, so macht dieser es eben so, und die drei Pfeile geben ein Bild von der Verlegenheit, in welcher die Erde sich befindet.

Aber mit dem Jupiter und dem Saturn ist es nicht abgethan, es kommen noch viele andere kleinere Planeten hinzu; ferner die beiden grofsen Grenzhüter, der Uranus und der Neptun, welche die dem Verhältnifs ihres Fonds entsprechenden Rechte fordern, geltend machen und durchsetzen.

Die Monarchen Deutschlands sollten die Regierungsweise des Sonnensystems, als eine unmittelbar von Gott eingesetzte Disciplinar-Verwaltung zum Muster nehmen: Die Grofsmacht Sonne ist nicht nur nicht ungehalten, dafs sie durch die Mittel- und Kleinmächte in ihren Rechten verkürzt wird, sie ist im Gegentheil so freundlich, jeder dieser Mächte ein dem Verhältnifs ihrer materiellen Mittel genau entsprechendes mit sich selbst gleich grofses Recht freiwillig zu überlassen und vor allen Dingen beweisen die Central- und Specialregierungen die gänzliche Nutzlosigkeit eines Bundestages.

Die Perturlationen, auf einen Weltkörper zusammen wirkend, sind während eines und mehrerer Jahre unbedeutend, aber von zweierlei Art: Einige sind immer im Zunehmen begriffen, nach einer Reihe von Jahren erheblich genug und werden deshalb aus den Säcularänderungen der Bahnelemente entnommen. Diese enthalten nämlich die summarischen Elementenänderungen von Jahrhundert zu Jahrhundert, deren Mittelzahlen auf den verlangten kürzeren Zeitraum verhältnifsmäfsig reducirt werden.

Die anderen sind periodisch, d. h. sie sind eine Zeit lang zunehmend und dann wieder abnehmend, so dafs sie sich im Laufe der Zeit ausgleichen. So z. B. ist dies bei dem Monde der Fall, dessen Umlaufszeit der Säculargleichung nach immer kürzer wird, aber mit der Zeit auch wieder zur Verlängerung kommt.

Der Erfolg der Störung eines Weltkörpers durch mehrere andere in ihren Elementen bekannte Körper zu gleicher Zeit, in Betreff seiner Bewegungsveränderung: also zu ermitteln, welche Bewegung er machen wird, ist wegen des nothwendigen Ansatzes vieler von einander abhängigen Gleichungen unmöglich. Es hat sich aber gefunden, dafs bei der Geringfügigkeit der einzelnen Störungen die Störung durch jeden einzelnen Himmelskörper für sich, also so berechnet werden kann, als wenn die übrigen störenden Körper nicht vorhanden wären. Hat man nun diese Einzelnstörungen sämmtlich ermittelt, so gibt die Summe derselben die Gesammtstörung sämmtlicher gleichzeitig störender Körper Diese Aufgabe, die Ermittelung der Gesammtstörung von mehreren Himmelskörpern auf einen einzigen anderen ist daher unter dem Namen: Problem von drei Körpern bekannt.

Lagrange setzt dieses Verfahren ungefähr folgender Art auseinander: Für die Darstellung der Bewegung eines von der

Sonne angezogenen Planeten werden drei Differenzialgleichungen des zweiten Grades angesetzt, bei deren Integrirung also sechs Constanten, nämlich sechs von den constanten Bahnelementen allein abhängige Gröfsen vorkommen.

Wenn man nun die Gleichungen für die Anziehung eines dritten Himmelskörpers mit einführen wollte, so würden sich diese Differenzialgleichungen nicht mehr integriren lassen. Die Glieder aber, welche hinzutreten würden, enthalten die im Vergleich mit der Sonne nur kleine Massen des dritten Körpers, sind also selbst sehr kleine Zahlen, deren Werth man näherungsweise ermitteln kann. Diese Näherungswerthe eingeführt und integrirt, als wenn diese Glieder nicht hinzugekommen wären, gibt eine der wahren Störung möglichst nahe kommende.

Diese Veränderungen sind nun theils periodisch, theils sind sie es nicht. Die ersteren hangen ab von der gegenseitigen Stellung des störenden und des gestörten Körpers, sie erhalten also bei der wieder eintretenden selbigen Stellung denselbigen Werth; die anderen hangen von diesen Stellungen nicht allein ab und können mit der Zeit wachsen und abnehmen. So z. B. ergab sich, dafs die Bewegung des Jupiter beschleunigend und die des Saturn verzögernd war und dafs diese Aenderungen nicht auf Säculargleichungen beruhten. Genaue Beobachtungen haben dann ergeben, dafs die Wechselwirkungen zweier Planeten in Beziehung auf Bewegungsänderungen, deren Periode sehr lang ist, die Summe der Quotienten: Masse dividirt durch die Länge der grofsen Axe constant bleiben.

Phasen sind Lichterscheinungen, Lichtgestalten, das Aeufsere eines Körpers bei diesen verschiedenartiger Beleuchtung. Besonders gebraucht man diese Bezeichnung für Planeten und Monde, je nach deren Gestalt, in welcher sie uns bei verschiedenen Beleuchtungen durch die Sonne, je nachdem die Erde ihre Lage zu dem beleuchtenden und dem beleuchteten Weltkörper hat. Die Phasen des Mondes sind in dem Art. „Mondphasen“ mit 12 Figuren ausführlich beschrieben.

Phorometrie, s. v. w. „Phoronomie“.

Phoronomie ist die Lehre von den Gesetzen der Bewegung, wenn bei derselben von einer Kraft, welche dieselbe hervorgebracht hat und erhält, ganz abgesehen wird. Die Erklärung von Bewegung, von beschleunigter und verzögerter, von gleichförmig und ungleichförmig beschleunigter und verzögerter Bewegung sind in verschiedenen Artikeln dieses Wörterbuchs schon gegeben und die Gesetze selbst ausführlich abgehandelt.

Es soll hier nur, der möglichen Vollständigkeit wegen, noch folgendes hinzugefügt werden:

1. Vergleicht man die ungleichförmige Bewegung in Hinsicht des zurückgelegten Weges von irgend einem Augenblick oder von irgend einem Punkt des Weges an mit derjenigen gleichförmigen Bewegung, die als das Maafs aller übrigen zum Grunde gelegt wird, so heifst das Verhältnifs der Wege beider Bewegungen in einerlei Zeit die Mittlere Geschwindigkeit der ungleichförmigen Bewegung in dieser Zeit.

Ist nämlich σ der Weg bei der ungleichförmigen Bewegung in der Zeit τ, so ist in derselben Zeit der Weg der gleichförmigen Bewegung $= \sigma$, also die mittlere Geschwindigkeit der ungleichförmigen $= \frac{\sigma}{\tau}$. Nun ist andererseits $\frac{\sigma}{\tau}$ die Geschwindigkeit derjenigen gleichförmigen Bewegung, vermöge welcher in der Zeit τ der Weg σ zurückgelegt wird, folglich kann man auch die mittlere Geschwindigkeit bei der ungleichförmigen Bewegung als diejenige Geschwindigkeit bezeichnen, welche derjenigen gleichförmigen Bewegung zukommen würde, vermöge welcher in derselben Zeit derselbe Weg wie bei der ungleichförmigen durchlaufen würde. Ist nun das Gesetz der ungleichförmigen Bewegung so beschaffen, dafs die mittlere Geschwindigkeit $\frac{\sigma}{\tau}$ sich einem bestimmten Werth als Werthgrenze immerfort nähert, wenn τ immerfort kleiner und kleiner genommen wird, oder sich so vermindert, dafs diese Zeit unendlich klein wird, so nennt man diese Werthgrenze die Geschwindigkeit der ungleichförmigen Bewegung im ersten Augenblick der Zeit τ oder in dem Punkte des Weges, wo das Bewegliche in diesem Augenblick sich befindet.

Ist z. B. der in der Zeit t zurückgelegte Weg $s = a + bt^2$, so ist der Weg in der Zeit $s' = t + \tau = a + b(t+\tau)^2$, daher der in der Zeit τ zurückgelegte Weg $s' - s = b\tau(2t + \tau)$; daraus die mittlere Geschwindigkeit während der Zeit $\tau = \frac{\sigma}{\tau} = 2bt + b\tau$; folglich $\frac{\sigma}{\tau} - 2bt = b\tau$. Da nun der Subtrahend von τ unabhängig ist und $b\tau$ offenbar mit τ zugleich un-

endlich klein wird, so ist $2\delta t$ die Werthgrenze von $\frac{\sigma}{\tau}$, mithin die Geschwindigkeit der ungleichförmigen Bewegung am Ende der Zeit t oder im Anfange der Zeit $\tau = 2\delta t$.

Das Gesetz, wonach sich die eben erklärte Geschwindigkeit während der ganzen ungleichförmigen Bewegung ändert, bestimmt die verschiedenen Arten dieser Bewegung.

2. Es ist der Weg eines materiellen Punkts als Function der Zeit gegeben. Die Geschwindigkeit am Ende dieses Weges oder am Ende dieser Zeit zu bestimmen.

Es sei s der in der Zeit t zurückgelegte Weg und $s = ft$ die gegebene Function, so ist der Zuwachs des Weges in der Zeit $\Delta t = \Delta s = f(t + \Delta t) - ft$

folglich ist $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - ft}{\Delta t}$

die mittlere Geschwindigkeit während der Zeit Δt.

Bezeichnet man daher die Geschwindigkeit am Ende der Zeit t mit v, so ist diese die Werthgrenze der mittleren Geschwindigkeit unter der Voraussetzung, dafs Δt unendlich klein werde.

Andererseits ist aber die Werthgrenze von $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ das Differenzial der Function s auf t; also $= \vartheta_t s$, wenn t die Urveränderliche ist, dagegen der Quotient $\frac{\vartheta s}{\vartheta t}$ der Differenziale von s und t in Beziehung auf irgend eine aber ihnen gemeinschaftliche Urveränderliche. Man hat also

I. v entweder $= \vartheta_t s$ oder $= \frac{\vartheta s}{\vartheta t}$

3. Ist umgekehrt die Geschwindigkeit v als Function der Zeit gegeben, so hat man gegenseitig

$\vartheta s = v\,\vartheta t$ und daher

II. $s = \int v \cdot \vartheta t$.

4. Soll nun dieser Weg mit der Zeit zugleich anfangend gezählt werden, so mufs s für $t = 0$ selbst $= 0$ werden; folglich mufs man das Integral zwischen den Grenzen $t = 0$ und $t = t$ nehmen. Man hat also unter dieser Voraussetzung

III. $s = \int_0^t v \cdot \vartheta t$

5. Es bewegt sich ein materieller Punkt durch den Weg s in der Zeit t und hat am Ende dieser Zeit die Geschwindigkeit v als Function der Zeit ausgedrückt. Die Beschleunigung des materiellen Punkts für diesen Augenblick zu bestimmen.

Da v als Function von t gegeben ist, so ist die Geschwindigkeit am Ende der Zeit $t + \Delta t = v + \Delta v$, folglich ist Δv die Aenderung der Geschwindigkeit in der Zeit Δt und daher $\frac{\Delta v}{\vartheta t}$ die mittlere Beschleunigung während der Zeit Δt. Die Beschleunigung am Anfange der Zeit Δt oder am Ende der Zeit t ist aber die Werthgrenze der mittleren Beschleunigung für die unendliche Abnahme von Δt. Bezeichnet man also diese Beschleunigung mit u, und da andrerseits die Werthgrenze des Zuwachsquotienten das Differenzial der Geschwindigkeit, also entweder $\vartheta_t v$ oder $\frac{\vartheta v}{\vartheta t}$ ist, so hat man

IV. $u = \vartheta_t v$ oder $\frac{\vartheta v}{\vartheta t}$

Nun ist noch $v = \vartheta_t s$

folglich $\vartheta_t v = \vartheta_t^2 s$

6. Betrachtet man dagegen s, v, und t als Functionen irgend einer anderen gemeinschaftlichen Urveränderlichen, so hat man $v = \frac{\vartheta s}{\vartheta t}$ und $\vartheta v = \vartheta \frac{\vartheta s}{\vartheta t}$ folglich hat man auch

V. $u = \vartheta_t^2 s$

und $\vartheta \frac{\frac{\vartheta s}{\vartheta t}}{\vartheta t} = \frac{\vartheta t \cdot \vartheta^2 s - \vartheta s \cdot \vartheta^2 t}{\vartheta t^3}$

7. Ist bei einer Bewegung die Beschleunigung und der Weg als Function einer und derselben Urveränderlichen gegeben, die Geschwindigkeit am Ende dieses Weges zu bestimmen.

Nach dem Vorigen ist

$$v = \frac{\vartheta s}{\vartheta t} \text{ und } u = \frac{\vartheta v}{\vartheta t}$$

Man hat also $\vartheta s = v\,dt$

und daher multiplicirt

VI. $u \cdot \vartheta s = v \cdot \vartheta v$

beiderseits mit 2 multiplicirt und dann integrirt gibt

$$2\int u\,\vartheta x = \int 2v\,\vartheta v = v^2 + C.$$

Ist nun C die Geschwindigkeit im Anfange des Weges s, so mufs für $s = 0$ auch $v = 0$ werden. Man hat also

$$2\int_0^s u\,\vartheta s = c^2 + C$$

folglich

VII. $2\int_0^s u\,\vartheta s = v^2 - c^2$

Woraus gegenseitig

VIII. $v = \sqrt{c^2 + 2\int_0^s u\,\partial s}$

8. Beispiel. Die Bewegung eines Körpers zu bestimmen, dessen Beschleunigung von dem Quadrat der in jedem Augenblick stattfindenden Geschwindigkeit bedingt ist und sich ausdrückt durch die algebraische Summe zweier Glieder, von welchen das eine constant, das andere aber das Quadrat der Geschwindigkeit zu einem Factor hat.

Nach Erfahrung bewegt sich ein physischer Körper an der Oberfläche der Erde im luftleeren Raum in jeder Verticalen mit einer gleichförmig beschleunigten oder verzögerten Bewegung, je nachdem er sich der Erdoberfläche nähert oder entfernt, und zwar mit einer Beschleunigung $2g = 31{,}25$ Fufs. Bewegt sich dagegen derselbe Körper in derselben Art in der umgebenden Luft, so nimmt jene Beschleunigung ab um ein Product aus dem Quadrat der Geschwindigkeit mit einem constanten Factor, welcher durch die Gestalt des Körpers und die Menge seiner materiellen Theile bestimmt wird.

Wird nun dieses Gesetz allgemein gedacht, so bestimmt es die Beschleunigung des vorliegenden Falles. Es bewege sich nämlich zuerst der Körper so, dafs die constante Beschleunigung additiv, die mit v veränderliche aber subtractiv ist, welches dem Falle in der widerstehenden Luft entspricht, so hat man $u = g - kv^2$, wo k der gedachte Widerstandscoefficient ist.

Beginnt nun die Bewegung von der Ruhe aus und ist v die Geschwindigkeit am Ende des Weges s, so hat man nach VI.

$$u\,\partial s = v\,\partial v$$

also $\partial s = \dfrac{v \cdot \partial v}{u} = \dfrac{v\partial v}{g - kv^2}$

Mithin $s = \int_0^v \dfrac{v \cdot \partial v}{g - kv^2}$

Setzt man nun $g - kv^2 = z$, so ist $-2kv\,\partial v = \partial z$

Mithin $v \cdot \partial v = -\dfrac{\partial z}{2k}$

daher $s = \int_0^v \dfrac{-\partial z}{2kz} = -\dfrac{1}{2k}\int_0^v \dfrac{\partial z}{z} = -\dfrac{1}{2k}(ln\, z)_0^v = -\dfrac{1}{2k}[ln\,(g - kv^2)]_0^v$

$$= -\frac{1}{2k}[ln\,(g - kv^2) - ln\,g] = -\frac{1}{2k}\,ln\,(g - kv^2)_0^v = \frac{1}{2k}\,ln\,\frac{g}{g - kv^2} = 2ks$$

folglich $ln\,\dfrac{g}{g - kv^2} = 2ks$

Oder $\dfrac{g}{g - kv^2} = e^{2ks}$ oder $\dfrac{g}{e^{2ks}} = g - kv^2$

oder $v^2 = \dfrac{g - \frac{g}{e^{2ks}}}{k} = \dfrac{g}{k}\left(1 - e^{-2ks}\right)$

also $v = \sqrt{\dfrac{g}{k}}\sqrt{1 - \dfrac{1}{e^{2ks}}}$ (I)

Mithin bleibt v stets kleiner als $\sqrt{\frac{g}{k}}$ kann aber diesem Grenzwerthe mit dem Wachsthum von s beliebig nahe kommen.

Ferner ist nach IV. $u = \dfrac{\partial v}{\partial t}$

daher gegenseitig $\partial t = \dfrac{\partial v}{u}$

mithin $t = \int_0^s \dfrac{\partial v}{u} = \int_0^s \dfrac{\partial v}{g - kv^2}$

Man setze $\dfrac{g}{k} = \alpha^2$, so ist $g = k\alpha^2$

daher $\int \dfrac{\partial v}{g - kv^2} = \dfrac{1}{k}\int \dfrac{\partial v}{\alpha^2 - v^2} = \dfrac{1}{k}\int \dfrac{\partial v}{(\alpha - v)(\alpha + v)} = \dfrac{1}{k}\int \left(\dfrac{A}{\alpha - v} + \dfrac{B}{\alpha + v}\right)\partial v$

so dafs

$$\frac{}{(\alpha - v)(\alpha + v)} = \frac{\alpha(A + B) + (A - B)v}{(\alpha - v)(\alpha + v)}$$

Setzt man $(A - B) = 0$, so erhält man $A = B$ und $\alpha \cdot (A + B) = 1$.

Aus beiden Gleichungen folgt $2\alpha A = 1$, und $A = B = \dfrac{1}{2\alpha}$

Man hat also $\int \frac{\partial v}{(\alpha - v)(\alpha + v)} = \frac{1}{k} \int \left(\frac{\frac{1}{2\alpha}}{\alpha - v} + \frac{\frac{1}{2\alpha}}{\alpha - v} \right) \partial v$

$$= \frac{1}{2\alpha k} \int \left(\frac{\partial v}{\alpha + v} - \frac{-\partial v}{\alpha - v} \right) = \frac{1}{2\alpha k} [ln(\alpha + v) - ln(\alpha - v)]$$

$$= \frac{1}{2\alpha k} \left(ln \frac{\alpha + v}{\alpha - v} \right)_0^s$$

Also $t = \frac{1}{2\alpha k} \left(ln \frac{\alpha + v}{\alpha - v} \right)_0^s$ (1)

Nun beginnt die Bewegung aus der Ruhe, folglich ist für $s = 0$ auch $v = 0$, folglich ist $C = \frac{1}{2\alpha k} ln \frac{\alpha}{\alpha} = \frac{1}{2\alpha k} ln 1 = 0$

$$t = \frac{1}{2\alpha k} ln \frac{\alpha + v}{\alpha - v} = \frac{1}{2\alpha k} ln \frac{\alpha + v}{\alpha - v} \quad (2)$$

Hieraus gegenseitig

$$ln \frac{\alpha + v}{\alpha - v} = 2\alpha k t$$

folglich $$\frac{\alpha + v}{\alpha - v} = e^{2\alpha k t}$$

Hieraus $\alpha + v = (\alpha - v) e^{2\alpha k t}$

woraus $v = \frac{\alpha (e^{2\alpha k t} - 1)}{e^{2\alpha k t} + 1}$

Nun war $\alpha = \sqrt{\frac{g}{k}}$

Mithin $v = \sqrt{\frac{g}{k}} \frac{e^{2t\sqrt{gk}} - 1}{e^{2t\sqrt{gk}} + 1}$ (II)

Setzt man nun die beiden Werthe von v (1 und 2) einander gleich, so erhält man

$$\frac{e^{2t\sqrt{gk}} - 1}{e^{2t\sqrt{gk}} + 1} = \sqrt{1 - \frac{1}{e^{2ks}}} = \sqrt{\frac{e^{2ks} - 1}{e^{2ks}}} = \frac{\sqrt{e^{2ks} - 1}}{e^{ks}} \quad (3)$$

Um nun t aus s zu bestimmen hat man aus dieser letzten Gleichung

$$e^{ks} (e^{2t\sqrt{gk}} - 1) = (e^{2t\sqrt{gk}} + 1) \sqrt{e^{2ks} - 1}$$

woraus $$e^{2t\sqrt{gk}} = \frac{e^{ks} + \sqrt{e^{2ks} - 1}}{e^{ks} - \sqrt{e^{2ks} - 1}}$$

Nimmt man nun beiderseits die Logarithmen irgend eines Systems, so erhält man

$$t = \frac{log \left(e^{ks} + \sqrt{e^{2ks} - 1} \right) - log \left(e^{ks} - \sqrt{e^{2ks} - 1} \right)}{2\sqrt{gk} \cdot log\, e} \quad (III)$$

Soll dagegen s aus t gefunden werden, so hat man, die Gleichung 3 quadrirt:

$$\frac{(e^{2t\sqrt{gk}} - 1)^2}{(e^{2t\sqrt{gk}} + 1)^2} = 1 - \frac{1}{e^{2ks}}$$

Hieraus $$\frac{1}{e^{2ks}} = 1 - \left(\frac{e^{2t\sqrt{gk}} - 1}{e^{2t\sqrt{gk}} + 1} \right)^2 = \frac{4 e^{2t\sqrt{gk}}}{(e^{2t\sqrt{gk}} + 1)^2}$$

woraus $$e^{2ks} = \frac{(e^{2t\sqrt{gk}} + 1)^2}{4 e^{2t\sqrt{gk}}}$$

oder $$e^{ks} = \frac{e^{2t\sqrt{gk}} + 1}{2 e^{t\sqrt{gk}}}$$

Beiderseits die Logarithmen genommen

$$s = \frac{log (e^{2t\sqrt{gk}} + 1) - log\, 2 e^{t\sqrt{gk}}}{k\, log\, e} \quad (IV)$$

9. Ist zweitens auch das beständige Glied in dem Ausdruck der Beschleunigung subtractiv, so hat man $u = -g - kv^2$, und wenn nun die Bewegung mit der Geschwindigkeit c beginnt, so hat man für die Geschwindigkeit v am Ende des Weges s

$$v^2 = 2 \int u\, \partial s$$

oder differenzirt

$$v\, \partial v = u\, \partial s = (-g - kv^2)\, \partial v$$

also $$\partial s = \frac{-v\, \partial v}{g + kv^2}$$

folglich

$$s = -\int_c^v \frac{v\,\partial v}{g + kv^2} = -\frac{1}{2k}\int_c^v \frac{2kv\cdot\partial v}{g + kv^2} = -\frac{1}{2k} ln\,(g + kv^2)$$
$$= \frac{1}{2k}\,[ln\,(g + kc^2) - log\,(g + kv^2)]$$

also $s = \frac{1}{2k} ln \frac{g + kc^2}{g + kv^2}$ (I)

Da die Bewegung wegen der negativen Beschleunigung eine verzögerte ist, so wird die Geschwindigkeit v am Ende eines Weges $s_0 = 0$ werden, und folglich hat man aus I.

$$s_0 = \frac{1}{2k} ln \frac{g + kc^2}{g} = \frac{1}{2k} ln\left(1 + \frac{k}{g} c^2\right)$$ (II)

Entwickelt man v^2, um für jeden zurückgelegten Weg die noch stattfindende Geschwindigkeit zu bestimmen, so erhält man aus I.

$$e^{2ks} = \frac{g + kc^2}{g + kv^2}$$

woraus $v = \sqrt{\frac{1}{k}\left(\frac{g + kc^2}{e^{2ks}} - g\right)}$ (III)

Ferner zur Bestimmung der Zeit hat man

$$\partial t = \frac{\partial v}{s} = \frac{\partial v}{-g - kv^2}$$

daher $t = -\int_c^v \frac{\partial v}{g + kv^2} = -\frac{1}{\sqrt{kg}}\int_c^v \frac{\sqrt{\frac{k}{g}}\,\partial v}{1 + \left(\sqrt{\frac{k}{g}}\,v\right)^2} = -\frac{1}{\sqrt{kg}}\left(Arc\,tg\,v\sqrt{\frac{k}{g}}\right)_c^v + C$

für $v = c$ ist Bewegungsanfang, also $t = 0$ und man hat vollständig:

$$t = \frac{1}{\sqrt{kg}}\left[Arc\,tg\,c\sqrt{\frac{k}{g}} - Arc\,tg\,v\sqrt{\frac{k}{g}}\right]$$

Setzt man den Bogen $Arc\,tg\,c\sqrt{\frac{k}{g}} = \varphi$ und $Arc\,tg\,v\sqrt{\frac{k}{g}} = \psi$

so hat man $tg\,\varphi = c\sqrt{\frac{k}{g}}$ und $tg\,\psi = v\sqrt{\frac{k}{g}}$

daher $tg\,(\varphi - \psi) = \frac{tg\,\varphi - tg\,\psi}{1 + tg\,\varphi\cdot tg\,\psi} = \frac{c\sqrt{\frac{k}{g}} - v\sqrt{\frac{k}{g}}}{1 + c\sqrt{\frac{k}{g}}\cdot v\sqrt{\frac{k}{g}}} = \frac{(c - v)\sqrt{kg}}{g + kcv}$

Mithin gegenseitig $\varphi - \psi = Arc\,tg\,\frac{(c - v)\sqrt{kg}}{g + kcv}$

daher also $t = \frac{1}{\sqrt{kg}}(\varphi - \psi) = \frac{1}{\sqrt{kg}}\,Arc\,tg\,\frac{(c - v)\sqrt{kg}}{g + kcv}$ (IV)

oder $t\sqrt{kg} = Arc\,tg\,\frac{(c - v)\sqrt{kg}}{g + kcv}$ oder $tg\,t\sqrt{gk} = \frac{(c - v)\sqrt{kg}}{g + kcv}$

woraus $v = \frac{c\sqrt{kg} - g\,tg\,(t\sqrt{kg})}{\sqrt{kg} + kc\,tg\,(t\sqrt{kg})} = \frac{c\sqrt{\frac{k}{g}} - tg\,(t\sqrt{kg})}{\sqrt{\frac{k}{g}}\left(1 + c\sqrt{\frac{k}{g}}\,tg\,(t\sqrt{kg})\right)}$ (V)

10. Nimmt man an, dafs wenn die Geschwindigkeit der verzögerten Bewegung auf Null gebracht ist, dann eine Bewegung nach gerade entgegengesetzter Richtung nach dem Gesetze des vorigen Satzes erfolge, so kann man fragen, mit welcher Geschwindigkeit dann der Körper in dem Punkt wieder anlange, von welchem er seine verzögerte Bewegung mit der Geschwindigkeit c anfing. Und so entspricht denn dieser Aufgabe die physische Frage: Mit welcher Geschwindigkeit wird ein in der widerstehenden Luft vertikal aufwärts geworfener Körper wiederum in dem Punkt

ankommen, aus welchem derselbe mit einer gegebenen Geschwindigkeit geworfen wurde.

Jene Geschwindigkeit bei der Rückkehr sei c_1. Ist nun s_0 der Weg, den der verzögerte Körper zurückgelegt hat, bis seine Geschwindigkeit auf Null gebracht ist, so hat man nach No. 9, I, wo nun $v = 0$ ist,

$$s_0 = \frac{1}{2k} ln \frac{g + kc^2}{g} = \frac{1}{2k} ln \left(1 + \frac{k}{g} c^2\right)$$

woraus $ln \left(1 + \frac{k}{g} c^2\right) = 2ks_0$

Also $1 + \frac{k}{g} c^2 = e^{2ks_0}$ (1)

Nach dem vorigen Satze findet man dagegen für die Geschwindigkeit c_1, mit welcher der Körper durch beschleunigte Bewegung am Ende des Weges s_0 wieder ankommt (No. 8, I.), wenn man s_0 statt s und c_1 statt v setzt:

$$c_1 = \sqrt{\frac{g}{k}} \sqrt{1 - \frac{1}{e^{2ks_0}}}$$

also $c_1^2 = \frac{g}{k} \left(1 - \frac{1}{e^{2ks_0}}\right)$

woraus $\frac{1}{e^{2ks_0}} = 1 - \frac{k}{g} c_1^2 = \frac{g - kc_1^2}{g}$

Diese Gleichung mit Gleichung 1 multiplicirt

$$\left(1 - \frac{a}{g} c_1^2\right) \left(1 + \frac{k}{g} c^2\right) = 1$$

oder reducirt

$$\frac{k}{g} c^2 - \frac{k}{g} c_1^2 \left(1 + \frac{k}{g} c^2\right) = 0$$

woraus $c_1^2 = \frac{c^2}{1 + \frac{k}{g} c^2}$

11. Bewegt sich ein materieller Punkt nach irgend einem Gesetze in einer geraden oder krummen Linie, und denkt man sich von einem Punkt aus drei verschiedene gerade Linien gezogen, dann in jeder dieser Linien einen beweglichen Punkt sich so bewegend, dafs er sich in jedem Augenblick mit dem materiellen Punkt in einer und derselben Ebene befindet, die stets mit der Ebene der beiden anderen Linien parallel ist, so nennt man die Bewegungen, welche diese drei beweglichen Punkte in ihren Geraden besitzen, die relative Bewegung des materiellen Punkts nach diesen drei Geraden, die man Richtungsaxen der relativen Bewegung nennt.

Zur Vereinfachung pflegt man die drei geraden Axen rechtwinklig auf einander zu nehmen, und sie dienen dann zugleich als Axen der Coordinaten, welche die Stelle des materiellen Punkts in jedem Augenblick bestimmen. Hiernach ist nun auch leicht zu verstehen, was man unter den relativen Geschwindigkeiten eines materiellen Punkts nach drei Richtungsaxen begreift. Eben so, was man die relative Beschleunigung des materiellen Punkts nennt.

Bewegt sich der materielle Punkt immer in derselben Ebene, so nimmt man nur zwei Richtungsaxen in derselben Ebene.

12. Bewegt sich ein materieller Punkt in einer geraden Linie gleichförmig, so ist auch seine relative Bewegung nach drei Richtungsaxen gleichförmig, und sind die Richtungsaxen unter einander winkelrecht, so ist die relative Geschwindigkeit nach jeder Richtungsaxe = dem Product aus der absoluten Geschwindigkeit mit dem Cosinus des Winkels, den ihre Richtung mit jener Richtungsaxe macht.

Dasselbe, was hier von den relativen Geschwindigkeiten gesagt ist, gilt auch von den relativen Beschleunigungen.

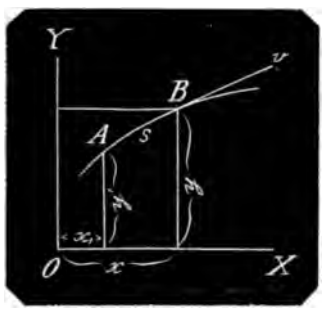
13. Erklärung. Bewegt sich ein materieller Punkt in einer geraden Linie, so heifst diese Gerade in der Aufeinanderfolge ihrer Punkte, wie sie nach einander die Orte des bewegten Punkts werden, betrachtet, die Richtung der Bewegung. Bewegt sich dagegen der Punkt in einer Curve, so heifst die Verbindungsgerade zweier Punkte seines Weges die mittlere Richtung seiner Bewegung von dem einen Punkt zum anderen. Dagegen heifst diejenige Gerade durch den einen Punkt in einer solchen Lage, dafs der Winkel zwischen ihr und der mittleren Richtung unendlich klein wird, die Richtung der Bewegung in jenem Punkt. Bekanntlich ist aber diese letzte Gerade die Tangente.

14. Ein materieller Punkt bewegt sich in einer ebenen Curve nach irgend einem Gesetze, seine relativen Bewegungen nach zwei unter sich normalen Richtungsaxen, die in derselben Ebene liegen, zu bestimmen und gegenseitig.

Es habe sich in der Zeit t der materielle Punkt von A bis B durch den Weg s bewegt, seine Geschwindigkeit in B sei v, so ist $v = \frac{\partial s}{\partial t}$. OX, OY seien die beiden Coordinatenaxen, so hat während der Zeit t der materielle Punkt relativ nach der Abscisse OX den Weg $x - x'$ zu-

rückgelegt. Dagegen ist sein relativer Weg nach der Axe OY in derselben Zeit $= y - y'$. Bezeichnet man also die relative Geschwindigkeit am Ende der Zeit t

Fig. 887.



nach der Abscissenaxe mit v_x, die nach der Ordinatenaxe mit v_y, so hat man $v_x = \frac{\partial (x - x')}{\partial t}$, und da x' constant ist, so hat man $v_x = \frac{\partial x}{\partial t}$.

Eben so erhält man

$$v_y = \frac{\partial (y - y')}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t}$$

Nun entsteht die Frage, nach welcher Geraden, durch den Punkt B gehend, müfste der materielle Punkt sich von B aus bewegen, und zwar nach demselben Gesetz in Absicht auf t und die Gröfse des Weges, damit dieselben relativen Geschwindigkeiten nach den beiden Axen stattfänden. Diese Gerade mache mit der Abscissenaxe den Winkel φ, so hat man die relative Geschwindigkeit nach der Axe der X, weil die Geschwindigkeit jener geraden in $B = v$ sein soll, $= v \cos \varphi = \frac{\partial s}{\partial t} \cos \varphi$.

Eben so hat man die relative Geschwindigkeit nach der Axe der $Y = v \sin \varphi = \frac{\partial s}{\partial t} \sin \varphi$. Nun sollen diese Geschwindigkeiten den vorhin gefundenen relativen einzeln gleich sein.

Man hat also $v \sin \varphi = v_y = \frac{\partial y}{\partial t}$

und $v \cos \varphi = v_x = \frac{\partial x}{\partial t}$

Dividirt man beide Gleichungen durch einander, so hat man

$$tg\, \varphi = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Nun ist $\frac{\partial y}{\partial x}$ die trigonometrische Tangente des Winkels, den die geometrische Tangente der Curve in B mit der Abscisse macht, und folglich ist die gesuchte gerade Linie die Tangente in B, und daher sagt man, dafs die Richtung der Geschwindigkeit, die ein materieller Punkt in irgend einem Punkt seiner Bahn hat, nach der Tangente der Curve in diesem Punkt statt finde.

Bewegte sich der materielle Punkt in einer Geraden statt in einer Curve und zwar nach demselben Gesetz, so dafs in der Zeit Δt auch der Weg Δs durchlaufen würde, so sind die gleichzeitigen relativen Wege nach den unter sich normalen Richtungsaxen $\Delta s \cdot \cos \alpha$ und $\Delta s \cdot \sin \alpha$, folglich sind auch die mittleren Geschwindigkeiten nach den Richtungsaxen $\frac{\Delta s}{\Delta t} \cos \alpha$ und $\frac{\Delta s}{\Delta t} \sin \alpha$, und hieraus die relativen Geschwindigkeiten im Anfange der Zeit $\Delta t = \frac{\partial s}{\partial t} \cos \alpha$ und $\frac{\partial s}{\partial t} \cdot \sin \alpha$. Also $= v \cos \alpha$ und $v \sin \alpha$, wenn v die wirkliche Geschwindigkeit in demselben Augenblick ist.

Aendert sich nun die wirkliche Geschwindigkeit in der Zeit Δt von v auf $v + \Delta v$, so ändern sich die relativen Geschwindigkeiten von $v \cos \alpha$ und $v \sin \alpha$ in $(v + \Delta v) \cos \alpha$ und $(v + \Delta v) \sin \alpha$. Also sind die relativen Geschwindigkeitsänderungen in der Zeit $\Delta t = \Delta v \cos \alpha$ und $\Delta v \sin \alpha$.

Die relativen mittleren Beschleunigungen sind also $\frac{\Delta v}{\Delta t} \cos \alpha$ und $\frac{\Delta v}{\Delta t} \sin \alpha$, mithin sind die relativen Beschleunigungen am Ende der Zeit $t = \frac{\partial v}{\partial t} \cos \alpha$ und $\frac{\partial v}{\partial t} \sin \alpha$. Nun war aber $\frac{\partial v}{\partial t}$ die absolute Beschleunigung in der geraden Linie, folglich ergeben sich die relativen Beschleunigungen aus der absoluten wie die relativen Geschwindigkeiten aus den absoluten Geschwindigkeiten.

Anders verhält es sich aber, wenn die Bewegung in einer Curve statt findet, d. h. die relativen Beschleunigungen lassen sich nicht nach dem eben angegebenen Gesetze bestimmen, wenn man annehmen wollte, die Bewegung erfolge nach der Geraden, die der Curve in irgend einem Punkte möglichst nahe kommt, also nach der Tangente.

Denn es mache die Gerade, in welcher sich der Punkt bewegen müfste, um dieselben relativen Beschleunigungen nach den beiden Axen zu geben, mit der Axe der X den Winkel φ, die Beschleunigung in dieser Graden am Ende der Zeit t sei $= u$, so sind die relativen Beschleunigungen nach der Axe der $X = u \cos \varphi$ und nach der Axe der $Y = u \sin \varphi$.

Sollten nun diese Beschleunigungen dieselben sein, welche sich aus der Bewegung des Punkts in der Curve ergeben, und weil die Beschleunigung das Differenzial der Geschwindigkeit ist, so müfste hiernach sein

$$u \cos \varphi = \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial \frac{\partial x}{\partial t}}{\partial t} = \partial_t^2 x$$

wenn man t als unveränderlich annimmt,

und $$u \sin \varphi = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial t}}{\partial t} = \partial_t^2 y$$

Werden beide Gleichungen quadrirt und addirt, so hat man

$$u^2 = (\partial_t^2 x)^2 + (\partial_t^2 y)^2 \qquad (1)$$

woraus $$u = \sqrt{(\partial_t^2 x)^2 + (\partial_t^2 y)^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{\partial_t^2 x}{u} = \frac{\partial_t^2 x}{\sqrt{(\partial_t^2 x)^2 + (\partial_t^2 y)^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{\partial_t^2 y}{u} = \frac{\partial_t^2 y}{\sqrt{(\partial_t^2 x)^2 + (\partial_t^2 y)^2}}$$

Dagegen würde die Beschleunigung in der Tangente, wenn darin die Bewegung nach demselben Gesetz, wie in der Curve statt fände, weil die Geschwindigkeit darin am Ende der Zeit t nach dem Obigen $= v$ ist = sein

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \frac{\partial s}{\partial t}}{\partial t} = \partial_t^2 s$$

Nun ist aber

$$(\partial_t s)^2 = (\partial_t x)^2 + (\partial_t y)^2 \qquad (2)$$

Also differenzirt

$$2 \partial_t s \cdot \partial_t^2 s = 2 \partial_t x \cdot \partial_t^2 x + 2 \partial_t y \cdot \partial_t^2 y$$

woraus $$\partial_t^2 s = \frac{\partial_t x \times \partial_t^2 x + \partial_t y \times \partial_t^2 y}{\partial_t s}$$

und quadrirt

$$(\partial_t^2 s)^2 = \frac{(\partial x)^2 \cdot (\partial^2 x)^2 + (\partial y)^2 (\partial^2 y)^2 + 2 \partial x \cdot \partial y \cdot \partial^2 x \cdot \partial^2 y}{(\partial s)^2}$$
$$- \frac{[(\partial x)^2 + (\partial y)^2] [(\partial^2 x)^2 + (\partial^2 y)^2]}{(\partial s)^2} - \frac{(\partial x)^2 (\partial^2 y)^2 + (\partial y)^2 (\partial^2 x)^2}{(\partial s)^2}$$
$$+ \frac{2 \partial x \cdot \partial y \cdot \partial^2 x \cdot \partial^2 y}{(\partial s)^2}$$

Setzt man nun für den ersten Factor des ersten Gliedes aus Formel 2 den Werth $(\partial_t s)^2$ oder $(\partial s)^2$, so hebt sich dieser mit dem Nenner; der zweite Factor ist nach Formel $1 = u^2$, die beiden letzten Glieder sind ein Quadrat. Man hat also

$$(\partial_t^2 s)^2 = u^2 - \left(\frac{\partial x \cdot \partial^2 y - \partial y \cdot \partial^2 x}{\partial s}\right)^2$$

Der Subtrahend ist aber niemals $= 0$, aufser wenn die Curve in eine gerade Linie sich verwandelt. Denn in diesem Fall ist

$$\frac{\partial x \cdot \partial^2 y - \partial y \cdot \partial^2 x}{(\partial x)^2} = \partial \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

weil $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ ist,

folglich auch der Zähler $= 0$ und $\frac{\partial x \cdot \partial^2 y - \partial y \cdot \partial^2 x}{\partial s}$ ebenfalls $= 0$.

Da $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, so ist $\frac{\partial y}{\partial x}$ eine Constante und $\partial y = c \cdot \partial x$.

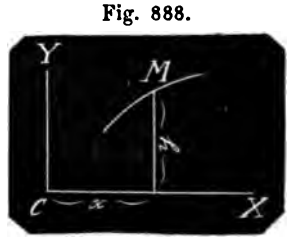
Diese Gleichung noch einmal integrirt gibt

$$y = cx + c'$$

eine Gleichung, welche nur der geraden Linie angehört, folglich ist die wirkliche Beschleunigung u des in einer Curve bewegten Punkts stets gröfser als die Beschleunigung nach der Tangente; letztere kann also nur eine relative Beschleunigung sein.

15. Um ohne Rücksicht auf einwirkende Kräfte, also rein phoronomisch die wirk-

Fig. 888.



che Bahn eines Massenpunkts aus de- n relativen Bewegungen ganz allgemein u bestimmen, seien CX und CY die echtwinkligen Coordinatenaxen, x und die Coordinaten für einen augenblick- chen Ort des Massenpunkts M, in wel- hen dieser nach Verlauf der Zeit t ge- ommen ist, und s der von der Masse M is dahin zurückgelegte Weg.

Nach phoronomischem Grundgesetz ist nun die Geschwindigkeit von M in die- sem Augenblick $= \frac{\partial s}{\partial t}$, deren relative Ge- schwindigkeiten nach CX und CY sind $\frac{\partial x}{\partial t}$ und $\frac{\partial y}{\partial t}$; beide Geschwindigkeiten ge- ben, zu einem Rechteck zusammengesetzt, in der Diagonale die Mittelgeschwindig- keit

$$\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2} = \frac{\partial x}{\partial t}\sqrt{1 + \left(\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)}\right)^2} = \frac{\partial x}{\partial t}\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

Nun ist aber nach der Rectifikations- ormel

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

aher $$\frac{\partial s}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t}\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

der $$\frac{\partial s}{\partial t} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2} \qquad (1)$$

l. h. die Geschwindigkeit des Mas- enpunkts M in der Bahn ist = der littelgeschwindigkeit aus den eiden relativen Geschwindigkei- en.

Setzt man die beiden relativen Ge- chwindigkeiten mit deren Mittelgeschwin- igkeit zu einem rechtwinkligen Dreieck MAB, Fig. 875 zusammen, so kann MA ls die Tangente des Curvenelements in em von M berührten Punkt betrachtet erden, folglich ist die Richtung er Mittelgeschwindigkeit beider elativen Geschwindigkeiten zu- leich die Richtung der Bahntan- ente in demselben Punkt.

Aus diesem Grunde nennt man auch ie Tangente an irgend einem Punkt iner Bahn die Richtung der Ge- chwindigkeit des Massenpunkts n seiner Bahn, oder die Richtung er wirklichen Bewegung in dem rt der Bahn.

Nach phoronomischem Grundgesetz ist die Beschleunigung eines Massenpunkts

nach Verlauf der Zeit $t = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$;

also nach der Axe der $X = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$

und nach der Axe der $Y = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

Projicirt man nun diese relativen Beschleunigungen auf die Tangente der Bahn in M, so erhält man die Summe beider

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\cos\beta$$

Nach der Curvenlehre ist aber der Cosinus des Winkels, den die geometrische Tangente mit einer der Coordinatenaxen bildet = dem Differenzial der Coordinate als Function des urvariablen Bogens. Mithin, wie auch die Figur angibt:

$$\cos\alpha = \frac{\partial x}{\partial s} \text{ und } \cos\beta = \frac{\partial y}{\partial s}$$

und die Summe beider relativen Beschleu- nigungen auf die Bahn reducirt:

$$S = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}\right]$$

Nun ist $\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial s}$ und $\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial s}$

Mithin $$S = \frac{1}{2}\frac{\partial t}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial t}{\partial s}\left[\frac{1}{2}\partial\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\partial\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\frac{\partial t}{\partial s}\partial\left[\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right]$$

lso nach Gleichnng 1

$$S = \frac{1}{2}\frac{\partial t}{\partial s}\partial\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial t}{\partial s} \cdot 2\frac{\partial s}{\partial t}\partial\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{2}\partial\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \qquad (2)$$

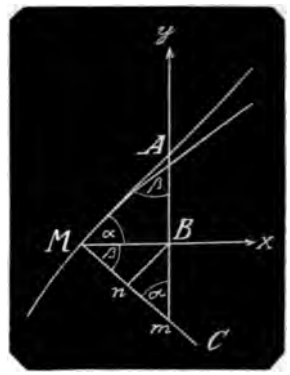
Wie aber oben die Seitenbeschleunigungen nach den Axen der X und der Y,

so ist $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$ die Beschleunigung des Massenpunkts in seiner Bahn. Folglich ist für jeden Punkt der Bahn:

Die Summe der auf die Bahntangente reducirten relativen Beschleunigungen gleich der Beschleunigung des in seiner Bahn sich bewegenden Massenpunkts, weshalb dieselbe auch die Tangentialbeschleunigung genannt wird.

Projicirt man beide relativen Beschleunigungen auf die Normale MC, so gibt die $\perp$ mit y gerichtete Beschleunigung die Projection $mn = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\cos\alpha$, die Bewegung nach CM hin gerichtet; die $\perp$ mit x gerichtete Beschleunigung die Projection $Mn = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\cos\beta$, die Bewegung

Fig. 889.



nach MC hin gerichtet.

Also die Summe beider Projectionen

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\cos\beta - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\cos\alpha\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\right)$$

$$S = \frac{1}{2}\frac{\partial t}{\partial s}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) \qquad (3)$$

Nun ist der Krümmungshalbmesser der Bahn in M

$$\varrho = \frac{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^3}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)}$$

Um diesen Ausdruck auf t als Urveränderliche zu gestalten hat man für den Zähler

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}$$

also

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^3 = \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^3\cdot\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^3 = \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^3\cdot\frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^3}$$

für den Nenner

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial t}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)}$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial t} = \partial\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)} = \frac{\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2}$$

folglich $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^3}$$

daher $$\varrho = \frac{\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^3}{\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}}$$

und die Summe der Beschleunigungsprojectionen nach Formel 3

$$S = \frac{1}{2}\frac{\partial t}{\partial s}\frac{\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^3}{\varrho} = \frac{\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2}{2\varrho}$$

Nun ist $\frac{\partial s}{\partial t}$ die Geschwindigkeit v des Massenpunkts M in dem Punkt (x, y) der Bahn, mithin

$$S = \frac{v^2}{2\varrho}$$

Diese Beschleunigung wird die Centripetalbeschleunigung genannt; sie ist, wie die Formel zeigt, umgekehrt proportional dem Krümmungshalbmesser, mit welchem die Richtung jeder Curvennormale zusammenfällt.

Da die Tangentialbeschleunigung und die Centripetalbeschleunigung mit den relativen Beschleunigungen gleichgeltend sind, so kann die Bahn nach jenen wie nach diesen bestimmt werden.

Photometer ist eine Vorrichtung zur Messung von Lichtintensitäten. Die Lichtstärke hat keinen Maafsstab, keine allgemein geltende Einheit, es mufs also eine solche gewählt werden, als z. B. die Helligkeit eines Lichtes, einer Lampe bei

ner bestimmten Entfernung von dem
1 beleuchtenden Gegenstande.

Eine Methode, das Verhältnifs der Wirkung zweier erleuchtender Flammen zu finden ist die, dafs man von beiden Lichtern Schatten auf eine hellfarbige Fläche werfen läfst. In einem dunklen Zimmer wird eine weifse Ebene, z. B. eine Papierfläche aufgestellt, vor dieser ein schmaler Körper; das zu prüfende und das prüfende Licht neben einander gestellt, werfen nun Schatten von diesem Körper gegen die weifse Fläche und man verschiebt das zu prüfende Licht so lange, bis beide Schatten dem Auge gleich dunkel erscheinen. Die Entfernungen beider Lichter von der Ebene geben im Quadrat das Verhältnifs deren Lichtintensitäten. Steht das prüfende Licht 2 Fufs von dem dunklen Körper, dieser 1 Fufs von der weifsen Ebene, und werden beide Schatten gleich dunkel, wenn das zu prüfende Licht 3 Fufs von dem Körper, also 4 Fufs von der weifsen Ebene entfernt ist, dann verhalten sich die Lichtintensitäten beider wie $3^2 : 4^2 = 9 : 16$. D. h. das zu prüfende Licht ist $\frac{16}{9}$ mal stärker als das prüfende Licht.

Die anderen Methoden sollen hier unerörtert bleiben.

Photometrie ist die Lehre von den im vorigen Art. gedachten Abmessungen des Lichts, die Kenntnifs aller Messungsmethoden und die Beurtheilung deren Anwendbarkeit und Zuverlässigkeit.

Physik, Naturlehre, die Lehre von den äufseren Erscheinungen in Folge der Wirkung von Naturkräften. Sie steht der Chemie gegenüber, welche die innere Beschaffenheit der Naturkörper zu kennen, und diese Kenntnifs auf Zusammensetzung neuer Körper anzuwenden sucht. Die Physik ist eine reine und eine angewandte. Erstere sucht aus gegebenen Erscheinungen durch Beobachtungen und Versuche die allgemeinen Naturgesetze aufzufinden, welche diesen Erscheinungen zu Grunde liegen. Die letztere erklärt die Erscheinungen aus den von der reinen Physik überlieferten Versuche und Beobachtungen und wendet diese zugleich auf die Erklärung neuer Phänomene an.

Die Physik hat eine mathematische Seite: die Berechnung der durch die Physik in ihren Eigenschaften dargestellten Naturkräfte in ihren Wirkungen, als die der Schwerkraft, der Attraction, des Magnetismus. Es ist die angewandte Mathematik, welche die Lehren der reinen Mathematik auf die Physik rechnend und untersuchend überträgt.

Plan ist eine Grundrifszeichnung, besonders eine im verjüngten Maafsstab aufgetragene Vermessung.

Planconcaves Glas ist ein zu optischen Zwecken durchsichtiges flaches Glas, dessen eine Fläche eben und dessen andere die Form einer hohlen Calotte hat.

Planconvexes Glas ist ein Glas zum Zweck wie das vorstehende, dessen eine Fläche eben und dessen andere die Form einer erhabenen Calotte hat.

Planetarium ist ein aus kleinen Kugeln verfertigtes künstliches Sonnensystem, mit welchem durch Mechanismus die Bewegung der Planeten um die Sonne in kleinem Maafsstab vor Augen gestellt wird.

Planeten sind die Weltkörper, welche sich um die Sonne bewegen. Es geschieht dies zwar auch von den Kometen, welche man früher als zufällige Erscheinungen betrachtete, und die sich übrigens im Aeufseren von den Planeten ganz auffallend unterscheiden. Der Name Planet stammt aus dem Alterthum, sonderbarerweise von dem griechischen Worte πλανᾶσθαι, herumirren; heifst also Irrstern, indem man sich vorstellte, dafs diese Weltkörper im Weltenraum herumirrten; aber ungeachtet man jetzt weifs, dafs sie einen regelmäfsigen, immer wiederkehrenden constanten Lauf haben, hat man aus Pietät gegen die alten Astronomen den Namen Planet beibehalten.

Der Name Komet kommt von dem Worte κομη, das Haar, wegen ihres haarartigen langen Schwanzes, woher diese Gestirne deutsch auch Haarsterne, Schwanzsterne genannt werden.

In Beziehung auf unsere Erde, die mit zu den Planeten gehört, hat man obere und untere Planeten. Die oberen P. sind diejenigen, deren Bahnen die Bahn der Erde einschliefsen, die unteren P. die, deren Bahnen von der Erdbahn eingeschlossen werden, deren es nur zwei gibt, den Merkur und die Venus.

In Beziehung auf deren Entfernung von der Sonne und von der Erde hat man helische Planeten (ἡλιος die Sonne), den Merkur, die Venus, die Erde und den Mars, weil diese der Sonne die näheren sind. Uranische Planeten den Jupiter, den Saturn und den Uranus, (οὐρανος, der Himmel) weil diese der Sonne am entferntesten sind und zu welchen jetzt noch der Neptun

gekommen ist. Teleskopische Planeten nennt man diejenigen, welche man mit bloſsen Augen nicht sehen kann; als die Vesta, die Asträa, die Juno, die Ceres, den Uranus, den Jupiter. Endlich nennt man Asteroiden die kleinen Planeten, die Vesta, Juno, Ceres, Pallas und alle die vielen neu entdeckten noch viel kleineren zwischen dem Mars und dem Jupiter befindlichen Planeten.

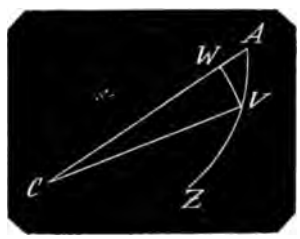
In dem Art. „Centralbewegung", Bd. II, pag. 15 sind von den sieben gröſseren Planeten die Entfernungen L derselben von der Sonne, deren Massen m im Verhältniſs zur Sonnenmasse = 1 und deren Momente $\frac{L}{m}$ angegeben. Ferner die Schwerpunkte des Sonnensystems im Maximo der Entfernung vom Sonnenmittel = 1,886 Sonnenhalbmesser, also noch 0,886 Sonnenhalbmesser auſserhalb der Sonne und im Minimo = 0,2446 Sonnenhalbmesser nachgewiesen.

Ueber die Gesetze der Bewegung dieser Planeten ist Folgendes zu beachten.

1. Eins der wichtigsten Gesetze, welche ermittelt worden sind, ist, daſs jeder Planet in gleichen Zeiten gleiche Sectoren durchläuft.

2. Es sei, Fig. 890, C der Ort der Sonne S, AZ ein Bogen der Bahn eines Planeten P. Ist dieser in A befindlich und hat im Abstande AC von C die Geschwindigkeit c, in einer anderen Entfernung CV die Geschwindigkeit v, so ist v so groſs wie in W, wenn der Körper von $CW = CK$ nach AC hin geradlinig bewegt wäre.

Fig. 890.



Denn ist V sehr nahe an A, so daſs die Kraft während der Bewegung als gleichförmig wirkend angesehen werden kann, ist die Schwerkraft = 1, die bewegende Kraft in $C = p$, dann ist die Zunahme an Geschwindigkeit nach dem Fall durch AW in der Zeit $t = 2g\,pt$.

Die nach AV wirkende Seitenkraft $= p \cos CAV$, also die Zunahme in V in der Zeit $t = 2g\,pt \cdot \cos CAV$

daher die Zeit t' für den Weg $AV = \frac{t}{\cos CAV}$

und die Zunahme in V

$$= 2g\,pt \cdot \frac{\cos CAV}{\cos CAV} = 2g\,pt$$

3. Die Kraft, wenn der Körper in gekrümmter Bahn läuft, hat als anziehende Kraft eine doppelte Wirkung:

A. Vermehrt sie die Geschwindigkeit, wenn sich der Körper C nähert und vermindert sie bei dessen Entfernung.

B. Erhält sie ihn in der Bahn, hindert, daſs er nicht dem Beharrungsvermögen zufolge nach der Tangente fortgeht; er macht also näherungsweise eine Kreisbewegung und es ist die bewegende Kraft für diesen Augenblick

$$p = \frac{c^2}{2gr}$$

4. Ist c die unveränderliche Geschwindigkeit, so ist die Umlaufszeit

$$T = \frac{2\pi r}{c}$$

woraus $$c = \frac{2\pi r}{T}$$

Nun ist nach No. 3

$$c^2 = 2g\,rp$$

also $$c = \sqrt{2g\,rp}$$

hierzu die vorige Gleichung

$$c = \frac{2\pi r}{T}$$

ergibt $$\sqrt{2g\,rp} = \frac{2\pi r}{T}$$

oder $$2g\,rp = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

oder $$gp = \frac{2\pi^2 r}{T^2}$$

Da nun g und π constant sind, so hat man für ein p', T', r'

$$p : p' = \frac{r}{T^2} : \frac{r'}{T'^2}$$

d. i. die Schwungkraft ist gerade proportional dem Halbmesser und umgekehrt proportional dem Quadrat der Umlaufszeit.

5. Soll, wie es geschieht, die Sonne verschiedene Planeten in ihren Kreisen erhalten, so ist p in verschiedenen Abständen ungleich. Nach dem dritten Kepler'schen Gesetz sind die Quadrate der Umlaufszeiten wie die Cubi der Abstände.

Also $T^2 : T'^2 = r^3 : r'^3$

Nach No. 4 aber ist

$$p : p' = \frac{r}{T^2} : \frac{r'}{T'^2}$$

Die zweite Proportion durch die erste dividirt gibt

$$\frac{p}{T^2} : \frac{p'}{T'^2} = \frac{r}{T^2 r^3} : \frac{r'}{T'^2 r'^3}$$

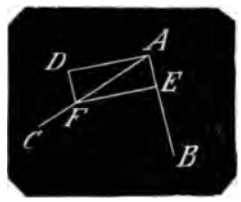
oder $$p : p' = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{r'^2}$$

Allgemeine Untersuchung über die Centralbewegung.

6. Wenn die Bahn kein Kreis ist, so ist die Schwungkraft wie vorhin, sobald man in jedem Punkt der Curve statt r den Krümmungshalbmesser nimmt.

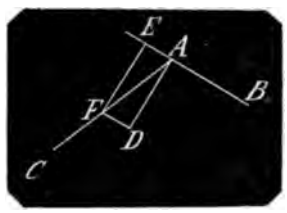
Ist (Fig. 891 und 892) C der Centralpunkt, A Bahnpunkt, AB Tangente an der Bahn, die beschleunigende Kraft AF in die Längen AE und AD zerlegt, so

Fig. 891.



vermehrt AE die Geschwindigkeit, wenn $\angle CAB$ spitz, und vermindert die Geschwindigkeit, wenn $\angle CAB$ stumpf ist; AD hält aber der Schwungkraft das Gleichgewicht.

Fig. 892.



7. Beispiel. Da nach Kepler die Sonne im Brennpunkt steht und die durchlaufenden Sectoren der Zeit proportional sind, so ist zu schliefsen, dafs in der Sonne der Sitz der Kraft sei.

Es sei, Fig. 893

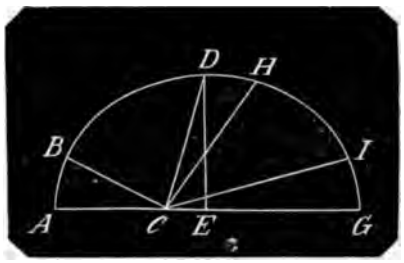
AE die halbe grofse Axe $= a$

DE die halbe kleine Axe $= b$

so ist der Inhalt der Ellipse $= \pi ab$

die Umlaufszeit in Secunden mit T bezeichnet:

Fig. 893.



Der in einer Secunde beschriebene Sector $= \pi \frac{ab}{T}$.

A. Ist der Körper in A dem Perihel, so ist dessen Entfernung

$$AC = a - \sqrt{a^2 - b^2}$$

AB, den in einer Secunde durchlaufenen Bogen setze man $= c$,

so ist Sector $ACB = \frac{1}{2}c\left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right) = \pi \frac{ab}{T}$

also $$c = \frac{2\pi ab}{\left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right) T},$$

der Krümmungshalbmesser in $A = \frac{b^2}{a} = r$

also Schwungkraft

$$= \frac{c^2}{2gr} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{2g \cdot \frac{b^2}{a} T^2} = \frac{2\pi a^3}{gAC^2 T^2}$$

B. Ist der Körper in G, im Aphel, Bogen $GJ = c'$, Sector $CGJ = \frac{1}{2}c' \cdot CG$, Sector $\frac{1}{2}c' \cdot CG = \pi \frac{ab}{T}$

also $$c' = 2\pi \cdot \frac{ab}{CG \times T}$$

so ist die Schwungkraft

$$= \frac{c'^2}{2gr} = \frac{c'^2}{2g \cdot \frac{b^2}{a}} = 2\pi \frac{a^3}{g \cdot CG^2 \cdot T^2}$$

die Schwungkräfte in A und G verhalten sich also wie

$$\frac{1}{AC^2} : \frac{1}{CG^2}$$

Also eben so die Anziehungskräfte der Sonne in C, weil diese den Körper hindert, dem Beharrungsstande zu folgen und ihn nöthigt in der Bahn zu verbleiben.

C. Der Körper sei in D, die Richtung

der Bewegung also normal auf DE, $DC = a$, Bogen $DH = c_{,,}$.

Mithin Sector $DCH = \frac{1}{2} c_{,,} b = \pi \frac{ab}{T}$.

Denn $\frac{1}{2} c_{,,}$ ist $= \pi \frac{a}{T}$ oder $\frac{1}{2} DH$ = halbe Ellipse ADG und weil $\frac{a}{T}$ sich zu DH verhält wie $1 : ADG$

der Krümmungshalbmesser in $D = \frac{a^2}{b}$

also die Schwungkraft

$$\frac{c_{,,}^2}{2gr} = \frac{c_{,,}^2}{2g \cdot \frac{a^2}{b}} = 4\pi^2 \frac{a^2}{2g \cdot \frac{a^2}{b} T} = 2\pi^2 \frac{b}{gT^2}$$

und der von dieser nach der Richtung DE normal der Tangente DH sich zerlegende Theil ist $p_{,,} \cos CDE = p_{,,} \frac{b}{a}$.

Daher $p'' \frac{b}{a} = 2\pi^2 \frac{b}{gT^2}$

und $p'' = 2\pi^2 \frac{a}{gT^2}$

die drei anziehenden Normalkräfte sind demnach

$$2\pi^2 \frac{a}{gT^2} \cdot \frac{a^2}{AC^2};\ 2\pi^2 \frac{a}{gT^2} \cdot \frac{a^2}{CG^2};\ 2\pi^2 \frac{a}{gT^2} \cdot \frac{a^2}{a^2}$$

und verhalten sich wie

$$\frac{1}{AC^2} : \frac{1}{CG^2} : \frac{1}{CD^2}$$

Ist nämlich g die Beschleunigung in der Entfernung r, so ist

$$G : g = \frac{1}{R^2} : \frac{1}{r^2}$$

woraus $G = g \cdot \frac{r^2}{R^2}$

fällt der Körper um die Länge R, so ist

$$c^2 = 4GR = 4r^2 \frac{g}{R}$$

also $C^2 = 4gr^2 \frac{1}{R}$; $C_,^2 = 4gr^2 \frac{1}{R'}$

$$C^2 - C_,^2 = 4gr^2 \cdot \frac{R_, - R}{RR_,} = 4gr^2 \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)$$

das allgemeine Gesetz nach dem Obigen ist aber

8. Es sollen nun die Geschwindigkeiten c; $c_,$; $c_{,,}$ betrachtet werden.

c in A ist $2\pi \cdot \frac{ab}{AC \cdot T}$; $AC = a - \sqrt{a^2 - b^2}$

$c_,$ in G ist $2\pi \cdot \frac{ab}{CG \cdot T}$; $CG = a + \sqrt{a^2 - b^2}$

$c_{,,}$ in D ist $2\pi \cdot \frac{a}{AD \cdot T}$; $AD = a$

Vorausgesetzt ist, wenn C, C' die Geschwindigkeiten des Körpers in den Entfernungen R, R' sind, das Gesetz:

$$C^2 - C_,^2 = 4gr^2 \cdot \frac{R_, - R}{RR_,}$$

$$C^2 - C_,^2 = 4\pi^2 \frac{a^2 b^2}{T^2} \left(\frac{1}{AC^2} - \frac{1}{CG^2}\right)$$

$$= 4\pi^2 \frac{a^2 b^2}{T^2} \cdot \frac{CG^2 - AC^2}{AC^2 \cdot CG^2} = 4\pi^2 \frac{a^2 b^2}{T^2} \cdot \frac{(CG + AC)(CG - AC)}{AC^2 \cdot GC^2}$$

$$= 4\pi^2 \frac{a^2 b^2}{T^2} \cdot \frac{2a}{b^2} \cdot \frac{CG - AC}{AC \cdot GC} = 8\pi^2 \frac{a^2}{T^2} \cdot \frac{CG - AC}{CG \cdot AC}$$

Ebenso

$$C^2 \pm C_{,,}^2 \overset{(N)}{=} 4\pi^2 \cdot \frac{a^2 b^2}{T^2} \left(\frac{1}{AC^2} - \frac{1}{b^2}\right) = N \frac{(b + AC)(b - AC)}{b^2 AC^2}$$

$$\overset{(M)}{=} 4\pi^2 \cdot \frac{a^2}{T^2} \cdot \frac{b^2 - AC^2}{AC^2} = M \frac{2\left(b^2 - a^2 + a\sqrt{a^2 - b^2}\right)}{AC^2}$$

$$= 8\pi^2 \cdot \frac{a^2}{T^2} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - b^2}\left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right)}{\left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right)^2} = 8\pi^2 \cdot \frac{a^2}{T^2} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$= 8\pi^2 \cdot \frac{a^3}{T^2} \cdot \frac{CE}{a \cdot AC} = 8\pi^2 \cdot \frac{a^3}{T^2} \cdot \frac{a - AC}{a \cdot AC}$$

Beides der allgemeinen Formel gemäfs.

Die vorstehende Darstellung soll als Mittel dienen, die theoretischen Bestimmungen über die Planeten ohne Analysis zu übersehen.

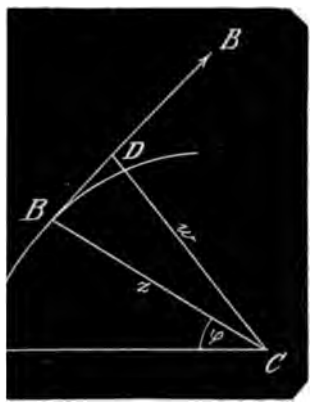
9. Genauere Bestimmungen.

i, Fig. 894
Mittelpunkt der Kräfte
lie noch unbekannte Bahn des

ie Tangente in B'.
in B wirkende beschleunigende

tadiusvector BC für den Ort B
ieten $= z$.
liehkraft desselben hierbei $= p_1$.

Fig. 894.



ist $p : p_1 = BC : BD = z : BD$,
der beabsichtigte Weg des Pla-

$$BD = \frac{p_1}{p} z$$

ist die Kraft, wenn $CD = w$ nor-
ist, von p nach $BD = p \cdot \frac{\sqrt{z^2 - w^2}}{z}$

nal auf $BD = p \frac{w}{z}$.

e Geschwindigkeit in $B = v$,

$$\partial v = 2gp \frac{\sqrt{z^2 - w^2}}{z} \cdot \partial t$$

$$\partial v = 2gp \frac{\sqrt{z^2 - w^2}}{z} \partial s$$

$= \frac{v^2}{2gr}$, wenn r der Krümmungs-
ser in B ist.

$$BD = -\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{DB}{BC} = \frac{\sqrt{z^2 - w^2}}{z}$$

$$\partial v = -2gp\, \partial z$$

$$\frac{v^2}{4g} = \frac{c^2}{4g} - \int p\, \partial z,$$

wenn c an einem bestimmten Ort die Anfangsgeschwindigkeit ist.

Planetenbahn. Die Weltkörper schweben frei im Raum, daher sind die Beschreibungen von Bahnen, entweder um Centralkörper oder um gemeinschaftliche Schwerpunkte das einzig mögliche Mittel zu deren Erhaltung, und es kann kein einziger Weltkörper in Ruhe gedacht werden. Das von Newton entdeckte Attractionsgesetz hat sich nicht nur bei allen Planeten, Kometen und Monden, sondern auch bei Gestirnen aufserhalb unseres Sonnensystems, namentlich den Doppelsternen als streng richtig bewährt, so dafs man es als zur Erhaltung des ganzen Weltalls zu Grunde liegend ansehen mufs; der Art also, dafs die Sonne mit ihrem ganzen Planetensystem mit mehreren anderen Sonnensystemen gemeinschaftlich wieder eine Centralsonne umkreist, die ein Sonnensystem zweiten Grades bildet u. s. f. (Vergleiche den Art. „Attraction“ über die muthmaafsliche Entstehung der Weltkörper und deren Systeme.)

Kepler hat zuerst bewiesen, dafs jeder der Umkreise, welche ein Weltkörper um seinen Centralkörper macht, als die Planeten und Kometen um die Sonne, die Monde um die Planeten, eine Ellipse ist, dafs der Centralkörper in deren einem Brennpunkt sich befindet, durch Attraction (Centripetalkraft) ihn zu sich zieht, während eine auf den umlaufenden Körper nach der Tangente in jedem Punkt seiner Bahn wirkende Centrifugalkraft den geradlinigen Sturz des umlaufenden Körpers nach dem Centralkörper hin verhindert.

Beide Kräfte sind für jeden einzelnen Bahnpunkt so genau untereinander ausgeglichen, dafs die Bahn auf ewige Zeiten unverändert dieselbe bleibt.

Wie eine solche Zusammenwirkung möglich ist, zeigt der Art. „Centralkräfte“ mit Fig. 282 bis 285 mit ausführlicher Erklärung; ferner der Art. „Centralbewegung“ mit dem Beispiel der Bewegung des Mondes um die Erde, endlich der Art. „Bahn“ mit Fig. 163 bis 167 die Zusammenwirkung der beiden Kräfte mit bildlicher Darstellung des Umlaufs eines Planeten und dessen verschiedene Geschwindigkeiten.

In Folge der elliptischen Form hat die Bahn eine grofse und eine kleine Axe; in der grofsen Axe hat der Planet seine Sonnennähe in dem Punkt des Perihe liums und seine Sonnenferne in dem Punkt des Apheliums. Der Ab-

stand zwischen dem Mittelpunkt der Ellipse und dem Brennpunkt, dem Standpunkt der Sonne heifst die Excentricität der Ellipse. Eine ausführliche Theorie über die Wirkung der Kräfte bei Bewegung der Weltkörper, s. die Art. „Bahn, Bahn der Weltkörper, Bahn der Weltkörper, die Ellipse". Siehe auch den Art. „Elemente der Bahn eines Planeten".

Planetenjahr ist die Zeit, in der ein Planet einen Umlauf um die Sonne macht.

Planetensystem ist die Zusammenwirkung sämmtlicher der Sonne zugehörigen Planeten einzeln und summarisch aufgefafst.

Planetoiden, s. v. w. „Asteroiden".

Planetolabium, s. v. w. „Planetarium".

Planimetrie ist der Theil der Geometrie, welcher sich mit den Ebenen beschäftigt. Vergleiche den Art. „Longimetrie".

Platonische Körper sind die fünf regelmäfsigen Polyeder.

Platonisches Jahr (grofses) der Zeitraum von 25873 Jahren, innerhalb welches die Weltaxe um die Axe der Ekliptik ihren Umgang vollbracht hat und die Nachtgleichenpunkte wieder an der vor dieser Zeit behaupteten Stelle sich befinden. (Vergl. den Art. „Nachtgleichen".)

Plus (+) ist das Zeichen für eine positive Gröfse und das der Addition.

Pneumatik, Aerodynamik ist die Mechanik der luftförmigen Körper (s. die Art. „Aerodynamik, Aerodynamische Gesetze"). Die ganze Lehre der Pneumatik findet sich ausführlich in dem Art. „Ausfluſs der Luft".

Pol (πολεω, ich drehe um) ist immer ein Endpunkt einer geraden Linie in Beziehung auf etwas gleichförmiges, symmetrisches, was sich in gleichen Abständen von dem Pol um die gerade Linie herum sich befindet.

Pol heifst der feste Punkt, von dem aus die Ordinaten (Polarordinaten) nach einer Curve gezogen werden, wenn dieselbe durch eine Polargleichung bestimmt werden soll.

Pol ist jeder Endpunkt des Durchmessers einer Kugel in Beziehung auf den gröfsten auf dem Durchmesser (der Axe) normalen Kreis und allen mit diesem parallelen Kreisen.

Pole des Horizonts eines Orts der Erdoberfläche sind die unendlich weit entfernten Endpunkte der senkrecht auf dem Horizont befindlichen Linie, welche durch den Erdmittelpunkt nach der unfern Himmelskugel geht: das Zenith oder der Scheitelpunkt über dem Horizont, das Nadir oder der Fufspunkt unter dem Horizont.

Pole des Himmels sind die Endpunkte der Weltaxe, welche mit unserer Erdaxe parallel läuft oder auch dieselbe ist, weshalb es auch einen Nordpol und einen Südpol am Himmel gibt, welche mit dem Nordpol und dem Südpol der Erde in einerlei geraden Linie liegen.

Pole der Ekliptik desgleichen die Endpunkte deren Axe, welche mit der Erdaxe einen Winkel von 23½° bildet.

Pole eines natürlichen Magnets sind die einander gegenüberliegenden Punkte, welche gegen Eisen die meiste Anziehungskraft äufsern. Man erkennt dieselben, wenn man den Magnet in Eisenfeile legt, wo dann diese Pole am meisten davon angehäuft sind.

Diese Pole eines natürlichen Magnets, so wie die einer künstlichen Magnetnadel üben auf die Pole eines zweiten natürlichen Magnets oder einer Nadel die eigenthümliche Wirkung, dafs sie sich je zwei und zwei einander anziehen und abstofsen. Sie heifsen daher freundliche und feindliche Pole, und in Beziehung auf Nord und Süd der hier folgenden magnetischen Pole der Erde, Nord- und Südpole; der Nordpol des einen stöfst den Nordpol des anderen ab und zieht den Südpol des anderen an, so dafs also die gleichnamigen Pole feindlich, die ungleichnamigen freundlich sind

Die Erde hat ebenfalls magnetische Pole, einen Nordpol und einen Südpol; deren Richtung findet man an jeder Magnetnadel, denn sie zeigt nach ihnen hin und bildet mit ihrer Richtung die Richtung des magnetischen Meridians der Erde. Die Magnetnadel hat aufser dieser Declination (Unterschied ihrer Richtung mit dem wirklichen Erdmeridian) noch eine Inclination, eine Abweichung von der Horizontalen, und es gibt Punkte auf der Erde in der Nähe der Pole, an welchen die Nadel ganz senkrecht steht, und wo die Nordspitze in der Nähe des Nordpols und die Südspitze in der Nähe des Südpols senkrecht abwärts steht. Diese Orte der Erde sind deren magnetische Pole. Kapitain Ross hat den magnetischen Nordpol erreicht,

und zwar unter 263° 14′ östlich von Greenwich und 70° 5′ nördlicher Breite; er fand nämlich daselbst die Inclination 90°.

Polabstand eines Sterns ist gleich 90° weniger seiner Abweichung. P. eines Orts der Erde ist gleich dessen Aequatorhöhe.

Polarcoordinaten. Deren Erklärung, s. den Artikel: „Coordinaten". Deren Bildung und Anwendung, s. den Art. „Curvenlehre, pag. 186 mit Fig. 537, pag. 193 mit Fig. 541.

Polardistanz, s. v. w. „Polarabstand".

Polardreieck bei Kugeldreiecken, s. v. w. „Supplementardreieck".

Polargleichung ist eine Bestimmungsgleichung für Curven mit Polarcoordinaten.

Polarkarte ist die Karte derjenigen Erdhalbkugel, für welche der Pol als Standpunkt der Aufnahme gedacht ist, in welcher also der Pol Mittelpunkt und der Umfang des Aequators die Grenze ist.

Polarkreise werden bei Umdrehung der Erde um die Axe von den Endpunkten der Axe der Ekliptik beschrieben; sie sind von den Polen 23½° entfernt. Der an dem Nordpol befindliche ist der nördliche, der am Südpol der südliche Polarkreis.

Polarprojection ist die Projection der auf der Erdoberfläche befindlichen Punkte und Linien zur Verzeichnung einer Polarkarte, indem also die wahre Lage jedes einzelnen Punkts in der von diesem auf die Aequatorebene gefällten Normale angegeben wird.

Polarstern, ein sehr heller Stern in der Nähe des Nordpols, der letzte Stern im Schwanz des kleinen Bären, der mit den beiden Sternen des grofsen Bären, die dessen Schwanz am entferntesten sind, in einer geraden Linie liegt. Die Lage des Polarsterns ist veränderlich, er nähert sich immer mehr dem Pol, hat gegenwärtig einen Abstand von demselben = 1° 35′ und wird ihm noch 300 Jahre lang immer näher rücken.

Polarzirkel, s. v. w. „Polarkreis".

Polarzonen sind die von den Polarkreisen begrenzten Calotten, sowohl die auf der Erde als die an der Himmelskugel.

Polarisation des Lichts ist die Abänderung, welche ein Lichtstrahl erfährt, wenn er mittelst eines Spiegels reflectirt. Die Aenderung seiner Natur besteht darin, dafs er nur zum zweiten Mal mit derselben Kraft und unter demselben Winkel mittelst eines zweiten Spiegels reflectirt, wenn dieser zweite Spiegel mit dem ersten parallel ist. Je mehr man den zweiten Spiegel von der Parallelität mit dem ersten abweichen läfst, desto schwächer wird die Reflexion, ohne dafs dabei der Reflexionswinkel geändert wird, und wenn beide Spiegel unter einem Winkel von 90° sich befinden, so hört die zweite Reflexion auf, sie wird Null.

Polemoskop ist ein Fernrohr, mit welchem man nach einer anderen Richtung hin sieht als dahin wo der zu beobachtende Gegenstand sich befindet, indem ein schräger Planspiegel diesen auffängt und dessen Bild auf das Objectivglas wirft. Die Erfindung ist von Hevel, der es zum Gebrauch im Kriege empfahl, daher der Name (πολεμος der Krieg).

Polhöhe, s. den Art. „Höhe des Pols" III, pag. 247, die Art.: „Astronomischer Horizont", pag. 148 und: „Aufgang und Untergang der Gestirne", pag. 174.

Für Landesvermessungen ist die Polhöhe eines bestimmten Orts der Erde von Wichtigkeit; direct kann man sie nicht messen, weil in dem Pol kein Fixstern steht. Man wählt daher einen der dem Pol zunächst stehenden Sterne, daher am zweckmäfsigsten den dem Pol nahen und hellen Polarstern, beobachtet und mifst in den Augenblicken seiner beiden Culminationen seine gröfste und seine geringste Höhe, so hat man in der halben Summe seiner beiden Höhen die Polhöhe. Oder man beobachtet und mifst die Höhe der Sonne in dem Augenblick des wahren Mittags, deren Abweichung man für jeden Tag des Jahres genau kennt. Ist die Abweichung nördlich, so subtrahirt man dieselbe von der Sonnenhöhe, ist sie südlich, so addirt man sie zur Sonnenhöhe und erhält in jedem der beiden Fälle die Aequatorhöhe des Orts, welche von 90° abgezogen, dessen geographische Breite oder Polhöhe gibt.

Polyeder ist ein Körper, der von lauter ebenen geradlinigen Figuren begrenzt ist. Diese Figuren heifsen die Seitenflächen oder Grenzflächen, deren Summe die Oberfläche des Körpers. Die Seiten der Figuren, welche zweien zusammenliegenden Seitenflächen gemeinschaftlich sind oder die Durchschnittslinien zweier Seitenflächen heifsen Kanten;

die Endpunkte der zusammentreffenden Kanten heifsen Ecken. Ein Neigungswinkel zweier zusammentreffenden Seitenflächen heifst deren Flächenwinkel und der von den in einer Ecke zusammenstofsenden Seitenflächen daselbst gebildete Winkel ein körperlicher Winkel oder Körperwinkel.

2. In jedem P. ist die Anzahl der ebenen Oberflächenwinkel das Doppelte der Anzahl der Kanten.

Denn jede Figur hat so viele Winkel als Seiten, da nun jede Kante zu zweien Seitenflächen gehört, also zwei Seiten ausmacht, so kann die Anzahl der Kanten nur die Hälfte der ebenen Winkel betragen. Hieraus folgt zugleich, dafs in einem P. die Anzahl der ebenen Winkel immer eine gerade Zahl sein mufs.

Ferner folgt daraus, dafs wenn das P. von Figuren mit einer ungeraden Anzahl von Seiten begrenzt wird, die Anzahl der Seitenflächen immer gerade sein mufs.

Wird ein P. von m Seitenflächen mit einer geraden Anzahl und von n Seitenflächen mit einer ungeraden Anzahl von Seiten begrenzt, so dafs die Anzahl der Begrenzungsflächen $= m + n$ ist, so mufs n gerade sein, m mag gerade oder ungerade sein.

3. Die Anzahl der ebenen Oberflächenwinkel eines P. ist mindestens dreimal so grofs als die Anzahl der Grenzflächen.

Denn sind die Grenzflächen Dreiecke, so sind der ebenen Winkel gerade dreimal so viel als die Anzahl der Grenzflächen beträgt; bei Flächen von mehr als drei Seiten wird die Anzahl der Winkel gröfser.

Ist demnach F die Anzahl der Grenzflächen, K die Anzahl der Kanten, so ist $2K$ die Anzahl der Winkel; also entweder $2K = 3F$ oder $2K > 3F$. Es gibt also kein P., in welchem die Anzahl der Kanten geringer wäre als $1\frac{1}{2}$ mal der Anzahl der Grenzflächen, oder die Anzahl der Grenzflächen gröfser als $\frac{2}{3}$ der Anzahl der Kanten.

4. Die Anzahl aller auf der Oberfläche eines P. vorhandenen ebenen Winkel ist entweder gleich oder gröfser als die dreifache Anzahl der Ecken und als die dreifache Anzahl der Grenzflächen.

Denn jede Ecke und jede Grenzfläche wird aus mindestens 3 ebenen Winkeln gebildet.

Bezeichnet man noch die Anzahl der Ecken mit E, so ist die Anzahl der ebenen Winkel W nach Satz 3 $= 2K$. Es ist demnach immer entweder $2K = 3E$ oder $2K > 3E$ und $2K = 3F$ oder $> 3F$. Demnach kann in einem P. weder die Anzahl der Grenzflächen noch die der Ecken gröfser sein als $\frac{2}{3}$ der Anzahl der Kanten.

5. In jedem P. ist die Summe der Anzahl der Ecken und der Grenzflächen um 2 gröfser als die Anzahl der Kanten. $(E + F = K + 2)$.

Denkt man sich innerhalb des P. einen beliebigen Punkt, beschreibt um denselben eine Kugelfläche, zieht von dem Punkt aus nach den Ecken des P. gerade Linien, beschreibt auf der Kugeloberfläche durch je zwei auf derselben entstandene Durchschnittspunkte, welche den Ecken einer Kante des P. entsprechen, einen gröfsten Kreisbogen, so erhält man eine Summe von sphärischen Vielecken, die zusammen gleich der Kugeloberfläche sind.

Es kommt nun darauf an, die Inhalte dieser sphärischen Vielecke zu bestimmen.

In dem Art. „Kugel", No. 19 ist aber die Proportion als richtig erwiesen

$$J : F = \varphi - (n-2)\,2R : 2R$$

woraus

$$J = \frac{\varphi - (n-2)\,2R}{2R} \cdot F = \frac{\varphi - (n-2)\,180^\circ}{180^\circ} \cdot F$$

Hier bedeutet J den Flächeninhalt eines sphärischen Vielecks, φ die Summe sämmtlicher Umfangswinkel, n die Anzahl seiner Seiten und F den Inhalt des 4ten Theils der Kugeloberfläche. Bezeichnet man die ganze Kugeloberfläche mit S, so hat man

$$J = \frac{\varphi - (n-2)\,180^\circ}{720^\circ} \times S \qquad (1)$$

Bezeichnet man ferner die Summen der Winkel der einzelnen Vielecke mit φ, φ', φ'' ... und die Anzahl der Seiten derselben mit n, n', n'' ... die Anzahl der Vielecke wieder mit F, so erhält man die der ganzen Kugeloberfläche S gleiche Inhaltssumme J_s sämmtlicher Vielecke.

$$\frac{\varphi + \varphi' + \varphi'' + \ldots - (n + n' + n'' \ldots - 2F)\,180^\circ}{720^\circ} \cdot S = S$$

woraus

$$\varphi + \varphi' + \varphi'' + \ldots - (n + n' + n^2 + \ldots - 2F)\,180^\circ = 720^\circ \qquad (2)$$

nmtliche Winkel, deren Summe = $+\varphi'+\varphi''+\ldots$ liegen aber um ɜle Punkte als das P. Ecken hat und nzahl der um eine Ecke liegenden el machen zusammen 360° aus; mit- ɜt $\varphi+\varphi'+\varphi''+\ldots = E\cdot 360°$. No. 2 ist nun die Anzahl $n+n'+\ldots = 2K$. Wenn man demnach Werthe in die letzte Gleichung sub- rt, so hat man

$$\cdot 360° - (2K-2F)\,180° = 720°$$
$$E+F = K+2 \qquad (3)$$

Die Summe aller ebenen Winkel auf der Oberfläche eines P. ist gleich so vielen Rechten als die 4fache Anzahl der Ecken beträgt weniger 8.

Also $W=(4E-8)R\angle=(E-2)4R\angle$.

Denn sind n, n', n''.... die Seitenanzahl der einzelnen Vielecke, so betragen deren Winkelsummen $(2n-4)R$, $(2n'-4)R$, $(2n''-4)R$... Nun ist $n+n'+n''+\ldots$ = der Anzahl aller auf der Oberfläche des P. befindlichen ebenen Winkel = $W=2K$, mithin hat man die Summe sämmtlicher Winkel

$$(n+n'+n''+\ldots)2R-4FR=2WP-4FR=4KR-4FR=(K-F)4R$$

ɜr $W=(K-F)4R$ (4)

n ist aus Formel 3: $K-F=E-2$,

lie Summe $W=(4E-8)R\angle$ (5)

In jedem P. ist die Anzahl der ɜen + 6 kleiner oder eben so ɜ als die dreifache Anzahl der ɜn oder der Seitenflächen.

ɜo $K+6 \gtreqless \begin{cases}3E\\3F\end{cases}$

an nach No. 4 ist $2K \gtreqless 3E$ und $3F$.

ɜrin aus Formel 3: E und F sub- rt

$$2K \gtreqless 3K-3F+6$$
$$2K \gtreqless 3K-3E+6$$

ɪs $K+6 \gtreqless 3F$

$K+6 \gtreqless 3E$ (6)

Nach No. 3 ist $F \gtreqless \frac{1}{3}K$. Diesen Werth leichung 6 substituirt, gibt $K \gtreqless 6$.

ɜht hieraus hervor, dafs in einem ie Anzahl der Kanten nicht ner als 6 sein kann. Substituirt dieses Minimum von K in Formel erhält man

$b+b \gtreqless \begin{cases}3E\\3F\end{cases}$, woraus $\begin{matrix}E\\F\end{matrix}\Big\} \gtreqless 4$

kann also in einem P. die An- der Ecken und die der Grenz- hen nicht geringer als 4 sein. e Sätze gehen übrigens schon aus ɜ hervor.)

In jedem P. ist die Anzahl F Grenzflächen + 4 entweder ner oder gleich der doppelten ahl E der Ecken und die An- der Ecken + 4 entweder klei- oder gleich der doppelten An- der Grenzflächen.

nn da nach No. 4: $K \gtreqless \begin{cases}\frac{1}{3}F\\\frac{1}{3}E\end{cases}$, so kann man Zahlen a, b finden,

so dafs $K=\frac{1}{3}F+a$ und $K=\frac{1}{3}E+b$

da nun (Formel 3) $K=E+F-2$

so hat man $\frac{1}{3}F+a=E+F-2$

und $\frac{1}{3}E+b=E+F-2$

woraus $F+2a+4=2E$

und $E+2b+4=2F$

daher $F+4<2E$ und $E+4<2F$

10. Da aus den No. 9 entwickelten Formeln

$$E=\tfrac{1}{2}F+a+2$$

und $E=2F-2b-4$

so kann in einem P. die Anzahl E der Ecken weder kleiner als $\frac{1}{2}F+2$ noch gröfser als $2F-4$ werden. Diese beiden Gröfsen $\frac{1}{2}F+2$ und $2F-4$ sind also die Grenzen zwischen welche in jedem P. die Anzahl E der Ecken fällt.

Da ferner $F=2E-4-2a$

und zugleich $F=\frac{1}{2}E+2+b$

so kann F nicht gröfser werden als $2E-4$ noch kleiner als $\frac{1}{2}E+2$ und diese beiden Gröfsen $2E-4$ und $\frac{1}{2}E+2$ sind also die Grenzen, zwischen welche in jedem P. die Anzahl F der Seitenflächen fällt.

11. Kein P. kann von lauter sechs- und mehrseitigen Figuren eingeschlossen werden, auch gibt es kein P., dessen Ecken aus sechs oder mehr ebenen Winkeln zusammengesetzt sind.

Denn es würde die Anzahl W der ebenen Winkel auf der Oberfläche $\gtreqless 6F$, folglich $K \gtreqless 3F$ sein. Nun ist aber (Formel 6) $K \lesseqgtr 3F-6$, also K immer $<3F$, welches der Annahme widerspricht.

Wären die Ecken sechs- oder mehrwinklig, so wäre die Anzahl W der ebe-

nen Winkel $\gtrless 6E$, also $K \gtrless 3E$. Es ist aber (Formel 6) $K \lesseqgtr 3E-6$, also $K < 3E$, welches der Annahme widerspricht.

12. Die Summe aller ebenen Winkel auf der Oberfläche eines P. kann nie kleiner sein als $2F$ rechte Winkel und nie gröfser als $8(F-3)$ rechte Winkel.

Denn da nach No. 4: $2K \gtrless 3F$

so ist $4K - 4F \gtrless 2F$

Nun ist nach Formel 4:

$$(4K-4F)R = W$$

mithin $W \gtrless 2F$ rechte Winkel.

D. h. die Summe W der ebenen Winkel kann nie kleiner werden als $2F$ rechte Winkel, d. h. nie kleiner als so viele rechte Winkel, wie die doppelte Anzahl der Vielecksflächen ausdrückt.

Nach No. 7 ist $K+6 \gtrless 3F$

oder $(K-F)+6 \gtrless 2F$

Also $(K-F)4R \gtrless (2F-6)4R$

also nach Formel 4

$W \gtrless 8F-24$ rechte Winkel.

D. h. die Summe W der ebenen Winkel kann nie gröfser werden als $8F-24$ und die Summe aller ebenen Winkel eines P. kann nie aufser den Grenzen $2F$ rechte Winkel und $8F-24$ rechte Winkel fallen.

13. Polyeder, die von lauter Dreiecken eingeschlossen sind und deren Ecken theils von fünf, theils von sechs ebenen Winkeln gebildet werden, können nicht mehr und nicht weniger als zwölf fünfflächige Ecken haben (sobald nämlich jede Ecke aus gleich vielen Flächen besteht).

Da die Flächen sämmtlich Dreiecke sind, so hat jede Fläche 3 Seiten und 3 Winkel; bei F Flächen ist also die Anzahl der Seiten $= 3F$ und folglich die Anzahl der Kanten $K = \frac{1}{2}F$

woraus $2K = 3F$ (1)

Hierzu Formel 3:

$$E + F = K + 2 \quad (2)$$

Aus 1 den Werth von K in 2 gesetzt gibt

$$E = \tfrac{1}{2}F + 2 \quad (3)$$

Hat nun das P. p fünfflächige und q sechsflächige Ecken,

so ist $E = p + q$ (4)

Die Anzahl der ebenen Winkel

W ist $= 5p + 6q$ (5)

Eben so viele Seiten, also halb so viele Kanten hat das P., folglich ist

$$K = \tfrac{1}{2}(5p + 6q) \quad (6)$$

Aus 4 den Werth von q in 6 gesetzt gibt

$$K = \tfrac{1}{2}(5p + 6E - 6p) = \tfrac{1}{2}(6E - p)$$

woraus $p = 6E - 2K$.

Setzt man nun aus 1 den Werth von K und aus 3 den Werth von E in die letzte Gleichung, so erhält man $p = 12$.

Setzt man in die Gleichungen $p = 12$, so erhält man

$$q = \tfrac{1}{3}K - 10; \quad K = 3q + 30$$
$$= \tfrac{1}{2}F - 10; \quad F = 2q + 20$$
$$= E - 12; \quad E = q + 12$$

Kann in dem Polyeder jede Ecke von der anderen verschieden viele Begrenzungsflächen haben, so kann eine derselben von 1000 Flächen begrenzt sein.

14. Zusammenstellung der für sämmtliche Polyeder allgemein geltenden Gesetze:

$W = 2K$

$W = (4E-8)R\angle$

$W = (K-F)4R\angle$

$W \gtrless 3F$

$W \lesseqgtr 3E$

$W \gtrless 2F$ Rechte Winkel
$W \lesseqgtr 8F-24$ Rechte W. } Grenzwerthe

$F = K - E + 2$

$F \gtrless \frac{1}{3}W$

$F \lesseqgtr \frac{1}{3}K$
$F \gtrless \frac{1}{3}K+2$ } Grenzwerthe

$F \lesseqgtr 2E-4$
$F \gtrless \frac{1}{2}E+2$ } Grenzwerthe

$E = K - F + 2$

$E \gtrless \frac{1}{3}W$

$E \lesseqgtr \frac{2}{3}K$
$E \gtrless \frac{1}{3}K+2$ } Grenzwerthe

$E \gtrless \frac{1}{2}F+2$
$E \lesseqgtr 2F-4$ } Grenzwerthe

$K = \frac{1}{2}W$

$K = E + F - 2$

$K \gtrless \frac{1}{2}F$
$K \lesseqgtr 3F-6$ } Grenzwerthe

$K \gtrless \frac{1}{2}E$
$K \lesseqgtr 3E-6$ } Grenzwerthe

In jedem P. sind mindestens 4 Ecken, 4 Grenzflächen, 6 Kanten.

Von den Grenzwerthen hat man folgende Zusammenstellung.

Gegeben	der Gröſse	kleinster Werth	gröfster Werth
F	K	$\frac{1}{2}F$	$3F-6$
	E	$\frac{1}{2}F+2$	$2F-4$
	W	$2F$ rechte W.	$(8F-24)$ rechte W.
K	E	$\frac{1}{3}K+2$	$\frac{2}{3}K$
	F	$\frac{1}{3}K+2$	$\frac{2}{3}K$
E	K	$\frac{2}{3}E$	$3E-6$
	F	$\frac{1}{2}E+2$	$2E-4$

s der zweiten Rubrik: K gegeben sich folgendes schliefsen:

Für $K=6$ ist $E=F=4$. Das P. ne dreiseitige Pyramide.

Kein P. kann 7 Kanten haben, denn ien $\frac{1}{3}+2=4\frac{1}{3}$ und $\frac{14}{3}$ existirt keine Zahl.

Für $K=8$ kann $E=F$ nur 5 sein. '. ist eine vierseitige Pyramide.

Für $K=9$ ist $E=F=5$ bis 6. Das ein dreiseitiges Prisma, also von 5 en und 6 Ecken.

Für $K=10$ ist $E=F$ nur $=6$. Das eine fünfseitige Pyramide.

Für $K=11$ ist $E=F=6$ bis 7. '. ist eine Summe von einer dreiiner vierseitigen Pyramide von gechaftlicher Spitze, deren beide Grundn zwei Ebenen bilden, die mit einer linie zusammenhangen. Das P hat 5 Seitenflächen + 2 Grundflächen, is ist $F=7$; es hat eine Spitze und ndecken, also $E=6$.

s. w.

Die Anzahl der Bestimmungsse eines P. zu finden.

eine der Grenzflächen ein $n$eck, so e Anzahl dessen Bestimmungsstücke -3.

sind nun aufser diesen n noch $E-n$ ı vorhanden, zur Bestimmung der eines Punkts im Raum gehören 3 Bestimmungsstücke, mithin zu n) Punkte noch $3(E-n)$ Bestimsstücke, im Ganzen also $2n-3(E-n)=3E-n-3$ Bestimmungs-.

se Anzahl ist aber zu grofs.

ın haben die übrigen $(F-1)$ Umflächen n', n'', n''' ... Seiten, so liemmer n', n'', n''' ... in einer Ebene; age einer Ebene ist aber durch drei te bestimmt.

nun die Lage des n'ecks durch 3 te bestimmt, so bleiben noch $n'-3$ Punkte zu bestimmen übrig, und da nun jeder derselben schon ein Bestimmungsstück hat, so bedarf jeder nur noch zweier Bestimmungsstücke. Das n'eck hat also noch $2(n'-3)$ Bestimmungsstücke nöthig und es sind für dasselbe $n'-3$ zu viel gerechnet. Dies gilt für alle übrigen Grenzflächen von den Seiten n'', n'''...

Es sind demnach von den oben aufgeführten $3E-n-3$ Bestimmungsstücken abzuziehen

$$(n'-3)+(n''-3)+(n'''-3)+\ldots$$
$$=(n'+n''+n'''+\ldots)-3(F-1)$$
$$=(n+n'+n''+\ldots)-[n+3(F-1)]$$

und da so viele Winkel als Seiten an den Grenzflächen sind, abzuziehen

$$W-n-3(F-1)$$

und da nur halb so viele Kanten als Seiten oder Winkel an den Grenzflächen sind: abzuziehen

$$2K-n-3(F-1)$$

Die erforderliche Anzahl Bestimmungsstücke für das P. ist demnach

$$3E-n-3-2K+n+3(F-1)$$
$$=3(E+F)-2K-6=K$$

d. h. die Anzahl der erforderlichen Bestimmungsstücke für ein P. ist = der Anzahl seiner Kanten.

Es ist hierbei zu bemerken, dafs die Kanten allein ein P. nicht bestimmen, es gehören diese und noch andere Stücke, besonders Winkel dazu.

16. Polyeder sind gleich, wenn sie einen gleichen körperlichen Inhalt haben.

P. sind congruent, wenn sie, in einander gelegt gedacht, nur einen einzigen P. ausmachen.

P. sind ähnlich (nach Euklid XI, Erkl. 10), wenn sie von gleich vielen ähnlichen Ebenen begrenzt werden. Besser ist wohl die Erklärung: Wenn die P. lauter gleiche Ecken in derselben Anordnung haben, oder wenn alle homo-

loge Linien derselben einerlei Verhältnifs haben und alle homologen Winkel einander gleich sind, auch noch die homologen Stücke in einerlei Anordnung neben einander liegen.

Sind in zwei P. zwei Seitenflächen einander ähnlich und liegen alle übrigen Eckpunkte derselben in Spitzen je zwei und zwei ähnlicher Pyramiden, so sind beide P. einander ähnlich.

Aehnliche P. verhalten sich wie die Cubi ihrer Längenabmessungen.

P. sind symmetrisch, wenn sie congruente Flächen haben, die aber, wenn sie auf homologe Grenzflächen neben einander gestellt werden, mit den congruenten Flächen nach gerade entgegengesetzten Richtungen angeordnet sind.

Symmetrische P. haben gleichen körperlichen Inhalt.

Wenn man von den Eckpunkten eines P. auf eine aufserhalb des P. liegende Ebene Lothe fällt und jedes Loth auf der anderen Seite der Ebene um ein gleiches Stück verlängert, so sind die Endpunkte der Lothe die Eckpunkte eines P., welches dem ersten symmetrisch ist.

Regelmäfsige Polyeder.

17. Ein regelmäfsiges Polyeder ist ein P., welches lauter regelmäfsige congruente Grenzflächen hat und dessen Ecken von gleich viel ebenen Winkeln eingeschlossen werden,

Die Anzahl der regelmäfsigen P. ist begrenzt: Sie hängt ab von den regelmäfsigen Vielecken, welche dessen Grenzflächen sein können und von deren Anzahl zu Bildung deren Ecken.

Weniger als drei Vielecke können keine Ecke bilden und wie viel mehr dazu möglicher Weise genommen werden dürfen, hängt von der Gröfse deren Umfangswinkel ab, weil die Summe dieser Winkel kleiner als 4 rechte Winkel sein mufs.

Jeder Winkel eines regelmäfsigen Dreiecks hat 60°, es können also sechs Dreiecke, weil diese zusammen gerade 4 R.∠ betragen, zu einer Ecke nicht genommen werden. Es kann also nur regelmäfsige P. geben, deren Ecken 3, 4 und 5 Dreiecke zu Grenzebenen haben.

Für Quadrate als Grenzflächen existirt aus demselben Grunde nur ein einziges regelmäfsiges P.

Aus demselben Grunde gibt es nur ein einziges regelmäfsiges P., dessen Grenzflächen Fünfecke sind. Jeder Umfangswinkel eines regelmäfsigen Fünfecks hat 108°, drei Umfangswinkel zusammen also 324°. Mit dem Fünfeck hört die Grenzfläche auf; denn ein Sechseck hat Umfangswinkel von 120°; es betragen also drei derselben gerade 360°.

Ist die Anzahl der Seiten einer Grenzfläche $= n$, die Länge der Seite $= s$, so ist der Umfang einer Grenzfläche $= ns$. Um jede Grenzfläche läfst sich ein Kreis beschreiben; ist dessen Halbmesser $= r_1$, so ist die Normale auf die Seite $= \sqrt{r_1^2 - \frac{1}{4}s^2}$, also der Flächeninhalt einer Grenzfläche $= \frac{1}{2}ns\sqrt{r_1^2 - \frac{1}{4}s^2}$.

Um jedes regelmäfsige P. läfst sich eine Kugel beschreiben; ist deren Halbmesser $= r$, eine von dem Mittelpunkt auf die Grenzfläche gefällte Normale ist $= \sqrt{r^2 - r_1^2}$; setzt man nun den Inhalt der Grenzfläche $= F$, die Anzahl derselben $= N$, so ist der Inhalt des P.

$$= J = \tfrac{1}{3}NF\sqrt{r^2 - r_1^2}.$$

18. Das regelmäfsige P., welches drei Dreiecke für jede Ecke hat, heifst Tetraeder (τετρας vier) weil es vier Grenzflächen hat.

Das regelmäfsige P., welches vier Dreiecke für jede Ecke hat, heifst Oktaeder (*Οκτας* acht) weil es acht Grenzflächen hat.

Das regelmäfsige P., welches fünf Dreiecke für jede Ecke hat, heifst Ikosaeder (*Εικοσαεπια* Zeit von 20 Jahren), weil es zwanzig Flächen hat.

Das regelmäfsige P., welches drei Quadrate für jede Ecke hat, heifst Hexaeder (*Εξαεπια* Zeit von 6 Jahren) weil es sechs Flächen hat.

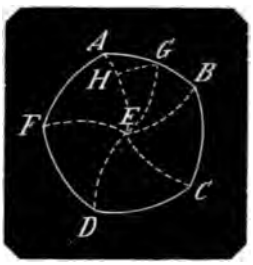
Das regelmäfsige P., welches drei Fünfecke für jede Ecke hat, heifst Dodekaeder (*Δωδεκα* zwölf) weil es zwölf Flächen hat.

19. Den Neigungswinkel zweier aneinander liegenden Grenzflächen eines regelmäfsigen P. zu finden.

Der Neigungswinkel zweier Ebenen wird mit Hülfe eines Körperdreiecks gefunden, wie dies in dem Art. „Parallelepipedum“ No. 11, pag. 244 mit Fig. 883 geschehen ist.

Es sei, Fig. 895, E eine Ecke eines regelmäfsigen P., die Anzahl der die Ecke bildenden ebenen Winkel sei $= n$, aus E beschreibe man mit beliebigem Halbmesser eine Kugel, EA, EB ... seien die von der Kugel abgeschnittenen Kantenstücke, $ABCDF$ sei das auf den Grens-

Fig. 895.



flächen entstandene Polygon, dessen Seiten und Winkel alle gleich sind. Jede Seite, wie AB ... sei $= \alpha$, jeder Winkel, wie $FAEB = \gamma$, die Dreiecke EAB, EBC... sind alle gleichschenklig und es ist $\angle AEB = \angle BEC = \frac{2\pi}{n}$.

Wird nun AB durch einen Bogen EG in G halbirt, so ist EG auf AB normal, $\angle AEG = \angle BEG = \frac{\pi}{n}$, folglich ist für den halben Neigungswinkel $(\frac{1}{2}\gamma)$

$$\sin GAE = \frac{\cos AEG}{\cos AG} = \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

Ist nun die Anzahl der Seiten $(AB,...)$ jeder Seitenfläche $= m$, so ist der Cosinus der halben Seite $AG = AH =$ dem Cosinus von $(90° - \angle GEA)$

woraus

$$\tfrac{1}{2}\alpha = 90° - \angle GEN = 90° - \frac{1}{m}\pi \qquad (1)$$

mithin

$$\sin \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{m}} = \frac{\cos \frac{180°}{n}}{\sin \frac{180°}{m}} \qquad (2)$$

Für das Tetraeder, das Octaeder, das Icosaeder, das Hexaeder, das Dodekaeder ist

$m = 3, 3, 3, 4, 5$ und $n = 3, 4, 5, 3, 3$

Demnach hat man $\sin(\frac{1}{2}\gamma)$ für

das Tetraeder	$= \frac{\cos 60°}{\sin 60°} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$;	$\gamma = 70° 31' 44''$
das Octaeder	$= \frac{\cos 45°}{\sin 60°} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$;	$\gamma = 109° 28' 16''$
das Ikosaeder	$= \frac{\cos 36°}{\sin 60°} = \frac{1}{3}\sqrt{2 + \frac{2}{5}\sqrt{5}}$;	$\gamma = 138° 11' 23''$
das Hexaeder	$= \frac{\cos 60°}{\sin 45°} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$;	$\gamma = 90°$
das Dodekaeder	$= \frac{\cos 60°}{\sin 36°} = \frac{5+\sqrt{5}}{20}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$;	$\gamma = 116° 32' 54''$

20. Um R und r zu bestimmen bezeichne, wie No. 19

m die Anzahl der Seiten jeder Grenzfläche,

n die Zahl der zu jeder Ecke gehörenden Grenzebenen,

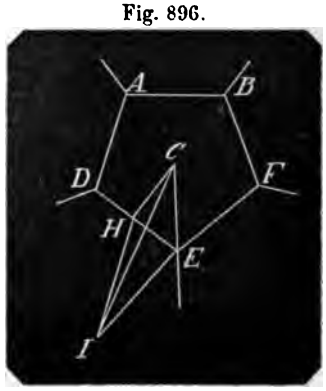
so hat man schon No. 19:

γ den Neigungswinkel zweier Ebenen durch die Formel

$$\sin \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\cos \frac{180°}{n}}{\sin \frac{180°}{m}} \qquad (1)$$

Es sei Fig. 896: $ABFED$ die Grenzfläche eines P., C deren Mittelpunkt. Denkt man sich von C aus in und um dieses regelmäfsige Vieleck Kreise beschrieben, so ist CH der Halbmesser (r') des inneren, CE der Halbmesser (R') des äufseren Kreises, und es ist

Fig. 896.



$$CH = r' = EH \cdot tg\, CEH$$

also

$$r' = \tfrac{1}{2}k \cdot \cot \frac{180°}{m} \qquad (2)$$

und

$$CE = R' = EH \cdot \sec CEH = \tfrac{1}{2}k \cdot \operatorname{cosec} \frac{180^\circ}{m} \quad (3)$$

Bedeutet der Punkt J den Mittelpunkt des P., und denkt man sich von J aus in und um das P. Kugeloberflächen beschrieben, so ist $JC = r$ der Halbmesser der inneren und $JE = R$ der Halbmesser der äufseren Kugeloberfläche, und man hat, da $\angle HCJ = R$ ist

$$JC = r = CH \cdot tg\, CHJ = r' tg \frac{\gamma}{2} \quad (4)$$

und $JE^2 = R^2 = CE^2 + CJ^2 = R'^2 + r^2$ (5)

Es ist mithin, wenn man für r' aus Formel 2 in Formel 4 seinen Werth setzt

$$r = \tfrac{1}{2}k \cot \frac{180^\circ}{m} \cdot tg \frac{\gamma}{2} \quad (6)$$

und wenn man aus Formel 3 und 6 die Werthe von R' und r in Formel 5 setzt

$$R^2 = \tfrac{1}{4}k^2 \cdot \operatorname{cosec}^2 \frac{180^\circ}{m} + \tfrac{1}{4}k^2 \cdot \cot^2 \frac{180^\circ}{m} \cdot tg^2 \frac{\gamma}{2}$$

woraus

$$R = \tfrac{1}{2}k \sqrt{\left(1 + \cot^2 \frac{180^\circ}{m} \cdot \sec^2 \frac{\gamma}{2}\right)} \quad (7)$$

Nun ist Formel 1, No. 20

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{\cos \frac{180^\circ}{n}}{\sin \frac{180^\circ}{m}}$$

Und wenn man der Abkürzung wegen $\frac{180^\circ}{m} = \varphi$ und $\frac{180^\circ}{n} = \psi$ setzt,

$$R = \tfrac{1}{2}k \sqrt{\left[1 + \cot^2\varphi \cdot \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi - \cos^2\psi}\right]} = \tfrac{1}{2}k \sqrt{1 + \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi - \cos^2\psi}}$$

$$= \tfrac{1}{2}k \sqrt{\frac{1 - \cos^2\psi}{\sin^2\varphi - \cos^2\psi}} = \tfrac{1}{2}k \sqrt{\frac{\sin^2\psi}{\cos^2\psi} \cdot \frac{\cos^2\psi}{\sin^2\varphi - \cos^2\psi}}$$

also $R = \tfrac{1}{2}k\, tg\, \psi \cdot tg \frac{\gamma}{2} = \tfrac{1}{2}k \cdot tg \frac{180^\circ}{n} \cdot tg \frac{\gamma}{2}$ (8)

21. Der Inhalt einer Grenzfläche ist

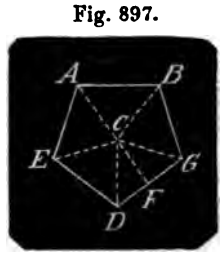
$$J^2 = \tfrac{1}{4}mk^2 \cot \frac{180^\circ}{m} \quad (1)$$

Denn ist, Fig 897, $ABGDE$ eine Grenzfläche eines regelmäfsigen P., und man zieht vom Mittelpunkt C derselben nach allen Spitzen A, B ... gerade Linien, so hat dieselbe m congruente Dreiecke ACB, BCG ... Es ist also

$$J^2 = m \times \triangle ACB$$

Fällt man von C auf eine der Kanten, z. B. auf DG eine Normale CF, so ist

Fig. 897.



$$J^2 = m \cdot \tfrac{1}{2}DG \cdot CF = \tfrac{1}{2}mk \cdot CF \quad (2)$$

Es ist aber

$$CF = GF \cdot tg\, CGF = \tfrac{1}{2}k\, tg \frac{(2m-4)R}{2m} = \tfrac{1}{2}k\, tg \left(1 - \frac{2}{m} R\right) = \tfrac{1}{2}k \cot \frac{2R}{m} \quad (3)$$

daher

$$J^2 = \tfrac{1}{4}mk^2 \cot \frac{2R}{m} = \tfrac{1}{4}mk^2 \cot \frac{180^\circ}{m}$$

wie zu erweisen war.

Um J^2 auch durch R und r ausdrücken zu können, hat man aus No. 20, Formel 8:

$$k = 2R \cot \frac{180^\circ}{n} \cdot \cot \frac{\gamma}{2}$$

und Formel 6:

$$k = 2r\, tg \frac{180^\circ}{m} \cdot \cot \frac{\gamma}{2}$$

Diese Werthe in Gleichung 1 gesetzt, gibt

$$J^2 = mR^2 \cdot \cot^2 \frac{180^\circ}{n} \cdot \cot \frac{180^\circ}{m} \cdot \cot^2 \frac{\gamma}{2} \quad (4)$$

$$J^2 = mr^2 \cdot tg \frac{180^\circ}{m} \cdot \cot^2 \frac{\gamma}{2} \quad (5)$$

22. Der Inhalt des P. ist gleich dem so vieler Pyramiden als derselbe Grenzflächen hat, die als Grundflächen die gleichen Abstände des Mittelpunkts von denselben zu Höhen haben.

In Fig. 896 ist also die Ebene *ABFED* die Grundfläche und $CJ = r$ die Höhe jeder solchen Pyramide *P*.

Nun ist nach Satz 5, Formel 3:

$$F = K - E + 2$$

No. 21, Formel 1 ist:

$$J^2 = \tfrac{1}{4} m k^2 \cot \frac{180^\circ}{m}$$

Pyramide $P = \frac{1}{3}(CJ) \cdot J^2 = \frac{1}{3} r J^2$.

Nach No. 20, Formel 6 ist

$$r = \tfrac{1}{2} k \cot \frac{180^\circ}{m} \cdot tg \frac{r}{2}$$

Daher eine Pyramide

$$P = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} k \cdot \cot \frac{180^\circ}{m} \cdot tg \frac{\gamma}{2} \times \tfrac{1}{4} m k^2 \cot \frac{180^\circ}{m} \qquad (1)$$

oder $P = \frac{1}{24} m k^3 \cot^2 \frac{180^\circ}{m} \cdot tg \frac{\gamma}{2}$ (2)

Also $J^3 = \frac{1}{24} m F k^3 \cot^2 \frac{180^\circ}{m} \cdot tg \frac{\gamma}{2}$ (3)

Aus No. 20, Formel 8 ist

$$k = 2R \cdot \cot \frac{180^\circ}{n} \cdot \cot \frac{\gamma}{2} \qquad (4)$$

Diesen Werth in Formel 3 gesetzt gibt

$$J^3 = \tfrac{1}{24} m F \times 8 R^3 \cot^3 \frac{180^\circ}{n} \cdot \cot^3 \frac{\gamma}{2} \cdot \cot^3 \frac{180^\circ}{m} \cdot tg \frac{\gamma}{2}$$

$$= \tfrac{1}{3} m F R^3 \cdot \cot^3 \frac{180^\circ}{n} \cdot \cot^3 \frac{180^\circ}{m} \cdot \cot^3 \frac{\gamma}{2} \qquad (5)$$

Endlich ist, um J^3 auch durch r auszudrücken, aus No. 20, Formel 6

$$k = 2r \, tg \frac{180^\circ}{m} \cdot \cot \frac{\gamma}{2}$$

Diesen Werth in Formel 2 gesetzt, gibt

$$J^3 = \tfrac{1}{3} m F r^3 \, tg \frac{180^\circ}{m} \cdot \cot^3 \frac{\gamma}{2} \qquad (6)$$

23. Den voranstehenden Untersuchungen und Ermittelungen entsprechend hat man die Zusammenstellung folgender für regelmäfsige P. allgemein geltende Formeln:

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{\cos \frac{180^\circ}{n}}{\sin \frac{180^\circ}{m}}$$

$$R = \tfrac{1}{2} k \, tg \frac{180^\circ}{n} \, tg \frac{\gamma}{2}$$

$$= r \cdot tg \frac{180^\circ}{n} \cdot tg \frac{180^\circ}{m}$$

$$r = \tfrac{1}{2} k \cot \frac{180^\circ}{m} \, tg \frac{\gamma}{2}$$

$$= R \cot \frac{180^\circ}{n} \cdot \cot \frac{180^\circ}{m}$$

$$k = 2R \cdot \cot \frac{180^\circ}{n} \cdot \cot \frac{\gamma}{2}$$

$$= 2r \, tg \frac{180^\circ}{m} \cdot \cot \frac{\gamma}{2}$$

$$J^2 = \tfrac{1}{4} m k^2 \cot \frac{180^\circ}{m}$$

$$= m R^2 \cot^2 \frac{180^\circ}{n} \cdot \cot \frac{180^\circ}{m} \cdot \cot^2 \frac{\gamma}{2}$$

$$= m r^2 \, tg \frac{180^\circ}{m} \cdot \cot^2 \frac{\gamma}{2}$$

$$= \tfrac{1}{4} m F k^3 \cot^2 \frac{180^\circ}{m} \cdot tg \frac{\gamma}{2}$$

$$J^3 = \tfrac{1}{3} m F R^3 \cot^3 \frac{180^\circ}{n} \cdot \cot^3 \frac{180^\circ}{m} \cdot \cot^3 \frac{\gamma}{2}$$

$$= \tfrac{1}{3} m F r^3 \, tg \frac{180^\circ}{m} \cdot \cot^3 \frac{\gamma}{2}$$

24. γ und $\sin(\frac{1}{2}\gamma)$ s. No. 19.

Nach den Formeln No. 23 ist nun

R fürs Tetraeder	$= 3 \times r$	$= 3{,}000\,0000 \times r$
	$= \frac{1}{2}\sqrt{6} \times k$	$= 0{,}612\,3724 \times k$
fürs Octaeder	$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \times k$	$= 0{,}707\,1068 \times k$
	$= \sqrt{3} \times r$	$= 1{,}732\,0508 \times r$
fürs Ikosaeder	$= \frac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \times k$	$= 0{,}951\,0565 \times k$
	$= \sqrt{3}(5 - 2\sqrt{5}) \times r$	$= 1{,}258\,4087 \times r$
fürs Hexaeder	$= \frac{1}{2}\sqrt{3} \times k$	$= 0{,}866\,0254 \times k$
	$= \sqrt{3} \times r$	$= 1{,}732\,0508 \times r$

	fürs Dodekaeder	$= \frac{1}{4}\sqrt{3}\,(6 + 2\sqrt{5}) \times k$	$= 1{,}401\,2585 \times k$
		$= \sqrt{3}\,(5 - 2\sqrt{5}) \times r$	$= 1{,}258\,4086 \times r$
r	fürs Tetraeder	$= \frac{1}{3} \times R$	$= 0{,}333\,3333 \times R$
		$= \frac{1}{12}\sqrt{6} \times k$	$= 0{,}204\,1241 \times k$
	fürs Octaeder	$= \frac{1}{6}\sqrt{6} \times k$	$= 0{,}408\,2482 \times k$
		$= \frac{1}{3}\sqrt{3} \times R$	$= 0{,}577\,3503 \times R$
	fürs Ikosaeder	$= \frac{1}{12}(3 + \sqrt{5})\sqrt{3} \times k$	$= 0{,}755\,7613 \times k$
		$= \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}} \times R$	$= 0{,}794\,6435 \times R$
	fürs Hexaeder	$= \frac{1}{2} \times k$	$= 0{,}500\,0000 \times k$
		$= \frac{1}{3}\sqrt{3} \times R$	$= 0{,}577\,3503 \times R$
	fürs Dodekaeder	$= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{3}}\,(50 + 22\sqrt{5}) \times k$	$= 1{,}114\,6381 \times k$
		$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\,(5 + 2\sqrt{5}) \times R$	$= 0{,}794\,6544 \times R$
k	fürs Tetraeder	$= \frac{2}{3}\sqrt{6} \times R$	$= 1{,}632\,9932 \times R$
		$= 2\sqrt{6} \times r$	$= 4{,}898\,9795 \times r$
	fürs Octaeder	$= \sqrt{2} \times R$	$= 1{,}414\,2136 \times R$
		$= \sqrt{6} \times r$	$= 2{,}449\,4897 \times r$
	fürs Ikosaeder	$= \sqrt{2}\,(1 - \frac{1}{5}\sqrt{5}) \times R$	$= 1{,}051\,4620 \times R$
		$= (3 - \sqrt{5})\sqrt{3} \times r$	$= 1{,}323\,1691 \times r$
	fürs Hexaeder	$= \frac{2}{3}\sqrt{3} \times R$	$= 1{,}154\,7005 \times R$
		$= 2 \times r$	$= 2{,}000\,0000 \times r$
	fürs Dodekaeder	$= \frac{1}{3}\sqrt{6}\,(3 - \sqrt{5}) \times R$	$= 0{,}713\,6441 \times R$
		$= \sqrt{50 - 22\sqrt{5}} \times r$	$= 0{,}778\,7840 \times r$
J^2	fürs Tetraeder	$= \frac{1}{2}\sqrt{3} \times k^2$	$= 1{,}632\,9932 \times k^2$
		$= \frac{2}{3}\sqrt{3} \times R^2$	$= 1{,}154\,7005 \times R^2$
		$= 2\sqrt{3} \times r^2$	$= 3{,}464\,1016 \times r^2$
	fürs Octaeder	$= \frac{1}{2}\sqrt{3} + k^2$	$= 1{,}632\,9932 \times k^2$
		$= \frac{1}{3}\sqrt{3} \times R^2$	$= 0{,}866\,0254 \times R^2$
		$= \frac{3}{2}\sqrt{3} \times r^2$	$= 2{,}598\,0762 \times r^2$
	fürs Ikosaeder	$= \frac{1}{2}\sqrt{3} \times k^2$	$= 0{,}433\,0127 \times k^2$
		$= \frac{1}{10}(5 - \sqrt{5})\sqrt{3} \times R^2$	$= 0{,}478\,7270 \times R^2$
		$= \frac{3}{2}(7 - 3\sqrt{5})\sqrt{3} \times r^2$	$= 0{,}758\,1084 \times r^2$
	fürs Hexaeder	$= k^2$	$= 1{,}000\,0000 \times k^2$
		$= \frac{4}{3} \times R^2$	$= 1{,}333\,3333 \times R^2$
		$= 4 \times r^2$	$= 4{,}000\,0000 \times r^2$
	fürs Dodekaeder	$= \frac{1}{4}\sqrt{5}\,(5 + 2\sqrt{5}) \times k^2$	$= 1{,}720\,4773 \times k^2$
		$= \frac{1}{6}\sqrt{10}\,(5 - \sqrt{5}) \times R^2$	$= 0{,}876\,218 \times R^2$
		$= \frac{3}{2}\sqrt{2}\,(65 - 29\sqrt{5}) \times r^2$	$= 1{,}245\,1340 \times r^2$
J^3	fürs Tetraeder	$= \frac{1}{12}\sqrt{2} \times k^3$	$= 0{,}117\,8511 \times k^3$
		$= \frac{8}{27}\sqrt{3} \times R^3$	$= 0{,}513\,200 \times R^3$
		$= \frac{3}{8}\sqrt{3} \times r^3$	$= 1{,}539\,6007 \times r^3$
	fürs Octaeder	$= \frac{1}{3}\sqrt{2} \times k^3$	$= 0{,}471\,4045 \times k^3$
		$= \frac{4}{3} \times R^3$	$= 1{,}333\,3333 \times R^3$
		$= 4\sqrt{3} \times r^3$	$= 6{,}928\,2032 \times r^3$
	fürs Ikosaeder	$= \frac{5}{12}\,(3 + \sqrt{5})\,k^3$	$= 2{,}181\,6950 \times k^3$
		$= \frac{5}{3}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \times R^3$	$= 2{,}536\,1509 \times R^3$
		$= 10(7 - 3\sqrt{5})\sqrt{3} \times r^3$	$= 0{,}505\,4056 \times r^3$
	fürs Hexaeder	$= k^3$	$= 1{,}000\,0000 \times k^3$
		$= \frac{8}{3}\sqrt{3} \times R^3$	$= 1{,}539\,6007 \times R^3$
		$= 8 \times r^3$	$= 8{,}000\,0000 \times r^3$

fürs Dodekaeder	$= \frac{1}{4}(15 + 7\sqrt{5}) \times k^3$	$= 7{,}663\,1189 \times k^3$
	$= \frac{3}{4}\sqrt{30(3 + \sqrt{5})} \times R^3$	$= 2{,}785\,164 \times R^3$
	$= 10\sqrt{2(65 - 29\sqrt{5})} \times r^3$	$= 4{,}980\,5360 \times r^3$
J_s^2 fürs Tetraeder	$= \sqrt{3} \times k^3$	$= 1{,}732\,0508 \times k^2$
	$= \frac{8}{3}\sqrt{3} \times R^2$	$= 4{,}618\,8022 \times R^2$
	$= 8\sqrt{3} \times r^2$	$= 13{,}856\,4065 \times r^2$
fürs Octaeder	$= 2\sqrt{3} \times k^2$	$= 3{,}464\,1016 \times k^2$
	$= 4\sqrt{3} \times R^2$	$= 6{,}928\,2032 \times R^2$
	$= 12\sqrt{3} \times r^2$	$= 20{,}784\,6097 \times r^2$
fürs Ikosaeder	$= 5\sqrt{3} \times k^2$	$= 8{,}660\,2540 \times k^2$
	$= 2(5 - \sqrt{5})\sqrt{3} \times R^2$	$= 9{,}574\,5412 \times R^2$
	$= 30(7 - 3\sqrt{5})\sqrt{3} \times r^2$	$= 1{,}516\,2168 \times r^2$
fürs Hexaeder	$= 6 \times k^2$	$= 6{,}000\,0000 \times k^2$
	$= 8 \times R^2$	$= 8{,}000\,0000 \times R^2$
	$= 24 \times r^2$	$= 24{,}000\,0000 \times r^2$
fürs Dodekaeder	$= 3\sqrt{5}(5 + 2\sqrt{5}) \times k^2$	$= 20{,}645\,7273 \times k^2$
	$= 2\sqrt{10(5 - \sqrt{5})} \times R^2$	$= 10{,}514\,616 \times R^2$
	$= 30\sqrt{2(65 - 29\sqrt{5})} \times r^2$	$= 14{,}941\,6080 \times r^2$

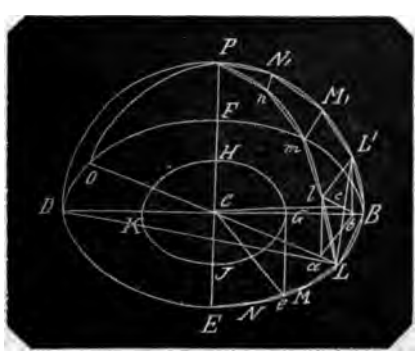
25. Stereometrische Constructionen.

Von diesen haben diejenigen, welche durch Euklid zu uns gekommen sind, das gröfste, besonders ein geschichtliches Interesse.

1. Aufgabe (Buch XII, 17 Satz). Es sind zwei concentrische Kugeln gegeben, man soll in die gröfsere ein Polyeder beschreiben, welches mit seiner Oberfläche die kleinere Kugel nicht berührt.

Es sei *DEBP* die gröfsere Halbkugeloberfläche; durch beide Kugeln sei durch deren gemeinschaftlichen Mittelpunkt *C* eine Ebene gelegt, so bildet diese zwei gröfste Kreise, den äufseren *BEDF* und den ihm concentrischen inneren *GJKH*.

Fig 898.



Zeichne deren normal auf einander befindliche Durchmesser *BD*, *EF*, beschreibe in dem ersten Quadrant des gröfseren Kreises *BEDF* die Seiten eines gleichseitigen Polygons von gerader Seitenanzahl, welches den kleineren Kreis nicht berührt.

Ziehe nun aus der an *B* nächsten Spitze *L* des Polygons den Halbmesser *LC*, verlängere denselben, bis er den Kreis nochmals in *O* schneidet, errichte auf der Kreisebene *BEDF* in dem Mittelpunkt *C* eine Normale *CP* bis in den Umfang der gröfseren Kugel; durch die gerade Linie *CP* und jeden der beiden Durchmesser *BD*, *LO* lege zwei Ebenen, welche also auf der Kugeloberfläche gröfste Kreise bilden, deren Hälften *DPB* und *OPL* sichtbar sind.

Die Linien *DB*, *LO*, *EF* als Durchmesser, und eben so die Quadranten *BP*, *LP*, *BE* derselben Kugel sind einander gleich und es lassen sich also auch in *BP* und *LP* dieselben Polygonseiten eintragen. Ziehe hierauf die geraden Verbindungslinien *L'l*, *M'm*, *N'n*, so sind jedes der Vierecke, so wie das oberste Dreieck *N'nP* ebene Figuren.

Dadurch nun, dafs man von den Punkten *N'*, *n*, *M'*, *m*, *L'*, *l* nach dem Mittel *C* gerade Linien zieht, entsteht zwischen den beiden Quadranten *BP* und *LP* ein aus Pyramiden zusammengesetztes Polyeder von der gemeinschaftlichen Spitze *C* und deren Grundflächen die schon gedachten Vierecke und ein Dreieck ausmachen.

Construirt man nun ebenso Polygonseiten auf den drei übrigen Quadranten BF, FD, DE, desgleichen in der zweiten Halbkugel, so erhält man das verlangte aus lauter Pyramiden zusammengesetzte Polyeder, welches mit seiner Oberfläche die kleinere Kugel nicht berührt.

Euklid macht den Beweis etwas weitläufig: In dem ersten Theil beweist er, dafs die vier- und dreiseitigen Umfangs-Figuren Ebenen sind:

Er fällt deshalb für das Viereck $BLlL'$ die Normalen la, $L'b$ auf die Grundebene $BFDE$, welche $\neq$ sind und auch die Durchschnittslinien BD, LO treffen und zieht ab. Da Bogen $BL' = Ll$, so ist $\angle CBL = \angle CLl$, bei a und b sind rechte Winkel, auch ist $L'B = lL$, folglich ist

$L'b = la$ und $Bb = La$;

also auch $Cb = Ca$

folglich $Bb : bB = La : aC$

folglich $ab \neq LB$

Nun war $L'B \neq$ und $= la$

folglich $ab =$ und $\neq lL'$

folglich ist auch $lL' \neq LB$

Eben so wird bewiesen dafs $mM' \neq lL'$, $nN' \neq mM'$.

Da $lL' \neq BL$, so ist das Viereck $lL'BL$ in einer Ebene und so ist auch jede der anderen Vierecke in einer Ebene.

Um zu beweisen, dafs die Ebene $LlL'B$ die innere Kugelfläche nicht berührt, hat man nur zu zeigen, dafs die kleinste Entfernung, der Abstand derselben von C kleiner ist als der Halbmesser CG der inneren Kugel. Dieser Abstand ist aber offenbar die Normale Cc von C auf $LlL'B$.

Nun ist $\square BC = \square cC + \square cB$

ebenso $\square LC = \square cC + \square cL$

Da nun $BC = LC$

so ist $\square CB = \square CL$ und $CB = cL$

Es gilt dies von den beiden anderen Punkten des Vierecks ebenfalls und folglich hat man $cB = cL' = cl = cL$

Es läfst sich also aus c um das Viereck ein Kreis beschreiben.

Nun ist $BL > ba$, $ba = lL'$ also $BL > lL'$.

Da nun $BL = Ll = BL'$, so ist der zur Sehne lL' gehörige Bogen der kleinste, $\angle LcB$ ist stumpf und $\square LB > 2\square Bc$.

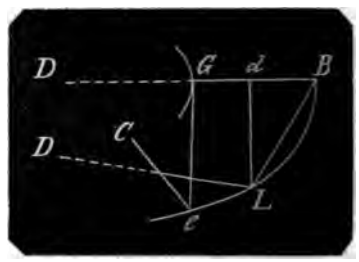
Fälle (Fig. 899) die Normale Ld. Da nun $BD < 2Dd$,

und $BD : Dd = BD \times Bd : Dd \times Bd$

so ist $BD \times Bd < 2Dd \times Bd$

Zieht man nun die LD, so ist

Fig. 899.



$$BD \times Bd = \square LB$$

ebenso ist $Dd \times BD = \square dL$

Also $\square LB < 2\square dL$

und da nach Obigem

$\square LB > 2\square Bc$

so ist $\square dL > \square Bc$

Da nun $\square BC = \square Bc + \square cC$

und $\square LC = \square Ld + \square Cd$

aber $BC = LC$

also $\square BC = \square LC$

so ist $\square Bc + \square cC = \square Ld + \square Cd$

Nun war $\square Ld > \square Bc$

folglich ist $\square Cc > \square Cd$

Also $Cc > Cd$

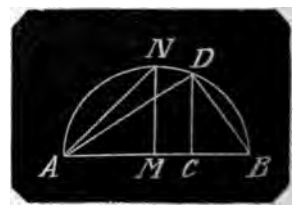
folglich noch viel mehr $Cc > CG$

woraus hervor geht, dafs die Oberfläche des P. die Oberfläche der inneren Kugel nicht berührt.

2. Aufgabe. Ein Tetraeder, welches sich von einer gegebenen Kugel umfassen läfst, zu construiren.

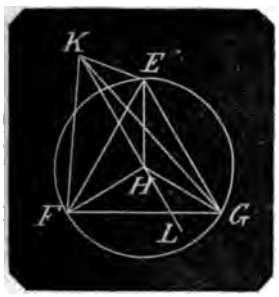
Es sei AB der Durchmesser der gegebenen Kugel, theile denselben in drei gleiche Theile, in einem der Theilpunkte C errichte eine Normale auf AB bis in den Umfang des Kreises.

Fig. 900.



Beschreibe nun um einen beliebigen Punkt H mit CD als Halbmesser einen Kreis, construire darin das gleichseitige Dreieck EFG, ziehe EH, FH, GH, er-

Fig. 901.



e auf der Kreisebene in H die Nor- $HK = AC$, ziehe KE, KF, KG, so ler Körper von der Grundfläche EFG der Spitze K das verlangte Tetra-

eweis. 1. dafs der Körper ein raeder ist.

H bildet mit HE, HF, HG rechte kel. Da nun $HE = HF = HG$, so ist $KE = KF = KG$.

an ist $AB : BC = \square AD : \square DC$

a nun $HK = AC$; $HE = HF = HG = DC$

st $KE = KF = KG = AD$

ber $AC = 2BC$, also $AB = 3BC$

$\square AD = 3 \square DC$

da $DC = EH$

$\square AD = \square EF = 3 \square EH$

ich $AD = EF = EG = FG$

zugleich $AD = KE = KG = KF$

ich sind sämmtliche den Körper einfsende Dreiecke gleichseitig und con- nt.

Dafs der Körper von der ge- enen Kugel umfafst wird.

erlängere die KH um die Länge HL C, so ist $AB = KL$.

a nun $AC : CD = CD : CB$

ber $AC = KH$, $CD = HE$, $CB = HL$

st auch $KH : HE = HE : HL$

ich EH normal KL, $\angle EHK = \angle EHL$ und ein über KL beschriebener Halb- geht durch den Punkt E.

eht man nun diesen Halbkreis mit em Durchmesser KL um seinen Mit- nkt, so trifft er eben so durch die ten G und F. Es liegen also die 4 unkte des Tetraeders in der Kugel- fläche, deren Durchmesser AB ist.

Aufgabe. Ein Octaeder, wel- s sich von einer gegebenen Ku- umfassen läfst, zu construiren.

t, Fig. 900, AB der gegebene Durch- messer der Kugel, so errichte in dessen Mittelpunkt M den winkelrechten Halb- messer MN, ziehe NA.

Construire nun, Fig. 902, ein Quadrat $EFGH$, von der Seite $= AN$, ziehe FH, EG, die sich in K schneiden. Errichte auf $EFGH$ in K die Winkelrechte KL mit Verlängerung rückwärts nach M, mache $KL = KM =$ einer der Linien KE, KF, KG, KH. Ziehe von L und M gerade Linien nach E, F, G, H, so ist der ent- standene Körper das verlangte Octaeder.

Fig. 902.

Beweis. 1. Dafs der Körper ein Octaeder ist.

$KE = KH$, $\angle EKH = R$

folglich $\square HE = 2 \square KE$

Nun ist auch $LK = EK$ und $\angle LKE = R$, also $\square EL = 2 \square EK$

folglich $\square HE = \square LE$ und $HE = LE$

Aus gleichen Gründen $LH = EH$, folglich $\triangle LEH$ gleichseitig.

Auf ähnliche Art wird bewiesen, dafs die Dreiecke LEF, LFG, LGH auch gleich- seitig und dem $\triangle LEH =$ sind, so wie auch die vier Dreiecke unterhalb der Ebene $EFGH$ mit der gemeinschaftlichen Spitze M, folglich ist der von den Drei- ecken begrenzte Körper ein Octaeder.

2. Dafs sich das Octaeder von der gegebenen Kugel umfassen läfst.

Es ist $LK = KM = KE$; mithin liegt der Punkt E in einem über LM als Durch- messer beschriebenen Halbkreis. Drehet man diesen Halbkreis um seinen festen Durchmesser LM herum, so geht er aus demselben Grunde auch durch die Punkte F, G, H, folglich liegen die Ecken L, M,

E, *F*, *G*, *H* in dem Umfang einer Kugel, deren Durchmesser *AB*, Fig. 902 ist.

4. Aufgabe. Einen Würfel (Hexaeder), welcher sich von einer gegebenen Kugel umfassen läfst, zu construiren.

Ist, Fig. 902, *AB* der Durchmesser der Kugel, theile wieder denselben, dafs $AB = 3BC$, so ist der Würfel von der Seite *BD* der verlangte.

Denn in dem Würfel ist jeder Umfangswinkel ein Rechter, alle Seiten *s* sind einander gleich, mithin ist das □ der Diagonale *d* einer Grenzfläche $= 2 \times$ dem □ einer Seite *s*, d. i. $\square d = 2\square s$. Die Diagonale *d* bildet aber mit einer der ihr anliegenden Seiten *s* ebenfalls einen rechten Winkel und folglich mit dieser, a jeder der beiden Diagonalen *D* des Wi fels wiederum ein rechtwinkliges Δ u es ist $\square D = \square d + \square s = 3\square s$.

Nun ist $\square AB : \square BD = AB : BC = 3$

und da auch $\square D : \square s = 3 : 1$

so ist $\square D : \square s = \square AB : \square BL$

und da $BD = s$ also auch $\square DB = \square s$

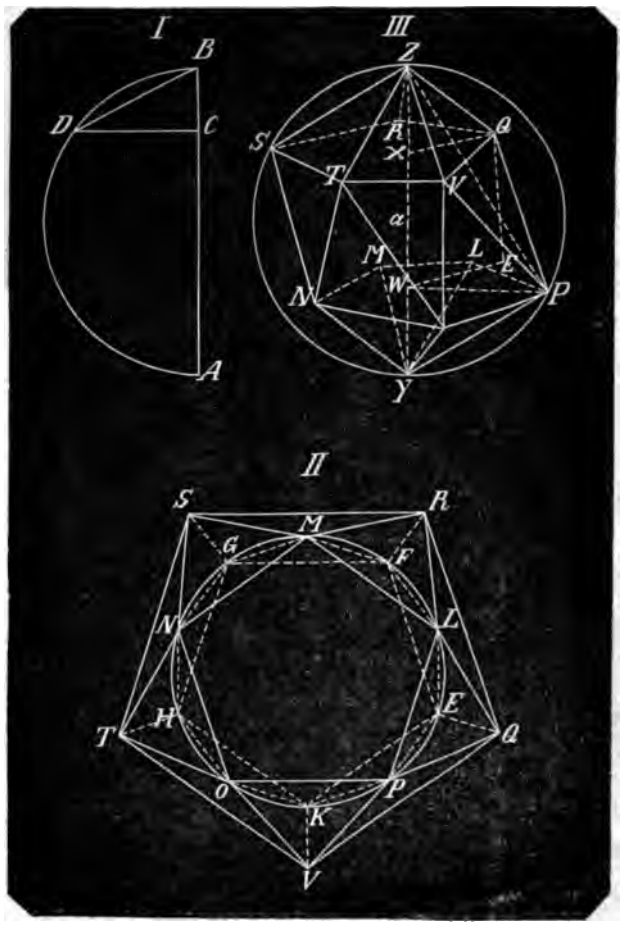
so ist $\square D = \square AB$

also $D = AB$.

5. Aufgabe. Ein Ikosaeder, we ches sich von einer gegebeu Kugel umfassen läfst, zu co struiren.

Es sei I. der Durchmesser *AB* der gebenen Kugel so getheilt, dafs $AB = 5$

Fig. 903.



Errichte auf AB in C das Loth CD bis in den Umfang des Halbkreises und ziehe BD.

Beschreibe II. um einen Punkt W mit dem Halbmesser BD einen Kreis, beschreibe in diesen das gleichseitige Fünfeck $EFGHK$, halbire die 5 Bogen in L, M, N, O, P, und zeichne das Fünfeck $LMNOP$.

In den Punkten E, F, G, H, K errichte auf der Kreisebene die Normalen EQ, FR, GS, HJ, KV, mache jede derselben $= BD$ und verbinde deren Endpunkte zu einem gleichseitigen Fünfeck $QRSJV$; ziehe ferner die Linien QL, RL; RM, SM; SN, TN; JO, VO; VP, QP.

Ziehe III. auf der Kreisebene im Mittelpunkt W die Normale $WZ + WY$, mache $WX =$ der Seite der sechsseitigen, XZ und $WY =$ der Seite der zehnseitigen Figur, verbinde durch gerade Linien den Punkt Z mit den Winkelpunkten der Figur $QRSTV$ und den Punkt Y mit den Winkelpunkten der Figur $LMNOP$, so ist das verlangte Ikosaeder construirt.

Beweis der Construction. 1. Dafs der Körper ein Ikosaeder ist.

In II. sind EQ, FR... auf der Kreisebene normal, $=$ und $\fallingdotseq$, folglich sind auch QR und $EF =$ und $\fallingdotseq$, folglich ist QR die Seite eines in den Kreis $EFGHK$ beschriebenen gleichseitigen Fünfecks. Dasselbe gilt von den übrigen Seiten und folglich ist $QRSTV$ ein gleichseitiges Fünfeck.

Es ist $EQ = BD =$ des Kreises $EFGHK$ Halbmesser, folglich $=$ der Seite des gleichseitigen Sechsecks, EL die Seite des gleichseitigen Zehnecks, $\angle LEQ = R$, also LQ die Seite des gleichseitigen Fünfecks, aus gleichem Grunde auch LR, aber auch QR, folglich $\triangle QRL$ gleichseitig und aus denselben Gründen die Dreiecke RSM, STN, TVO, VQP gleichseitig.

In III. sieht man die Polygone $RSTVQ$ und $LMNOP$, von den gedachten Dreiecken aber die, deren Grundlinien ST, TV, VQ und deren Spitzen N, O, P sind; desgleichen die, deren Grundlinien NO, OP und deren Spitzen T, V sind, nämlich die Dreiecke STN, TVO, VQP, NOT, OPV.

Nun sind XW, QE beide normal auf der Kreisebene, also $\fallingdotseq$ und auch gleich; folglich ist XQ mit $WE =$ dem Halbmesser $=$ der Seite des Sechsecks. XZ ist die Seite des Zehnecks und $\angle QXZ = R$, daher wieder QZ die Seite des Fünfecks, aus gleichen Gründen VZ, und nach Obigem auch QV; folglich $\triangle VQZ$ gleichseitig. Dasselbe gilt von den Dreiecken, deren Grundlinien PO, ON, NM, ML, LP sind und deren Spitze Y ist. Demnach ist der construirte Körper ein Ikosaeder.

2. Dafs sich das Ikosaeder von der Kugel umfassen läfst.

In III. ist WX die Seite des Sechsecks, XZ die des Zehnecks, folglich ist

$$WZ : WX = WX : XZ$$

also

$$WZ : WP = WP : WY$$

Nun ist $\angle PWZ = \angle PWY = R$, also wenn man PZ zieht, $\triangle PWZ \sim \triangle PWY$, folglich $\angle YPZ = R$, folglich geht der über YZ beschriebene Halbkreis durch P.

Aus obiger Proportion

$$WZ : WY = WX : XZ$$

wo $WZ = XY$ und $WX = XQ$ folgt

$$XY : XQ = XQ : XZ$$

folglich ist, wenn man QY zieht, auch $\angle YQZ = R$, folglich geht der über YZ beschriebene Halbkreis auch durch Q.

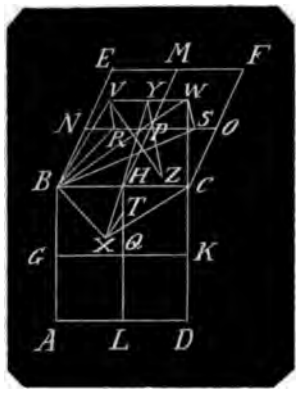
Wird dieser Halbkreis um seinen festen Durchmesser YZ herumgedreht, so geht er aus gleichen Gründen auch durch die übrigen Eckpunkte des Ikosaeders; sie befinden sich also in der Oberfläche einer Kugel von dem Durchmesser $YZ = AB$.

Denn da WZ nach stetiger Proportion in X geschnitten ist, so ist, wenn man WX in a halbirt: $\square Za = 5\square aX$. Nun ist $YZ = 2Za$ und $WX = 2aX$, folglich $\square YZ = 5\square WX = 5\square DB$. Da nun $AB = 5BC$ und $AB : BC = \square AB : \square BD$, also $\square AB = 5\square BD$. Folglich $\square YZ = \square AB$ und $YZ = AB$.

6. Aufgabe. Ein Dodekaeder, welches sich von einer gegebenen Kugel umfassen läfst, zu construiren.

Construire das Quadrat für den Würfel No. 4, setze zwei derselben $ABCD$, $CBEF$ rechtwinklig an einander, halbire ihre Seiten und verbinde die Theilpunkte durch die geraden Linien GK, HL, MH, NO. Schneide die NP, PO, HQ in den Punkten R, S, T nach stetiger Proportion, so dafs PR, PS, QT die gröfseren Abschnitte sind, errichte in R, S, T auf den Würfelflächen die Normalen RV, SW, TX, mache diese den gröfseren Abschnitten PR, PS, QT gleich und ziehe die Linien VB, BX, XC, CW, WV, welche in einer Ebene liegen, gleiche Winkel einschliefsen und ein über der Seite BC des Würfels beschriebenes gleichseitiges Fünfeck bilden. Wird nun auf jeder der zwölf Würfelseiten ein solches Fünfeck beschrieben, so bilden diese das verlangte Dodekaeder.

Fig. 904.



Beweis. 1. Dafs $VBXCW$ eine gleichseitige Figur ist.

Ziehe BR, BS, BW. Der Theilung zufolge ist

$$\square PN + \square NR = 3\square PR$$

aber $PN = BN$

und $PR = RV$

folglich $\square BN + \square NR = 3\square RV$

Nun ist $\square BN + \square NR = \square BR$

folglich ist $\square BR = 3\square RV$

folglich $4\square RV = \square BR + \square RV = \square BV$

folglich $2RV = BV$

Nun ist $RS = 2RP = 2RV$

also $RS = VW = 2RV$

folglich ist $BV = VW$

Auf dieselbe Weise wird die Gleichheit der übrigen Seiten des Fünfecks $BVWCX$ bewiesen.

2. Dafs die Figur in einer Ebene ist.

Ziehe durch P die $PY \fallingdotseq$ den Linien RV, SW, verbinde Y, H und H, X, so ist YHX eine gerade Linie.

Denn da HQ in T nach stetiger Proportion geschnitten, und QT der gröfsere Abschnitt ist, so ist

$$HQ : QT = QT : TH$$

Aber $HQ = HP$ und $QT = TX = PY$; folglich diese Werthe eingesetzt:

folglich $HP : PY = TX : TH$

Nun ist $HP \fallingdotseq TX$ und LH mit $TH \fallingdotseq PY$.

Erstere, weil sie auf der Ebene BD, letztere, weil sie auf der Ebene BF winkelrecht sind, folglich sind HY, HX in gerader Linie, folglich ist die Figur $BVWCX$, in welcher die ganze XY ist, in einer Ebene.

3. Dafs die Figur gleichwinklig ist.

Da NP nach stetiger Proportion in R geschnitten und PR der gröfsere Abschnitt, so ist

$$PN + PR : PN = PN : PR$$

Nun ist $PR = PS$

also $NP + PR = NS$

also $NS : NP = NP : PS$

folglich ist NS nach stetiger Proportion in P geschnitten und NP der gröfsere Abschnitt, folglich

$$\square NS + \square SP = 3\square PN$$

aber $PN = BN$ und $SP = SW$

folglich $\square NS + \square SW = 3\square NB$

folglich auch

$$\square NB + \square NS + \square SW = 4\square NB$$

Nun ist $\square NB + \square NS = \square BS$

folglich ist

$4\square NB = \square BS + \square SW = \square BW$

folglich $BW = 2NB = BC$

Nun war nach Beweis 1.

auch $BV = BX$ und $VW = CX$

Folglich ist $\angle BVW = \angle BXC$

Auf eben die Art wird die Gleichheit der Winkel VWC, BXC bewiesen, folglich ist $BVWCX$ gleichwinklig.

4. Dafs sich dieses Dodekaeder von der gegebenen Kugel umfassen läfst.

Verlängere YP bis in das Innere des Würfels nach Z, so trifft YZ die Diagonale des Würfels, so dafs beide in Z einander halbiren. Folglich ist Z der Mittelpunkt der Kugel, die den Würfel umfafst und PZ gleich der halben Seite PY des Würfels. Ziehe VZ.

Da NS nach stetiger Proportion geschnitten und NP der gröfsere Abschnitt ist, so ist

$$\square NS + \square SP = 3\square NP$$

Nun ist $NP = PZ$ und $PS = PY$

also $NS = YZ$

Auch ist $SP = RP$

also $SP = VY$

folglich $\square YZ + \square YV = \square VZ = 3\square NP$

Nun ist das Quadrat des Durchmessers der Kugel gleich dem dreifachen Quadrat der Seite des Würfels, also auch das Quadrat des Halbmessers dem dreifachen Quadrat der halben Seite NP; folglich ist VZ der Kugelhalbmesser, Z der Mittelpunkt und der Punkt V in der Kugelfläche. Auf ähnliche Art wird bewiesen, dafs aufser V auch jeder andere Eckpunkt

s Dodekaeders in der Kugelfläche liegt; glich wird das Dodekaeder von der Kul umfafst.

26. Die Seiten der fünf regelmäigen Körper zu finden.

Es sei AB der Durchmesser der um Körper beschriebenen Kugel, in C d D so geschnitten, dafs $AC = BC$ und $D = 2BD$. Errichte in C und D Winlrechte CE, DF bis an den Halbkreis, he AF, BF, schneide BF in N nach tiger Proportion, so dafs BN der grore Abschnitt ist. Errichte in A die inkelrechte $AG = AB$ auf AB ziehe CG, lche den Halbkreis in H schneidet, le die Winkelrechte HK auf AB, mache $= CK$, so dafs also $LK = 2CK$ ist, ichte endlich auf AB in L die Winlrechte LM, so ist

AF die Seite des Tetraeders

BF die Seite des Hexaeder

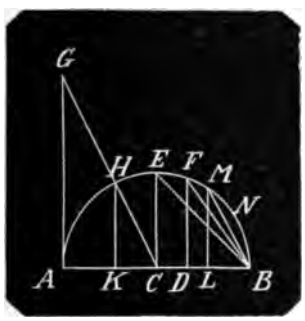
BE die Seite des Octaeders

BN die Seite des Dodekaeders

BM die Seite des Ikosaeders.

Die Beweise der Constructionen gehen s den Untersuchungen No. 25 hervor.

Fig. 905.



1. Fürs Tetraeder.

Die Theilung des Durchmessers AB in m Punkt D stimmt genau mit der eilung des Durchmessers AB in dem nkt C der Fig. 900 für das Tetraeder. rt ist

$= 2BC$, also $AB = 3BC$ und folglich $= \frac{1}{3}AC$.

Da nun $AB : AC = \square AB : \square AD$

ist auch $\square AB = \frac{1}{3}\square AD$

AB der Durchmesser der gegebenen gel und AD die Tetraederseite ist.

Nun ist AF, Fig. 905 $= AD$, Fig. 900
AB, Fig. 905 $= AB$, Fig. 900

Folglich ist AF die Seite des in die Kugel vom Durchmesser AB beschriebenen Tetraeders.

2. Für das Hexaeder.

Auch hier ist durch D dieselbe Theilung, Fig. 900 durch den Punkt C. Es ist dort BD als die Seite des in der Kugel vom Durchmesser AB beschriebenen Würfels erwiesen, folglich ist auch Fig. 904, BF die Seite des von der Kugel des Durchmessers AB umfafsten Würfels.

3. Für das Octaeder.

Die Richtigkeit der Construction geht aus No. 25, 3 hervor.

4. Für das Dodekaeder.

Nach No. 25, 6 ersieht man mit Fig 904, dafs die Seite des in die Kugel ein beschriebenen Würfels so getheilt werden mufs, um die Seite des Dodekaeders zu geben wie Fig. 905 dieselbe Seite BF des Quadrats, und dafs also die Construction richtig ist.

5. Für das Ikosaeder.

Fig. 905. ist $AG = AB = 2AC$

also auch $HK = 2CK$

also $\square HK = 4\square CK$

also $\square HC = \square HK + \square CK = 5\square CK$

Da nun $HC = BC$, also $\square HC = \square BC$

so ist $\square CB = 5\square CK$

Nun ist $AB = 2BC$

und $LK = 2CK$

folglich $\square AB = 4\square BC = 20\square CK$

also $\square AB = 5\square LK$

Nach No. 25, 5 ist also LK die Seite des Sechsecks in demjenigen Kreise, von dem aus die Verzeichnung der Seite des verlangten Ikosaeders geschieht.

Nun ist $AK = LB$

also $AB = LK + 2LB$

folglich ist LK die Seite der sechsseitigen und LB die der zehnseitigen Figur in jenem Kreise der die Verzeichnung der verlangten Seite bestimmt und die angeführte Construction ist richtig.

Polyedralzahlen sind in dem Art. „Figurirte Zahlen“ ausführlich abgehandelt.

Polyedrometrie ist die Lehre von den Polyedern.

Polyedron, s. v. w. „Polyeder“.

Polygon, Vieleck ist eine ebene geradlinige Figur, welche von mehr als vier geraden Linien eingeschlossen wird.

Figuren, die von drei, von vier geraden Linien eingeschlossen werden, heifsen Dreiecke, Vierecke. Die das P. ein-

schliefsenden geraden Linien heifsen Seiten, die von je zwei zusammentreffenden Seiten eingeschlossenen Winkel heifsen Polygonwinkel oder schlechtweg Winkel, Seiten und Winkel führen den gemeinschaftlichen Namen Stücke, Polygonstücke. Die Punkte, in welchen die Seiten zusammentreffen sind die Spitzen. Gerade Verbindungslinien zweier Spitzen, ohne dafs sie Seiten sind, die also innerhalb des P. fallen, heifsen Diagonalen.

Das P. wird nach der Anzahl seiner Seiten speciell bekannt und heifst Fünfeck, Sechseck u. s. w. Für Ermittelung von Gesetzen, die allen Vielecken, abgesehen von der Anzahl deren Seiten zukommen, bezeichnet man die Anzahl der Seiten mit n und das Vieleck mit dem Ausdruck $n$eck.

2. Jedes $n$eck hat n Seiten, n Winkel, n Spitzen.

3. Jeder Polygonwinkel macht mit seinem äufseren Winkel zusammen 4 Rechte, mit seinem Nebenwinkel zusammen 2 Rechte aus.

Ist der P.-winkel hohl, so ist der Nebenwinkel ein äufserer, ist er erhaben, ein innerer; auch mit diesem ist der P.-winkel zusammen $= 2R$, wenn der Nebenwinkel negativ genommen wird.

Die Summe der inneren und der äufseren P.winkel ist $= 4nR$, die der inneren $= (2n-4)R$, also die der äufseren $= (2n+4)R$. Die Summe der äufseren ist also in jedem $n$eck um $8R >$ als die Summe der inneren P.winkel.

4 Ein $n$ek kann höchstens $(n-3)$ erhabene Winkel haben, denn bei $(n-2)$ erhabenen Winkeln wäre deren Summe $> (2n-4)R$.

Ein $n$eck, wenn es nur hohle Winkel hat, kann nicht mehr als 3 spitze Winkel haben, denn bei 4 spitzen Winkeln würde die Summe der äufseren Nebenwinkel $>$ sein als $4R$.

5. In jedem $n$eck beträgt die algebraische Summe sämmtlicher Nebenwinkel $= 4R$, denn die Summe der P.winkel ist $= (2n-4)R$, die Summe derselben + der Summe sämmtlicher Nebenwinkel $= 2nR$.

6. Ein $n$eck mit nur hohlen Winkeln ($n=4$ ausgenommen) kann nicht mehr als 3 Rechte haben, denn deren Nebenwinkel würden zusammen mehr als $4R$ betragen.

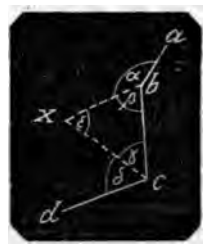
7. Die Anzahl der von einer Spitze ab zu ziehenden Diagonalen beträgt $n-3$; es sind also überhaupt in einem $n$eck $n(n-3)$ Diagonalen zu ziehen möglich, von welchen aber jede doppelt, vorwärts und rückwärts gezogen wird, die Anzahl der möglichen Diagonalen in einem $n$eck ist also $= \frac{1}{2}n(n-3)$.

Durch die von einer Spitze aus gezogenen $n-3$ Diagonalen wird das $n$eck in $n-2$ Dreiecke getheilt, deren Winkel zusammen = der Summe der P.winkel sind. Da nun die 3 Winkel eines Dreiecks zusammen 2 Rechte betragen, so ist die Summe der Umfangswinkel eines $n$ecks $= 2(n-2)R = (2n-4)$ Rechten.

8. Macht man aus einem $n$eck durch Hinzufügung einer Seite ein $(n+1)$eck, so vermehrt sich die Summe der Umfangswinkel um $2R$.

Fällt das hinzukommende Dreieck aufserhalb der Figur, so ist die Richtigkeit augenscheinlich. Es sei der Schlufs des $n$ecks $abcd$; durch Hinzufügung der beiden Seiten bx, cx mit Hinweglassung der Seite bc entstehe das $(n+1)$eck $abxcd$.

Fig. 906.



Bei der Winkelbezeichnung bestanden die Winkel des $n$ecks aus:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta$$

bestehen die Winkel des $(n+1)$ecks aus:

$$\alpha + 4R - \varepsilon + \delta$$

Und es soll sein

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + 2R = \alpha + 4R - \varepsilon + \delta$$

α und δ beiderseits subtrahirt und $\beta + \gamma = 2R - \varepsilon$ gesetzt ergibt die Richtigkeit des Satzes.

9. Bezeichnet man die aufeinander folgenden Winkel eines P. mit α, β, γ, δ ...., denkt sich dann die Seiten alle entweder rechts oder links (aus einem Standpunkt innerhalb der Figur betrachtet) verlängert und bezeichnet die Winkel zwischen jeder Verlängerung und der folgenden Seite mit a, b, c, d...., so ist, wenn man diejenigen dieser Winkel, welche aufserhalb der Figur fallen, positiv, die welche innerhalb fallen, negativ nimmt, die algebraische Summe S der Winkel a, b, c, d ... jederzeit $= 4R$.

Denn es ist $\alpha + a = \beta + b = \gamma + c$....

$= 2R$; deren Summe also $n \cdot 2R$, die Summe $\alpha + \beta + \gamma + \ldots$ ist $= (2n - 4)R$, die Differenz beider Summen also $= 4R$.

10. Aehnliche Polygone. P. sind $\sim$, wenn sie durch gleichliegende Seiten und Diagonalen in gleichliegende ähnliche Dreiecke zerlegt werden.

Gleichliegende Winkel in ähnlichen P. sind gleich.

Gleichliegende Seiten und Diagonalen und die Umfänge ähnlicher P. stehen mit einander in fortlaufender Proportion.

Gleichliegende Dreiecke und andere Figuren in ähnlichen P. sind ähnlich.

Die Inhalte ähnlicher P. verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten, Diagonalen und der Umfänge. Denn es ist dies bei ähnlichen Dreiecken der Fall, diese aber verhalten sich wie die ähnlichen *P.*

11. Bezeichnen a, b, c die 3 Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks und ist a die Hypotenuse; denkt man sich nun 3 geradlinige ähnliche P., zu welchen a, b, c als homologe Seiten oder Diagonalen gehören und bezeichnet deren Inhalte mit A, B, C, so ist jedesmal $A = B + C$.

Denn es ist $a^2 = b^2 + c^2$

ferner $B : C = b^2 : c^2$

also $B + C : C = b^2 + c^2 : c^2 = a^2 : c^2$

Weiter ist eben so

$A : C = a^2 : c^2$

auch $B + C : C = a^2 : c^2$

also $B + C : C = A : C$

woraus $A = B + C$

12. Bezeichnen A, B, C die Inhalte ähnlicher P., a, b, c homologe Seiten derselben, und ist $A = B + C$, so ist das mit a, b, c als Seiten zu bildende Dreieck rechtwinklig und der rechte Winkel liegt der Seite a gegenüber.

Denn aus $B : C = b^2 : c^2$

folgt $B + C : C = b^2 + c^2 : c^2$

Da nun $B + C = A$

so ist $A : C = b^2 + c^2 : c^2$

und da $A \sim C$

so ist $A : C = a^2 : c^2$

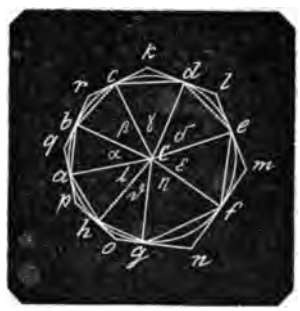
Mithin $b^2 + c^2 : c^2 = a^2 : c^2$

woher $b^2 + c^2 = a^2$

13. Bei einem P. von einer geraden Anzahl Seiten, welches in einem Kreis liegt, ist die Summe des 1ten, 3ten, 5ten... Umfangswinkels so groſs wie die Summe des 2ten, 4ten, 6ten...

Denn es steht $\angle bak$ als Peripheriewinkel mit dem Centriwinkel $\beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \eta + \vartheta$ auf demselben Bogen. Demnach ist

Fig. 907.



$$\angle bak = a = \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \eta + \vartheta)$$
$$c = \tfrac{1}{2}(\delta + \varepsilon + \eta + \vartheta + \lambda + \alpha)$$
$$e = \tfrac{1}{2}(\eta + \vartheta + \lambda + \alpha + \beta + \gamma)$$
$$g = \tfrac{1}{2}(\lambda + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \eta)$$

woraus

$$a + c + e + g = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \eta + \vartheta + \lambda) = \tfrac{1}{2}4R = 6R$$

Es ist aber

$$a + b + c + d + e + f + g + h = 12R$$

folglich $a + c + e + g = b + d + f + h$.

14. Bei jedem Vieleck von einer geraden Anzahl von Seiten, welches um einen Kreis liegt, ist die Summe der 1ten, 3ten, 5ten ... Seite so groſs wie die Summe der 2ten, 4ten, 6ten ...

Denn zieht man die Halbmesser nach den Berührungspunkten, wie Cc und Cd, denkt sich die Linie Ck, so ist $\triangle Cck \cong \triangle Cdk$, folglich $ck = dk$.

Man hat demnach

$$kc = kd$$
$$le = ld$$
$$me = mf$$
$$ng = nf$$
$$og = oh$$
$$pa = ph$$
$$qq = qb$$
$$rc = rb$$

die Reihen addirt geben

$$kr + lm + no + pq = kl + mn + op + qr$$

15. Die Anzahl der Bestimmungsstücke eines P. zu finden.

Von den $(n - 2)$ Dreiecken, in welche ein P. getheilt werden kann, bedarf jedes dreier Bestimmungsstücke. Es würden also für ein P. $3(n - 2)$ Bestimmungsstücke erforderlich sein, wenn nicht, von einem der beiden Anfangsdreiecken ab,

jedes folgende Dreieck in dem vorher anschliefsenden in der gemeinschaftlichen Seite schon ein Bestimmungsstück mit erhielte. Also nur ein Dreieck bedarf dreier, von den übrigen jedes Dreieck nur zweier Bestimmungsstücke; das P. folglich $3 + 2(n - 3) = 2n - 3$ Bestimmungsstücke.

Zu den Bestimmungsstücken eines Dreiecks gehört mindestens eine Seite; es würde also zur Bestimmung eines P. ebenfalls nur eine Seite erforderlich sein, wenn die übrigen Bestimmungsstücke aus den Winkeln beständen, welche die aus einer einzigen Spitze gezogenen Diagonalen mit einander bilden. Da dies aber wohl nur aus Kuriosität einmal vorkommen könnte, so sind mindestens so viele Seiten, als Dreiecke vorhanden sind, also mindestens $n - 2$ Seiten, erforderlich.

Dem Art. „Congruenz der Dreiecke," pag. 43, zufolge sind Dreiecke nicht congruent, wenn zwei Seiten und der der kleineren von beiden gegenüberliegende Winkel einander gleich sind, es entstehen zwei verschiedene Dreiecke, die beide der Bedingung genügen. Es ist demnach auch bei den Polygonen zweifelhaft, ob die gegebenen $2n - 3$ Bestimmungsstücke auch genügende Bestimmungsstücke sind.

Regelmäfsige Polygone.

16. Ein regelmäfsiges P. ist ein P. von lauter gleichen Seiten und gleichen Winkeln; deren Anzahl ist unbegrenzt.

Die Summe sämmtlicher P.winkel ist $(2n - 4)R$,

jeder P.winkel also $= \frac{2n-4}{n} R.$

Jeder Nebenwinkel ist $= \frac{4}{n} R,$

jeder Aufsenwinkel $= \frac{2n+4}{n} R$

der Unterschied zwischen dem P.winkel und seinem Nebenwinkel ist $= 2\frac{n-4}{n} R,$

der Unterschied zwischen dem P.winkel und seinem äufseren Winkel $= \frac{8}{n} R.$

Die Winkel eines regelmäfsigen P. sind nur hohl und stumpf, die Nebenwinkel nur spitz, die Aufsenwinkel nur erhaben.

Jedes regelmäfsige P. liegt in und um einen Kreis, beide Kreise haben denselben Mittelpunkt und dieser ist zugleich der Mittelpunkt des P. Dieser Mittelpunkt liegt in einem Durchschnittspunkt der Halbirungslinien zweier einander nicht gegenüber liegenden Seiten oder Winkel. Die Normalen auf den Seiten in deren Mitten errichtet und die Halbirungslinien aller Winkel schneiden sich alle in einem Punkt, dem Mittelpunkt.

17. Zwischen zwei concentrischen Kreisen, so nahe sie auch an einander liegen mögen, ist im gröfseren immer noch ein regelmäfsiges P. denkbar, dessen Seiten die Peripherie des Kleineren weder schneiden noch berühren.

Denn denkt man sich an einem beliebigen Punkt des kleineren Kreises eine Tangente und diese von beiden Seiten bis zum Umfang des gröfseren Kreises gezogen, so wird diese Sehne des gröfseren Kreises, und es lassen sich ∓ mit derselben noch viele kleinere Sehnen ziehen, die also von dem Umfang des kleineren fern liegen. Unter allen diesen kleineren Sehnen läfst sich aber offenbar eine ermitteln, von deren Bogen der Kreisumfang ein ganzes Vielfaches ist und man hat in sämmtlichen Sehnen dieser Bogen das verlangte P.

18. Zwischen zwei concentrischen Kreisen, so nahe sie auch an einander liegen mögen, ist um den kleineren immer noch ein regelmäfsiges P. denkbar, dessen Spitzen innerhalb der Peripherie des gröfseren Kreises liegen ohne dieselbe zu berühren.

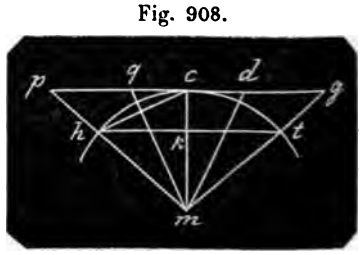
Der Beweis wie der zu dem vorigen Satz.

19 Zwischen dem Inhalt A eines regelmäfsigen P. um einen Kreis und dem Inhalt a eines ähnlichen P in demselben ist der Inhalt b des regelmäfsigen P. von doppelt so viel Seiten in eben diesem Kreis die mittlere geometrische Proportionalfläche also $A : b = b : a$.

Ist die Seitenzahl von A, also auch von $a = n$, so ist die von $b = 2n$, A und a bestehen aus n, b aus $2n$ congruenten Dreiecken.

Stellt Fig. 908 diese Dreiecke dar, so dafs

Fig. 908.



$$A = n \cdot \triangle pmg$$
$$a = n \cdot \triangle hmt$$
$$b = 2n \cdot hmc$$

Da nun $\angle pmc = \angle gmc$, so kann man auch schreiben

$$A = 2n \cdot \triangle pmc$$
$$a = 2n \cdot \triangle hmk$$
$$b = 2n \cdot \triangle hmc$$

Es folgt hieraus

1. $A : b = \triangle pmc : \triangle hmc$
$= pm : hm = cm : km$
2. $b : a = \triangle hmc : \triangle hmk = cm : km$

Aus beiden Proportionen folgt

$$A : b = b : a$$

20. Ist die ganze Zahl n mindestens 3, so verhält sich der Inhalt a jedes regelmäfsigen $n$ecks in einem Kreis k zur halben Summe der Inhalte desselben und des regelmäfsigen $2n$ecks in k, wie der Inhalt B des regelmäfsigen $2n$ecks um k zum Inhalt A des regelmäfsigen $n$ecks um k, d. i.

$$a : \frac{a+b}{2} = B : A.$$

Es ist wie im vorigen Satz

ht eine der n Seiten von a
hc eine der $2n$ Seiten von b
pg eine der n Seiten von A
qd eine der $2n$ Seiten von B.

Man hat demnach

$$a = m \triangle hmt = 2n \triangle hmk$$
$$b = 2m \cdot \triangle hmc$$
$$A = n \cdot \triangle pmg = 2n \triangle pmc$$
$$B = 2n \triangle qmd = 4n \cdot \triangle qmc$$

und hieraus wie im vorigen Satz

$$a : b = km : cm$$

auch

$$a : b = km : hm = cm : pm = oq : pq$$

folglich

1. $a : a + b = cq : cp$

ferner $B : A = 2 \triangle cmq : \triangle cmp$

oder

2. $B : 2A = \triangle cmq : \triangle cmp = cq : cp$

Also aus 1 und 2

$$a : a + b = B : 2A$$

oder $a : \frac{1}{2}(a + b) = B : A$

21. Betrachtet man a und A als gegeben oder bekannt, so folgt aus den beiden vorigen Sätzen

1. $b = \sqrt{a \cdot A}$ und 2. $B = \frac{2aA}{a + \sqrt{a \cdot A}}$

Für $n = 4$, r der Halbmesser des zugehörigen Kreises

$$a = 2r^2; \quad A = 4r^2$$

Also die Inhalte der regelmäfsigen Achtecke in und um den Kreis

$$b = \sqrt{2r^2 \cdot 4r^2} = 2r^2\sqrt{2}$$

$$B = \frac{2 \cdot 2r^2 \cdot 4r^2}{2r^2 + \sqrt{2r^2 \cdot 4r^2}} = \frac{8}{1+\sqrt{2}} r^2 = 8(\sqrt{2} - 1) r^2$$

Setzt man wieder $a = 2r^2\sqrt{2}$ und $A = 8(\sqrt{2} - 1) r^2$

so erhält man die Inhalte der regelmäfsigen Sechzehnecke in und um den Kreis

$$b = 4r^2 \sqrt{2 - \sqrt{2}} \text{ und}$$
$$B = 16r^2 \left(-1 - \sqrt{2} + \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}\right)$$

u. s. w.

22. Jedes regelmäfsige P. ist = einem Dreieck, welches den Umfang des P. zur Grundlinie und die Normale (h) aus dem Mittelpunkt auf einen seiner Seiten (a) zur Höhe hat: $J = \frac{1}{2}nah$.

Die Höhe h oder der Halbmesser r des inbeschriebenen Kreises ist =

$$\tfrac{1}{2}a\, tg \cdot \left(\frac{2n-4}{2n} R\right);$$

der Halbmesser R des darum beschriebenen Kreises ist =

$$\tfrac{1}{2}a\, sec \cdot \left(\frac{2n-4}{2n} R\right).$$

23. Bezeichnet man Fig. 908

mit r den Halbmesser mc des Kreises,
mit s die Seite ht des regelmäfsigen $n$ecks im Kreise,
mit s' die Seite hc des regelmäfsigen $2n$ecks im Kreise,
mit S die Seite pg des regelmäfsigen $n$ecks um den Kreis,
mit α den Centriwinkel pmg für eine Seite,
mit γ den Umfangswinkel,
mit J den Inhalt des inneren $n$ecks,
mit J' den Inhalt des äufseren $n$ecks,

so hat man

1. $r = \frac{s_1^2}{\sqrt{4s_1^2 - s^2}}$
2. $s = \frac{s_1}{r}\sqrt{4r^2 - s_1^2}$
3. $s_1 = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - s^2}}$

24. Aus Formel 2 und 3 findet man die Seiten der regelmäfsigen P. im Kreise

s des Dreiecks $= r\sqrt{3}$

s_1 des Sechsecks $= r$

des Zwölfecks $= r\sqrt{2-\sqrt{3}}$

des Vierundzwanzigecks $= r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

des Achtundvierzigecks $= r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$

des Sechsundneunzigecks $= r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$

u. s. w.

s des Vierecks $= r\sqrt{2}$

s' des Achtecks $= r\sqrt{2-\sqrt{2}}$

des Sechzehnecks $= r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

des Zweiunddreifsigecks $= r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$

des Vierundsechzigecks $= r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$

u. s. w.

s des Fünfecks $= r\sqrt{\frac{4-\sqrt{5}}{2}}$

s' des Zehnecks $= r\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

des Zwanzigecks $= r\sqrt{2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}$

des Vierzigecks $= r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}$

des Achtzigecks $= r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}}$

u. s. w.

s des Funfzehnecks $= \frac{1}{2}r\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)$

s_1 des Dreifsigecks $= \frac{1}{2}r\left(\sqrt{\frac{15-3\sqrt{5}}{2}}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

25. Ferner findet man die Seiten der um den Kreis liegenden P.:

$$S = \frac{2s_1 r}{\sqrt{4r^2 - s_1^2}}$$

Zur Bestimmung der folgenden Formeln nimmt man also s_1 aus den No. 24 aufgestellten Formeln.

Es sind also die um den Kreis liegenden Seiten:

S des Dreiecks $= \frac{2\cdot(r\sqrt{3})\cdot r}{\sqrt{4r^2-(r\sqrt{3})^2}} = 2r\sqrt{3}$

des Sechsecks $= \frac{2r\cdot r}{\sqrt{r^2-r^2}} = \frac{2}{3}r\sqrt{3}$

des Zwölfecks $= \frac{2\cdot r\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot r}{\sqrt{4r^2-r^2(2-\sqrt{3})}} = 2r\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = 2r(2-\sqrt{3})$

des Vierundzwanzigecks $= \frac{2r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{\sqrt{4r^2-r^2(2-\sqrt{2+\sqrt{3}})}} = 2r\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$

$= 2r(2+\sqrt{3})(2\sqrt{2-\sqrt{3}}-1)$

des Achtundvierzigecks $= 2r\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}$

$= \sqrt{14-3\sqrt{3}}\left[2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right]$

des Sechsundneunzigecks $= 2r\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}$

u. s. w.

S des Vierecks $= 2r$

des Achtecks $= 2r\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = 2r(\sqrt{2}-1)$

des Sechzehnecks $= 2r\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} = 2r\left[\sqrt{2(2+\sqrt{2})}-\sqrt{2}-1\right]$

des Zweiunddreifsigecks $= 2r\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$

des Vierundsechzigecks $= 2r\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}$

u. s. w.

S des Fünfecks $= 2r\sqrt{5-2\sqrt{5}}$

des Zehnecks $= 2r\sqrt{\dfrac{5-2\sqrt{5}}{2}}$

des Zwanzigecks $= 2r\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}}{2+\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}}}$

des Vierzigecks $= 2r\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2+\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}}}}$

des Achtzigecks $= 2r\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}}}}}$

u. s. w.

96. Nachdem nun No. 24 und 25 die ten der in und um den Kreis beriebenen P. gefunden worden, hat man n deren Inhalte zu finden.

Zu diesem Behuf hat man Fig. 908 das die Seite kt gefällte Apothema

$$mk = \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - s^2},$$

mithin den Inhalt des Dreiecks

$$mkt = \tfrac{1}{4}s\sqrt{4r^2 - s^2}$$

und den Inhalt des P. $= \tfrac{1}{4}ns\sqrt{4r^2 - s^2}$

Also die Inhalte der in dem Kreise beschriebenen P.

J des Dreiecks $= \tfrac{3}{4}r^2\sqrt{3}$

des Sechsecks $= \tfrac{3}{2}r^2\sqrt{3}$

des Zwölfecks $= 3r^2$

des Vierundzwanzigecks $= 6r^2\sqrt{2-\sqrt{3}}$

des Achtundvierzigecks $= 12r^2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

des Sechsundneunzigecks $= 24r^2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$

u. s. w.

J des Vierecks $= 2r^2$

des Achtecks $= 2r^2\sqrt{2}$

des Sechzehnecks $= 4r^2\sqrt{2-\sqrt{2}}$

des Zweiunddreifsigecks $= 8r^2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

des Vierundsechzigecks $= 16r^2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$

u. s. w.

J des Fünfecks $= \frac{1}{2}r^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

des Zehnecks $= \frac{1}{2}r^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

des Zwanzigecks $= \frac{1}{2}r^2\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

des Vierzigecks $= 10r^2\sqrt{2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}$

des Achtzigecks $= 20r^2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}$

u. s. w.

27. Um die Inhalte der unbeschriebenen P. zu finden, hat man zur Höhe lm auf der Seite $pg = S$ den Halbmesser r, daher der Inhalt des $gmp = \frac{1}{2}rS$ und den Inhalt J des P. $= \frac{1}{2}nrS$. Demnach den Inhalt der um den Kreis beschriebenen P.

J des Dreiecks $= 3r^2\sqrt{3}$

des Sechsecks $= 2r^2\sqrt{3}$

des Zwölfecks $= 12r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = 12r^2(2-\sqrt{3})$

des Vierundzwanzigecks $= 24r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} = 24r^2\left[2\sqrt{2+\sqrt{3}}-(1+\sqrt{2})\right]$

des Achtundvierzigecks $= 48r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}} = 48r^2\left[2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right]$

des Sechsundneunzigecks $= 96r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}$

J des Vierecks $= 4r^2$

des Achtecks $= 8r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = 8r^2(\sqrt{2}-1)$

des Sechzehnecks $= 16r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$

des Zweiunddreifsigecks $= 32r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$

des Vierundsechzigecks $= 64r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}$

J des Fünfecks $= 5r^2\sqrt{5-2\sqrt{5}}$

des Zehnecks $= 10r^2\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{2}}$

des Zwanzigecks $= 20r^2\sqrt{\frac{2-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}$

des Viereckes $= 40r^2 \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}}$

des Achteckes $= 80r^2 \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}}}}$

u. s. w.

Trigonometrische Bestimmung der ihrer Stücke.

st der Centriwinkel einer Seite

$R = \frac{360^\circ}{n}$

nfangswinkel

$\frac{n-4}{n} R = \frac{n-2}{n} 180^\circ$

ite des $n$ecks im Kreise

$\cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$

ite des $n$ecks um den Kreis

$\cdot \cdot tg \frac{180^\circ}{n}$

halt des inneren $n$ecks

$r^2 \sin \frac{360^\circ}{n} = \frac{1}{2} n s^2 \cot \frac{180^\circ}{n}$

halt des äufseren $n$ecks

$^2 tg \frac{180^\circ}{n} = \frac{1}{2} n S^2 \cot \frac{180^\circ}{n}$

lbmesser des Kreises

$\cdot \cdot \operatorname{cosec} \frac{180^\circ}{n} = \frac{1}{2} S \cot \frac{180^\circ}{n}$

ür das Dreieck ist

$R = 120^\circ$

$R = 60^\circ$

$\cdot \cdot \sin 60^\circ = 1{,}732\,0508 \times r$

$\cdot \cdot tg\ 60^\circ = 3{,}464\,1016 \times r$

$\cdot \operatorname{cosec} 60^\circ = 0{,}577\,3503 \times s$

$S \cdot \cot 60^\circ = 0{,}288\,6751 \times S$

$r^2 \cdot \sin 120^\circ = 1{,}209\,0381 \times r^2$

$s^2 \cdot \cot 60^\circ = 0{,}433\,0127 \times s^2$

$r^2 \cdot tg\ 60^\circ = 5{,}196\,1524 \times r^2$

$S^2 \cdot \cot 60^\circ = 0{,}433\,0127 \times S^2$

ür das Viereck ist

$= 90^\circ$

$= 90^\circ$

$r \cdot \sin 45^\circ = 1{,}414\,2136 \times r$

$r \cdot tg\ 45^\circ = 2{,}000\,0000 \times r$

$r = \frac{1}{2} s \cdot \operatorname{cosec} 45^\circ = 0{,}707\,1068 \times s$

$r = \frac{1}{2} S \cdot \cot 45^\circ = 0{,}500\,0000 \times S$

$J = 2r^2 \cdot \sin 90^\circ = 2{,}000\,0000 \times r^2$

$J = s^2 \cdot \cot^2 45^\circ = 1{,}000\,0000 \times s^2$

$J' = 4r^2 \cdot tg\ 45^\circ = 4{,}000\,0000 \times r^2$

$J' = S^2 \cdot \cot 45^\circ = 1{,}000\,0000 \times S^2$

3. Für das Fünfeck ist

$x = \frac{1}{5} R = 72^\circ$

$y = \frac{2}{5} R = 108^\circ$

$s = 2r \cdot \sin 36^\circ = 1{,}175\,5706 \times r$

$S = 2r \cdot tg\ 36^\circ = 1{,}543\,0852 \times r$

$r = \frac{1}{2} s \cdot \operatorname{cosec} 36^\circ = 0{,}805\,6508 \times s$

$r = \frac{1}{2} S \cdot \cot 36^\circ = 0{,}688\,1909 \times S$

$J = \frac{5}{4} r^2 \cdot \sin 72^\circ = 2{,}377\,6412 \times r^2$

$J = \frac{5}{4} s^2 \cdot tg\ 36^\circ = 1{,}720\,4774 \times s^2$

$J' = 5r^2 \cdot tg\ 36^\circ = 3{,}632\,7130 \times r^2$

$J' = \frac{5}{4} S^2 \cdot \cot 36^\circ = 1{,}720\,4774 \times S^2$

4. Für das Sechseck ist

$x = \frac{1}{6} R = 60^\circ$

$y = \frac{2}{6} R = 120^\circ$

$s = 2r \cdot \sin 30^\circ = 1{,}000\,0000 \times r$

$S = 2r \cdot tg\ 30^\circ = 1{,}154\,7006 \times r$

$r = \frac{1}{2} s \cdot \operatorname{cosec} 30^\circ = 1{,}000\,0000 \times s$

$r = \frac{1}{2} S \cdot \cot 30^\circ = 0{,}866\,0254 \times S$

$J = 3r^2 \cdot \sin 60^\circ = 2{,}598\,0762 \times r^2$

$J = \frac{3}{2} s^2 \cdot \cot 30^\circ = 2{,}598\,0762 \times s^2$

$J' = 6r^2 \cdot tg\ 30^\circ = 3{,}464\,1018 \times r^2$

$J' = \frac{3}{2} S^2 \cdot \cot 30^\circ = 2{,}598\,0762 \times S^2$

5. Für das Achteck ist

$x = \frac{1}{8} R = 45^\circ$

$y = \frac{3}{8} R = 135^\circ$

$s = 2r \cdot \sin 22^\circ 30' = 0{,}765\,3668 \times r$

$S = 2r \cdot tg\ 22^\circ 30' = 0{,}828\,4272 \times r$

$r = \frac{1}{2} s \cdot \operatorname{cosec} 22^\circ 30' = 1{,}306\,5628 \times s$

$r = \frac{1}{2} S \cdot \cot 22^\circ 30' = 1{,}207\,1068 \times S$

$J = 4r^2 \cdot \sin 45^\circ = 2{,}828\,4272 \times r^2$

$J = 2s^2 \cdot \cot 22^\circ 30' = 4{,}828\,4272 \times s^2$

$J' = 8r^2 \cdot tg\ 22^\circ 30' = 3{,}313\,7088 \times r^2$

$J' = 2S^2 \cdot \cot 22^\circ 30' = 4{,}828\,4272 \times S^2$

6. Für das Zehneck ist

$s = \frac{2}{5} R = 36°$
$y = \frac{4}{5} R = 144°$
$s = 2r \cdot \sin 18°$ $= 0{,}618\,0340 \times r$
$S = 2r \cdot tg\ 18°$ $= 0{,}649\,8394 \times r$
$r = \frac{1}{2} s \cdot \operatorname{cosec} 18°$ $= 1{,}618\,0340 \times s$
$r = \frac{1}{2} S \cdot \cot 18°$ $= 1{,}538\,8417 \times S$
$J = 5r^2 \cdot \sin 36°$ $= 2{,}938\,9265 \times r^2$
$J = \frac{1}{2} s^2 \cdot \cot 18°$ $= 7{,}694\,2087 \times s^2$
$J' = 10r^2 \cdot tg\ 18°$ $= 3{,}249\,1970 \times r^2$
$J' = \frac{1}{2} S^2 \cdot \cot 18°$ $= 7{,}694\,2087 \times S^2$

7. Für das Zwölfeck ist

$s = \frac{1}{6} R = 30°$
$y = \frac{5}{6} R = 150°$
$s = 2r \cdot \sin 15°$ $= 0{,}517\,6380 \times r$
$S = 2R \cdot tg\ 15°$ $= 0{,}535\,8984 \times r$
$r = \frac{1}{2} s \cdot \operatorname{cosec} 15°$ $= 1{,}931\,8522 \times s$
$r = \frac{1}{2} S \cdot \cot 15°$ $= 1{,}866\,0254 \times S$
$J = 6r^2 \cdot \sin 30°$ $= 3{,}000\,0000 \times r^2$
$J = 3s^2 \cdot \cot 15°$ $= 11{,}196\,1524 \times s^2$
$J' = 12r^2 \cdot tg\ 15°$ $= 3{,}215\,3904 \times r^2$
$J' = 3S^2 \cdot \cot 15°$ $= 11{,}196\,1524 \times S^2$

8. Für das Funfzehneck ist

$s = \frac{1}{15} R = 24°$
$y = \frac{14}{15} R = 156°$
$s = 2r \cdot \sin 12°$ $= 0{,}415\,8234 \times r$
$S = 2r \cdot tg\ 12°$ $= 0{,}425\,1130 \times r$
$r = \frac{1}{2} s \cdot \operatorname{cosec} 12°$ $= 2{,}404\,8671 \times s$
$r = \frac{1}{2} S \cdot \cot 12°$ $= 2{,}352\,3150 \times S$
$J = \frac{15}{4} r^2 \cdot \sin 24°$ $= 3{,}050\,5245 \times r^2$
$J = \frac{15}{4} s^2 \cdot \cot 12°$ $= 17{,}642\,3629 \times s^2$
$J' = 15r^2 \cdot tg\ 12°$ $= 3{,}188\,3475 \times r^2$
$J' = \frac{15}{4} S^2 \cdot \cot 12°$ $= 17{,}642\,3629 \times S^2$

9. Für das Sechzehneck ist

$s = \frac{1}{8} R = 22° 30'$
$y = \frac{7}{8} R = 157° 30'$
$s = 2r \cdot \sin 11° 15'$ $= 0{,}312\,8690 \times r$
$S = 2r \cdot tg\ 11° 15'$ $= 0{,}316\,7688 \times r$
$r = \frac{1}{2} s \cdot \operatorname{cosec} 11° 15'$ $= 3{,}196\,2266 \times s$
$r = \frac{1}{2} S \cdot \cot 11° 15'$ $= 3{,}156\,8757 \times S$
$J = 8r^2 \cdot \sin 22° 30'$ $= 3{,}090\,1700 \times r^2$
$J = 4s^2 \cdot \cot 11° 15'$ $= 31{,}568\,7570 \times s^2$
$J' = 16r^2 \cdot tg\ 11° 15'$ $= 3{,}167\,6880 \times r^2$
$J' = 4S^2 \cdot \cot 11° 15'$ $= 31{,}568\,7570 \times S^2$

10. Für das Zwanzigeck ist

$s = \frac{1}{10} R = 18°$
$y = \frac{9}{10} R = 162°$
$s = 2r \cdot \sin 9°$ $= 0{,}212\,8690 \times r$
$S = 2r \cdot tg\ 9°$ $= 0{,}316\,7688 \times r$
$r = \frac{1}{2} s \cdot \operatorname{cosec} 9°$ $= 3{,}196\,2266 \times s$
$r = \frac{1}{2} S \cdot \cot 9°$ $= 3{,}156\,8757 \times S$
$J = 10r^2 \cdot \sin 18°$ $= 3{,}090\,1700 \times r^2$
$J = 5s^2 \cdot \cot 9°$ $= 31{,}568\,7570 \times s^2$
$J' = 20r^2 \cdot tg\ 9°$ $= 3{,}167\,6880 \times r^2$
$J' = 5S^2 \cdot \cot 9°$ $= 31{,}568\,7570 \times S^2$

11. Für das Vierundzwanzigeck ist

$s = \frac{1}{12} R = 15°$
$y = \frac{11}{12} R = 165°$
$s = 2r \cdot \sin 7° 30'$ $= 0{,}261\,1124 \times r$
$S = 2r \cdot tg\ 7° 30'$ $= 0{,}263\,3050 \times r$
$r = \frac{1}{2} s \cdot \operatorname{cosec} 7° 20'$ $= 3{,}829\,7683 \times s$
$r = \frac{1}{2} S \cdot \cot 7° 30'$ $= 3{,}797\,8770 \times S$
$J = 12r^2 \cdot \sin 15°$ $= 3{,}105\,8280 \times r^2$
$J = 6s^2 \cdot \cot 7° 30'$ $= 45{,}574\,5246 \times s^2$
$J' = 24r^2 \cdot tg\ 7° 30'$ $= 3{,}159\,6600 \times r^2$
$J' = 6S^2 \cdot \cot 7° 30'$ $= 45{,}574\,5246 \times S^2$

12. Für das Fünfundzwanzigeck ist

$s = 0{,}16R = 14° 24'$
$y = 1{,}84R = 165° 36'$
$s = 2r \cdot \sin 7° 12'$ $= 0{,}250\,6664 \times r$
$S = 2r \cdot tg\ 7° 12'$ $= 0{,}252\,6588 \times r$
$r = \frac{1}{2} s \cdot \operatorname{cosec} 7° 12'$ $= 3{,}989\,3664 \times s$
$r = \frac{1}{2} S \cdot \cot 7° 12'$ $= 3{,}957\,9075 \times S$
$J = 12{,}5r^2 \cdot \sin 14° 24'$ $= 3{,}108\,6237 \times r^2$
$J = 6{,}25s^2 \cdot \cot 7° 12'$ $= 49{,}473\,8444 \times s^2$
$J' = 25r^2 \cdot tg\ 7° 12'$ $= 3{,}158\,2350 \times r^2$
$J' = 6{,}25\,S^2 \cdot \cot 7° 12'$ $= 49{,}473\,8444 \times S^2$

13. Für das Dreifsigeck ist

$s = \frac{2}{15} R = 12°$
$y = \frac{13}{15} R = 168°$
$s = 2r \cdot \sin 6°$ $= 0{,}209\,0570 \times r$
$S = 2r \cdot tg\ 6°$ $= 0{,}210\,2084 \times r$
$r = \frac{1}{2} s \cdot \operatorname{cosec} 6°$ $= 4{,}783\,3833 \times s$
$r = \frac{1}{2} S \cdot \cot 6°$ $= 4{,}757\,1822 \times S$
$J = 15r^2 \cdot \sin 12°$ $= 3{,}118\,6755 \times r^2$
$J = 7{,}5s^2 \cdot \cot 6°$ $= 71{,}357\,7337 \times s^2$
$J' = 30r^2 \cdot tg\ 6°$ $= 3{,}153\,1260 \times r^2$
$J' = 7{,}5\,S^2 \cdot \cot 6°$ $= 71{,}357\,7337 \times S^2$

14. Für das Zweiunddreifsigeck ist

$s = 0{,}125\,R = 11° 15'$
$y = 1{,}875\,R = 168° 45'$
$s = 2r \cdot \sin 5° 37' 30''$ $= 0{,}196\,0343 \times r$
$S = 2r \cdot tg\ 5° 37' 30''$ $= 0{,}196\,9829 \times r$
$r = \frac{1}{2} s \cdot \operatorname{cosec} 5° 37' 30''$ $= 5{,}101\,1594 \times s$
$r = \frac{1}{2} S \cdot \cot 5° 37' 30''$ $= 5{,}076\,5850 \times S$
$J = 16r^2 \cdot \sin 11° 15'$ $= 3{,}121\,4448 \times r^2$
$J = 8s^2 \cdot \cot 5° 37' 30''$ $= 81{,}225\,3600 \times s^2$
$J' = 32r^2 \cdot tg\ 5° 37' 30''$ $= 3{,}151\,7264 \times r^2$
$J' = 8S^2 \cdot \cot 5° 37' 30''$ $= 81{,}225\,3600 \times S^2$

Für das Vierzigeck ist
$1R = 9°$
$9R = 171°$
$\cdot \sin 4° 30' = 0{,}157\,2082 \times r$
$\cdot \operatorname{tg} 4° 30' = 0{,}157\,4034 \times r$
$\cdot \operatorname{cosec} 4° 30' = 6{,}360\,9907 \times s$
$\cdot \cot 4° 30' = 6{,}353\,1012 \times S$
$r^2 \cdot \sin 9° = 3{,}128\,6900 \times r^2$
$s^2 \cdot \cot 4° 30' = 127{,}062\,024 \times s^2$
$r^2 \cdot \operatorname{tg} 4° 30' = 3{,}148\,0680 \times r^2$
$S^2 \cdot \cot 4° 30' = 127{,}062\,024 \times S^2$

Für das Achtundvierzigeck ist
$R = 7° 30'$
$R = 172° 30'$
$\cdot \sin 3° 45' = 0{,}130\,8062 \times r$
$\cdot \operatorname{tg} 3° 45' = 0{,}131\,0870 \times r$
$\cdot \operatorname{cosec} 3° 45' = 7{,}644\,8995 \times s$
$\cdot \cot 3° 45' = 7{,}628\,5263 \times S$
$r^2 \cdot \sin 7° 30' = 3{,}132\,6288 \times r^2$
$s^2 \cdot \cot 3° 45' = 183{,}084\,63 \times s^2$
$r^2 \cdot \operatorname{tg} 3° 45' = 3{,}146\,0880 \times r^2$
$S^2 \cdot \cot 3° 45' = 183{,}084\,63 \times S^2$

Für das Funfzigeck ist
$08R = 7° 12'$
$92R = 172° 48'$
$\cdot \sin 3° 36' = 0{,}125\,5810 \times r$
$\cdot \operatorname{tg} 3° 36' = 0{,}125\,8294 \times r$
$\cdot \operatorname{cosec} 3° 36' = 7{,}962\,9873 \times s$
$\cdot \cot 3° 36' = 7{,}947\,2729 \times S$
$r^2 \cdot \sin 7° 12' = 3{,}133\,3300 \times r^2$
$2{,}5 s^2 \cdot \cot 3° 36' = 198{,}681\,825 \times s^2$
$r^2 \cdot \operatorname{tg} 3° 36' = 3{,}145\,7350 \times r^2$
$2{,}5 S^2 \cdot \cot 3° 36' = 198{,}681\,825 \times S^2$

Für das Sechzigeck ist
$R = 6°$
$R = 174°$
$\cdot \sin 3° = 0{,}104\,6720 \times r$
$\cdot \operatorname{tg} 3° = 0{,}104\,8156 \times r$
$\cdot \operatorname{cosec} 3° = 9{,}553\,6522 \times s$
$\cdot \cot 3° = 9{,}540\,5680 \times S$
$r^2 \cdot \sin 6° = 3{,}135\,5550 \times r^2$
$s^2 \cdot \cot 3° = 286{,}217\,0394 \times s^2$
$r^2 \cdot \operatorname{tg} 3° = 3{,}144\,4680 \times r^2$
$S^2 \cdot \cot 3° = 286{,}217\,0394 \times S^2$

Für das Vierundsechzigeck ist
$R = 5° 37' 30''$
$R = 174° 22' 30''$
$\cdot \sin 2° 48' 45'' = 0{,}098\,1353 \times r$
$\cdot \operatorname{tg} 2° 48' 45'' = 0{,}098\,2536 \times r$
$\cdot \operatorname{cosec} 2° 48' 45'' = 10{,}190\,0116 \times s$
$r = \frac{1}{2} S \cdot \cot 2° 48' 45'' = 10{,}177\,7347 \times S$
$J = 32 r^2 \cdot \sin 5° 37' 30'' = 3{,}136\,5488 \times r^2$
$J = 16 s^2 \cdot \cot 2° 48' 45'' = 325{,}687\,5117 \times s^2$
$J' = 64 r^2 \cdot \operatorname{tg} 2° 48' 45'' = 3{,}144\,1152 \times r^2$
$J' = 16 S^2 \cdot \cot 2° 48' 45'' = 325{,}687\,5117 \times S^2$

20. Für das Achtzigeck ist
$s = 0{,}05R = 4° 30'$
$y = 1{,}95R = 175° 30'$
$s = 2r \cdot \sin 2° 15' = 0{,}078\,5196 \times r$
$S = 2r \cdot \operatorname{tg} 2° 15' = 0{,}078\,5802 \times r$
$r = \frac{1}{2} s \cdot \operatorname{cosec} 2° 15' = 12{,}735\,6732 \times s$
$r = \frac{1}{2} S \cdot \cot 2° 15' = 12{,}725\,8500 \times S$
$J = 40 r^2 \cdot \sin 4° 30' = 3{,}138\,3640 \times r^2$
$J = 20 s^2 \cdot \cot 2° 15' = 509{,}034\,0000 \times s^2$
$J' = 80 r^2 \cdot \operatorname{tg} 2° 15' = 3{,}143\,2080 \times r^2$
$J' = 20 S^2 \cdot \cot 2° 15' = 509{,}034\,0000 \times S^2$

21. Für das Sechsundneunzigeck ist
$s = \frac{1}{24} R = 3° 45'$
$y = \frac{23}{24} R = 176° 15'$
$s = 2r \cdot \sin 1° 52' 30'' = 0{,}065\,4380 \times r$
$S = 2r \cdot \operatorname{tg} 1° 52' 30'' = 0{,}065\,4732 \times r$
$r = \frac{1}{2} s \cdot \operatorname{cosec} 1° 52' 30'' = 15{,}281\,6421 \times s$
$r = \frac{1}{2} S \cot 1° 52' 30'' = 15{,}273\,4196 \times S$
$J = 48 r^2 \sin 3° 45' = 3{,}139\,3488 \times r^2$
$J = 24 s^2 \cot 1° 52' 30'' = 733{,}124\,1398 \times s^2$
$J' = 96 r^2 \operatorname{tg} 1° 52' 30'' = 3{,}142\,7126 \times r^2$
$J' = 24 S^2 \cdot \cot 1° 52' 30'' = 733{,}124\,1398 \times S^2$

22. Für das Hunderteck ist
$s = 0{,}04R = 3° 36'$
$y = 1{,}96R = 176° 24'$
$s = 2r \cdot \sin 1° 48' = 0{,}062\,8216 \times r$
$S = 2r \cdot \operatorname{tg} 1° 48' = 0{,}062\,8526 \times r$
$r = \frac{1}{2} s \cdot \operatorname{cosec} 1° 48' = 15{,}918\,0918 \times s$
$r = \frac{1}{2} S \cdot \cot 1° 48' = 15{,}910\,2573 \times S$
$J = 50 r^2 \cdot \sin 3° 36' = 3{,}139\,5250 \times r^2$
$J = 25 s^2 \cdot \cot 1° 48' = 795{,}512\,8675 \times s^2$
$J' = 100 r^2 \cdot \operatorname{tg} 1° 48' = 3{,}142\,6300 \times r^2$
$J' = 25 S^2 \cdot \cot 1° 48' = 795{,}512\,8675 \times S^2$

Polygonalzahlen sind in dem Art. „Figurirte Zahlen“ ausführlich abgehandelt.

Polygonometrie ist die Lehre von den Polygonen, besonders von der Ausmessung und Berechnung derselben.

Polynom, s. v. w. Multinom.

Polynomial-Coefficient, s. den folgenden Art.

Polynomischer Satz ist die Anweisung zur Bildung der Potenz von beliebigem Grade eines Polynoms, also die geordnete Entwickelung der Reihe

$(a \pm b \pm c \pm d \pm \ldots . z)^n$

Bezeichnet man sämmtliche Glieder vom zweiten ab mit einem einzigen Zeichen x, so hat man $(a \pm x)^n$, folglich die Aufgabe des binomischen Satzes.

Die in ihren einzelnen Gliedern entwickelte $n$te Potenz eines Binoms enthält $(n+1)$ Glieder und zwar beide Elemente a und b in allen möglichen Combinationen mit Wiederholungen $a^m b^{n-m}$ und $a^{n-m} b^m$ von 0 bis n. Dies Gesetz geht bei 3 Gliedern auf 3, bei m Gliedern auf m Elemente über; daher hat ein Polynom von m Elementen zur $n$ten Potenz entwickelt (nach dem Art. „Combination", pag. 36)

$$N = \frac{m\,(m+1)\,(m+2)\,\ldots\ldots\,(m+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n} \text{ Glieder} \qquad (1)$$

2. Um das Gesetz der Bildung einer solchen Potenzenreihe vorläufig anschaulich zu haben möge folgendes Beispiel dienen:

$(a+b+c+d)^4$

Man erhält

$$a^4 + 4a^3b + 4a^3c + 4a^3d + 6a^2b^2 + 6a^2c^2 + 6a^2d^2 + 12a^2bc + 12a^2bd + 12a^2cd + 4ab^3 + 4ac^3 + 4ad^3 + 12ab^2c + 12ab^2d + 12abc^2 + 12abd^2 + 12ac^2d + 12acd^2 + 24abcd + b^4 + 4b^3c + 4b^3d + 6b^2c^2 + 6b^2d^2 + 12b^2cd + 4bc^3 + 4bd^3 + 12bc^2d + 12bcd^2 + c^4 + c^3d + c^2d^2 + cd^3 + d^4$$

Die erste Abtheilung mit dem ersten Gliede a hat 4 Elemente und die dritte Ordnung, weil zu dieser a nicht hinzugezählt werden kann,

also $\frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \ldots\ldots$ 20 Glieder

Die zweite Abtheilung mit dem ersten Gliede b hat 3 Elemente und die dritte Ordnung,

also $\frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \ldots\ldots$ 10 Glieder

Die dritte Abtheilung mit dem ersten Gliede c hat 2 Elemente und die dritte Ordnung

mithin $\frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \ldots\ldots$ 4 Glieder

Die vierte Abtheilung mit dem einzigen Gliede (1 Element und dritte Ordnung) . 1 Glied

Summa 35 Glieder

Die ganze Potenz hat 4 Elemente mit 4ter Ordnung, mithin $\frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35$ Glieder.

3. Die Anzahl der Elemente soll immer mit m, die Summe der Einheiten des Potenzexponenten immer mit n bezeichnet werden. Exponent immer mit X, Element immer mit E.

4. n ist zugleich die Anzahl der Dimensionen jedes Gliedes:

$a^n b$; $a^{n-m} c$; $a^{n-3} bcd$ u. s. w.

Ist $m > n$, so kann folglich jedes einzelne Glied höchstens n einzelne E enthalten. Hat kein E eines Gliedes einen X, so fehlen $(m-n)$ E.

$(a+b+c+d+e)^3$ kann a^3, a^2c, ad^2, abc, cde enthalten, nicht aber a^2b^2, cd^2e.

Ist $m < n$, so muſs in jedem Gliede mindestens ein E in Potenz vorkommen. $(a+b+c)^4$ hat nur Glieder wie a^2bc, ab^3, c^4.

Eine Potenz in welcher $m = n$ ist, heifst eine vollständige Potenz.

5. Zu Erlangung einer gewissen Gewandtheit in der practischen Handhabung für Ausübung der Hauptregel zur Zusammenstellung einer geordneten Reihe von Gliedern der Potenz eines Polynoms, soll hier ein etwas ausgedehnteres Beispiel als Richtschnur vorangestellt werden, nämlich das Beispiel

$(a+b+c+d+e+f+g+h)^8$

Das Polynom hat 8 Glieder, es soll zur 8ten Potenz erhoben werden, und die Potenz ist eine vollständige.

Nach No. 2 beträgt die Anzahl der Glieder:

1. Der ganzen Potenz $= \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 6435$ Glieder

2. Der ersten Abtheilung mit dem ersten

Gliede $a = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{8}{15} 6435 = 3432$ Glieder

3. Der zweiten Abtheilung mit dem ersten

Gliede $b = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{4}{15} \times 6435 = 1716$ „

4. Der dritten Abtheilung mit dem ersten

Gliede $c = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{6}{13} \times 1716 = 792$ „

5. Der vierten Abtheilung mit dem ersten

Gliede $d = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{5}{12} \times 792 = 330$ „

6. Der fünften Abtheilung mit dem ersten

Gliede $e = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{4}{11} \times 330 = 120$ „

7. Der sechsten Abtheilung mit dem ersten

Gliede $f = \frac{8 \cdot 9}{1 \cdot 2} = \frac{3}{10} \times 120 = 36$ „

8. Der siebenten Abtheilung mit dem

ersten Gliede $g = \frac{8}{1} = 8$ „

der Glieder Summe 6435 Glieder

Die Potenz $(a+b+c+d+e+f+g+h)^8$ hat nun folgende Glieder.

I. Diejenigen Glieder, welche nur aus einem E bestehen:

	Anzahl der Glieder	
Es ist dies das einzige Glied a^8	1	1

II. Diejenigen Glieder, welche aus zweien E bestehen.

$a^7(b+c+d+e+f+g+h)$ $+a^6(b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2)$ $+a^5(b^3+c^3+d^3+e^3+f^3+g^3+h^3)$ $+a^4(b^4+c^4+d^4+e^4+f^4+g^4+h^4)$ $+a^3(b^5+c^5+d^5+e^5+f^5+g^5+h^5)$ $+a^2(b^6+c^6+d^6+e^6+f^6+g^6+h^6)$ $+a(b^7+c^7+d^7+e^7+f^7+g^7+h^7)$		
in Summa $7 \times 7 =$	49	49

III. Diejenigen Glieder, welche aus dreien E bestehen.

1	$(a^6b+a^5b^2+a^4b^3+a^3b^4+a^2b^5+ab^6)(c+d+e+f+g+h)$ . .	36	
2	$(a^6c+a^5c^2+a^4c^3+a^3c^4+a^2c^5+ac^6)(d+e+f+g+h)$ . . .	30	
3	$(a^6d+a^5d^2+a^4d^3+a^3d^4+a^2d^5+ad^6)(e+f+g+h)$	24	
4	$(a^6e+a^5e^2+a^4e^3+a^3e^4+a^2e^5+ae^6)(f+g+h)$	18	
5	$(a^6f+a^5f^2+a^4f^3+a^3f^4+a^2f^5+af^6)(g+h)$	12	
6	$(a^6g+a^5g^2+a^4g^3+a^3g^4+a^2g^5+ag^6)h$	6	
7	$a^5b^2(c+d+e+f+g+h)$ $a^5c^2(d+e+f+g+h)$ $a^5d^2(e+f+g+h)$ $a^5e^2(f+g+h)$ $a^5f^2(g+h)$ a^5g^2h	21	
	Latus	147	50

		Anzahl der Glieder	
	Transport	147	50
8	$(a^5b+..ab^5)(c^3+..h^3)+(a^5c+..ac^5)(d^3+..h^3)$		
	$+(a^5d+..ad^5)(e^3+..h^3)+(a^5e+..ae^5)(f^3+g^3+h^3)$		
	$+(a^5f+..af^5)(g^3+h^3)+(a^5g+..ag^5)h^3$	105	
9	$a^4b^3(c+d+e+f+g+h)$		
	$a^4c^3(d+e+f+g+h)$		
	$a^4d^3(e+f+g+h)$		
	$a^4e^3(f+g+h)$		
	$a^4f^3(g+h)$		
	a^4g^3h	21	
10	$a^4b^2(c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2)$		
	$a^4c^2(d^2+e^2+f^2+g^2+h^2)$		
	$a^4d^2(e^2+f^2+g^2+h^2)$		
	$a^4e^2(f^2+g^2+h^2)$		
	$a^4f^2(g^2+h^2)$		
	$a^4g^2h^2$	21	
11	$a^3b^4(c+d+e+f+g+h)$		
	$a^3c^4(d+e+f+g+h)$		
	$a^3d^4(e+f+g+h)$		
	$a^3e^4(f+g+h)$		
	$a^3f^4(g+h)$		
	a^3g^4h	21	
12	$a^3b^3(c^3+d^3+e^3+f^3+g^3+h^3)$		
	$a^3c^3(d^3+e^3+f^3+g^3+h^3)$		
	$a^3d^3(e^3+f^3+g^3+h^3)$		
	$a^3e^3(f^3+g^3+h^3)$		
	$a^3f^3(g^3+h^3)$		
	$a^3g^3h^3$	21	
13	$a^3b^2(c^3+d^3+e^3+f^3+g^3+h^3)$		
	$a^3c^2(d^3+e^3+f^3+g^3+h^3)$		
	$a^3d^2(e^3+f^3+g^3+h^3)$		
	$a^3e^2(f^3+g^3+h^3)$		
	$a^3f^2(g^3+h^3)$		
	$a^3g^2h^3$	21	
14	$(a^4b+..ab^4)(c^3+..h^3)+(a^4c+..ac^4)(d^3+..h^3)$		
	$+(a^4d+..ad^4)(e^3+..h^3)+(a^4e+..ae^4)(f^3+g^3+h^3)$		
	$+(a^4f+..af^4)(g^3+h^3)+(a^4g+..ag^4)h^3$	84	
15	$(a^3b+a^3b^2+ab^3)(c^4+..h^4)+(a^3c+..ac^3)(d^4+..h^4)$		
	$+(a^3d+..ad^3)(e^4+..h^4)+(a^3e+..ae^3)(f^4+g^4+h^4)$		
	$+(a^3f+a^3f^2+af^3)(g^4+h^4)+(a^3g+a^2g^2+ag^3)h^4$	63	
16	$a^2b^5(c+d+e+f+g+h)$		
	$a^2c^5(d+e+f+g+h)$		
	$a^2d^5(e+f+g+h)$		
	$a^2e^5(f+g+h)$		
	$a^2f^5(g+h)$		
	a^2g^5h	21	
	Latus	525	50

		Anzahl der Glieder	
	Transport	525	50
17	$a^2b^4(c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2)$		
	$a^2c^4(d^2+e^2+f^2+g^2+h^2)$		
	$a^2d^4(e^2+f^2+g^2+h^2)$		
	$a^2e^4(f^2+g^2+h^2)$		
	$a^2f^4(g^2+h^2)$		
	$a^2g^4h^2$	21	
18	$a^3b^3(c^3+d^3+e^3+f^3+g^3+h^3)$		
	$a^3c^3(d^3+e^3+f^3+g^3+h^3)$		
	$a^3d^3(e^3+f^3+g^3+h^3)$		
	$a^3e^3(f^3+g^3+h^3)$		
	$a^3f^3(g^3+h^3)$		
	$a^3g^3h^3$	21	
19	$a^2b^2(c^4+d^4+e^4+f^4+g^4+h^4)$		
	$a^2c^2(d^4+e^4+f^4+g^4+h^4)$		
	$a^2d^2(e^4+f^4+g^4+h^4)$		
	$a^2e^2(f^4+g^4+h^4)$		
	$a^2f^2(g^4+h^4)$		
	$a^2g^2h^4$	21	
20	$(a^2b+ab^2)(c^5+..h^5)+(a^2c+ac^2)(d^5+..h^5)+(a^2d+ad^2)(e^5+..h^5)$		
	$+(a^2e+ae^2)(f^5+g^5+h^5)+(a^2f+af^2)(g^5+h^5)+(a^2g+ag^2)h^5$	42	
21	$ab(c^6+..h^6)+ac(d^6+..h^6)+ad(e^6+..h^6)+ae(f^6+g^6+h^6)$		
	$+af(g^6+h^6)+agh^6$	21	647

IV. Diejenigen Glieder, welche aus vier E bestehen.

Erklärung. Der erste Factor jedes Gliedes hat folgenden Character:

	$(a^5bc+..abc^5)=a^5bc+a^4b^2c+a^4bc^2+a^3b^3c+a^3b^2c^2+a^3bc^3$	
	$+a^2b^4c+a^2b^3c^2+a^2b^2c^3+a^2bc^4+ab^5c+ab^4c^2+ab^3c^3$	
	$+ab^2c^4+abc^5$ beträgt 15 Glieder.	
	$(a^4bc+..abc^4)$ hat 10 Glieder.	
	$(a^3bc+abc^3)$ hat 6 Glieder.	
	$(a^2bc+abc^2)$ hat 3 Glieder.	
	$(a^5bc+..abc^5)(d+e+f+g+h)+(a^5bd+..abd^5)(e+..h)$	
	$+(a^5be+..abe^5)(f+g+h)+(a^5bf+..abf^5)(g+h)$	
	$+(a^5bg+..abg^5)h$	225
	$(a^4bc+..abc^4)(d^2+..h^2)+(a^4bd+..abd^4)(e^2+..h^2)$	
	$+(a^4be+..abe^4)(f^2+g^2+h^2)+(a^4bf+..abf^4)(g^2+h^2)$	
	$+(a^4bg+..abg^4)h^2$	150
	$(a^3bc+..abc^3)(d^3+h^3)+(a^3bd+..abd^3)(e^3+..h^3)$	
	$+(a^3be+..abe^3)(f^3+g^3+h^3)+(a^3bf+..abf^3)(g^3+h^3)$	
	$+(a^3bg+..abg^3)h^3$	90
	$(a^2bc+..abc^2)(d^4+..h^4)+(a^2bd+..abd^2)(e^4+..h^4)$	
	$+(a^2be+..abe^2)(f^4+g^4+h^4)+(a^2bf+..abf^2)(g^4+h^4)$	
	$+(a^2bg+..abg^2)h^4$	45
	$abc(d^5+..h^5)+abd(e^5+..h^5)+abe(f^5+g^5+h^5)+abf(g^5+h^5)$	
	$+abgh^5$	15
	$(a^5cd+..acd^5)(e+..h)+(a^5ce+..ace^5)(f+g+h)$	
	$+(a^5cf+..acf^5)(g+h)+(a^5cg+...acg^5)h$	150
	$(a^4cd+..acd^4)(e^2+..h^2)+(a^4ce+..ace^4)(f^2+g^2+h^2)$	
	$+(a^4cf+..acf^4)(g^2+h^2)+(a^4cg+..acg^4)h^2$	100
	Latus	775	697

	Anzahl der Glieder	
Transport	775	697
$(a^3cd+..acd^3)(e^3+..h^3)+(a^3ce+..ace^3)(f^3+g^3+h^3)$ $+(a^3cf+..acf^3)(g^3+h^3)+(a^3cg+..acg^3)h^3$	60	
$(a^2cd+..acd^2)(e^4+h^4)+(a^2ce+\ ace^2)(f^4+g^4+h^4)$ $+(a^2cf+..acf^2)(g^4+h^4)+(a^2cg+..acg^2)h^4$	30	
$acd(e^5+..h^5)+ace(f^5+g^5+h^5)+acf(g^5+h^5)+acgh^5$ . . .	10	
$(a^5de+..ade^5)(f+g+h)+(a^5df+..adf^5)(g+h)$ $+(a^5dg+\ adg^5)h$	90	
$(a^4de+..ade^4)(f^2+g^2+h^2)+(a^4df+..adf^4)(g^2+h^2)$ $+(a^4dg+..adg^4)h^2$	60	
$(a^3de+..ade^3)(f^3+g^3+h^3)+(a^3df+..adf^3)(g^3+h^3)$ $+(a^3dg+..adg^3)h^3$	36	
$(a^2de+..ade^2)(f^4+g^4+h^4)+(a^2df+..adf^2)(g^4+h^4)$ $+(a^2dg+..adg^2)h^4$	18	
$adef^5+adfg^5+adgh^5$	3	
$(a^5ef+..aef^5)(g+h)+(a^5eg+..aeg^5)h$	45	
$(a^4ef+..aef^4)(g^2+h^2)+(a^4eg+..aeg^4)h^2$	30	
$(a^3ef+..aef^3)(g^3+h^3)+(a^3eg+..aeg^3)h^3$	18	
$(a^2ef+..aef^2)(g^4+h^4)+(a^2eg+..aeg^2)h^4$	9	
$aef(g^5+h^5)$	2	
$(a^5eg+..aeg^5)h$	15	
$(a^4eg+..aeg^4)h^2$	10	
$(a^3eg+..aeg^3)h^3$	6	
$(a^2eg+..aeg^2)h^4$	3	
$aegh^5$	1	
$(a^5fg+..afg^5)h$	15	
$(a^4fg+..afg^4)h^2$	10	
$(a^3fg+..afg^3)h^3$	6	
$(a^2fg+afg^2)h^4$	3	
$afgh^5$	1	1256

V. Diejenigen Glieder, welche aus fünf E bestehen.

Erklärung. Der erste Factor jedes Gliedes hat folgenden Character:

$a^4bcd,\ ab^4cd,\ abc^4d,\ abcd^4$
$a^3b^3cd,\ a^3bc^3d,\ a^3bcd^3$
$a^2b^3cd,\ ab^3c^2d,\ ab^3cd^2$

$a^3bc^3d,\ ab^3c^4d,\ abc^3d^2$
$a^3bcd^3,\ ab^2cd^3,\ abc^3d^3$
$a^2b^2c^2d,\ a^2b^2cd^2,\ a^2bc^2d^2,\ ab^2c^2d^2$

$(a^4bcd+..abcd^4)$ hat 20 Glieder
$(a^3bcd+..abcd^3)$ hat 10 „
$(a^2bcd+..abcd^2)$ hat 4 „

$(a^4bcd+..abcd^4)(e+f+g+h)+(a^4bce+..abce^4)(f+g+h)$ $+(a^4bcf+..abcf^4)(g+h)+(a^4bcg+\ abcg^4)h$	200	
$(a^3bcd+..abcd^3)(e^2+f^2+g^2+h^2)+(a^3bce+..abce^3)(f^2+g^2+h^2)$ $+(a^3bcf+..abcf^3)(g^2+h^2)+(a^3bcg+..abcg^3)h^2$	100	
$(a^2bcd+\ abcd^2)(e^3+..h^3)+(a^2bce+..abce^2)(f^3+g^3+h^3)$ $+(a^2bcf+..abcf^2)(g^3+h^3)+(a^2bcg+..abcg^2)h^3$	40	
Latus	340	1953

	Anzahl der Glieder	
Transport	340	1950
$abcd(e^4+..h^4)+abce(f^4+g^4+h^4)+abcf(g^4+h^4)+abcgh^4$ . .	10	
$(a^4bde+..abde^4)(f+g+h)+(a^4bdf+..abdf^4)(g+h)$ $+(a^4bdg+..abdg^4)h$	120	
$(a^3bde+..abde^3)(f^3+g^3+h^3)+(a^3bdf+abdf^3)(g^3+h^3)$ $+(a^3bdg+..abdg^3)h^3$	60	
$(a^2bde+..abde^2)(f^3+g^3+h^3)+(a^2bdf+..abdf^2)(g^3+h^3)$ $+(a^2bdg+..abdg^2)h^3$	24	
$abde(f^4+g^4+h^4)+abdf(g^4+h^4)+abdgh^4$	6	
$(a^4bef+..abef^4)(g+h)+(a^4beg+..abeg^4)h$	60	
$(a^3bef+..abef^3)(g^3+h^3)+(a^3beg+..abeg^3)h^3$	30	
$(a^2bef+..abef^2)(g^3+h^3)+(a^2beg+..abeg^2)h^3$	12	
$abef(g^4+h^4)+abegh^4$	3	
$(a^4bfg+..abfg^4)h$	20	
$(a^3bfg+..abfg^3)h^2$	10	
$(a^2bfg+..abfg^2)h^3$	4	
$abfgh^4$	1	
$(a^4cde+..acde^4)(f+g+h)+(a^4cdf+..acdf^4(g+h)$ $+(a^4cdg+..acdg^4)h$	120	
$(a^3cde+..acde^3)(f^3+g^3+h^3)+(a^3cdf+..acdf^3)(g^3+h^3)$ $+(a^3cdg+..acdg^3)h^3$	60	
$(a^2cde+..acde^2)(f^3+g^3+h^3)+(a^2cdf+..acdf^2)(g^3+h^3)$ $+(a^2cdg+..acdg^2)h^3$	24	
$acde(f^4+g^4+h^4)+acdf(g^4+h^4)+acdgh^4$	6	
$(a^4cef+..acef^4)(g+h)+(a^4ceg+..aceg^4)h$	60	
$(a^3cef+..acef^3)(g^3+h^3)+(a^3ceg+..aceg^3)h^3$	30	
$(a^2cef+..acef^2)(g^3+h^3)+(a^2ceg+..aceg^2)h^3$	12	
$acef(g^4+h^4)+acegh^4$	3	
$acfgh^4$	1	
$(a^4def+..adef^4)(g+h)+(a^4deg+..adeg^4)h$	60	
$(a^3def+..adef^3)(g^3+h^3)+(a^3deg+..adeg^3)h^3$	30	
$(a^2def+..adef^2)(g^3+h^3)+(a^2deg+..adeg^2)h^3$	12	
$adef(g^4+h^4)+adegh^4$	3	
$adfgh^4$	1	
$(a^4efg+..aefg^4)h$	20	
$(a^3efg+..aefg^3)h^2$	10	
$(a^2efg+..aefg^2)h^3$	4	
$aefgh^4$	1	1157

VI. Diejenigen Glieder, welche aus sechs *E* bestehen.

Erklärung. Der erste Factor jedes Gliedes hat folgenden Character.

a^2bcde, ab^2cde, abc^2de, $abcd^2e$, $abcde^2$		
a^2b^2ade, a^2bc^2de, a^2bcd^2e, a^2bcde^2		
ab^2c^2de, ab^2cd^2e, ab^2cde^2		
abc^2d^2e, abc^2de^2		
$abcd^2e^2$		
$(a^2bcde+..abcde^2)$ hat 15 Glieder		
$(a^2bcde+..abcde^2)$ „ 5 „		
Latus		3107

	Anzahl der Glieder	
Transport		3107
$(a^3bcde+..abcde^3)(f+g+h)+(a^3bedf+..abcdf^3)(g+h)$ $+(a^3bcdg+..abcdg^3)h$	90	
$(a^3bcde+..abcde^3)(f^2+g^2+h^2)+(a^3bcdf+..abcdf^2(g^2+h^2)$ $+(a^2bcdg+..abcdg^2)h^2$	30	
$abcde(f^3+g^3+h^3)+abcdf(g^3+h^3)+abcdgh^3$	6	
$(a^3bcef+..abcef^3)(g+h)+(a^3bceg+..abceg^3)h$	45	
$(a^3bcef+..abcef^2)(g^2+h^2)+(a^2bceg+..abceg^2)h^2$	15	
$abcef(g^3+h^3)+abcegh^3$	3	
$(a^3bcfg+..abcfg^3)h$	15	
$(a^3bcfg+..abcfg^2)h^2$	5	
$abcfgh^3+abdfgh^3+abefgh^3$	3	
$(a^3cdef+..acdef^3)(g+h)+(a^3cdeg+..acdeg^3)h$	45	
$(a^2cdef+..acdef^2)(g^2+h^2)+(a^2cdeg+..acdeg^2)h^2$	15	
$acdef(g^3+h^3)+acdegh^3$	3	
$(a^3defg+..adefg^3)h$	15	
$(a^3defg+..adefg^2)h^2$	5	
$adefgh^3$	1	296

VII. Diejenigen Glieder, welche aus sieben E bestehen.

Erklärung. Der erste Factor jedes Gliedes hat den folgenden Character.

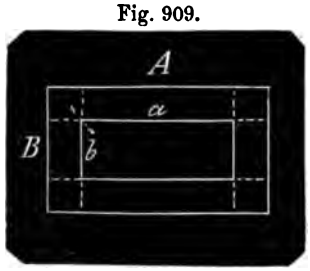
a^2bcdef, ab^2cdef, abc^3def, $abcd^2ef$, $abcde^2f$, $abcdef^2$ mit also 6 Gliedern.

$(a^2bcdef+..abcdef^2)(g+h)+(a^2bcdeg+..abcdeg^2)h$	18	
$abcdef(g^2+h^2)+abcdegh^2$	3	
$(a^2cdefg+...acdefg^2)h$	6	
$acdefgh^2$	1	
$abcdefgh$	1	29
Summa		3432

Polynomium ist eine aus unendlich vielen Theilen bestehende Gröfse.

Ponton. Die Bestimmung des Inhalts geschieht folgendermaafsen:

Fig. 909.



1. Das innere Parallelepiped mit der unteren Grundfläche ist $= ab\hbar$.

2. die vier dreiseitigen Prismen, zwei von der Länge a und zwei von der Länge b sind $= \frac{1}{2}(a+b)(A-a)\hbar$. Unter der Voraussetzung, dafs $A-a=B-b$ hat man $B=A-(a+b)$.

Die vier Eckpyramiden sind $1\frac{1}{2}(A-a)^3$.

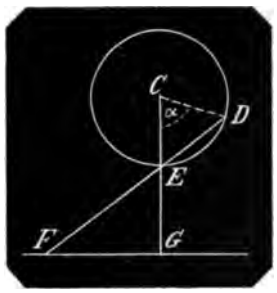
Der Inhalt des Pontons ist demnach $=[ab+\frac{1}{2}(a+b)(A-a)+1\frac{1}{2}(A-a)^2]\hbar$.

Porisma. Die Erklärungen alle, welche Klügel sämmtlich als von verschiedenen Mathematikern herrührend, in seinem mathematischen Wörterbuch angibt, sind mehr und weniger unverständlich. Den aufgeführten Beispielen nach ist Porisma die Lösung der Aufgabe, aus gegebenen geometrischen Gröfsen andere zu finden, die alle mit einander in einem constanten Verhältnifs stehen.

Die von Klügel unter No. 5 aufgeführte

beispielsweise Aufgabe ist: Ein Kreis und eine gerade Linie sind gegeben. Man soll in dem Kreisumfang denjenigen Punkt

Fig. 910.



finden, durch welchen nach beliebigen Richtungen gerade Linien gezogen, dieselben alle so geschnitten werden, dafs beide Theile gleiche Rectangel geben. Dieser Punkt ist der Durchschnittspunkt der aus dem Mittelpunkt auf die gerade Linie gefällten Normale. Denn dafs $DE \times FE$ constant ist, findet man mit Hülfe des Halbmessers CD. Es ist nämlich

$$DE = 2CE \sin \tfrac{1}{2}\alpha = 2r \sin \tfrac{1}{2}\alpha$$

$$FE = EG \sec FEG = EG \cdot \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}\alpha$$

mithin $DE \times FE = 2r \cdot EG$.

Porosität, s. u. dem Art. „Atom" pag. 163.

Positiv, s. affirmativ.

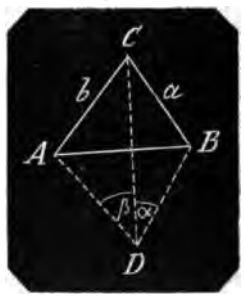
Positionswinkel eines Sterns, der gebildet wird durch zwei gröfste Kreise, der eine durch den Pol der Ekliptik, der andere durch den Pol des Aequators.

Postulat, s. u. „Constructionssätze", pag. 124.

Potenotsche Aufgabe. Es sind die drei Punkte A, B, C ihrer Lage nach bekannt, oder was dasselbe ist, das Dreieck ABC ist gegeben; man soll einen beliebigen vierten Punkt D gegen die gegebenen drei Punkte seiner Lage nach bestimmen.

Bezeichnet man die Seiten AC und BC mit b und a, die Winkel des Dreiecks mit A, B, C. Ferner wird voraus-

Fig. 911.



gesetzt, dafs man von D aus nach den gegebenen drei Punkten visiren kann und dafs mithin $\angle BDC = \alpha$ und $\angle ADC = \beta$ bekannt sind.

Die beiden $\angle CAD$ und CBD sind unbekannt, mit x und y bezeichnet und man hat

$$y = 360° - C - D - x$$

oder der Abkürzung wegen den bekannten Winkel $360° - C - D$ mit γ bezeichnet: $y = \gamma - x$.

Die Diagonale CD läfst sich aus den beiden Dreiecken ACD und BCD ausdrücken, es ist nämlich

$$CD = b \frac{\sin x}{\sin \beta} = a \frac{\sin(\gamma - x)}{\sin \alpha}$$

hieraus
$$\frac{b}{a} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin(\gamma - x)}{\sin x} = \frac{\sin \gamma \cos x - \cos \gamma \sin x}{\sin x} = \sin \gamma \cot x - \cos \gamma$$

Mithin $\cot x = \frac{b}{a} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} + \cot \gamma$

Eben so ist $\cot y = \frac{a}{b} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + \cot \gamma$

Ist γ stumpf, d. h. sind $\angle C + \angle D < 180°$, so ist $\cot \gamma$ negativ zu nehmen.

Potenz ist ein Product aus zweien oder mehreren gleichen Factoren.

$49 = 7 \times 7 = 7^2$; $64 = 8 \times 8 = 8^2 = 4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$. Die Anzahl der gleichen Factoren heifst der Exponent, die mehrmal genommene Zahl heifst die Wurzel; die Potenz wird nach der Zahl des Exponenten benannt.

Jede Wurzel ist die erste Potenz: $7 = 7^1$; $49 = 7^2$ ist die zweite Potenz von 7 oder das Quadrat von 7 oder 7 im Quadrat. So heifst die dritte Potenz auch der Cubus, die vierte auch Biquadrat.

Desgleichen wird nach dem Exponent die Wurzel benannt und man hat zweite oder Quadratwurzel, dritte oder Cubikwurzel, vierte oder Biquadratwurzel, 5te, 10te Wurzel u. s. w.

Bleibt die Wurzel dieselbe und man potenzirt diese nach der natürlichen Reihenfolge von Bruchzahlen, so heifst die constante Wurzel die Basis, die Exponenten heifsen Logarithmen, die Potenz der Numerus, die ganze Reihenfolge der Potenzen in Summa ein Logarithmensystem.

Die alten Mathematiker verglichen bekanntlich die arithmetischen Gröfsen immer mit den geometrischen, sie nannten daher die zweite Potenz eine viereckige Zahl oder ein Quadrat, die vierte ein Quadratoquadrat, die fünfte einen Quadrato-Cubus, die sechste einen Cubocubus. Daher bei Euklid die in Potenz commensurabele und incommensurabele Linien.

1. Die Elementarrechnung mit einfachen Potenzen oder die Species derselben bestehen blos in zwei Rechnungsarten, dem Multipliciren und dem Dividiren. Ersteres geschieht durch Addition, letzteres durch Subtraction der Exponenten.

$$a^n \times a^m = a^{m+n};\ \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$a^n \times b^n = (ab)^n;\ \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5;\ \frac{a^3}{a^4} = a^{3-4} = a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m};\ (a^3)^4 = a^{12};\ (a^2)^3 = a^6.$$

Es ist $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$; $a^n = \sqrt[\frac{1}{n}]{a}$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[4]{a^2} = \sqrt[2]{a};\ \sqrt[8]{a^4 \cdot b^2 \cdot c} = a^{\frac{4}{8}} \cdot b^{\frac{2}{8}} \cdot c^{\frac{1}{8}}$$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p = a^{\frac{mp}{n}};\ \sqrt[p]{a^m} = a^{\frac{m}{np}} = \sqrt[np]{a^m}$$

$$\left(a^{\frac{3}{8}}\right)^5 = a^{\frac{15}{8}} = \sqrt[8]{a^{15}}$$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}} = \sqrt[nq]{a^{mp}}$$

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}}$$

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{mq-np}{nq}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \times \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^m \cdot a^n}{b^m \cdot b^n} = \frac{a^{m+n}}{b^{m+n}}$$

Potenz der Hyperbel ist Fig. 718, pag 265 im Art. „Hyperbel" das Quadrat der Linie *MZ* oder der halben Linie *MN*.

Potenzexponent, s. u Exponent.

Potenzrechnung, s. u. Potenz.

Potenzzeichen, desgl. daselbst.

Praktik, welsche, ist die Kunst, beim Rechnen mit Leichtigkeit und Schnelligkeit zu verfahren.

Presse, die hydraulische, s. „hydraulische Presse". Alle übrigen Pressen zum bürgerlichen Gebrauch, auch mechanische Pressen genannt, werden durch Hebel, Keile oder Schrauben in Thätigkeit gesetzt.

Primfactoren einer Zahl sind die einfachsten Theiler derselben, z. B. die Primfactoren der Zahl 120 sind $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Primzahlen sind Zahlen, die aus keinen Factoren bestehen, die kein Product sind. Die von 1 bis 100 sind: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 und 97. Die Zahl 2 ist die einzige gerade Zahl unter den Primzahlen. Es gibt kein äufseres Kennzeichen für eine ungrade Zahl mit Ausnahme, deren Endziffer die 5 ist, ob sie Primzahl ist oder nicht.

Primzahlen unter sich sind solche Zahlen, die keinen gemeinschaftlichen Factor haben als 25 und 36. Sie werden auch relative Primzahlen genannt.

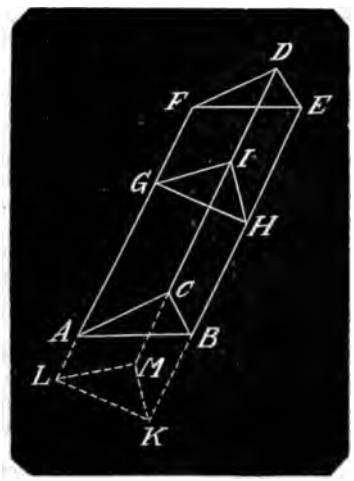
Prisma ist ein Körper, welcher zwei parallele congruente Endebenen besitzt, und deren diese verbindenden Seitenflächen Parallelogramme sind. Jeder mit den Endebenen ∓ genommene Durchschnitt ist denselben congruent.

2. Zwei Prismen sind congruent, wenn sie congruente Endflächen und eine congruente Seitenfläche haben.

3. Ein schiefes Prisma hat denselben Inhalt mit einem geraden von denselben Seitenkanten, dessen Grundflächen aber ein auf die Seitenkanten normal geführter Durchschnitt ist. Denn ist *GHJ* ein normaler Querschnitt des schiefen Prisma *ABC DEF*, so nimm auf der verlängerten Kante *AF* ein Stück *GL* = *AF*, lege durch *L* eine Ebene ∓ zu *GHJ* und erweitere die Seitenflächen des Prisma, bis sie die Ebene schneiden, so entsteht ein gerades Prisma *GHJKLM*, dessen Kanten denen des schiefen Prisma gleich sind.

Da *AF* = *GL* so ist *AG* = *FG*; ebenso folgt *BK* = *EH*, *CM* = *DJ* u. s. w. Bringt man also den Körper *GHJ DEF* so in den Körper *KLM ABC*, dafs die Grund-

Fig. 912.



flächen *GHJ* und *KLM* congruiren, so werden auch die Kanten *GF*, *EH* u. s. w. mit den Kanten *AL*, *BK* u. s. w. zusammen fallen, weil sie auf den Grundflächen normal und je zwei und zwei einander gleich sind; mithin fallen auch die Punkte *F*, *D*, *E* u. s. w. auf die Punkte *A*, *C*, *B* u. s. w. und die Endflächen eben so. Daher decken sich auch alle Seitenflächen, folglich sind die Körper *ABCLKM* und *DEFGHJ* congruent.

Nimmt man nun von dem Körper *DEFLKM* einerseits den Körper *ABCLKM* hinweg, so bleibt das schiefe Prisma *ABCDEF*, nimmt man andererseits den gleich grofsen Körper *DEFGHJ*, so bleibt das gerade Prisma *GHJLKM*; das schiefe und das gerade Prisma sind also gleich grofs.

4. In einem Parallelepipedum sind die gegenüber liegenden Seitenflächen gleich und parallel.

Denn das P. ist ein Prisma, dessen Endflächen Parallelogramme sind. In einem Prisma sind die Endflächen congruent, folglich die Endflächen des P. congruente Parallelogramme. Bei zweien gegenüberliegenden Seitenflächen sind also je zwei Seiten einander ∓ und gleich, folglich diese Seitenflächen ∓ und ≅, weil überdies die homologen Winkel gleich sind, da ihre Schenkel ∓ laufen. In einem Parallelepipedum kann man also je zwei einander gegenüberliegende Begrenzungsflächen als Grund- oder Endflächen betrachten.

5. Zwei Parallelepipeda von congruenten Grundflächen und gleichen Höhen sind gleich grofs.

Denn legt man die Grundflächen der beiden P. so auf einander, dafs sie congruiren und die P. selbst auf einer Seite der congruirenden Grundflächen liegen, so sind zwei Fälle zu unterscheiden.

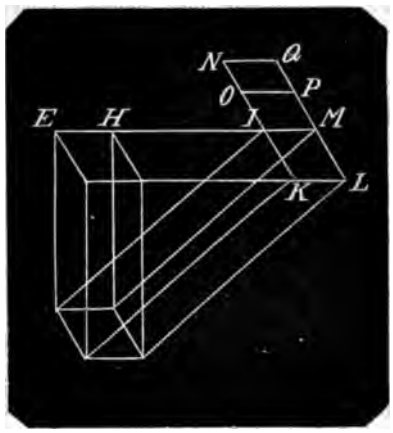
1. Wenn zwei gegenüberliegende Seitenflächen des einen P. mit zweien des anderen in einer und derselben Ebene liegen und

2. Wenn keine Seitenfläche des einen mit keiner Seitenfläche des anderen in einer und derselben Ebene liegt.

Es seien nun im 1sten Fall *ABCDEFGH* und *ABCDJKLM* die beiden P., bei denen die Seitenflächen *AG*, *AL*, *DH*, *DM* in einer Ebene liegen. Da sie gleiche Höhen haben, so fallen auch die oberen Endflächen *FH* und *KM* in einerlei mit der Grundfläche *BD* ∓ laufende Ebene und so bildet sich das vierseitige Prisma *AELC*, dessen Endfläche die Trapeze *ABLF* und *DCME* sind. Dieses Prisma wird durch die Ebene *ADJK* in zwei Theile zerlegt, wovon der eine das P. *AM*, der andere das dreiseitige Prisma *ADEFKJ* ist. Eben so zerlegt die Ebene *BCHG* jenes vierseitige Prisma in das P. *AH* und das dreiseitige Prisma *BCHGLM*. Diese dreiseitigen Prismen sind aber ≅; denn es ist die Grundfläche *AFK* der einen ≅ der Grundfläche *BGL* der anderen, die Seitenfläche *ADEF* des einen ≅ der Seitenfläche *BCHG* des anderen und diese beiden sind gegen ihre Grundfläche unter gleichen Winkeln geneigt. Nimmt man daher von dem vierseitigen Prisma nach einander die dreiseitigen hinweg, so mufs Gleiches übrig bleiben. Nun bleiben aber die beiden zu vergleichenden Parallelepipeden, folglich sind diese gleich grofs.

2ter Fall. Liegen die Seitenflächen des einen mit denen des anderen in verschiedenen Ebenen, so sei *NOPQ* die obere Endfläche des Parallelepipeds *ABCDNOPQ*. Erweitert man nun die Seitenflächen *ADNO* und *BCQP* bis sie die erweiterten Ebenen der Seitenflächen *ABGF* und *CDEH* schneiden, so bildet sich über der Grundfläche *ABCD* durch Erweiterung der oberen Endflächen *EG* und *NP* ein drittes Parallelepipedum *ABCEJKLM*, mit welchem nach dem ersten Fall die beiden Parallelepipeda *ACHF* und *ACQO* gleich grofs sind, und folglich sind die eben genannten auch unter sich gleich grofs.

Fig. 913.



6. Jedes Parallelepiped läfst sich in ein gerades von derselben Höhe und von gleich grofser und rechtwinkliger Grundfläche, d. h. in ein rechtwinkliges P. verwandeln, welches mit dem gegebenen einerlei Körperinhalt hat.

Denn construirt man über der Grundfläche des gegebenen ein gerades von derselben Höhe, so ist nach dem vorigen Satz das letzte mit dem gegebenen von gleicher Gröfse. Es sei *ABCDEFJK* das gleich grofse gerade P.; auf der Seite *AB* der Grundfläche errichte man bis an *CD* in *A* und *B* die Normalen *AH* und *BG*, so entsteht das Rechteck *ABGH* gleich der Grundfläche *ABCD*. Errichtet man nun über *ABGH* als Grundfläche ein gerades P. von einerlei Höhe mit dem *ABCDEFJH*, so ist jenes ein rechtwinkliges, welches mit dem gegebenen eine gleich grofse Grundfläche und eine gleiche Höhe hat, ist aber auch von gleichem körperlichen Inhalt mit dem gegebenen. Denn man kann die gemeinschaftliche Seitenfläche *ABEF* als Grundfläche betrachten, so hat dann das Parallelepipedum *ABCDEFJK* und das rechtwinklige, dessen Grundfläche ursprünglich *ABGH* ist, einerlei Grundfläche und gleiche Höhe, folglich sind beide P. gleich grofs; das rechtwinklige ist also auch mit dem gegebenen gleich grofs.

7. Parallelepipeda verhalten sich ihrem körperlichen Inhalt nach wie die Producte aus den Inhalten ihrer Grundflächen multiplicirt mit den zugehörigen Höhen, sofern man die Grundflächen nach einerlei Flächeneinheit und die Höhen nach derselben Längeneinheit bestimmt.

Denn da P., wenn sie nicht rechtwinklig sind, sich in solche mit gleichen Grundflächen und gleichen Höhen verwandeln lassen, so ist der Beweis nur für rechtwinklige zu führen.

Es seien zuerst die P. von congruenten Grundflächen, dann lassen sie sich so in einander legen, dafs ihre Grundflächen congruent und ihre Seitenkanten zusammen fallen, dafs einer also ein Theil des anderen wird.

ABC und *ABD* seien die beiden zu einander gelegten P., deren gemeinschaftliche Grundfläche *AB*, dann sind *AC* und *AD* ihre Höhen. Ist nun zuerst *AC* commensurabel mit *AD*, so sei *AE* ihr gemeinschaftliches Maafs. Dieses sei in *AC* *n*-, in *AD* *m* mal enthalten. Trägt man nun *AE* von *A* nach *D* auf und legt durch die Endpunkte der aufgetragenen Theile Ebenen ∦ zu *AB*, so zerfällt dadurch das P. *ABC* in *n*, das P. *ABCD* aber in *m* unter sich congruente Theile. Bezeichnet man nun einen dieser Theile mit *P*, so hat man Pp. *ABC* $= nP$ und Pp. *ABD* $= mP$; folglich ist $P = \frac{1}{n} ABC$ und also Pp. $ABD = \frac{m}{n} ABC$; mithin ist $\frac{m}{n}$ der Name des Verhältnisses $ABC : ABD$. Ganz eben so folgt, dafs $AD = \frac{m}{n} AC$, folglich hat auch das Verhältnifs $AC : AD$ denselben Namen $\frac{m}{n}$, die beiden Verhältnisse sind also einander gleich und daher P. *ABC* : P. *ABD* $= AC : AD$.

Sind die Höhen *AC* und *AD* incommensurabel, so folgt eben so, dafs jene beiden Verhältnisse immer einerlei Annäherungsnamen und mithin ebenfalls einander gleich sind; es verhalten sich also P. mit congruenten Grundflächen wie ihre zugehörigen Höhen.

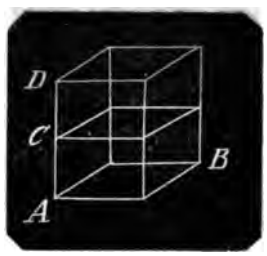
Nun seien ferner bei zwei rechtwinkligen Pp. *A* und *B* die Nebenseiten der Grundflächen des einen und *a*, *b* die des anderen, die zugehörigen Höhen seien *H* und *h*, die Inhalte der Pp. *P* und *p*. Nun denke man sich zwei andere P., wovon das eine zu Nebenseiten der Grundflächen *A*, *B* und zur Höhe *h* hat, der Inhalt dieses P. $= P'$, von dem anderen *P* seien *a*, *B* die Nebenseiten der Grundflächen und *h* die Höhe, der Inhalt $= p'$, so hat man nach dem Erwiesenen $P : P' = H : h$. Bei den Pp. P' und p' kann man die Seitenflächen, deren Nebenseiten *B* und *h* sind, als Grundflächen betrachten, dann

sind ihre Höhen A, a und man hat ebenfalls $P' : p = A : a$.

Bei den Pp. p' und p kann man die Seitenflächen, deren Nebenseiten a und h sind, als Grundflächen betrachten, dann sind diese gleich und B und b sind die zugehörigen Höhen, folglich ist auch $p' : p = B : b$.

Setzt man die drei Proportionen durch Multiplication zusammen, so erhält man

Fig 914.



$$P l' p' : P' p p' = H \cdot A \cdot B : hab$$

woraus $P : p = ABH : abh$.

Sind G und g die Inhalte der Grundflächen der Pp. P und p, so hat man $G : g = AB : ab$, folglich $P : p = H \cdot G : hg$.

8. Ein P. wird von einer durch zwei gegenüberliegende Seitenkanten gelegten Ebene in zwei gleich grofse dreiseitige Prismen zerlegt.

Man schneide das P. mit einer Ebene, die auf den Seitenkanten desselben normal ist, so ist der Durchschnitt ein Parallelogramm und wird durch die Diagonalfläche also in zwei congruente Dreiecke getheilt, welche die normalen Durchschnitte der beiden dreiseitigen Prismen sind, worin das P. zerlegt wird. Nun ist jedes Prisma gleich einem geraden, dessen Grundfläche der normale Querschnitt des ersten ist und dessen Seitenkanten dieselben sind, folglich sind hier die dreiseitigen Prismen so grofs als zwei congruente dreiseitige Prismen, folglich sind sie auch unter sich einander gleich.

9. Zwei dreiseitige Prismen verhalten sich also wie die Pp., von denen sie die Hälften sind, folglich wie die Producte aus ihren Höhen in die doppelten Inhalte der Grundflächen, also auch wie die Producte aus Grundfläche und Höhe.

10. Zwei Prismen verhalten sich im Allgemeinen wie die Producte aus den Inhalten ihrer Grundflächen in ihre Höhen.

Denn es bezeichnen P und p die beiden Prismen, G und g die Inhalte ihrer Grundflächen, H und h die zugehörigen Höhen. Man zerlege jedes Prisma durch Diagonalebenen durch die Seitenkanten in dreiseitige. Die des Prisma P seien der Reihe nach $P_1\ P_2\ P_3 \ldots P_n$; die Inhalte deren Grundflächen $G_1\ G_2\ G_3 \ldots G_n$. Bei dem Prisma p bezeichnen $p_1\ p_2\ p_3 \ldots p_n$ und $g_1\ g_2\ g_3$ dasselbe.

Da nun dreiseitige Prismen sich wie die Producte aus Grundfläche in Höhe verhalten, so verhalten sie sich wie ihre Grundflächen, wenn ihre Höhen gleich sind.

Also

$$P_1 : P_2 : P_3 : \ldots P_n = G_1 : G_2 : G_3 : \ldots G$$

daher

$$P_1' : P_1 + P_2 + \ldots P_n = G_1' : G_1 + G_2 + \ldots G_n$$

eben so folgt

$$p_1 : p_1 + p_2 + \ldots p_n = g_1 : g_1 + g_2 + \ldots g_n$$

Aber $P_1 + P_2 + \ldots P_n = P$

$$p_1 + p_2 + \ldots p_n = p$$

$$G_1 + G_2 + \ldots G_n = G$$

$$g_1 + g_2 + \ldots g_n = g$$

Also hat man auch

$$P_1 : P = G_1 : G$$

$$p_1 : p = g_1 : g$$

Nun verhält sich

$$P_1 : p_1 = G_1 H : g_1 h$$

Es ist aber auch, wenn man die Hinterglieder der letzten Proportion mit h multiplicirt,

$$p_1 : p = g_1 h : gh$$

woraus $P : P_1 = GH : G_1 H$

hieraus $P : p = GH : G_1 H$

11. Der Inhalt eines Prisma ist das Product aus den Zahlen, welche den Inhalt der Grundfläche nach dem Quadrat, dessen Seite die Längeneinheit und die Höhe nach der Längeneinheit selbst bestimmen.

Denn sind P und p zwei Prismen, die Inhalte ihrer Grundflächen G und g ihre Höhen mit der Längeneinheit gemessen H und h, so hat man nach dem vorigen Satz $P : p = GH : gh$. Ist nun p ein Würfel, dessen Kante jede $= 1$, so ist $g = 1$, $h = 1$, also auch $gh = 1$.

Bezeichnet man nun diesen Würfel mit k, so hat man

$$P : k = GH : 1$$

mithin ist $P = GH \cdot k$

folglich ist $G \cdot H$ die Zahl, welche angibt, welches Vielfache der Raum des Prisma P von dem Körperraum des Würfels k ist, folglich ist GH der Inhalt des Prisma.

Aehnliche Prismen siehe Bd. I., pag. 31.

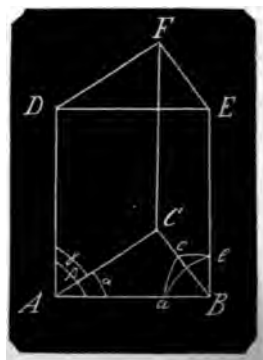
12. In einem dreiseitigen Prisma $ABCDEF$ kennt man drei in einer Ecke zusammenstofsende Kanten wie auch die ebenen Winkel dieser Ecke; die Neigungswinkel aller das Prisma begrenzenden Flächen, den körperlichen Inhalt und die Oberfläche desselben zu finden.

1. Bezeichnet man die Kanten AB mit a, AC mit b, AD mit c, die gegebenen Winkel BAC mit α, BAD mit β, CAD mit γ, so sind wegen dieser bekannten Winkel α, β, γ auch die Seiten des sphärischen $\triangle bcd$ bekannt, also auch die Winkel b, c, d. D. h. die Neigungswinkel der Seitenflächen $ADEB$, $ADFC$ gegen die Grundfläche und gegen einander selbst.

2. Im geradlinigen Dreieck ABC kennt man die beiden Seiten AB, AC und den Winkel BAC, folglich auch die Winkel ABC, ACB und die Seite BC.

3. Im sphärischen Dreieck ace kennt man nun den Winkel $a = b$, nebst den Seiten ac, ae $(180^\circ - \beta)$, folglich auch die Winkel c, e und die Seite ce. Der Winkel c gibt die Neigung der Ebene $BEFC$ gegen die Grundfläche ABC und der Winkel e die Neigung der nämlichen Ebene gegen $ABDE$.

Fig. 915.



4. An der Ecke C kennt man die Winkel ACB (2), $ACF = 180^\circ - \gamma$ und $BCF = 180^\circ - CBE = 180^\circ - ce$, folglich läfst auf eine ähnliche Art wie bei A der Neigungswinkel der Ebenen $BCFE$, $ACFD$ finden.

5. Der körperliche Inhalt eines Prisma ist die Hälfte von dem des Parallelepipeds von doppelt so grofser Grundfläche und ist demnach

$$abc\sqrt{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\sin\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\cdot\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma-\beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)}$$

6. Die Oberfläche des Prisma besteht aus drei Parallelogrammen und zwei Dreiecken. Es ist aber $\triangle ACB = \triangle DFE = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$. Parallelogramm $ABED = ac\sin\beta$, $ACFD = bc\sin\gamma$. Da ferner BC und CBE schon gefunden worden, so setze man $BC = f$, $CBE = \zeta$, alsdann ist Parallelogramm $CBEF = cf\sin\zeta$. Nimmt man alles dieses zusammen, so erhält man die gesuchte Oberfläche

$$ab\sin\alpha + ac\sin\beta + bc\sin\gamma + cf\sin\zeta.$$

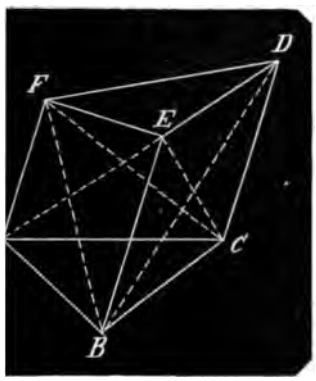
13. Ein schief abgeschnittenes dreiseitiges Prisma ist dreien Pyramiden zusammen genommen gleich, von einerlei Grundfläche mit dem Prisma, deren Höhen aber die Abstände der Winkelspitzen des schiefen Schnitts von der Grundfläche sind, oder einem dreiseitigen vollständigen Prisma = von derselben Grundfläche und dessen Höhe das arithmetische Mittel aus jenen drei Abständen ist.

Denn es sei ABC die Grundfläche, DEF der schiefe Schnitt des dreiseitigen Prisma. Man lege durch die Eckpunkte A, C, E und C, E, F Ebenen, so zerlegen diese das Prisma in drei dreiseitige Pyramiden. Diese drei Pyramiden sind $FDEC$ (FDE Grundfläche, C Spitze), $ABCE$ (ACB Grundfläche, E Spitze) und $AFEC$ (CAE Grundfläche, F Spitze). Die Pyramide $ABCE$ hat mit dem Prisma einerlei Grundfläche und ihre Spitze im Winkelpunkt E des schiefen Schnitts, also zur Höhe den Abstand dieses Punkts von der Grundfläche.

Betrachtet man von der Pyramide $ACFE$ das Dreieck ACF als Grundfläche, so ist E ihre Spitze, und weil BE mit AF also auch mit der Ebene des Dreiecks ACF $\fallingdotseq$ läuft, so ist diese zweite Pyramide auch einer Pyramide gleich über derselben Grundfläche ACF, die ihre Spitze in B hat. Von dieser Pyramide ist das Dreieck ABC eine Begrenzungsfläche; nimmt man diese als Grundfläche an, so hat sie ihre Spitze in F. Die zweite Pyramide $ACEF$ ist also gleich einer Pyramide von einerlei Grundfläche mit dem Prisma und deren Höhe der Abstand des Winkelpunkts von der Grundfläche ist. Nimmt man bei der dritten Pyramide $CDEF$ das $\triangle CDE$ als Grundfläche, also F zur Spitze, so ist sie, weil $AF \fallingdotseq$ der Ebene CDE, einer Pyramide gleich über derselben Grundfläche CDE mit der Spitze in A. Von dieser ist das $\triangle ACD$ eine Begrenzungsfläche; nimmt man diese zur Grund-

:o hat sie ihre Spitze in E, weil BE Ebene ACD ‖ läuft, sie ist also einer le gleich über derselben Grund- ACD und Spitze in B, mithin ı die dritte Pyramide $CDFE$ die- ; genannten Pyramide gleich. Man ›er bei letzterer die Begrenzungs- ABC als Grundfläche betrachten; t D ihre Spitze, folglich ist die 'yramide einer Pyramide gleich r Grundfläche der Prisma, die den l der Winkelspitze D zur Höhe hat.

Fig 916.



Dafs die Pyramide $ACDE$ gleich ist der Pyramide $CDFE$, folgt unmittelbar, weil $\triangle ACD = \triangle CDF$. Ist nun g der Inhalt der Grundfläche ABC, und sind h, h', h'' die Abstände D, E, F von der Grundfläche, so sind die Inhalte der drei Pyramiden, die das Prisma ausmachen, $\frac{1}{3}gh$, $\frac{1}{3}gh'$, $\frac{1}{3}gh''$, daher der Inhalt des Prisma $= \frac{1}{3}g(h + h' + h'')$.

Sind die Seitenkanten auf der Grundfläche normal, so sind sie zugleich die Abstände der Winkelspitzen des schiefen Schnitts von der Grundfläche, und daher ist in diesem Fall der Inhalt des Prisma ein Product aus der Grun ıfläche und dem arithmetischen Mittel der drei Seitenkanten.

14. Der Inhalt eines dreiseitigen schief abgeschnittenen Prisma ist gleich dem Product aus dem Inhalt eines auf die Seitenkanten normal geführten Durchschnitts und dem arithmetischen Mittel dieser Seitenkanten.

Denn es sei GHJ ein normaler Querschnitt des schief abgeschnittenen Prisma $CDEF$, so zerlegt der normale Schnitt dasselbe in zwei Theile, deren Inhalte sich nach dem Vorigen bestimmen lassen, indem man GHJ als Grundfläche für beide Theile betrachtet, denn dann hat man

$$\text{Prisma } ABCGHJ = \triangle GHJ \times \tfrac{1}{3}(AG + BH + CJ)$$
$$\text{Prisma } DEFGHJ = \triangle GHJ \times \tfrac{1}{3}(FG + EG + DJ)$$
$$\text{Prisma } ABCDEF = \triangle GHJ \times \tfrac{1}{3}(AF + BE + CD)$$

'en Inhalt eines schief abgeschnit- ierseitigen Prisma zu finden, wenn Seitenkanten und der normale nitt gegeben sind.

ei $ABCDEFGH$ das vierseitige)geschnittene Prisma, dessen End- $ABCD$ und $EFGH$, die Kante ı, $BG = b$, $CH = c$, $DE = d$, $JKLM$ male Querschnitt. Zieht man in die Diagonale KM, so sei $\triangle JKM$ $LM = g'$. Legt man durch die DE und BG eine Ebene, so zer- lurch das Prisma in zwei dreisei- ovon nach dem vorigen Satz

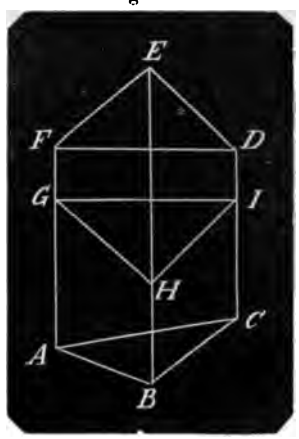
$ABDEFG = \frac{1}{3}(a + b + d)\,g$
ere $BCDEGH = \frac{1}{3}(b + c + d)\,g'$

ist der Inhalt des vierseitigen $ABCDEFGH =$

$+ b + d)\,g + \frac{1}{3}(b + c + d)\,g'$
$= \frac{1}{3}(ag + cg') + \frac{1}{3}(b + d)(g + g')$.

e Seitenfläche $ABDF$ ⊥ der Sei- e $CDEH$, ihr Abstand von ein- leich h, die Seite JM des norma-

Fig. 917.



len Querschnitts $= l$, und die parallele Seite $KL = \lambda$, so ist $g = \frac{1}{2}hl$, $g' = \frac{1}{2}h\lambda$, da-

her in diesem Fall das vierseitige Prisma
$= \frac{1}{3}(a+b+d)\cdot\frac{1}{2}hl + \frac{1}{3}(b+c+d)\cdot\frac{1}{2}h\lambda$
$= \frac{1}{6}hl(a+b+d) + \lambda(a+b+c)$.

Sind die parallelen Seitenflächen $ABGF$ und $CDEH$ Rechtecke, so ist $b=a$, $d=c$, daher der körperliche Inhalt
$= \frac{1}{6}h[(2a+c)l + (a+2c)\lambda]$.

Fig. 918.

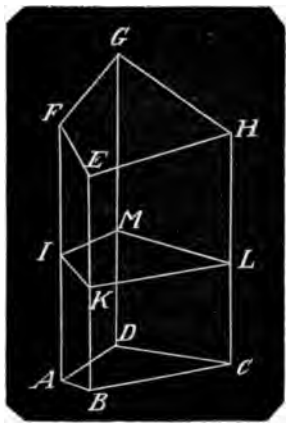


Fig. 919.

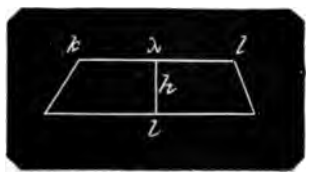
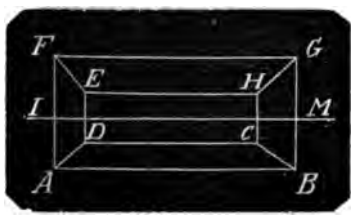


Fig. 920.



16. **Der Inhalt eines schief abgeschnittenen Parallelepipeds ist das Product aus dem Inhalt der Grundfläche und dem arithmetischen Mittel der Abstände zweier gegenüberliegenden Winkelspitzen des schiefen Schnitts von der Grundfläche.**

Es sei $ABCD$ der schiefe Schnitt des Parallelepipeds über der Grundfläche $EFGH$ des Inhalts $= g$. Die Abstände der Winkelspitzen A, B, C, D seien in derselben Folge a, b, c, d von der Grundfläche. Legt man nun durch die Kanten BG und DE eine Ebene, so theilt diese das Parallelepiped in zwei schief abgeschnittene dreiseitige Prismen, deren Grundflächen die Hälften der Grundflächen des Parallelepipeds sind. Folglich ist nach dem Obigen

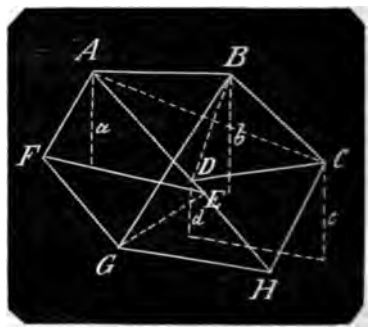
$$ABDEFG = \tfrac{1}{2}g\cdot\tfrac{1}{3}(a+b+d)$$
$$BCDEGH = \tfrac{1}{2}g\cdot\tfrac{1}{3}(b+c+d)$$

Mithin der Inhalt des ganzen Parallelepipeds
$= \frac{1}{6}g\cdot\frac{1}{3}(a+b+d) + \frac{1}{6}g\,\frac{1}{3}(b+c+d)$
$= \frac{1}{6}g(a+2b+2d+c)$

Der schiefe Schnitt ist ein Parallelogramm, weil die Gegenseiten die Durchschnitte des schiefen Schnitts mit Parallelebenen sind. Die Diagonalen halbiren sich also wechselseitig in ihrem Durchschnitt J. Legt man durch die Lothe a und c und b und d Ebenen, so sind diese auf der Grundfläche des Parallelepipeds normal, die Durchschnittslinie JK dieser beiden Ebenen ist also auch ein Loth auf der Grundfläche, und folglich ist $2JK = a+c = b+d$. Substituirt man daher für $b+d$ seinen Werth $a+c$ in den obigen Inhaltsausdruck des Parallelepipeds, so wird derselbe
$= \frac{1}{6}g(3a+3c) = g\cdot\frac{1}{2}(a+c)$.

Ist das schief abgeschnittene Parallelepiped ein gerades, so sind die Abstände der Winkelspitzen des schiefen Schnitts von der Grundfläche die Kanten selbst, und hieraus folgt wie bei dem dreiseitigen schief abgeschnittenen Prisma, daß der Inhalt jedes schief abgeschnittenen Parallelepipeds ein Product ist aus dem Inhalt eines auf die Kanten normal geführten Querschnitts und dem arithmetischen Mittel zweier gegenüberliegenden Kanten.

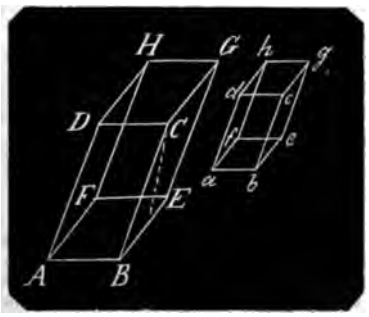
Fig. 921.



17. Prismen sind ähnlich, wenn sie ähnliche Grundflächen, eine ähnliche homologe Seitenfläche und diese unter gleichen Winkeln gegen die Grundflächen geneigt haben.

Denn es seien *ABCDEFGH* und *abcdefgh* zwei Prismen, worin die Grundflächen *ABEF* und *abef*, sowie die Seitenflächen *ABCD* und *abcd* einander ähnlich und die letzten gegen die ersten

Fig. 922.



unter gleichen Winkeln geneigt, alsdann ist die Ecke bei *B* ≅ der bei *b*. Denn wegen der Aehnlichkeit der Grundflächen ist *ABE* = Seite *abe*, und wegen Aehnlichkeit der Seitenflächen Seite *ABC* = *abc*, und wegen gleicher Neigungswinkel der Seiten *FE*, *fe* sind auch die von diesen eingeschlossenen Winkel gleich. Folglich sind auch die Seiten *CBE* und *cbe*, so wie die Winkel, welche diese Seiten mit den Seiten *ABE* und *abe* machen einander gleich. Die Seitenflächen *BCE* und *bce* der Prismen sind also gleichwinklig und gegen die Grundflächen unter gleichen Winkeln geneigt. Wegen Aehnlichkeit der Grundflächen ist *AB* : *ab* = *BE* : *be*, und wegen der Aehnlichkeit der Seitenflächen *AB* : *ab* = *BC* : *bc*. Mithin ist auch *BC* : *bc* = *BE* : *be*. Daher sind die Seitenflächen *BCE* und *bce* ähnlich, schliefst man so fort, so folgt, dafs alle homologen Seitenflächen ähnlich und folglich alle homologen Winkel gleich und alle homologen Kanten und Linien proportional sind.

18. Aehnliche Polyeder verhalten sich wie die Würfel der homologen Kanten oder Linien.

Man fälle auf die Grundflächen die Lothe *CG* und *cg* und ziehe *BG* und *bg*, so sind die ∠ *CBG* und *cbg* die Neigungswinkel der Kanten *BC*, *bc* gegen die Grundflächen, und da die Ecken *B* und *b* ≅ sind, so sind diese Neigungswinkel einander gleich, mithin die Dreiecke *CBG*, *cbg* einander ≅. Daher hat man

$$CG : cg = BC : bc = AB : ab.$$

Es ist aber auch Grundfläche

$$ABEF : abef = AB^2 : ab^2.$$

Setzt man beide Proportionen zusammen, so erhält man

$$CG \times ABEF : cg \times abef = AB^3 : ab^3.$$

Nun verhalten sich aber Prismen wie die Producte aus ihren Grundflächen und Höhen, folglich ähnliche Prismen wie die Cubi ihrer homologen Kanten.

Prisma, achromatisches, siehe den Art. „achromatisch", pag. 24.

Prisma, (Optik) hat in der Physik Wichtigkeit in Betreff der Brechung der Lichtstrahlen. Das Wesentlichste hiervon s. den Art. „Brechung der Lichtstrahlen".

Prisma (Kryst.). Es gibt deren sehr viele:

1. Das quadratische oder die quadratische Säule hat die Form 891.
2. Das oblonge oder die rectanguläre Säule hat die Form eines rechtwinkligen Parallelepipeds.
3. Das rechtwinklig vierseitige. Es gibt zweierlei derselben und kommen diese häufig mit den Quadratoctaedern vor.
4. Das achtseitige, das vier und vierkantige hat 8 Flächen mit zweierlei Kanten.
5. Das sechsseitige; ihre 6 Flächen sind der Hauptaxe parallel.
6. Das zwölfseitige, sechs und sechskantige hat 12 Flächen, 12 Kanten die der Hauptaxe ∓, die Kanten zweierlei, 6 abwechselnd sind stumpfer und 6 abwechselnde schärfer.
7. Das vertikale vierseitige steht in genauer Beziehung zu den Rhombendodekaedern. Die Kanten des P, welche an den Endpunkten der zweiten Nebenaxe liegen, heifsen die ersten, die an den zweiten Seitenkanten die zweiten Seitenkanten.
8. Das horizontale, deren Flächen der zweiten Nebenaxe ∓ sind, heifsen die ersten horizontalen Prismen; deren Flächen der ersten Nebenaxe ∓ sind, die zweiten horizontalen Prismen.
9. Das vertikale P. und die beiden horizontalen Prismen, die zu einem

und demselben Octaeder gehören und deren Flächen daher eine gleiche Lage haben wie die Kanten desselben, heifsen die drei zusammengehörigen Prismen.

10. Das vordere schiefe Prisma,
11. Das hintere schiefe Prisma eines zwei und eingliedrigen Octaeders, kommen aber in den zweierlei Flächen eines zwei und eingliedrigen Octaeders getrennt vor, woher die zwei schiefen Prismen, in welche sie zerfallen können, auch besonders bezeichnet werden. Dies geschieht nun dadurch, dafs man das Prisma, dessen obere Flächen an dem Octaeder an der hinteren Seite liegen, das vordere schiefe Prisma, das letztere das hintere schiefe Prisma nennt.

    Bei der Bezeichnung eines Octaeders müssen immer die Zeichen beider Prismen ausgeführt werden, da eines nie das andere voraussetzt.
12. Das vierseitige Prisma, deren Flächen der Hauptaxe ∓ sind.
13. Das vertikale Prisma, deren Flächen der Hauptaxe ∓ sind.
14. Das erste horizontale Prisma, deren Flächen der zweiten Nebenaxe ∓ sind.
15. Das zweite horizontale Prisma, deren Flächen der ersten Nebenaxe ∓ sind.

Prismatisches Krystallisationssystem ist das vierte System, das einundeinaxige System, bei welchem drei unter einander ungleichartige Axen unter rechten Winkeln sich schneiden (s. „Axensystem“).

Prismoid ist ein Körper, dessen Grundflächen parallele geradlinige Oberflächen von gleich vielen aber unähnlichen Seiten sind. Die Seitenlinien oder Kanten sind sich einander, keine oder nicht alle parallel, wie sie in dem Prisma sind. Die Folge der parallelen Durchschnitte mufs als stetig gedacht werden.

Probe, Rechnungsprobe ist eine Rechnung, mit welcher man sich versichert, dafs eine in Zahlen ausgeführte Rechnung richtig ist. Die beste Probe ist, wenn zwei Rechner sie unternehmen und ihre Resultate übereinstimmend finden. Wenn ein Rechner dies nicht haben kann, so mag er selbst die ganze Rechnung nach einer Zwischenzeit wieder vornehmen und zwar auf eine abgeänderte Art. Z. B., beim Addiren, besonders vieler Posten wird er einmal von oben herunter, das andere Mal von unten nach oben summiren; auch fängt man nach derselben Richtung mit einer Einheit mehr oder weniger an, wo man als Resultat eine Einheit mehr oder weniger erhält.

Die Multiplication mag es durch die Division, die Division durch die Multiplication prüfen. Hier können auch die Logarithmen nützliche Dienste leisten. Das Facit einer Regel de trie nehme man als ein gegebenes Glied der Proportion und eines der gegebenen Glieder zum Gesuchten. Siehe ferner die Art. „Neunerprobe, Eilferprobe“.

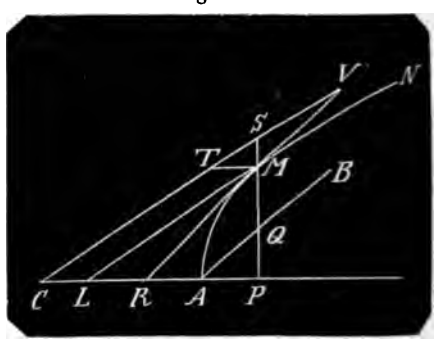
Problem, s. unter dem Art. „Aufgabe“.

Problem von drei Körpern, s. d. Art. „Perturlationen“.

Problem, ballistisches, s. u. „Ballistik“.

Problem, beaunisches, ist folgendes: Die Gleichung für die krumme Linie AM zu finden, in welcher die Ordinate PM zu der Subtangente PR sich verhält wie eine gegebene gerade Linie zu dem Unterschied der Ordinate und Abscisse.

Fig. 923.



D. i. wenn die gerade Linie AB unter dem Winkel von 45° durch den Anfang der Abscissen A gezogen wird, welche PM in Q schneidet und die gegebene Linie D heifst, so soll sein

$$PM : PR = D : MQ.$$

Jacob Bernoulli hat diese Aufgabe allgemeiner gemacht, dafs er statt der geraden Linie AB irgend eine krumme Linie setzte.

Es sei AMN die gesuchte krumme Linie, die Abscisse $AP = x$, die Ordinate $PM = y$, der Winkel APM ein rechter, die gegebene Linie $D = a$.

Es ist die Subtangente $PR = y\frac{\partial x}{\partial y}$, also nach der Bedingung der Aufgabe

$$\partial y : \partial x = a : y - x$$

d. h. $$a d x = y\,\partial y - x\,\partial y.$$

In dieser Differenzialgleichung sind die veränderlichen Grösen nicht gesondert. Inzwischen hat man hier nicht nöthig, eine Substitution oder einen Multiplicator zu suchen. Man subtrahire auf beiden Seiten das Differenzial $a dy$, so ist

$$a\,\partial x - a\,\partial y = y\,\partial y - x\,\partial y - a\,\partial y$$

oder $$\frac{a(\partial x - \partial y)}{a + x - y} = -\partial y$$

Da $$\int\frac{\partial u}{u} = ln\,\frac{u}{const.},$$

so ist $$log n\,\frac{a + x - y}{const.} = -\frac{y}{a}$$

und $$ln\,\frac{const.}{a + x - y} = +\frac{y}{a}$$

Soll die krumme Linie durch den Anfangspunkt der Abscissen gehen, so ist der Logarithmus $= 0$ wenn $y = 0$ und die zugehörige Zahl ist $= 1$, also $Const. = a$

und $$log n\,\frac{a}{a + x - y} = \frac{y}{a}.$$

Man nehme auf der Abscissenlinie $AC = a$, ziehe CV unter dem Winkel von 45° oder $\doteqdot AB$, verlängere RM bis an CV in S, so ist $MS = a + x - y$. Es sei $MT \doteqdot CP$, so ist auch $MT = a + x - y$ und $CT = y\sqrt{2}$.

Man setze $TM = u$, $CT = z$,

so ist $$ln\,\frac{a}{u} = \frac{z}{a\sqrt{2}}.$$

Es ist also die krumme Linie eine logarithmische, deren Asymptote CV ist. Daß die Coordinaten CT, TM einen Winkel von 45° machen, ist kein wesentlicher Unterschied von derjenigen, wo der Coordinatenwinkel ein rechter ist. Die berührende RM schneide die Asymptote in V. Ebenso wie bei rechtwinkligen Coordinaten ist $TV = -\frac{u\,\partial z}{\partial u}$. Aus der Gleichung zwischen u und z folgt $-\frac{\partial u}{u} = \frac{\partial z}{a\sqrt{2}}$, also ist $TV = a\sqrt{2}$ oder die Subtangente auf der Asymptote ist unveränderlich wie an der logarithmischen mit rechtwinkligen Ordinaten.

Dieses hat Descartes gefunden. Er läßt die krumme Linie durch die stetige Durchschneidung zweier geraden Linien beschreiben, deren eine sich $\doteqdot$ mit AB, die andere $\doteqdot$ mit AC von dem Punkt A an bewegt. Die Geschwindigkeit der ersteren läßt er gleichförmig sein, die Geschwindigkeit der anderen aber zunehmen nach dem umgekehrten Verhältniß des auf AC noch rückständigen Weges für die mit AB parallele. In A sollen beide Geschwindigkeiten gleich groß sein. Dieses ist ganz richtig. Die mit AB parallele sei in LM, die mit AC parallele in TM, ihr Durchschnitt M. Es sei $AL = t$ und $LM = CT = z$, so ist der senkrechte Abstand der TM von $AC = y = \frac{z}{\sqrt{2}}$.

Die Geschwindigkeiten der Linien LM, TM, jener nach der Richtung AL, dieser nach der Richtung PM verhalten sich wie $\partial t : \partial y$. Nun ist $t = a - u$, also $dt = -\partial u$ die Gleichung zwischen u und z gibt $-\frac{\partial u}{a - t} = \frac{\partial y}{a}$. Daher ist $\partial t : \partial y = a - t : a = 1 : \frac{a}{a - t}$.

In A, wo $t = 0$ ist, ist $\partial t : \partial y = 1 : \frac{a}{a - t}$.

Man kann auch, wie man hieraus sieht, TM sich gleichförmig und LM sich ungleichförmig bewegen lassen, sowie man die Logarithmen ursprünglich in arithmetischer Progression, die zugeordneten Zahlen in geometrischer sich vorstellt.

Product ist die Größe, welche aus der Multiplication zweier oder mehrerer Zahlen entsteht. Wie ein Product numerischer Größen gefunden wird, lehrt die gemeine Arithmetik, s. „Multiplication“. Für allgemeine Größen, als Zahlen betrachtet, zeigt es die Buchstabenrechnung, für Reihen insbesondere die Combinationslehre.

2. das Product $(1 - z^2)(1 - \frac{1}{4}z^2)(1 - \frac{1}{9}z^2)(1 - \frac{1}{16}z^2)$ u. s. w. ist $= \frac{sin\,\pi z}{\pi z}$ und

das Product $(1 - z^2)(1 - \frac{1}{3}z^2)(1 - \frac{1}{25}z^2)$ u. s. w. $= cos\,\frac{1}{2}\pi z$.

Denn es ist $sin\,\varphi = \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3 + \frac{1}{120}\varphi^5 -$ u. s. w.

und $$cos\,\varphi = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{24}\varphi^4 - \frac{1}{720}\varphi^6 + \ldots$$

Die erste Reihe wird $= 0$, wenn $\varphi = 0$ oder φ ein Vielfaches von $\pm\pi$ wird, und die zweite Reihe wird $= 0$, wenn φ ein ungerades Vielfaches von $\pm\frac{1}{2}\pi$ wird.

Setzt man daher für φ die Größen πz und $\frac{1}{2}\pi z$, so haben die obige Reihen ihre Richtigkeit und Gültigkeit.

3. Das Product $(1+s^2)(1+\frac{1}{2}s^2)(1+\frac{1}{3}s^2)\ldots = \frac{e^{\pi s}-e^{-\pi s}}{2\pi s}$

und das Product $(1+s^2)(1+\frac{1}{3}s^2)(1+\frac{1}{5}s^2)\ldots = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi s}{2}}+e^{-\frac{\pi s}{2}}\right)$

Denn es ist

$$e^x = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$$

$$e^{-x} = 1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$$

Daher ist $\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}) = x+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$ (A)

$$\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}) = 1+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\ldots \quad (B)$$

Die Reihe *A* verwandelt sich, wenn $x\sqrt{-1}$ statt x gesetzt und alles durch $\sqrt{-1}$ dividirt wird, in die Reihe für *sin* x und diese ist gleich dem Product

$$x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\ldots.$$

Productionsmaschine, s. den Art. „Arbeitsmaschine".

Progression, Reihe ist eine nach einem bestimmten Gesetz fortlaufende Reihenfolge von Zahlengröfsen. Es gibt zweierlei P., arithmethische und geometrische P. Die ersteren sind in dem Art. Arithmetische Reihe ausführlich abgehandelt.

Die geometrische Progression ist eine Reihenfolge von Zahlengröfsen, in welcher jedes vorstehende Glied mit einer constanten Zahl multiplicirt wird, um das unmittelbar darauf folgende Glied zu geben.

Eine Reihe ist nach beiden Richtungen endlos, sie ist nach einer Richtung hin steigend, wachsend, nach der anderen hin fallend, abnehmend.

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\cdot 4\cdot 8\cdot 16\ldots.$$

Die Zahl, mit welcher jedes voranstehende Glied multiplicirt wird, um das nachfolgende Glied zu erhalten, heifst der Exponent; in dem vorstehenden Beispiel ist derselbe = 2.

Die allgemeine Form einer geometrischen Reihe ist

$$\frac{a}{e^2}\cdot\frac{a}{e}\cdot a\cdot ea\cdot e^2a\cdot e^3a\ldots.e^{n-1}a$$

wo bei a, dem ersten Gliede, $e^{n-1}a$ das $n$te Glied ist.

Um die Summe der Glieder solcher Reihe zu erhalten, multiplicire die gegebene Reihe mit dem Exponent und schreibe sie darunter.

Also gegeben

$$a+ea+e^2a+e^3a+\ldots.+e^{n-1}a = S$$
$$ea+e^2a+e^3a+e^4a+\ldots.+e^na = eS$$

Zieht man nun die obere von der unteren ab, so hat man, da alle inneren Glieder mit einander sich aufheben

$$e^na-a = eS-S$$

woraus $S = \frac{e^na}{e-1}$

Ist das erste Glied und irgend ein anderes *P*, ferner der Exponent *e* gegeben, so erhält man die Angabe des wie vielten Gliedes, welches *P* ausmacht, aus der Formel für *S*. Denn es ist

$S = \frac{P\cdot a}{e-1}$ bekannt. Setzt man nun $P = e^x$, so hat man

$$x\,log\,e = log\,S + log\,(e-1) - log\,a$$

Es sei $P = 512$, $e = 2$, $a = 1$,

so ist $S = 512 = \frac{2^x\cdot 1}{1}$

und $x\,log\,2 = log\,512$

hieraus ist $x = \frac{log\,512}{log\,2} = \frac{2{,}7092700}{0{,}3010300} = 9.$

Pronische Zahl ist die Summe einer Zahl und ihres Quadrats oder ihres Cubus oder ihres Biquadrats, nämlich $e+e^2$ oder $a+a^3$ oder $a+a^4$.

Proportion. Dieser Gegenstand ist in diesem Wörterbuch unter verschiedenen Artikeln ausführlich behandelt worden. S. die Art. „Arithmetische P." und geometrische P."; „continuirliche oder stetige P." s. u. dem Art. „Continuirlich. Multipl. P." in dem Art. „Aequivalent"; ferner die Art. „contrageometrische P."; „fortlaufende oder geordnete P." in dem Art. „Geometrische P." No. 3. Endlich

die Art. „Harmonische P. und contraharmonische P.“

Der Uebelstand, dafs wenn die Proportionalität zweier Arten von Gröfsen für den Fall bewiesen ist, wo die Gröfsen jeder Art commensurabel sind, dafs es dann auch noch für den Fall, wo sie incommensurabel sind, geschehen mufs, veranlafst ein allgemeines Kennzeichen aufzusuchen, für welches zwei Gröfsen der einen Art mit zweien Gröfsen der anderen Art proportional sind, diese Gröfsen mögen commensurabel oder incommensurabel sein, wenn nämlich bei ihnen dieses Kennzeichen wahrzunehmen ist.

Zwei Gröfsen einer Art sind nämlich mit zweien Gröfsen einer andern Art proportional, wenn sie so zusammenhangen, dafs immer je zwei Gröfsen der einen Art dasselbe Verhältnifs haben, als die beiden ihnen einzeln angehörigen mit ihnen zusammenhangenden Gröfsen der anderen Art.

Das Kennzeichen der Proportionalität derselben ist nun das, dafs die Ganzen der einen Art auch zu den Ganzen der anderen Art gehören müssen. Man denke sich ein Dreieck *afg*, in diesem zwei mit *fg* parallele Linien *bd* und *ce* gezogen, so hangen die beiden von den Seiten abgeschnittenen Stücke *ab*, *bc* der einen mit denen *ad*, *de* der zweiten Seite so zusammen, dafs *ad* und *de* als Gerade der anderen Art proportional sind, wenn die Summen $ab + bc$ und $ad + de$. Da dies nun hier ist, so sind die genannten Geraden proportional. Zu erweisen ist nun allgemein der Lehrsatz.

Zwei Arten von Geraden sind proportional, wenn zu den Ganzen zweier Geraden der ersten Art immer auf das Ganze zweier jenen einzelnen angehörigen oder mit ihnen zusammenhangenden Gröfsen der anderen Art gehört; oder wenn zwei Gröfsen a, b von einer mit zwei Gröfsen A und B, jenen einzeln zugehörig, von anderer Art in solcher Beziehung stehen, dafs gleichwie zu den einzelnen Gröfsen a und b, respective die Gröfsen A und B stehen, auch zu dem Ganzen jener $= a + b$ immer das Ganze dieser Gröfsen $= A + B$ gehörig ist, so sind die Gröfsen a und b den Gröfsen A und B proportional und man hat $a : b = A : B$.

Beweis. Es sei $b = a$, so ist der Voraussetzung nach $B = A$, und es gehört dann zu $a + b = a + a = 2a$ die Gröfse $A + A = 2A$, d. h. das Ganze der einen Art eben so abhängig wie die Einzelnen der einen zu dem einzelnen der anderen Art. Es sei ferner $b = ma$, so ist $a + b = (m + 1)a$. Sind nun A und B Gröfsen anderer Klasse und stehen mit a und b in gleicher Beziehung und es findet zwischen $A + B$ dieselbe Beziehung zu $a + b$ statt, d. h. $A + B$ ist $= (m + 1)A$, so sind A, B und a, b proportional, denn aus $A + B = (m + 1)A$ folgt $B = mA$, also dasselbe Vielfache von A wie b von a ist. Also $a : b = A : B$.

Ist $b = \frac{m}{n} a$, also $b + a = \frac{m}{n} a + a = \frac{n + m}{n} a$.

Ist nun $A + B$ auch $= \frac{n + m}{n} A$, so folgt $B = \frac{n}{n} A$, mithin $a : b = A : B$.

Folglich besteht die Proportionalität bei obiger Voraussetzung, wenn die Gröfsen commensurabel sind.

Sind die Gröfsen einerlei Art incommensurabel, d. h. $b \begin{cases} > \frac{m}{n} a \\ < \frac{m+1}{n} a \end{cases}$ also

$b + a \begin{cases} > \frac{n+m}{n} a \\ < \frac{n+m+1}{n} a \end{cases}$ und es ist $B + a$ ebenfalls $\begin{cases} > \frac{m+n}{n} A \\ < \frac{n+m+1}{n} A \end{cases}$ so folgt aus letzterem $B \begin{cases} > \frac{m}{n} a \\ < \frac{m+1}{n} a \end{cases}$, d. h. es sind in dem Verhältnifs $a : b = A : B$ die Hinterglieder immer zwischen denselben Vielfachen ihrer Vorderglieder begriffen, sie haben also gleich irrationale Verhältnifsnamen, sind mithin einander gleich und man hat daher auch in diesem Falle $a : b = A : B$.

Proportionale, mittlere, zwischen zwei Zahlen. Die mittlere arithmetische ist die halbe Summe beider Zahlen, die mittlere geometrische ist die Quadratwurzel aus deren Product.

Proportionale Spirale, s. v. w. „logarithmische Spirale“.

Proportionalität, der Bestand zweier Zahlen in irgend einer der gedachten Proportionen.

Proportionalzirkel, ein aus zwei wie die Schenkel eines Zirkels drehbar um einander verbundene Lineale. Auf diesen Linealen sind gerade Linien aus dem Mittelpunkt der Bewegung getragen, die nach verschiedenen Verhältnissen eingetheilt sind; paarweise, auf jedem Lineal eine. Jede dieser getheilten Linien ist ein Maafsstab, welcher die Stelle einer Tabelle vertritt, indem die beigesetzten Zahlen gewisse zu den Längen der Linien gehörige Gröfsen bedeuten. Dazu kommen oft noch Linien an dem äufseren Rande parallel mit denselben. Diese dienen schlechthin als Maafsstäbe.

1. Die arithmetische Linie ist eine in gleiche Theile eingetheilte Linie, worauf die beigesetzten Zahlen die Längen von dem Mittelpunkt der Bewegung oder Theilung angeben.

2. Die geometrische Linie gibt durch die Zahlen der Eintheilung die Quadrate der Längen an, wo das Quadrat der Länge 1 zur Einheit dient. Die Längen verhalten sich wie die Quadratwurzeln der beigezeichneten Zahlen.

3. Die cubische Linie gibt durch die Zahlen der Eintheilung die Würfel der Längen an, so dafs die Längen selbst sich wie die Kubikwurzeln der Zahlen verhalten.

4. Die Linien der Seiten regulärer Vielecke zeigt für die beigesetzte Zahl der Seiten die verhältnifsmäfsige Länge derselben, so dafs jede dieser Längen auf dem Kreise, dessen Halbmesser der Seite des Sechsecks gleich ist, sich so oft herumtragen läfst als die Anzahl der Seiten angibt. Die Seite des Sechsecks sei $= r$, die Anzahl der Seiten eines Vielecks $= n$, so ist die Seite $= 2r \sin \frac{180°}{n}$.

Auf dem Proportionalzirkel, wie ihn Galilei angegeben hat, sind die Zahlen der Vielecke in umgekehrter Ordnung gesetzt. Die Länge zu der Zahl 6 ist nun die Seite und die Länge zu einer anderen Zahl, z. B. 10, ist der Halbmesser zu dem Zehneck oder Vieleck.

5. Die Linie der Chorden der Polygonwinkel zeigt die Verhältnisse der Chorden von den Nebenwinkeln der Centriwinkel an. Diese sind $= 2r \cos \frac{180°}{n}$. Die Linie ist entbehrlich.

6. Die tetragonische Linie zeigt für die beigesetzte Zahl der Seiten regulärer Vielecke, welche gleichen Inhalt haben, die verhältnifsmäfsige Länge der Seiten. Der gegebene Inhalt sei a^2, die Seite $= v$, so ist $v^2 = \frac{4a^2}{n} tg \frac{180°}{n}$, z. B. wenn die Seite des Dreiecks 10000 Theile erhält, so ist die Seite des eben so grofsen Vierecks = 6580, des eben so grofsen Fünfecks 5017 u. s. w.

7. Die Linie für die Eintragung der regulären Körper in eine Kugel zeigt die verhältnifsmäfsige Länge des Durchmessers einer Kugel und der Seiten der einzutragenden Körper.

8. Die Linien für die Verwandlung der regulären Körper zeigt die verhältnifsmäfsige Länge der Seiten bei gleichem Inhalt, zugleich mit dem Durchmesser einer gleich grofsen Kugel.

9. Die Linie der Chorden gibt die Länge der Chorden zu den beigesetzten Graden eines Kreisbogens an, wobei die Länge zu 60° der Halbmesser ist. Diese Linie dient zugleich als Linie der Sinus für die halben Bogen.

10. Die Linie der Tangenten gibt die Länge der Tangenten zu den beigesetzten Graden eines Kreisbogens an, wobei die Tangente von 45° der Halbmesser des Kreises ist. Um Verwirrung in der Eintheilung für die kleinen Bogen zu vermeiden, wird diese Linie an der äufseren Seite der beiden Schenkel gezeichnet, so dafs, wenn beide gerade ausgestreckt werden, sie zusammen die vollständige Linie der Tangenten bis zu der Tangente 2 oder dem doppelten Halbmesser ($= tg\ 63° 26' \ldots$) ausmachen.

11. Die Linie zur Eintheilung einer geraden Linie dient, eine gerade Linie in 2 bis 12 gleiche Theile zu theilen; ferner die Eintheilung nach dem äufseren und mittleren Verhältnisse zu machen; auch zu dem Durchmesser eines Kreises den Umfang oder umgekehrt zu finden. Sie ist entbehrlich.

12. Die Fortificationslinie enthält die verhältnifsmäfsigen Längen der Halbmesser regulärer Vielecke für eine gegebene Länge der Seite, auch noch die zugehörigen Längen der Flanke, der Kehllinie und der Kapitallinie, die aber nach alten Systemen genommen zu werden pflegen. Diese Linie mag füglich wegbleiben, da auch die Maafse an den Bastionen keine bestimmten Verhältnisse haben können.

13. Die metallische Linie enthält die Durchmesser gleich schwerer Kugeln, also überhaupt die ähnlich liegenden Seiten gleich schwerer ähnlicher Körper von verschiedenen Metallen.

14. Man findet auch noch auf den Proportionalzirkeln einen Kaliberstab für Geschütz und Kugeln an der äufseren Seite gezeichnet, bei dessen Gebrauch das Instrument ganz geöffnet wird, dafs es ein gerader Maafsstab wird.

15. Lombert hat dem Proportionalzirkel eine besondere Einrichtung zu perspectivischen Zeichnungen gegeben. Auf der einen Seite sind fünf Paar Linien gezogen, an welchen die Längen sich umgekehrt wie die Eintheilungszahlen verhalten, um dadurch den perspectivischen Abstand eines Punktes von der Horizontallinie zu finden. Auf der anderen Seite sind die Linien der Sinus, Tangenten und Secanten gezeichnet nebst einer elliptischen Linie, durch deren Hülfe die Ordinaten einer Ellipse für angenommene Ellipsen gefunden werden.

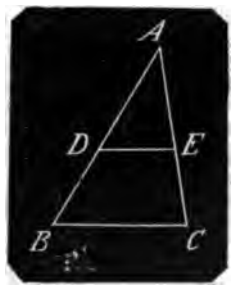
16. Jacob Bernoulli hat einen Proportionalzirkel für Schifffahrer angegeben. Aus dem Rhumb (der Richtung des Schiffes) und der Veränderung der Breite wird dadurch die Veränderung der Länge gefunden.

17. Die Engländer haben viel weniger Doppellinien an ihren Sectoren oder Proportionalzirkeln, aber mehr einzelne an den äufseren Seiten als Maafsstäbe, von denen, nach Hutton nur die arithmetische, diejenige der Chorden, Sinus, Secanten, Tangenten bis 45° und nach einem kleineren Maafsstabe über 45° nebst der Linie der Polygone. Als Maafsstäbe einfach, einer in Zolle und kleinere Theile getheilten, ferner für Chorden, Sinus, Tangenten, einige zur Schifffahrt dienende und einige logarithmische Maafsstäbe.

18. Der Proportionalzirkel ist ein nützliches Instrument für Personen, die im Rechnen und in geometrischen Constructionen ungeübt sind Es ist aber kostbar, besonders wenn es vollständig sein soll. Auch mufs es eine ziemliche Länge haben, wenn man eine gewisse Genauigkeit erhalten will. Mäfsig geübte können es füglich entbehren.

19. Der Gebrauch beruhet auf der Lehre von den ähnlichen Dreiecken: In dem ΔABC sei $DE \parallel BC$, so sind die Dreiecke ABC, ADE ähnlich und es ist $AB : AD = BC : DE$. Dadurch werden die Glieder eines gegebenen Verhältnisses $AB : AD$ in diejenigen eines diesem gleichen $BC : DE$ verwandelt, von welchen eines BC oder DE gegeben wird. Auf dem Proportionalzirkel nimmt man auf zwei gleichbenannten Linien AB, AB die gleichen Längen AC, AC und AD, AD, so sind CC, DD parallel bei jeder Eröffnung des Instruments. Oeffnet man dasselbe so weit, dafs man mit einem Handzirkel zwischen zwei gleichnamigen Punkten C, C eine gegebene Linie faſst, so erhält man zwischen zwei anderen gleichnamigen Punkten D, D (die auch auf der anderen Seite von C, C liegen mögen) eine Linie DD, die zu CC das Verhältnifs $AD : AC$ hat, und die Linien CC, DD haben auf die bei C, D gesetzten Zahlen eben die Beziehungen, wie AC und AD gegen sie haben.

Fig. 924.



Z. B. CC und CD sollen die ähnlich liegenden Seiten zweier ähnlicher Figuren sein, deren Flächen sich wie 3 : 2 verhalten, so nimmt man auf der geometrischen Linie beider Schenkel zwei Punkte C, D, deren Zahlen wie 3 : 2 sind, daher eben so die ähnlichen über CC und DD gezeichneten Figuren. Ist die eine gegeben, so hat man gleich durch das Instrument die andere.

Man wolle die Seite eines Fünfecks haben, dessen Halbmesser gegeben wird. Auf der Linie der Polygone nehme man zwischen den Punkten 6, 6 die Weite DD dem Halbmesser gleich, und dann die Weite CC zwischen den Punkten 5, 5, so ist CC die gesuchte Seite des Fünfecks. Ist die Seite des Vielecks gegeben, so faſst man diese zwischen den zugehörigen Zahlen und das Intervall 6, 6 ist der Halbmesser zu demselben.

20. Der Proportionalzirkel hat anfangs noch eine andere Gestalt gehabt als die jetzt gewöhnliche hier beschriebene, nämlich die eines Doppelzirkels mit einem verschiebbaren Gewinde, welches nach den bezifferten Abtheilungen auf den Schenkeln gestellt und befestigt wird. Dieser Zirkel bildet zwei Vertikalwinkel, an welchen die Abstände der Spitzen sich wie die Längen der gleichen Schenkel verhalten. Speckle in seiner Architec-

tura von Festungen, welche zum erstenmale 1589 herausgekommen ist, erwähnt gleich im Anfange eines solchen Zirkels zum Verjüngen, zugleich eines anderen zu diesem Zwecke ganz in der Form unseres Proportionalzirkels. „Andere", sagt er, „haben einen breiten Zirkel gemacht, mit einem unbeweglichen Centro, da sie dann auf beiden Linien in der Mitte der gespaltenen Linien die Theilungen der Verjüngungen gemacht, und so weit man ihn allewege aufthut, ist allewege die Verjüngung von einem bis in die 20 Theile gestanden und hat man solche Theilung mit einem andern Zirkel nehmen und suchen müssen." Er habe, fährt er fort, „diese und andere Zirkel im Gebrauch nicht genau genug gefunden, sondern habe sich andere machen lassen," die völlig so beschaffen sind, wie die noch jetzt üblichen Doppelzirkel mit entgegengesetzten Schenkeln und festem Gewinde. Er hat deren mehrere mit verschiedenen Verhältnissen der Länge der Schenkel abgebildet. Für alle diese Instrumente gebraucht er die Benennung Proportionalzirkel.

21. Aus dem Doppelzirkel mit beweglichem Gewinde ist vermuthlich der Proportionalzirkel des Jobst Burgi oder Justus Byrgius entstanden, den Levin Hulsius in seinem dritten Tractat der mechanischen Instrumente (Frankfurt 1604) beschreibt. Es sind auf den Schenkeln mehrerlei Abtheilungen, sechs Arten angebracht, um nicht blofs Linien, sondern auch Flächen und Körper zu verjüngen oder zu vergrößern und noch einige Verhältnisse anzugeben. Man faßt mit diesem Zirkel die eine Linie zwischen dem einen Paar Schenkeln und erhält zwischen den Spitzen des anderen Paars die dazu gehörige Linie.

22. Clavius beschreibt in seiner Geometria practica, die zuerst zu Rom 1604 herausgekommen ist, einen Proportionalzirkel nach der gegenwärtigen Form. Dieser hat auf der einen Fläche nur die arithmetische Linie, auf der anderen die Linie der Chorden. Clavius schlägt den Namen Instrumentum partium vor. Er sagt nicht, dafs er ein neues Instrument angäbe.

23. Galiläi machte seinen Proportionalzirkel im J. 1606 bekannt, in einer sehr selten gewordenen Schrift. Die Einrichtung ist ganz wie an den jetzt gewöhnlichen Instrumenten. Die darauf gezogenen Linien sind die arithmetische, geometrische, stereometrische, metallische, polygraphische (für regelmäfsige Vielecke) die tetragonica und eine adjuncta, mittelst welcher Kreisabschnitte und Monde quadrirt werden können. Mathias Bernegger hat die Schrift ins Lateinische übersetzt und mit einem Comentar versehen, welcher wieder ins Italienische übersetzt ist, wie er es sehr verdiente. Er fügte noch die Linie der Chorden und zwei Linien für die regulären Körper bei. Ein Mailänder Balthasar Capra eignete sich in einer Schrift die Erfindung dieses Instruments zu, worüber Galiläi mehr als es die Sache verdiente und er es nöthig hatte, sehr aufgebracht wurde, sogar dafs ohne Zweifel auf seine Veranlassung alle vorräthigen Exemplare der Schrift des Capra confiscirt wurden. Er bestätigte durch Zeugnisse, dafs er den Proportionalzirkel vor 10 Jahren (um 1597) erfunden habe, und dafs seit der Zeit wohl auf 100 Stück in Padua wären gefertigt worden. Einem Manne wie Galiläi mag man dieses, und wenn die Sache viel wichtiger wäre, auf sein Wort glauben. Vielleicht hat Capra ihn blos necken wollen, auf Anstiften der Neider und Widersacher des Galiläi.

24. Die Form des Galiläi'schen Proportionalzirkels ist also nicht neu, wohl aber der Gebrauch. Denn die ältere diente nur zur einfachen Verjüngung oder Vergrößerung der Linien, da sie blofs die arithmetische Linie enthielt. Die galiläische Einrichtung dient zu mancherlei geometrischen Constructionen und mag selbst zu Rechnungen bisweilen angewandt werden. In Absicht auf die Bekanntmachung durch den Druck ist, nach der von Speckle geschehenen Erwähnung zweier Verjüngungs-Instrumente, das Byrgius-Instrument das ältere, denn die Zueignung des Werkes von Hulsius vom 20. Mai 1603 und die der Gallileischen Schrift vom 10. Juli 1606.

25. Hulton erzählt in seinem Wörterbuch die Geschichte des Proportionalzirkels folgendermaafsen. Man schreibt, sagt er, die Erfindung dem Guido Baldo oder Ubaldo um das Jahr 1568 zu. Die erste gedruckte Nachricht davon gibt Caspar Mordente zu Antwerpen im Jahr 1584, welcher erzählt, dafs sein Bruder Fabricius Mordente in dem Jahr 1554 das Instrument erfunden habe. Darauf hat Daniel Speckle zu Strafsburg im Jahre 1589 es beschrieben, nach ihm Thomas Hood in London 1598, worauf sehr viele Schriftsteller über die Geometrie davon gehandelt haben.

Es ist hier ein Mifsverstand in den Benennungen vorhanden, aus dem, was

ich aus des Speckle Werk angeführt habe, sieht man, dafs die ältere Einrichtung in Doppelzirkel, vermuthlich mit beweglichem Gewinde gewesen ist. Es wäre unbegreiflich, wie in dem Streite zwischen Galiläi und Capra diese früheren Ansprüche auf die Erfindung des Proportionalzirkels nicht in Anregung gekommen sind.

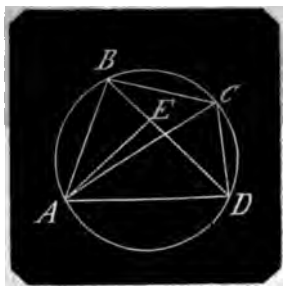
26. Ueber den Proportionalzirkel sind viele Schriften erschienen. Ein Verzeichnifs findet man in Scheibel's neuer Ausgabe von Scheffelts Unterricht vom Proportionalzirkel, Breslau 1781 in Leupold Theatro..., wo auch die Byrgische Einrichtung abgebildet und beschrieben ist, und in Kästners Geschichte der Mathematik.

Pseudomorphosen, (Kryst.) s. v. w. „Afterkrystalle".

Ptolemäischer Satz. In einem Viereck im Kreise ist die Summe der Producte je zweier gegenüberliegender Seiten gleich dem Product der beiden Diagonalen.

Also $AD \times BC + AB \times CD = AC \times BD$.

Fig. 925.



Denn zieht man die Linie AE

so dafs $\angle BAE = \angle CAD$

so ist, da $\angle ABE = \angle ACD$

$\triangle BAE \sim \triangle CAD$

Nun ist $\angle BAC = \angle BAE + \angle CAE$

also auch $= \angle CAD + \angle CAE$

$= \angle DAE.$

Ferner ist $\angle ACB = \angle ADB = \angle ADE$

Hieraus hat man

$\angle ABC = \angle AED$

folglich $\triangle ABC \sim \triangle AED$

daher $AB : BE = AC : CD$

auch $AC : BC = AD : ED$

oder $AB \times CD = BE \times AC$

$AD \times BC = ED \times AC$

hieraus durch Additon

$AD \times BC + AB \times CD = AC \times (BE + DE)$

$= AC \times BD.$

Punkt ist nach Euklid, was keine Theile hat; der Punkt kann zur Wahrnehmung durch die Sinne nicht dargestellt werden. In der Geometrie hat man für Kreise Mittelpunkte, die Grenzen von Linien, die Orte, wo Linien sich schneiden, Durchschnittspunkte, bei Tangenten Berührungspunkte. Punkte sind die Spitzen von Winkeln und Ecken. In der Statik hat man Angriffspunkte der Kraft, Momentenpunkte, Schwerpunkte, todte Punkte (s. „Nebenlast") u. s. w.

Punkt der mittleren Entfernung.

1. Der Punkt der mittleren Entfernungen oder der Mittelpunkt der Entfernungen eines Vielecks ist der Punkt in der Ebene desselben, welcher die Eigenschaft besitzt, dafs seine Entfernung von jeder in der Ebene des Vielecks willkührlich angenommenen geraden Linie oder Axe das arithmetische Mittel der Entfernungen positiv oder negativ genommen wird, je nachdem sie auf der einen oder der anderen Seite der Axe liegen. Auch auf Vielecke, die nicht in einer Ebene liegen, selbst auf willkührliche Punkte im Raum läfst sich dieser Begriff erweitern, wenn nur willkührliche Ebenen im Raum als Axen angenommen werden. Die nöthige Kürze gebietet jedoch, die Untersuchung auf Vielecke in einer Ebene zu beschränken, um so mehr, da sie sich leicht auf den Raum überhaupt auch ausdehnen lassen wird, wenn sie für den specielleren Fall richtig aufgefafst worden.

Carnot hat den Punkt der mittleren Entfernungen in die Geometrie eingeführt und in seiner Géométrie de position viele merkwürdige Eigenschaften desselben bewiesen. Uebrigens lehrt die Mechanik, dafs dieser Punkt mit dem Schwerpunkt mehrerer gleichen Massen in den Spitzen des Vielecks einerlei ist.

2. Zuvörderst ist zu zeigen, dafs es für jedes Vieleck einen Punkt der mittleren Entfernungen gibt. Nimmt man nämlich willkührlich zwei auf einander senkrechte Axen an und bezeichnet die Coordinaten der Spitzen des Vielecks durch

$x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$ u. s. w.

so ist, wenn die Seitenzahl $= n$ ist, der Punkt, dessen Coordinaten

$$x = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots)$$

$$y = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots)$$

sind, der Punkt der mittleren Entfernungen. Um dies zu beweisen, ist zu zeigen, dafs diese Gleichungen oder wenigstens die Ordinatengleichung für jede zwei andere Axen eben so stattfinden. Sind diese Axen zuerst den primitiven parallel, die Coordinaten ihres Durchschnittspunkts in Bezug auf die primitiven Axen a, b, so ist, wenn die neuen Coordinaten durch Indices von den primitiven unterschieden werden offenbar

$x' = x - a$, $x_1' = x_1 - a$; $x_2' = x_2 - a \ldots$

$y' = y - b$, $y_1' = y_1 - b$; $y_2' = y_2 - b \ldots$

wenn nur a, b immer mit den gehörigen Zeichen genommen werden. Nach der Voraussetzung ist aber

$$x - a = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 \ldots) - a$$

$$y - b = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots) - b$$

$$x - a = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots - na)$$

$$y - b = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots - nb)$$

$$x - a = \frac{1}{n}[(x_1 - a) + (x_2 - a) + (x_3 - a) + \ldots]$$

$$y - b = \frac{1}{n}[(y_1 - b) + (y_2 - b) + (y_3 - b) + \ldots]$$

$$x' = \frac{1}{n}(x_1' + x_2' + x_3' + \ldots)$$

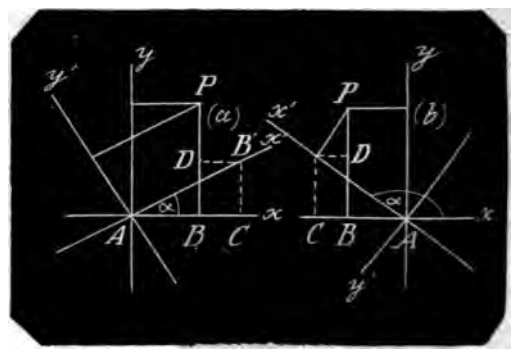
$$y' = \frac{1}{n}(y_1' + y_2' + y_3' + \ldots)$$

so dafs unsere Gleichungen auch für das neue, dem primitiven parallele System gelten. Auch sind sie für jede zwei neue auf den primitiven senkrechte Axen richtig, weil man offenbar x und y vertauschen kann. Ist nun aber irgend ein anderes System gegeben, so kann man sich, weil unsere Gleichungen für alle parallelen Systeme gelten, wenn sie für eins gelten, dessen Axen durch den Anfang des primitiven Systems gehend denken. Auch lassen sich, wie sogleich in die Augen fällt, diese beiden Systeme in immer paralleler Lage jederzeit so weit fortrücken, dafs das gegebene Vieleck ganz zwischen die Schenkel des Winkels $\alpha' A y$ und man also, ohne der Allgemeinheit zu schaden, nur die beiden in der Figur dargestellten Fälle je nachdem der $\angle \alpha <$ oder $> 90°$ ist, zu betrachten braucht.

P ist irgend eine Spitze des gegebenen Vielecks. In Fig. 926, a ist $AB = x$, $PB = y$, $AB' = x'$, $PB' = y'$, $AB = AC - B'D$, $PB = B'C + PD$ d. i.

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \quad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha$$

Fig. 926.



In Fig. 926, b dagegen ist $AB = -x$, $PB = y$, $AB' = x'$, $PB' = -y'$; $AB = AC - B'D$, $PB = B'C + PD$ d. i.

$$-x = x' \cos(180° - \alpha) - (-y') \cos(\alpha - 90°)$$

$$y = x' \sin(180° - \alpha) + (-y') \sin(\alpha - 90°)$$

welche Gleichungen sich leicht ganz auf dieselbe Form wie die obigen bringen lassen. Mittelst Elimination erhält man leicht aus ihnen

$x' = y \sin\alpha + x \cos\alpha$; $y' = y \cos\alpha - x \sin\alpha$

Nun ist nach Voraussetzung

$$y \sin\alpha = \frac{1}{n}(y_1 \sin\alpha + y_2 \sin\alpha + y_3 \sin\alpha + \ldots)$$

$$x \cos\alpha = \frac{1}{n}(x_1 \cos\alpha + x_2 \cos\alpha + x_3 \cos\alpha + \ldots)$$

$$y \cos\alpha = \frac{1}{n}(y_1 \cos\alpha + y_2 \cos\alpha + y_3 \cos\alpha + \ldots)$$

$$x \sin\alpha = \frac{1}{n}(a_1 \sin\alpha + x_2 \sin\alpha + x_3 \sin\alpha + \ldots)$$

$$y \sin\alpha + x \cos\alpha = \frac{1}{n}[(y_1 \sin\alpha + x_1 \cos\alpha) + (y_2 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha) + \ldots]$$

$$y \cos\alpha + x \sin\alpha = \frac{1}{n}[(y_1 \cos\alpha - x_1 \sin\alpha) + (y_2 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha) + \ldots]$$

l. i. nach dem so eben bewiesenen

$$x' = \frac{1}{n}(x_1' + x_2' + x_3' + \ldots)$$

$$y' = \frac{1}{n}(y_1' + y_2' + y_3' + \ldots)$$

lie beiden Ausdrücke für x, y gelten lso für jedes System, und der durch diese Coordinaten bestimmte Punkt ist also ler Punkt der mittleren Entfernung des Vielecks.

3. Legt man durch den Punkt der mittleren Entfernung irgend eine gerade Linie ls Axe der y; so ist $y = 0$ und folglich an

$$y_1 + y_2 + y_3 + \ldots = 0$$

. h. die Summe der Entfernungen aller pitzen des Vielecks von jeder durch den unkt der mittleren Entfernungen gehende gerade Linie = 0. Eine solche inie heifst eine Axe der mittleren ntfernungen, für welche

$$y_1 + y_2 + y_3 + \ldots = 0$$

t, durch einen Punkt, nämlich durch en Punkt der mittleren Entfernungen. unn man erhält denselben durch die oordinaten

$$x = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots)$$

$$y = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots)$$

Ist nun $y_1 + y_2 + y_3 + \ldots = 0$, so ist uch $y = 0$, und der Punkt der mittleren ntfernungen mufs also in der Axe liegen, auf welcher die y senkrecht sind, . i. in der gegebenen.

4. Durch eine ganz einfache geometrische Betrachtung erhellt augenblicklich, dafs im Dreieck für jede von einer pitze nach der Mitte der Gegenseite ezogene gerade Linie als Axe

$y_1 + y_2 + \ldots = 0$ ist.

Daher sind diese drei geraden Linien xen der mittleren Entfernungen und chneiden sich in einem Punkt, nämich in dem Punkt der mittleren Entfernungen des Dreiecks.

Eben so leicht erhellt, dafs der Punkt er mittleren Entfernungen eines Parallelogramms der Durchschnittspunkt seiner eiden Diagonalen ist.

5. Zieht man von dem Punkt der mittleren Entfernungen nach allen Spitzen es Vielecks gerade Linien z_1; z_2; z_3 ... nd bezeichnet die Winkel, welche diese inien mit irgend einer durch den Punkt er mittleren Entfernungen gezogenen eraden Linie, die man als Axe, den unkt der mittleren Entfernungen als Anfang der x annehmen mag, einschliefsen, diese Winkel immer nach einer Seite hin, von 0 bis 360° gezählt, durch α_1; α_2; α_3 ... so ist:

$x_1 = z_1 \cos\alpha_1$; $x_2 = z_2 \cos\alpha_2$; $x_3 = z_3 \cos\alpha_3$

$y_1 = z_1 \sin\alpha_1$, $y_2 = z_2 \sin\alpha_2$; $y_3 = z_3 \sin\alpha_3$

folglich da hier $x = y = 0$ ist

$$0 = \frac{1}{n}(z_1 \cos\alpha_1 + z_2 \cos\alpha_2 + z_3 \cos\alpha_3 + \ldots)$$

$$0 = \frac{1}{n}(z_1 \sin\alpha_1 + z_2 \sin\alpha_2 + z_3 \sin\alpha_3 + \ldots)$$

und demnach, wie auch die Transversale durch den Punkt der mittleren Entfernungen gelegt sein mag

$0 = z_1 \cos\alpha_1 + z_2 \cos\alpha_2 + z_3 \cos\alpha_3 + \ldots$.

$0 = z_1 \sin\alpha_1 + z_2 \sin\alpha_2 + z_3 \sin\alpha_3 + \ldots$.

6. Zieht man nun von irgend einem anderen Punkt in der vorher durch den Punkt der mittleren Entfernungen willkührlich gelegten Axe nach allen Spitzen des Vielecks gerade Linien z_1'; z_2'; z_3' ... und bezeichnet die Entfernung des angenommenen Punktes vom Punkte der mittleren Entfernungen durch a, so bilden a; z_1; z_1'; a_1; z_2; z_2' ... Dreiecke, auf deren Grundlinie a die Perpendikel y_1; y_2; y_3 ... von ihren Spitzen gefällt sind. Nimmt man nun auf das Vorzeichen des a und des x gehörig Rücksicht, so folgt aus den Elementen und No. 5 sogleich, dafs immer

$z_1'^2 = z_1^2 + a^2 - 2ax_1 = z_1^2 + a^2 - 2az_1 \cos\alpha_1$

$z_2'^2 = z_2^2 + a^2 - 2ax_2 = z_2^2 + a^2 - 2az_2 \cos\alpha_2$

$z_3'^2 = z_3^2 + a^2 - 2ax_3 = z_3^2 + a^2 - 2az_3 \cos\alpha_3$

u. s. w.

folglich durch Addition

$z_1'^2 + z_2'^2 + z_3'^2 + \ldots = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + \ldots + na^2$

d. h. die Summe der Quadrate der Entfernungen irgend eines Punkts in der Ebene eines $n$ecks von dessen n Winkelspitzen ist immer der Summe der Quadrate der Entfernungen des Punktes der mittleren Entfernungen von den n Winkelspitzen nebst dem $n$fachen Quadrat der Entfernung des ersten Punkts von dem Punkt der mittleren Entfernungen gleich. Mittelst No. 4 ergeben sich hieraus leicht specielle merkwürdige Sätze für Dreieck und Parallelogramm.

7. Eine unmittelbare Folge hieraus ist, dafs die Entfernungen des Punkts der mittleren Entfernungen von des Vielecks Spitzen die kleinste Quadratsumme geben.

8. Beschreibt man aus dem Punkt der mittleren Entfernungen mit willkührlichem Radius r einen Kreis, so ist für jeden Punkt der Peripherie dieses Krei-

ses die Summe der Quadrate seiner Entfernungen von den Spitzen des Vielecks eine constante Gröfse nämlich

$$= s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + \ldots + nr^2$$

9. Setzt man letztere Gröfse $= \vartheta^2$, so erhält man

$$r = \sqrt{\frac{1}{n}(\vartheta^2 - s_1^2 - s_2^2 - s_3^2 + \ldots)}$$

Die Peripherie des aus dem Punkt der mittleren Entfernungen mit diesem Radius beschriebenen Kreises ist also der geometrische Ort der Punkte, für welche die Summe der Quadrate der Entfernungen von den Spitzen des Vielecks eine constante Gröfse, nämlich $= \vartheta^2$ ist, wie schon Appolonius beweist. Appolonius ebene Oerter, wiederhergestellt von R. Simson, übersetzt von Camerer. Ein ähnlicher Satz läfst sich auf ganz analoge Art von der Kugel beweisen. Man sehe Klügel's Lehrbuch der Statik.

10. Von jeder der n Spitzen ziehe man jetzt an alle diese n Spitzen gerade Linien $s_1'; s_2'; s_3' + \ldots; s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \ldots;$ $s_1^3 + s_2^3 + s_3^3 \ldots; s_1^n; s_2^n; s_3^n + \ldots,$ bezeichne die von dem Punkt der mittleren Entfernungen an die n Spitzen gezogenen geraden Linien durch $a'; a^2; a^3; \ldots$ und setze

$$(a')^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 + \ldots \quad = S$$

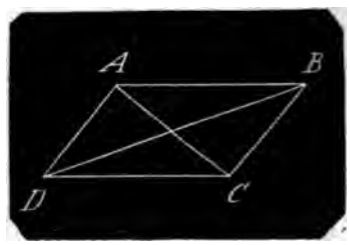
so ist nach No. 6

$$(s_1')^2 + (s_2')^2 + (s_3')^2 + \ldots = S + n(a^2)^2$$
$$(s_1^2)^2 + (s_2^2)^2 + (s_3^2)^2 + \ldots = S + n(a^3)^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(s_1^n)^2 + (s_2^n)^2 + (s_3^n)^2 + \ldots = S + n(a^n)^2$$

Es ist aber offenbar $s_1' = s_2^2 = s_3^3 = \ldots = 0$ und allgemein $s_m^k = s^{m}{}_{k}$. Folglich ist das Aggregat aller Gröfsen auf der linken Seite die doppelte Summe der Quadrate aller die n Spitzen des Vielecks zu zweien mit einander verbindenden geraden Linien. Bezeichnet man nun diese doppelte Summe durch 2Σ, so erhält man durch beiderseitige Addition leicht $2\Sigma = 2nS$, $\Sigma = nS$, so dafs also die Summe der Quadrate aller die Spitzen des Vielecks zu zweien mit einander verbindenden Linien der $n$fachen Summe der Quadrate der von dem Punkt der mittleren Entfernung an die Spitzen gezogenen geraden Linien gleich ist. Im Dreieck ist also die Summe der Quadrate der drei Seiten der dreifachen Summe der Quadrate der drei geraden Linien gleich, welche von dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt der die Spitzen mit den Mitten der Gegenseiten verbindender geraden Linien nach den Spitzen des Dreiecks gezogen werden (s. No. 4).

11. Im Parallelogramm $ABCD$ ist nach No. 4 und 9

Fig. 927.



$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 + AC^2 + BD^2$$
$$= 4(AE^2 + BE^2 + CE^2 + DE^2)$$
$$= 2(4AE^2 + 4BE^2) = 2(AC^2 + BD^2),$$
$$AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2,$$

die Summe der Quadrate der vier Seiten gleich der Summe der Quadrate der beiden Diagonalen.

12. Ist Σ die Summe der Quadrate der Entfernungen irgend einer Spitze A des Vielecks von allen übrigen und K der Punkt der mittleren Entfernungen, so ist wenn S, Σ ihre vorige Bedeutung behalten

$$\Sigma = nS \text{ (No. 8)}; \quad \Sigma = S + n\,AK^2 \text{ (6)}$$

woraus durch Elimination von

$$AK = \frac{1}{n}\sqrt{(n\Sigma - \Sigma)}$$

mittelst welcher Formel die Entfernung jeder Spitze von dem Punkt der mittleren Entfernungen berechnet werden kann.

13. Die Mittelpunkte der die n Spitzen je zwei verbindenden geraden Linien haben mit den Spitzen einerlei Punkt der mittleren Entfernungen. Die Coordinaten der Mittelpunkte jener Linien sind nämlich offenbar:

$\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $\frac{1}{2}(x_2 + x_3)$, $\frac{1}{2}(x_3 + x) + \ldots;$
$\frac{1}{2}(x_1 + x_3)$, $\frac{1}{2}(x_2 + x_3)$, $\frac{1}{2}(x_3 + x_3) + \ldots$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\frac{1}{2}(x_1 + x_n)$, $\frac{1}{2}(x_2 + x_n)$, $\frac{1}{2}(x_3 + x_n) + \ldots$
$\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$, $\frac{1}{2}(y_2 + y_3)$, $\frac{1}{2}(y_3 + y_3) + \ldots$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\frac{1}{2}(y_1 + y_n)$, $\frac{1}{2}(y_2 + y_n)$, $\frac{1}{2}(y_3 + y_n) + \ldots$

wobei wir aber jede verbindende Linie doppelt gerechnet haben, so dafs jede Coordinate in dieser Darstellung offenbar $2(n-1)$mal vorkommt. Die Summen der Abscissen und Ordinaten der Mittelpunkte sind also

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots)$$
$$\tfrac{1}{2}(n-1)(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots)$$

und folglich, da es überhaupt $\frac{1}{2}n(n-1)$ Verbindungslinie, also eben so viele Mittelpunkte derselben gibt, wenn die Coordinaten des Punkts der mittleren Entfernungen dieser Mittelpunkte durch (x), (y) bezeichnet werden

$$(x) = \frac{\frac{1}{2}(n-1)(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots)}{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

$$(y) = \frac{\frac{1}{2}(n-1)(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots)}{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

oder

$$(x) = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots)$$

$$(y) = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots)$$

d. i. $(x) = x$, $(y) = y$ (2), folglich der Punkt der mittleren Entfernungen der Mittelpunkte aller Verbindungslinien derselben.

Sind (x), (y) die Coordinaten des Punkts der mittleren Entfernungen der Mittelpunkte der Seiten eines $n$ecks, so ist

$$(x) = \frac{1}{n}\left[\tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) + \tfrac{1}{2}(x_2 + x_3) + \ldots + \tfrac{1}{2}(x_{n-1} + x_n) + \tfrac{1}{2}(x_n + x_1)\right]$$

$$= \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots x_n)$$

d. i. $(x) = x$ und ebenso $(y) = y$. Also ist auch der Punkt der mittleren Entfernungen der Mittelpunkte der Seiten eines $n$ecks mit dem Punkte der mittleren Entfernung der Spitzen einerlei, und man findet demnach z. B. den Punkt der mittleren Entfernungen irgend eines Vierecks, wenn man die Mittelpunkte seiner Gegenseiten verbindet, da diese Mittelpunkte die Spitzen eines Parallelogramms sind.

14. Sind A_1, A_2 irgend zwei Spitzen des Vielecks, K der Punkt der mittleren Entfernungen, K'_2 der Mittelpunkt von A_1, A_2, so erhellt, wenn man sich das Dreieck KA_1A_2 denkt, leicht, dafs $A_1K^2 + A_2K^2 = 2A_1K_2^2 + 2K'K_2^2 = \frac{1}{2}A_1A_2^2 + 2K'K_2^2$ ist. Denkt man sich von A_1 nach allen den übrigen $n-1$ Spitzen gerade Linien gezogen

$$A_1K^2 + A_2K^2 = \tfrac{1}{2}A_1A_2^2 + 2K'K_2^2$$
$$A_1K^2 + A_3K^2 = \tfrac{1}{2}A_1A_3^2 + 2K'K_3^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_1K^2 + A_nK^2 = \tfrac{1}{2}A_1A_n^2 + 2KK_n^2$$

$$(n-1)A_1K^2 + A_2k^2 + A_3K^2 + \ldots A_nK^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(A_1A_2^2 + A_1A_3^2 + \ldots + A_1A_n^2)$$
$$+ 2(K'K_2^2 + K'K_3^2 + \ldots + K'K_n^2)^2$$
$$= (n-2)A_1K^2 + S,$$

wenn S die Summe der Quadrate der Entfernungen des Punkts der mittleren Entfernungen von den n Spitzen bezeichnet. Denkt man sich nun für jede der n Spitzen eine ähnliche Gleichung entwickelt, setzt die Summe der Quadrate aller die n Spitzen zu zweien verbindenden Linien $= \Sigma$, die Summe der Quadrate der Entfernungen der Mittelpunkte derselben vom Punkt der mittleren Entfernungen aber $= S'$, so erhält man durch Addition aller Gleichungen, da offenbar jede Verbindungslinie, also auch jede Entfernung eines Mittelpunkts vom Punkte der mittleren Entfernungen zweimal vorkommt, leicht

$$\tfrac{1}{2}2\Sigma + 2 \cdot 2S' = (n-2)S + nS$$
$$(n-1)S = \tfrac{1}{2}\Sigma + 2S'$$

Aber $\Sigma = nS$ (10). Also durch Substitution $(n-2)S = 4S'$;

$S' = \frac{1}{4}(n-2)S$, d. h. die Summe der Quadrate der Entfernungen der Mittelpunkte aller die n Spitzen des Vielecks verbindenden geraden Linien vom Punkt der mittleren Entfernungen der Spitzen von jenem Punkte gleich.

15. Die Anzahl der Mittelpunkte der verbindenden Linien ist $= \frac{1}{n}(n-1)$. Setzen wir nun die Summe der Quadrate aller diese Mittelpunkte verbindenden Linien $= \Sigma$, so ist $\Sigma = \frac{1}{2}n(n-1)S'$ (10) die drei Gleichungen

$$(n-1)S = \tfrac{1}{2}\Sigma + 2S'$$
$$\Sigma = nS, \quad \Sigma = \tfrac{1}{2}n(n-1)S'$$

dienen zur Bestimmung der vier Gröfsen S, Σ, S', Σ durch einander. So erhält man z. B.

$$(n-1)(n-2)\Sigma = 8\Sigma'$$
$$n(n-1)(n-2)S = 8\Sigma \text{ u. s. w.}$$

woraus sich wieder merkwürdige Sätze ergeben würden.

16. In jedem Viereck $ABCD$, welches bei B und C rechtwinklig ist, ist, wenn wir den Winkel $BAC = A$ setzen, immer

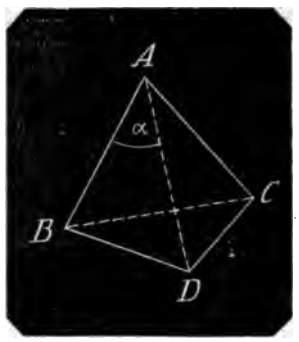
$$ABCD - 2\triangle ABC = -\tfrac{1}{4}AD^2 \sin 2A.$$

Sei $AB = b$, $AC = c$, so ist

$$AD = b \sec \varphi = c \sec (A - \varphi)$$
$$b \cos (A - \varphi) = c \cos \varphi$$
$$tg\,\varphi = \frac{c - b\cos A}{b \sin A}$$

folglich, wenn man zugleich b, c vertauscht

Fig. 928.



$$BD = \frac{c - b\cos A}{\sin A},\quad CD = \frac{b - c\cos A}{\sin A}$$

$$AD^2 = \frac{b^2 + c^2 - 2bc\cos A}{\sin A^2}$$

durch Substitution der gefundenen Werthe für BD, CD erhält man nun leicht

$$ABCD = \tfrac{1}{2}b \cdot BD + \tfrac{1}{2}c \cdot CD$$

$$= \frac{2bc\sin^2 A - (b^2 + c^2 - 2bc\cos A)\cos A}{2\sin A}$$

wenn man nur $2bc\,(\sin^2 A^2 + \cos^2 A)$ für $2bc$ setzt

$$ABCD =$$

$$bc\sin A - \frac{(b^2 + c^2 - 2bc\cos A)\sin 2A}{2\sin A}$$

wenn man nur $2bc\,(\sin^2 A + \cos^2 A)$ für $2bc$ setzt.

Aber $2\triangle ABC = bc\sin A$

folglich
$$ABCD = bc\sin A - \frac{(b^2 + c^2 - 2bc\cos A)\sin 2A}{4\sin^2 A}$$
$$= 2\triangle ABC - \tfrac{1}{4}AD^2 \cdot \sin 2A$$

woraus die zu beweisende Gleichung unmittelbar folgt.

17. Sei nun $ABCD\ldots$ ein willkührliches Vieleck, dessen Inhalt wir durch J bezeichnen wollen. Von irgend einem Punkt K' in der Ebene des Vielecks fälle man auf die Seite Lothe, und verbinde deren Fufspunkte durch gerade Linien, wodurch ein neues Vieleck $A'B'C'D'\ldots$ von gleicher Seitenanzahl entsteht, dessen Inhalt wir J' setzen wollen, so hat man nach No 16

$$K'BA'B' - 2\triangle K'A'B' = -\tfrac{1}{4}K'B^2 \cdot \sin 2B$$
$$K'CB'C' - 2\triangle K'B'C' = -\tfrac{1}{4}K'C^2 \cdot \sin 2C$$
$$K'DC'D' - 2\triangle K'C'D' = -\tfrac{1}{4}K'D^2 \cdot \sin 2D$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$K'AN'A' - 2\triangle K'N'A' = -\tfrac{1}{4}KA^2 \cdot \sin 2A$$

wenn N die letzte Spitze des gegebenen Vielecks ist. Die Summe der Vierecke ist offenbar $= J$, die der Dreiecke $= J'$. Also

$$J - 2J' = -\tfrac{1}{4}(K'A^2 \cdot \sin 2A + K'B^2 \cdot \sin 2B + K'C^2 \cdot \sin 2C + \ldots)$$

und wenn das Viereck gleichwinklig ist

$$J - 2J' = -\tfrac{1}{4}(K'A^2 + K'B^2 + K'C^2 + \ldots)\sin 2A.$$

Soll nun, indem A und J constant bleiben, J' constant bleiben, so mufs $K'A^2 + K'B^2 + K'C^2 + \ldots$ constant bleiben. Diese Quadratensumme bleibt aber nach No. 8 constant, wenn K' in der Peripherie eines aus dem Punkte der mittleren Entfernungen des Vielecks beschriebenen Kreises liegt. Dies gibt folgenden Satz. Fället man aus irgend einem Punkt der Peripherie eines aus dem Punkt der mittleren Entfernungen eines gleichwinkligen Vielecks beschriebenen Kreises auf dessen Seiten Perpendikel und verbindet deren Fufspunkte durch gerade Linien, so ist der Inhalt des dadurch entstehenden eingeschriebenen Vielecks eine constante Gröfse.

Punkte kleinster Entfernung.

18. Man habe irgend zwei Punkte M, M' in der Ebene eines Vielecks. Die durch M und M' gehende gerade Linie nehme man als Axe der X an, M sei der Anfang der Coordinaten, die Entfernungen der Spitzen von M sollen durch $r_1, r_2, r_3 \ldots$ ihre Entfernungen von M' durch $r_1'; r_2'; r_3' \ldots$, die Coordinaten wie vorher, die Entfernung des Punkts M' von M durch k bezeichnet werden, so ist nach No. 6

$$r_1' = \sqrt{(r_1^2 + k^2 - 2kx_1)} = r_1\sqrt{(1 - c_1)}$$
$$r_2' = \sqrt{(r_2^2 + k^2 - 2kx_2)} = r_2\sqrt{(1 - c_2)}$$
$$r_3' = \sqrt{(r_3^2 + k^2 - 2kx_3)} = r_3\sqrt{(1 - c_3)}$$

Für $c_1 = \dfrac{k(2x_1 - k)}{r_1^2}$; $c_2 = \dfrac{k(2x_2 - k)}{r_2^2} \ldots$

Entwickelt man die Quadratwurzeln nach dem binomischen Lehrsatz und ordnet nach Potenzen von k, so wird

$$r_1' = r_1 - k\frac{x_1}{r_1} + k^2\left(1 - \frac{x_1^2}{r_1^2}\right)\frac{1}{2r_1} + \ldots$$

$$r_2' = r_2 - k\frac{x_2}{r_2} + k^2\left(1 - \frac{x_2^2}{r_2^2}\right)\frac{1}{2r_2} + \ldots$$

$$r_3' = r_3 - k\frac{x_3}{r_3} + k^2\left(1 - \frac{x_3^2}{r_3^2}\right)\frac{1}{2r_3} + \ldots$$

u. s. f.

Folglich weil

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + \ldots$$

$$1 - \frac{x_1^2}{r_1^2} = \frac{y_1^2}{r_1^2};\quad 1 - \frac{x_2^2}{r_2^2} = \frac{y_2^2}{r_2^2} + \ldots$$

wenn man auf beiden Seiten addirt

$$\Sigma r' = \Sigma r - k\left(\frac{x_1}{r_1} + \frac{x_2}{r_2} + \frac{x_3}{r_3} + \ldots\right)$$
$$+ k^2\left(\frac{1}{2r_1}\cdot\frac{y_1^2}{r_1^2} + \frac{1}{2r_2}\cdot\frac{y_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{2r_3}\cdot\frac{y_3^2}{r_3^2} + \ldots\right)$$

wo die Bezeichnung Σ, $\Sigma r'$ leicht verständlich sein wird. Man kann den Punkt M nun einer solchen Bedingung unterwerfen, dafs für ihn Σr, d. i. die Summe seiner Entfernungen von allen Spitzen des Vielecks kleiner ist, als die Summe der Entfernungen aller anderen in seiner Nähe liegenden Punkte von den Spitzen des Vielecks. Zu dem Ende mufs also für kleine k, $\Sigma r' > \Sigma r$ sein. Man kann nun aber k so klein nehmen, dafs das erste Glied

$$-k\left(\frac{x_1}{r_1} + \frac{x_2}{r_2} + \frac{x_3}{r_3} + \ldots\right)$$

obiger Reihe rücksichtlich seines absoluten Werths gröfser ist, als die Summe aller übrigen, so dafs also für so kleine k das Zeichen der zu Σr addirten Gröfse blofs von diesem ersten Gliede abhängt, also positiv oder negativ ist, je nach dem

$$-\left(\frac{x_1}{r_1} + \frac{x_2}{r_2} + \frac{x_3}{r_3} + \ldots\right)$$

es ist. Soll demnach für kleine k immer $\Sigma r' > \Sigma r$ sein, so mufs nothwendig

$$\frac{x_1}{r_1} + \frac{x_2}{r_2} + \frac{x_3}{r_3} + \ldots = 0$$

sein. Das zweite Glied

$$k^2\left(\frac{1}{2r_1}\cdot\frac{y_1^2}{r_1^2} + \frac{1}{2r_2}\cdot\frac{y_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{2r_3}\cdot\frac{y_3^2}{r_3^2} + \ldots\right)$$

ist offenbar immer positiv und man kann wieder k^2 so klein nehmen, dafs der absolute Werth jenes Gliedes die Summe aller folgenden übertrifft, so dafs also für kleine k, immer $\Sigma r' > \Sigma r$ ist. Folglich gibt es in der Ebene jedes Vielecks Punkte, für welche die Summe ihrer Entfernungen von den Spitzen des Vielecks kleiner ist, als die Summe der Entfernungen aller in ihrer Nähe liegenden Punkte von diesen Spitzen. Jene Punkte nennt man Punkte kleinster Entfernung und sie sind, da man offenbar auch x mit y vertauschen kann, der Bedingung unterworfen, dafs

$$\frac{x_1}{r_1} + \frac{x_2}{r_2} + \frac{x_3}{r_3} + \ldots = 0$$

$$\frac{y_1}{r_1} + \frac{y_2}{r_2} + \frac{y_3}{r_3} + \ldots = 0,$$

19. Man denke sich nun die Coordinatenaxen durch den Punkt M kleinster Entfernung gelegt, schneide von ihm an auf den von ihm nach den Spitzen gezogenen geraden Linien gleiche Stücke ϱ ab, und bezeichne die Coordinaten der Endpunkte $\mathfrak{A}_1$; $\mathfrak{A}_2$; $\mathfrak{A}_3$ .. dieser Stücke durch ξ_1, v_1; ξ_2, v_2; ξ_3, v_3; ... so erhellt auch ohne Figur augenblicklich, dafs

$$\frac{x_1}{r_1} = \frac{\xi_1}{\varrho}, \frac{x_2}{r_2} = \frac{\xi_2}{\varrho}, \frac{x_3}{r_3} = \frac{\xi_3}{\varrho} \ldots.$$

$$\frac{y_1}{r_1} = \frac{v_1}{\varrho}, \frac{y_2}{r_2} = \frac{v_2}{\varrho}, \frac{y_3}{r_3} = \frac{v_3}{\varrho} \ldots.$$

und folglich wegen der Bedingungsgleichungen nach No. 18, wenn man zugleich mit ϱ multiplicirt:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \ldots = 0$$
$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots = 0$$

dies sind aber die Bedingungsgleichungen für den Punkt der mittleren Entfernungen der Punkte $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ ... folglich ist jeder Punkt der kleinsten Entfernung eines Vielecks der Mittelpunkt der Entfernungen der Punkte, welche man erhält, wenn man auf den von dem Punkt kleinster Entfernung nach den Spitzen gezogenen geraden Linien von diesem Punkte aus willkührliche aber gleiche Stücke abschneidet.

20. Ist umgekehrt ein Punkt M in der Ebene eines Vielecks der Punkt mittlerer Entfernungen der gleich weit von ihm entfernten Punkte $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ ... so ist, wenn man sich die Coordinatenaxen wieder durch M gelegt denkt, und die vorige Bezeichnung No. 3 beibehält

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \ldots = 0$$
$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots = 0$$

woraus wie vorher folgt, dafs

$$\frac{x_1}{r_1} + \frac{x_2}{r_2} + \frac{x_3}{r_3} + \ldots = 0$$

$$\frac{y_1}{r_1} + \frac{y_2}{r_2} + \frac{y_3}{r_3} + \ldots = 0$$

M also ein Punkt kleinster Entfernung des Vielecks, der vorige Satz also auch umgekehrt richtig ist.

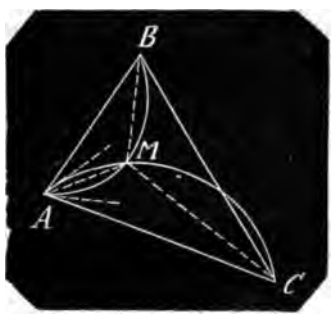
Im Viereck ist also der Durchschnittspunkt der Diagonalen ein Punkt kleinster Entfernung, weil, wenn man von

den Diagonalen gleiche Stücke abschneidet und deren Endpunkte verbindet, ein Parallelogramm entsteht, dessen Punkt der mittleren Entfernungen besagter Durchschnittspunkt ist.

21. Gibt es in der Ebene eines Vielecks einen Punkt M von solcher Beschaffenheit, dafs die von ihm nach den Spitzen gezogenen Linien lauter gleiche Winkel einschliefsen, so ist M ein Punkt kleinster Entfernung des Vielecks Schneidet man nämlich auf den von M nach den Spitzen gezogenen geraden Linien von M aus gleiche willkührliche Stücke ab und verbindet deren Endpunkte durch gerade Linien, so entsteht offenbar ein reguläres Vieleck, dessen Mittelpunkt M ist. Also ist M der Punkt der mittleren Entfernungen dieses regulären Vielecks, folglich der Punkt kleinster Entfernung des gegebenen Vielecks.

22. Sind alle Winkel eines Dreiecks $< \frac{4}{3}R$, so gibt es innerhalb desselben immer einen Punkt von solcher Beschaffenheit, dafs die von ihm nach den Spitzen gezogenen geraden Linien gleiche Winkel (jeder $= \frac{4}{3}R$) einschliefsen und nur einen. Wären alle drei Winkel eines Dreiecks $< \frac{4}{3}R$, so wäre die Summe aller $< 2R$. Folglich mufs es wenigstens einen geben, welcher $\geqq \frac{4}{3}R$. Dieser Winkel sei BAC. Ueber AB und AC beschreibe man zwei Kreisabschnitte, deren jeder einen Winkel $= \frac{4}{3}R$ fafst, so müssen die Bogen dieser Segmente sich nothwendig zwischen den Schenkeln des Winkels BAC schneiden, weil dieser Winkel $< \frac{4}{3}R > \frac{2}{3}R$ ist

Fig. 929.

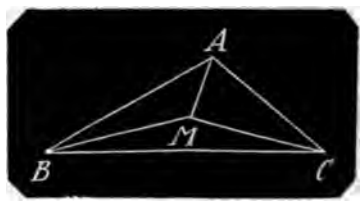


und jede der beiden durch A an die Bogen gezogenen berührenden mit AB und AC einen Winkel gleich $\frac{2}{3}R$ einschliefst, indem jeder dieser beiden Winkel dem Winkel im entgegengesetzten Kreisabschnitt gleich also die Ergänzung von $\frac{4}{3}R$ zu $2R$, d. i. $= \frac{2}{3}R$ ist. Da nun der Durchschnittspunkt M der beiden Bogen zwischen den Schenkeln von BAC liegt, so mufs M nothwendig innerhalb des Dreiecks liegen, weil der der Spitze A zugekehrte Winkel $BMC = \frac{4}{3}R$, ein convexer Winkel ist, welches nicht möglich wäre, wenn M aufserhalb des Dreiecks läge. Da nun $AMB = AMC = \frac{4}{3}R$ ist, so ist auch $BMC = \frac{4}{3}R$ und folglich die drei von AM, BM, CM eingeschlossenen Winkel einander gleich. Da die beiden Bogen der Kreisabschnitte, welche $\frac{4}{3}R$ fassen, sich nur in einem Punkt schneiden können, so gibt es auch nur einen Punkt wie M.

23. Da es in jedem Dreieck, dessen Winkel alle $< \frac{4}{3}R$ sind, innerhalb immer einen Punkt gibt, für welchen die von ihm an die Spitzen gezogenen Linien gleiche Winkel einschliefsen, so gibt es für jedes solche Dreieck immer auch einen Punkt kleinster Entfernung nach No. 21 innerhalb. Auch gibt es nur einen Punkt kleinster Entfernung. Gäbe es nämlich zwei M, M' so müfsten wenigstens zwei der von AB', BM', CM' gebildeten Winkel ungleich sein, weil es nach No. 22 nur einen Punkt gibt, wo diese Winkel gleich sind. Der Punkt M' wäre aber nach No. 10 der Punkt der mittleren Entfernungen auf AM', BM', CM' von M' gleich weit entfernter Punkte. Folglich müfsten, wenn man die den beiden ungleichen Winkeln zugleich als Schenkel angehörende Linie unter AM', BM', CM' als Axe annähme, die Ordinaten der auf den beiden anderen Linien gleichweit von M' entfernten Punkte nach No. 3 einander gleich sein, welches jedoch wegen der Ungleichheit der Winkel offenbar unmöglich ist.

24. Hat nun ein Dreieck einen Winkel BAC, welcher $\geqq \frac{4}{3}R$ ist so kann der Punkt kleinster Entfernung nicht innerhalb liegen, weil sonst $AMB = AMC = \frac{4}{3}R$ (No. 23), also nothwendig $MAB < \frac{2}{3}R$, $MAC < \frac{2}{3}R$, $BAC < \frac{4}{3}R$ sein müfste.

Fig. 930.



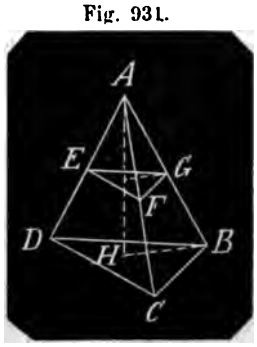
In einer Seite des Dreiecks kann aber

ınkt kleinster Entfernung überhaupt so wenig liegen als aufserhalb des ks, weil sich von einem solchen nie nach den Spitzen drei gleiche el mit einander einschliefsende ge-Linien ziehen lassen, wie es doch liegendem Fall möglich sein müfste Daher mufs der Punkt kleinster rnung in zwei Seiten zugleich, d. h. ıer Spitze des Dreiecks liegen. Da offenbar $BA + BC > AB + AC$, $CB > AB + AC$ ist, so mufs der kleinster Entfernung in der Spitze stumpfen Winkels liegen.

amide ist ein Körper, der von einer oder mehrseitigen Figur als Grund-ıe und von so vielen Dreiecken als Grundfläche Seiten hat als Sei-lächen, die alle in einem Punkt spitze zusammen treffen, begrenzt der Abstand der Spitze von der dfläche ist die Höhe der Pyramide. Wird eine Pyramide mit Ebenen el ihrer Grundfläche geschnitten, nd die Durchschnitte der Grund-ähnlich und ihre Flächen verhal-ich zur Grundfläche wie die Qua-ihrer Abstände von der Spitze zu Quadrat des Abstandes der Grund-von der Spitze.

nn ist EFG eine der Grundfläche parallele Durchschnittsebene, dann die Durchschnittslinien dieser Ebene len Seitenflächen der Pyramide den n der Grundfläche parallel, nämlich CD, $EG \parallel BD$, $FG \parallel BC$. Deshalb $G = \angle BCD$ u. s. w.

Fig. 931.



e Durchschnittsfigur und die Grund-e sind also in einerlei Folge gleich-lig, weil $FG \parallel BC$, und so ist

$$FG : BC = AF : AC$$

weil $EF \parallel CD$

$$EF : CD = AF : AC$$

r $$FG : BC = EF : CD$$

Schliefst man so fort, so folgt, dafs die Seiten beider Ebenen, die an gleichen homologen Winkeln liegen, je zwei und zwei einander proportional sind, mithin sind Durchschnitt und Grundfläche einander ähnlich.

AH sei ein Loth auf die Grundfläche aus der Spitze gefällt. Dieses schneide die Durchschnittsebene in J, ziehe BH, GJ, so sind diese parallel. Daher

$$AH : AJ = AB : AG = BC : FG$$

daher ist $AH^2 : AJ^2 = BC^2 : FG^2$.

Aehnliche Figuren verhalten sich aber wie die Quadrate homologer Linien, also Grundfläche BCD : Durchschnittsfläche $EFG = BC^2 : FG^2 = AH^2 : AJ^2$.

2. Der Inhalt einer Pyramide ist das Product aus dem Drittheil der Höhe und dem Inhalt der Grundfläche.

Denn es sei g der Inhalt der Grundfläche und h die Höhe der Pyramide. Diese Höhe theile man in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, lege durch die Theilpunkte Ebenen parallel zur Grundfläche, so zerlegen diese die Pyramide in n Theile, deren Inhalte, von der Spitze abgezählt, der Reihe nach mit $p_1, p_2 \cdots p_n$ bezeichnet seien. Zwischen je zwei nächsten Durchschnitten denke man sich Prismen construirt, deren eine Seitenkante mit einer Seitenkante der Pyramide zusammenfällt und wovon das eine den oberen, das andere den unteren Durchschnitt zu Endflächen, beide aber den Abstand der beiden Durchschnitte, also $\frac{1}{n} h$ zur Höhe haben; so erhält man zwei Reihen von Prismen; die Prismen der einen Reihe sind Theile der zwischen dieselben Durchschnitte fallenden Pyramidentheile, also kleiner als diese Theile, die Summe ihrer Inhalte also kleiner als der der Pyramide. Dagegen sind von den Prismen der anderen Reihe die zwischen denselben Durchschnitten liegenden Pyramidenstücke nur Theile, die Prismenstücke also gröfser als die zugehörigen Pyramidenstücke. Die Summe ihrer Inhalte also gröfser. Die Prismen der ersten Reihe sind also inwendige Prismen, die Durchschnitte, welche durch den $(m-1)$ und den $m$ten Theilpunkt der Höhe von der Spitze abgezählt gehen, haben die Abstände $\frac{m-1}{n} h$ und $\frac{m}{n} h$ von dieser Spitze. Bezeichnet man diese Durchschnitte mit g_{m-1} und g_m, so hat man nach dem vorigen Satz

$$g : g_{m-1} = h^2 : \left(\frac{m-1}{n} h\right)^2 = h^2 : \left(\frac{m-1}{n}\right)^2 h^2 = 1 : \left(\frac{m-1}{n}\right)^2$$

Also ist $g_{m-1} = \left(\frac{m-1}{n}\right)^2 g$

Eben so folgt $g_m = \left(\frac{m}{n}\right)^2 g$.

Der Inhalt des inwendigen Prisma zwischen diesen beiden Durchschnitten ist daher

$$\frac{1}{n} h\, g_{m-1} = \frac{(m-1)^2}{n^3} hg$$

der Inhalt des auswendigen Prisma

$$= \frac{1}{n} h\, g_m = \frac{m^2}{n^3} hg.$$

Zwischen diesen beiden Inhalten ist nun der Inhalt p_m des zwischen denselben Durchschnitten liegenden Pyramidenstücks begriffen, man hat also

$$\frac{(m-1)^2}{n^3} hg < p_m < \frac{m^2}{n^3} hg.$$

Setzt man in diese Vergleichung für m die Reihe der natürlichen Zahlen von 1 bis n, so erhält man eine Reihe von n Vergleichungen für alle einzelnen Pyramidenstücke:

$$\frac{0}{n^3} hg < p_1 < \frac{1^2}{n^3} hg$$
$$\frac{1}{n^3} hg < p_2 < \frac{2^2}{n^3} hg$$
$$\frac{2}{n^3} hg < p_3 < \frac{3^2}{n^3} hg$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{(m-1)^2}{n^3} hg < p_n < \frac{m^2}{n^3} hg$$

bezeichnet man den Inhalt der ganzen Pyramide mit p, so ist

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n$$

und wenn man die n Vergleichungen addirt, so erhält man

$$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots (n-1)^2}{n^3} hg < p < \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2}{n^3} hg$$

Nun ist aber

$$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots (n-1)^2}{n^3} hg < \tfrac{1}{3} hg < \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2}{n^3} hg$$

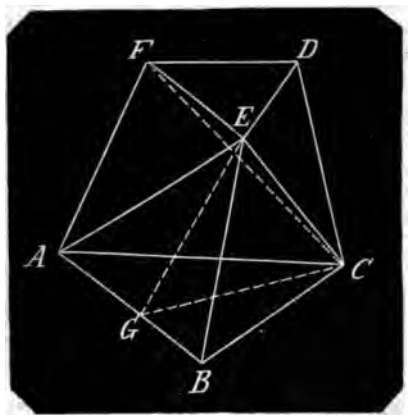
Mithin fällt p und $\frac{1}{3}hg$ zwischen einerlei einschliefsende Gröfsen, deren Unterschied $= \frac{n^2}{n^3} hg = \frac{1}{n} hg$, der also, weil n beliebig grofs genommen werden kann, sich beliebig klein machen läfst. Folglich müssen die zwischen begriffenen Gröfsen einander gleich sein.

Anmerk. gh ist der Inhalt eines Prisma von der Grundfläche g und der Höhe h, folglich ist eine Pyramide der dritte Theil eines Prisma von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe. Sind G und H dasselbe für eine Pyramide P, was g und h für die Pyramide p sind, so hat man $p : P = gh : GH$, d. h. Pyramiden verhalten sich wie die Producte aus Grundflächen und Höhen Sind also die Grundflächen zweier Pyramiden gleich und die Höhen gleich, so sind auch die Pyramiden gleich.

3. Der Theil einer Pyramide, begriffen zwischen den Grundflächen und einem damit parallel geführten Durchschnitt; d. h. der Inhalt einer abgekürzten Pyramide ist dreien Pyramiden zusammengenommen gleich von einerlei Höhe mit der abgekürzten, deren Grundflächen aber der Reihe nach die untere Endfläche, die obere Endfläche der abgekürzten und das geometrische Mittel derselben sind.

Denn es sei $ABCDEF$ eine dreiseitige abgekürzte Pyramide. Man lege sowohl durch die Punkte A, C, E als durch C, E, F eine Ebene, so wird dadurch die abgekürzte Pyramide in drei vollständige Pyramiden $ABCE$, $DEFC$ und $ACFE$ zerlegt. Betrachtet man von den beiden ersten die Dreiecke ABC und DEF als Grundflächen, so haben diese einerlei Höhe mit der abgekürzten und sind also die beiden zuerst genannten Pyramiden. Zieht man durch E in $ABEF$ mit der Kante AF die Parallele EG und verbindet C mit G, so ist CG parallel der Ebene des Dreiecks ACF. Betrachtet man also bei der dritten Pyramide $ACFE$ jenes Dreieck als Grundfläche, so ist sie auch gleich einer Pyramide über derselben Grundfläche, die ihre Spitze in G hat. Die Eckpunkte dieser zweiten Pyramide sind aber bei diesen A, C, G, F. Man kann also das $\triangle ACG$ als ihre Grundfläche betrachten, wo dann F ihre Spitze, wo sie dann einerlei Höhe mit der ab-

Fig. 932.



gekürzten Pyramide hat: es ist also nur noch zu zeigen, dafs das $\triangle ACG$ das geometrische Mittel zwischen den Endflächen ABC und DEF.

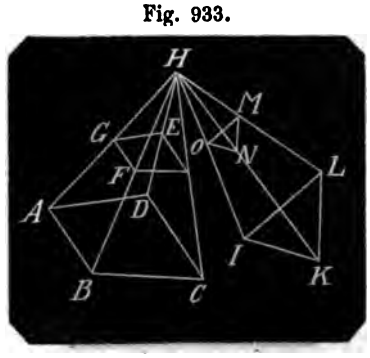
Nun ist

$$\triangle ABC : \triangle ACG = AB : AG = AB : EF = AC : DF = \triangle ACG : \triangle DEF$$

weil $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, und bei Dreiecken, die einen gleichen Winkel haben, die Inhalte sich wie die Producte der den gleichen Winkel einschliefsenden Seiten oder wie je zwei dieser Seiten sich verhalten, wenn die beiden anderen Seiten, wie hier AG und EF einander gleich sind. Mithin ist $\triangle ACG$ das geometrische Mittel zwischen den Dreiecken ABC und DEF. Man hat demnach $\triangle ACG = \sqrt{\triangle ABC \times \triangle DEF}$.

4. Es sei $ABCDEF$ eine mehrseitige abgekürzte Pyramide, die zu der vollständigen $ABCDH$ gehört, $HJKL$ sei eine dreiseitige Pyramide, deren Grundfläche JKL der Grundfläche ABD gleich

Fig. 933.



ist und mit dieser in einerlei Ebene liegt; alsdann haben beide vollständige Pyramiden auch, weil sie eine gemeinschaftliche Spitze H haben, eine gemeinschaftliche Höhe, und wenn man die Ebene EFG erweitert, bis sie die dreiseitige Pyramide im $\triangle NMO$ schneidet, so haben auch die Pyramiden $EFGH$ und $MNOH$ einerlei Höhe. Da Durchschnitte parallel den Grundflächen der Pyramide in dem Verhältnifs der Quadrate ihrer Abstände von der Spitze stehen, in den beiden hier betrachteten Pyramiden aber diese Abstände gleich sind, so verhält sich die Grundfläche ABD : Durchschnitt $EFG = \triangle JKL : \triangle MNO$.

Aber Grundfläche $ABD = \triangle JKL$,

folglich Durchschnitt $EFG = \triangle MNO$,

folglich haben die Pyramiden $EFGH$ und $MNOH$ gleiche Grundflächen und gleiche Höhen, wie die zugehörigen ganzen Pyramiden ADH und $JKLH$, sie sind also je zwei gleich grofs, und wenn man Gleiches von Gleichem hinweg nimmt, so bleibt die abgekürzte Pyramide

$$ABCDEFG = JKLMNO.$$

D. h. Eine mehrseitige abgekürzte Pyramide ist so grofs als eine abgekürzte dreiseitige Pyramide von gleicher Höhe und gleich grofsen Endflächen, folglich gilt von der mehrseitigen der Satz wie von den dreiseitigen.

5. Zwei Pyramiden sind ähnlich, wenn sie ähnliche Grundflächen und ähnliche homologe Seitenflächen und unter gleichen Winkeln gegen die Grundflächen geneigt sind.

Denn es seien $ABCDEF$ und $abcdef$ zwei Pyramiden, deren Grundflächen einander ähnlich, so wie die Seitenflächen ABF und abf u. s. w., die überdies gleiche Neigungswinkel gegen die Grundflächen haben. Wegen der Aehnlichkeit der Grundflächen ist $\angle ABF = \angle abf$, daher sind in den beiden Ecken B und b zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel der einen eben den Stücken der anderen gleich, folglich sind diese Ecken congruent und also auch die übrigen Seiten und Winkel gleich. Man hat also $\angle CBF = \angle cbf$ und aufserdem sind die Seitenflächen CBF und cbf wegen des gleichen Winkels der Ecken an BC und bc gegen die Grundflächen unter gleichen Winkeln geneigt. Aus der Aehnlichkeit der Grundflächen folgt

$$AB : ab = BC : bc$$

und wegen der Aehnlichkeit der Seitenflächen ABF und abf hat man

$$AB : ab = BF : bf.$$

Daher ist auch

$$BC : bc = BF : bf.$$

Mithin sind die Seitenflächen BCF und bcf nach zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel ähnlich. Man kann also von diesen Seitenflächen wie von den zuerst betrachteten ausgehend auf die Aehnlichkeit der übrigen homologen Seitenflächen und auf deren gleiche Neigung gegen die Grundflächen schliefsen, und so folgt dann, dafs in beiden Pyramiden alle Winkel und Ecken gleich und alle homologen Längenabmessungen proportional sind.

6. Aehnliche Pyramiden verhalten sich wie die Cubi homologer Längenabmessungen.

Denn fällt man von den Spitzen der Pyramiden Lothe auf ihre Grundflächen, so folgt wie früher bei den Prismen, dafs die homologen Seitenkanten diese Lothe und die Projectionen jener Seitenkanten auf den Grundflächen ähnliche Dreiecke bilden. Bezeichnen H und h die Höhen der beiden Pyramiden, deren Inhalte P und p sein mögen, und sind A und a homologe Seitenkanten und G und g die Grundflächen der Pyramiden, so hat man

$$P = \tfrac{1}{3}HG \text{ und } p = \tfrac{1}{3}hg.$$

Daher $P : p = HG : hg$

und $A : a = H : h$

Nun sind die homologen Seitenkanten den Grundkanten proportional, folglich verhalten sich die Quadrate der homologen Seitenkanten wie die Quadrate der homologen Grundkanten, die letzten verhalten sich aber wie die Grundflächen. Man hat hat also

$$A^2 : a^2 = G : g.$$

Setzt man diese Proportion mit der obigen

$$A : a = H : h$$

zusammen, so ergibt sich

$$A^3 : a^3 = HG : hg = P : p.$$

Da nun in ähnlichen Pyramiden alle homologen Längenabmessungen also auch ihre Cuben proportional sind, so verhalten sich allgemein die Inhalte der Pyramiden wie die Cuben homologer Längenabmessungen.

Die Oberfläche einer regulären Pyramide wird trigonometrisch leicht gefunden. Jede der Seitenflächen ist ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Grundlinie die Seite eines regulären Vielecks der Grundfläche und die Höhe der Hypotenuse in dem rechtwinkligen Dreieck ist, dessen Cathete die Höhe der Pyramide und die Senkrechte aus dem Mittelpunkt auf die Seite der Grundfläche sind.

Der Halbmesser der Grundfläche sei r, die Höhe $= h$, der halbe Centriwinkel $= \varphi$, so ist der Inhalt eines der Dreiecke $= r \sin\varphi \sqrt{(r^2 \cos^2\varphi + h^2)}$, und die Summe aller Seitenflächen $= nr \sin\varphi \sqrt{(r^2\cos^2\varphi + h^2)}$ wo n die Anzahl derselben ist. Die Grundfläche ist $= nr^2 \sin\varphi \cdot \cos\varphi$.

Die Seitenflächen einer gleichförmigen Pyramide sind gegen die Grundfläche unter einem Winkel geneigt, dessen Tangente $= \dfrac{h}{r\cos\varphi}$.

Die Seitenlinien der Pyramide machen mit den Seiten der Grundfläche einen Winkel, dessen Tangente $=$ ist

$$\frac{\sqrt{(r^2\cos^2\varphi + h^2)}}{r\sin\varphi}.$$

Der Neigungswinkel der Seitenflächen sei $= \alpha$,

so ist $$\sqrt{(r^2\cos^2\varphi + h^2)} = r\cos\varphi\sqrt{(1 + tg^2\alpha)} = r\cos\varphi \cdot \sec\alpha = \frac{r\cos\varphi}{\cos\alpha}$$

daher die Summe aller Seitenflächen

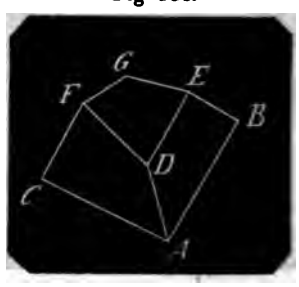
$$= \frac{nr^2 \sin\varphi \cdot \cos\varphi}{\cos\alpha} = \frac{nr^2 \sin 2\varphi}{2\cos\alpha}.$$

Die Seitenlinien der Pyramide machen mit den Seiten der Grundfläche den Winkel, dessen Tangente $=$ ist $\dfrac{\cot\varphi}{\cos\alpha}$.

7. Es sei $CABEDFG$ ein abgekürztes Pyramidenstück, dessen Grundflächen CAB, FDE parallel sind, es soll der Inhalt gefunden werden aus dem was an dem Stück gemessen werden kann.

Dieses sind die Seitenlinien der beiden parallelen Flächen und die Winkel ihrer Seiten, woraus der Inhalt derselben ge-

Fig 934.



funden wird. Wenn die Höhe nicht durch Ablothung gemessen werden kann, so mufs sie aus den Winkeln, welche eine der Seitenlinien AD mit den Seiten AB und AC macht und dem $\angle BAC$ hergeleitet werden. Denn daraus ergibt sich (spärische Trigonometrie) der Neigungswinkel der Linie AD gegen die Grundfläche und dann die Höhe, welche dem Produkt aus AD in den Sinus des Neigungswinkels gleich ist. Diese Höhe sei h, die Höhe der ganzen Pyramide $= x$, der weggenommenen y, so ist $x - y = h$.

Ferner sei $AB = a$, $DE = b$, so ist

$$a : b = x : y \text{ und } y = \frac{bx}{a}.$$

Da $a : a - b = x : x - y = x : h$ ist so ist $x = \frac{ah}{a-b}$, $y = \frac{bh}{a-b}$.

Ferner sei die untere Grundfläche A, die obere B, so ist

$$A : B = a^2 : b^2.$$

Nun ist das Pyramidenstück

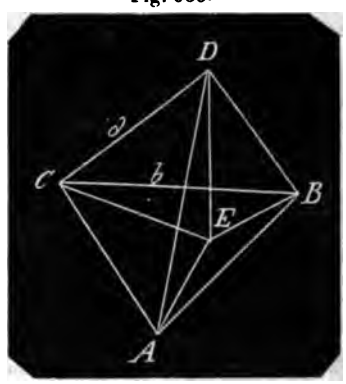
$$= \tfrac{1}{3}Ax - \tfrac{1}{3}By.$$

Setzt man für x, y, B ihre Werthe, so wird das Pyramidenstück

$$= \tfrac{1}{3}AB \cdot \frac{a^3 - b^3}{(a-b)\,a^2} = \tfrac{1}{3}Ah \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{a^2} = \tfrac{1}{3}Ah\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}\right)$$

Die dreiseitige Pyramide ist unter den Körpern mit ebenen Seitenflächen, was das Dreieck unter den ebenen geradlinigen Figuren ist.

Fig. 935.



8. Es sei $DACB$ eine dreiseitige Pyramide, deren Grnndfläche ABC. Der Winkel der Seitenlinie DC mit AC sei $= \alpha$, der Winkel derselben mit BC sei $= \beta$, der Winkel $ACB = \gamma$. Ferner sei $AC = a$, $BC = b$, $CD = d$. Es ist der Inhalt der Pyramide $=$

$$\tfrac{1}{3}abd\sqrt{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)\cdot\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)\cdot\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Der Beweis ist derselbe wie für den Inhalt eines Parallelepiped, nur dafs hier die Grundfläche $= \frac{1}{2}b\sin\gamma$ ist, und dafs diese mit dem dritten Theil der Höhe multiplicirt werden mufs.

Durch einige Substitutionen aus der Goniometrie wird diese Formel in folgende verwandelt. Inhalt der Pyramide

$$= \tfrac{1}{3}abd\sqrt{(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma)}$$

9. Die dritte Seite der Grundfläche AB sei $= c$, die Seitenlinie $AD = e$, $BD = f$. Es ist der Inhalt der Pyramide durch die sechs Seitenlinien ausgedrückt

$$\tfrac{1}{12}\sqrt{[a^2f^2(-a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-f^2) + b^2c^2(a^2-b^2+c^2+d^2-e^2+f^2) + c^2d^2(a^2+b^2-c^2-d^2+e^2+f^2)]}.$$

Diese sehr symmetrische Formel wird erhalten, wenn für $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ihre Werthe durch die Seiten der Dreiecke eingeführt werden.

Es ist $\cos\alpha = \dfrac{a^2+d^2-e^2}{2ad}$;

$\cos\beta = \dfrac{b^2+d^2-f^2}{2bd}$;

$\cos\gamma = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

Die Rechnung ist etwas langwierig, übrigens eine blofs mechanische Multiplication.

Man kann die Combination in der Formel noch auf andere Art symmetrisch ordnen: als

$$-a^2b^2c^2 + a^2b^2(e^2+f^2) + a^2c^2(d^2+f^2) + a^2d^2(f^2-e^2) + a^2e^2f^2 - a^2f^2(a^2+f^2) + b^2c^2(d^2+e^2) + b^2d^2(e^2-f^2) - b^2e^2(b^2+c^2) + b^2e^2f^2 - c^2d^2(c^2+d^2) + c^2d^2(e^2+f^2) - c^2e^2f^2.$$

10. Es sei Fig. 935 die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide $ADBC$ gegeben, nebst den Neigungswinkeln der Seitenlinien DA, DB, DC gegen die Grundfläche, man soll die Höhe der Pyramide DE und die Lage des Grundpunkts E bestimmen.

Man ziehe an den Grundpunkt E die geraden AE, BE, CE. Diese verhalten sich wie die Tangenten der Winkel ADE, BDE, CDE, oder wie die Cotangenten der Neigungswinkel EAD, EBD, ECD. Nun ist der Kreis der geometrische Ort für alle Dreiecke, die über einer gegebenen Grundlinie ein gegebenes Verhältnifs der Seiten haben. Man beschreibe also über zweien der drei Seiten der Grundfläche AB, AC, als Chorden Kreisbogen, deren jeder der Ort des Punkts E sei, so gibt ihr Durchschnitt diesen Punkt, also auch die Längen AE, BE, CE. Aus jeder dieser und dem zugehörigen Winkel wird dann die Höhe der Pyramide ED bestimmt. Die Berechnung ist etwas mühsam und mufs trigonometrisch ausgeführt werden.

11. Wenn an einer Pyramide eine Seite AB der Grundfläche, der gegenüberliegende Winkel an der Spitze ADB und der Neigungswinkel der Seitenlinien AD, BD gegen die Grundfläche gegeben werden, so ist die Höhe und der Grundpunkt dadurch bestimmt. Denn aus den Neigungswinkeln ist erstlich das Verhältnifs der Linien AE, BE, die nach dem Grundpunkt gehen, gegeben; ferner ist durch den Winkel ADB mit den Neigungswinkeln der Winkel AEB der auf DE Senkrechten AE, BE gegeben.

Die Aufgabe wird nun diese, erstlich über AB als Chorde einen Kreisbogen zu beschreiben, der einen gegebenen Winkel fasse und in diesem zwei geraden AE, BE zu ziehen, die ein gegebenes Verhältnifs haben. Bei Höhenmessungen ist dies anwendbar.

12. Die drei ebenen Winkel der Ecke A an der dreiseitigen Pyramide $ABCD$ seien alle rechte, so dafs die drei Ebenen BAC, DAC, BAD senkrecht auf einander stehen. Es ist

$$(\triangle ABD)^2 = (ABC)^2 + (ADC)^2 + (ABD)^2$$

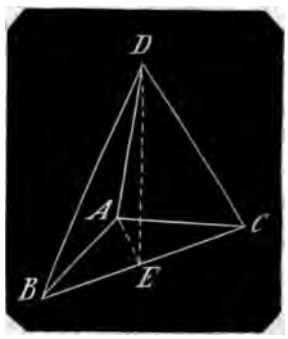
wo die Flächen der Dreiecke in Zahlen ausgedrückt zu verstehen sind.

Der Inhalt des $\triangle BCD$ werde durch seine drei Seiten ausgedrückt. Es sei $BD = a$, $BC = b$, $CD = c$, so ist der Inhalt des Dreiecks

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)}.$$

Die anderen Dreiecke drücke man durch das halbe Product ihrer Catheten aus.

Fig. 936.



Das Product unter dem Wurzelzeichen entwickele man Es ist erstlich ein Product aus den Factoren $(b^2+c^2)-a^2$ und $a^2-(b^2-c^2)$ und dieses ist

$$2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$$
$$= 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$$

Nun ist $a^2 = AB^2 + AD^2$

$$b^2 = AB^2 + AC^2$$
$$c^2 = AC^2 + AD^2$$

Setzt man diese Werthe für a^2, b^2, c^2 in jenes Product, so wird es $=$

$$4AB^2 \cdot AC^2 + 4AB^2 \cdot AD^2 + AC^2 \cdot AD^2$$

Die Summe der Dreiecke ist

$$\tfrac{1}{2}AB \cdot AD + \tfrac{1}{2}AB \cdot AC + \tfrac{1}{2}AC \cdot AD$$

und die Summe der Quadrate von denselben der sechszehnte Theil jener Summe. Das Quadrat des Dreiecks BCD ist ebenfalls der sechzehnte Theil derselben und der Satz ist erwiesen.

13. La Grange hat in den neuen Memoiren von Berlin für 1773 analytische Auflösungen einiger Aufgaben über die dreiseitigen Pyramiden gegeben. Sie setzen gar keine Construction voraus und beruhen auf Gleichungen zwischen den rechtwinkligen Coordinaten, deren je drei zu einem Punkt im Raum gehören.

Aus diesen Coordinaten oder gewissen daraus zusammengesetzten Ausdrücken bestehen die Werthe der Gröfsen, die für eine Pyramide gesucht werden. So findet la Grange zuerst Ausdrücke für die Seitenflächen, leichte zwar für die am Scheitelpunkt zusammenlaufenden, aber für die Grundfläche in der That einen zusammengesetzten nur durch die Form einfachen. Der Scheitelpunkt wird zu dem Anfangspunkt der Coordinaten genommen. Wenn s, t, u die Coordinaten zu der Grundfläche sind und die Gleichung für dieselbe ist $u = l + ms + nt$, so

e Höhe der Pyramide

$$= \frac{1}{\sqrt{(1+mn+nn)}}.$$

r Inhalt der Pyramide wird durch symmetrische Formel mittelst der linaten zu den drei Winkelpunkten rundfläche angegeben. Diese seien x; x', y', z'; x'', y'', z'', so ist der t der Pyramide =

$$z''+yz'x''+zx'y''+xz'y''-yxz''-zy'x''.$$

r Inhalt durch die sechs Seitenlinien ien angegeben. Merkwürdig ist die ıbe, in einer dreiseitigen Pyramide nigen Punkt zu finden, von welchem lie nach den Ecken gezogenen ge- die Pyramide in vier Theile thei- deren Verhältnisse gegeben sind. rch gelangt der Verfasser auch zu eln zur Bestimmung einer Kugel, e zwar sehr symmetrisch, im Grunde sehr zusammengesetzt ist. Ein ıer Satz ist folgender über den erpunkt einer dreiseitigen Pyramide. t einerlei mit dem Schwerpunkt vier ıer (mit ihren Schwerpunkten) auf ier Ecken der Pyramide gestellten ɔr.

ıe geometrische Kleinigkeit ist noch Eine dreiseitige Pyramide werde el mit zwei Seitenlinien geschnitten, icht in derselben Ebene liegen. Der tt ist ein Parallelogramm.

ɜ Netz einer Pyramide ist die in Ebene ausgebreitete Oberfläche. Es icht gezeichnet, wenn nur die Sei- ınd Winkel der Seitenflächen (mit riff der Grundfläche) bekannt sind. lrei um den Scheitelpunkt werden der Reihe an einander gelegt, an derselben wird die Grundfläche über ıeiden gemeinschaftlichen Seite ge-

ɜamide (Kryst.) quadratische, s. v. w. dratisches Octaeder".

ɜamidales Krystallisationssystem ıs zweite System, das zwei und ein- System, bei welchem drei Axen einander rechtwinkel sich schneiden, enen zwei gleichartig sind, die dritte ı diese ungleichartig ist (s. Axen- n), indem man sich die dritte halbe iche Axe als Höhe und die beiden ıen Axen als die Durchmesser einer ıitigen Pyramide vorstellt.

ɜamidalzahlen, s. u. „figurirte ɜen."

ɜamidenwürfel (Kryst.) (tetrakis- eder, Viermalsechsflächner), nannt von der Art, wie je vier Flächen um die sechs Octaederecken gruppirt sind, wodurch diese Formen das Ansehen von Hexaedern erhalten, auf deren Flächen vierseitige Pyramiden aufgesetzt sind. Es gibt mehrere Formen dieser Art; sie haben 24 Flächen, 36 Kanten und 14 Ecken.

Fig. 937.

Die Flächen sind gleichschenklige Dreiecke, die Kanten sind zweierlei, 12 längere F, die eine gleiche Lage haben, wie die Kanten des Hexaeders und in denen immer zwei Flächen mit den Grundlinien an einander stoſsen. 24 kürzere G, die eine ähnliche Lage haben wie die Kanten des Dodekaeders und in denen immer zwei Flächen mit den gleichen Schenkeln an einander stoſsen.

Die Ecken sind zweierlei, acht sechsflächige symmetrische, die wie die Ecken des Hexaeders liegen und sechs sechsflächige reguläre A, die wie die Ecken des Octaeder liegen.

Fig. 938.

Jede Fläche des Tetrakishexaeders ist wie beim Dodekaeder einer der drei Octaederaxen parallel, während sie die anderen nicht gleich wie beim Dodekaeder sondern verschieden schneidet.

Pyramidenoctaeder (Dreimalachtflächner, Triakisoctaeder) haben ihre Namen erhalten von der Art, wie je drei Flächen um die acht Hexaederecken gruppirt sind, wodurch sie im Allgemeinen das Ansehen eines Octaeders erhalten, auf dessen Flächen dreiseitige Pyramiden aufgesetzt sind. Es gibt ebenfalls mehrere Formen dieser Art: Sie haben 24 Flächen, 36 Kanten, 14 Ecken.

Die Flächen sind gleichschenklige Dreiecke.

Die Kanten sind zweierlei: 12 längere und schärfere *D*, die eine gleiche Lage haben wie die Kanten des Octaeders und in denen immer zwei Flächen mit den Grundlinien an einander stofsen, und 24 kürzere und stumpfere *G*, die eine ähnliche Lage haben wie die Kanten des Dodekaeders und in denen immer zwei Flächen mit den gleichen Schenkeln an einander stofsen.

Die Ecken sind auch zweierlei, 6 achtflächige, symmetrische Ecken *A*, die wie die Ecken des Octaeders liegen und 8 dreiflächige reguläre *O*, die wie die Ecken des Hexaeders liegen. Man kennt zwei Arten von Triakisoctaedern.

Pyramide, rhomboedische, Skalenoeder, hat 12 congruente ungleichseitige Dreiecke, achtzehn (6 kürzere schärfere, 6 längere stumpfere Scheitel, 6 im Zickzack auf und ablaufende Rand-) Kanten,

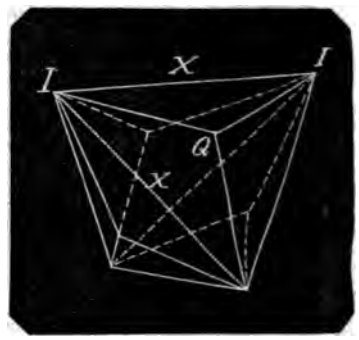
Fig. 939.

acht (2 symmetrisch vierkantige Rand-) Ecken. Die Nebenaxen verbinden die Mittelpunkte je zwei gegenüberliegender Randkanten.

Pyramidentetraeder, Hemiicositetraeder, Halbvierundzwanzigflächner, haben 12 Flächen, 18 Kanten und 8 Ecken.

Die Flächen sind gleichschenklige Dreiecke. Die Kanten sind zweierlei: 6 schärfere und längere *X*, die eine gleiche Lage haben wie die Kanten des Hemioctaeders und in welchen die Flächen mit ihren Grundlinien zusammenstofsen. 12 stumpfere und kürzere *F*, die eine ähnliche

Fig. 940.



Lage haben, wie Linien, die auf den Flächen des Hemioktaeders von den Mittelpunkten der Flächen nach den Ecken gezogen werden, in welchen die Flächen mit den Schenkeln an einander stofsen.

Die Ecken sind zweierlei. Vier sechsflächige symmetrische *J*, die eine gleiche Lage haben wie die Ecken des Hemioctaeders, vier dreiflächige gleichkantige *O*, die in ihrer Lage den Flächen des Hemioctaeders entsprechen.

Die drei octaedrischen Axen verbinden die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender längeren Kanten *X*.

Die vier hexaedrischen Axen verbinden die sechsflächigen Ecken mit den ihnen gegenüberliegenden dreiflächigen Ecken.

Die Hemiicositetraeder sind die hemiedrischen Formen der Icositetraeder und entstehen aus denselben, wenn die Flächen, welche um ihre abwechselnden Hexaederecken liegen, so an Gröfse zunehmen, dafs die dazwischen liegenden ganz verdrängt werden. Je nachdem nun die einen oder die anderen Flächengruppen fortfallen, entstehen aus jedem Icositetraeder, 2 Körper, die sich gegen einander verhalten wie die zwei Hemioctaeder, die aus dem Octaeder entstehen und wie jene in rechte und linke unterschieden werden.

ramidales Krystallisationssystem ist zweite System.

yrgoidalzahl (thurmförmige Zahl) ist Summe einer Columnarzahl und Pyidalzahl von einerlei Gattung, wenn ler letzteren die Seite oder Wurzel 1 kleiner ist als in jener. Eine Conarzahl ist aber das Product aus r Polygonalzahl in ihre Wurzel. Bloss Uebung im Rechnen folgt hier die m einer solchen Zahl

$s-2)\ r^3-\frac{1}{2}(2m-7)\ r^2+\frac{1}{2}(2m-7)r.$

yritoeder enthält 12 gleiche fünfseitige Flächen, dreissig (6 längere, 24 kürzere) Kanten und 20 dreikantige (8 gleichkantige und 12 ungleichkantige) Ecken. Die Axen verbinden die Mittelpunkte der sechs längeren Kanten.

Fig, 941.

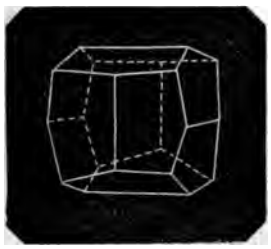
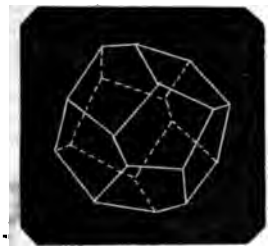


Fig. 942.

Fig. 943.



Pyrometer ein Instrument der Physik für Messung von starken Hitzegraden.

Pyrophor eine Materie, welche Kohlen enthaltend bei gewöhnlicher Temperatur an der Luft sich entzündet.

Pythagorischer Lehrsatz ist der bekannte Lehrsatz, dass in einem rechtwinkligen Dreieck das Quadrat der Hypotenuse so gross ist als die Summe der Quadrate der Katheten.

Pythagorische Rechentafel ist das Einmaleins in die Fächer eines Quadrats vertheilt. Man schreibt die Einrichtung dem Pythagoras zu, vermuthlich aus einem Missverstande. Der Abacus der Pythagoraer, welchen Böotius aufbewahrt hat, ist kein Einmaleins.

Inhaltsverzeichniss.

K.

Kalender 1.
Kalenderjahr 3.
Kalotte 5.
Kalte Zonen 5.
Kammlinie 5.
Kanalwaage 6.
Kanten 6.
Kantenwinkel 6.
Kardioide 6.
Katadioptrisch 8.
Katakaustische Linie 8.
Kathete 8.
Katoptrik 8.
Kaustische Linie 8.
Kegel 8.
Kegelmantel 13.
Kegelschnitte 13.
Kegelspiegel 13.
Keil 14.
Keilzahlen 17.
Kennzahl, Kennziffer 17.
Kepler's Gesetze über den Lauf der Planeten 18.
Kepler's Problem 20.
Kernform 20.
Kette 20.
Kettenbruch 20.
Kettenlinie 23.
Kettenmessung 31.
Kettenrechnung 31.
Kettenregel 32.
Kettensatz 32.
Kettenstab 32.
Kettenstange 32.
Kippregel 32.
Klammern 32.
Klammergrösse 32.
Kleinstes 32.
Klima 32.
Klinobasisch 32.
Klinometer 32.
Klinorhombisches Krystallisationssystem 33.
Klinorhomboidisches Krystallisatio system 33.
Knoten 33.
Knotenlinie 33.
Knotenmonat 33.
Körper 33.
Körperausdehnung 34.
Körperberechnung 34.
Körperdreieck 35.
Körperecke 35.
Körpermaass 35.
Körpertrigonometrie 35.
Körperzahl 49.
Körperzone 49.
Körperlich 49.
Körperlicher Winkel 49.
Koluren 49.
Kometen 49.
Konchoide 50.
Konisch 50.
Konoid 50.
Kosmisch 51.
Kosmogonie 52.
Kosmographie 52.
Kosmologie 52.
Krämerwage 52.
Kraft 53.
Kräfte im Gleichgewicht 56.
Krebs 87.
Kreis 87.
Kreis in einem Beweis 101.
Kreis, Borda'scher 101.
Kreisabschnitt 101.
Kreisausschnitt 101.
Kreisbewegung 101.
Kreisbogen 101.
Kreisebene 101.
Kreislinie 101.
Kreisring 101.
Krümmung 101.
Krümmungshalbmesser 102.
Krümmungskreis 102.
Krumm 102.
Krumme Linien, Flächen 102.
Krummzapfen 102.

alle 110.
alldruse 110.
allgruppe 110.
allisationssystem 110.
l 111.
labschnitt 120.
lausschnitt 120
axe 120.
dreieck 120.
dreiecke, Auflösung rechtwinkliger
.
dreiecke, Auflösung schiefwinkliger
.
gewölbe 123.
haufen 123.
oberfläche 123
schale 123.
zone 124.
zweieck 124.
lgewölbe 124.
l 124.

L.

e 125.
, astronomische 125.
, geocentrische und heliocentrische
.
, geographische 125.
e nes Gestirns 125.
ein Planeten in seiner Bahn 125.
eines Knotens 125.
der Sonne 125.
(geocentrische) der Sonne und
Mondes 125.
nausdehnung 126.
ngrade 126
nkreise 126.
nmaass 126.
nunterschiede 129.
129.
atz 129.
oeder 129.
oid 129.
e 129.
ion 129.
is 129.
risch 129.
130.
, goniometrische 130.
1 130.
lalgebra 131.
lgleichungen 131.
horizontal-Parallaxe 131
notiven 131.
131.
ithmen 132.
ithmische Linie 135.
ithmischer Maass- oder Rechen-
138.
ithmotechnie 138.
ische Linie 138.
neter 139.
Longimetrie 139.
Longitudinalschwingungen 139.
Loth 139
Ludolph'sche Zahl 139.
Luft 139.
Luftbild 139.
Luftdruck 139.
Lunation 139.
Lupe 139.

M.

Maass 141.
Maasse 141.
Maassstäbe 141.
Mac Laurin'sche Reihe 142.
Magister matheseos 142.
Magnete 142
Magnetnadel, astatische 142.
Manometer 142
Mantisse 142.
Mariottesches Gesetz 142.
Mars 142.
Maschine 143.
Masse 143.
Massenreduction 143.
Materie 144
Materieller Hebel 144.
Mathematik 144
Mathematische Geographie 144.
Mathematischer Punkt 144.
Mauerquadrant 144
Maurerwaage 144.
Maximum und Minimum 144.
Meyer-Borda'scher Kreis 149.
Mechanik 149.
Mechanische Kräfte 149.
Mechanisches Moment 149.
Mediale 149.
Mehrheit 149.
Meile 150.
Menisken 150.
Merkur 150.
Meridian, Mittagskreis 150.
Meridian, erster 151.
Meridian, magnetischer 151.
Messinstrumente 151.
Messtisch 151.
Meter 152.
Methode der kleinsten Quadrate 152.
Mikrometerschraube 153.
Mikroskop 154.
Million 154.
Minuendus 154.
Minus 154.
Minute 154.
Mittag 154.
Mittagsfernrohr 155.
Mittagsfläche 155.
Mittagsgegend 155.
Mittagshöhe 155.
Mittagskreise 155.
Mittagslinie 155.

Mittagspunkt 155.
Mittagsuhr 155.
Mittel 155.
Mittelgeschwindigkeit 155.
Mittelkraft 156.
Mittellinie 156.
Mittellinie eines Magnets 156.
Mittelpunkt 156.
Mittelpunktsgleichung 156.
Mitternacht 156.
Mittlere Anomalie 156.
Mittlere Bewegung 156.
Mittlere Entfernung 156.
Mittlere Glieder oder innere Glieder einer Proportion 157.
Mittlere Kraft 157.
Mittlerer Ort 157.
Mittlerer Planet 157.
Mittlere Proportionale 157.
Mittlere Sonne 157.
Mittleres Sonnenjahr, mittlerer Sonnentag 157.
Mittlere Sonnenzeit 157.
Modul 158.
Molecüle 158.
Molecularkräfte 158.
Moment 158.
Moment der Trägheit 158.
Monat 174.
Mond 175.
Monde 177.
Mondcyclus 177.
Mondenjahr 177.
Mondfinsterniss 177.
Mondphasen 180.
Mondzirkel 184.
Monodimetrisches Krystallisationssystem 184.
Monoklinoedrisches, auch Monoklinometrisches Krystallisationssystem 184.
Monom 184.
Monotrimetrisches Krystallisationssystem 184.
Morgen, Morgenpunkt 184.
Morgendämmerung 184.
Morgenseite 184.
Morgenweite 184.
Multinom oder Polinom 184.
Multiplicandus 184.
Multiplicator 184.
Multiplication 184.

N.

Nacht 187.
Nachtbogen eines Gestirns 188.
Nachtdämmerung 188
Nachtfernrohr 189.
Nachtgleichen 189.
Nachtgleichenpunkte 190.
Nachtlänge 190.
Nadir 190.
Näherung 190.
Näherungsbruch, Näherungsweise, Näherungswerth 191.
Name eines Verhältnisses 191.
Nebenaxe 191.
Nebenlast 191.
Nebenmonde 191.
Nebenplaneten, Monde 191.
Nebenwinkel 193
Nebenwohner 193.
Negativ 193.
Negative Grössen 193
Neigung 193.
Neigung der Bahn 194
Neigung der Magnetnadel 194.
Neigungscompass 194.
Neigungsebene 194.
Neigungsnadel 194.
Neigungswinkel 194.
Nenner 194.
Neoide 194.
Nepersche Analogien 195.
Nepersche Logarithmen 195.
Netz 195.
Neumond 195.
Neun 195.
Neunerprobe 196.
Neutralitätsreihen 197.
Niedere Analysis 197.
Niedere Benennung 197.
Niveau 197.
Nivelliren 197.
Nivellir-Instrumente 199.
Nivellirstäbe mit Tafel 200.
Nonius 200.
Nordpunkt 200.
Nordstern 201
Nordsüdlinie 201.
Normal 201
Normalaxe 201.
Normale 201.
Normalmaass 201.
Null 201.
Nullpunkt 202.
Nullzeichen 202.
Numeriren 202.
Numerisch 202.
Numerus 202.
Nutation 202.

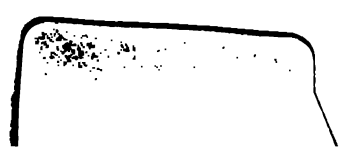
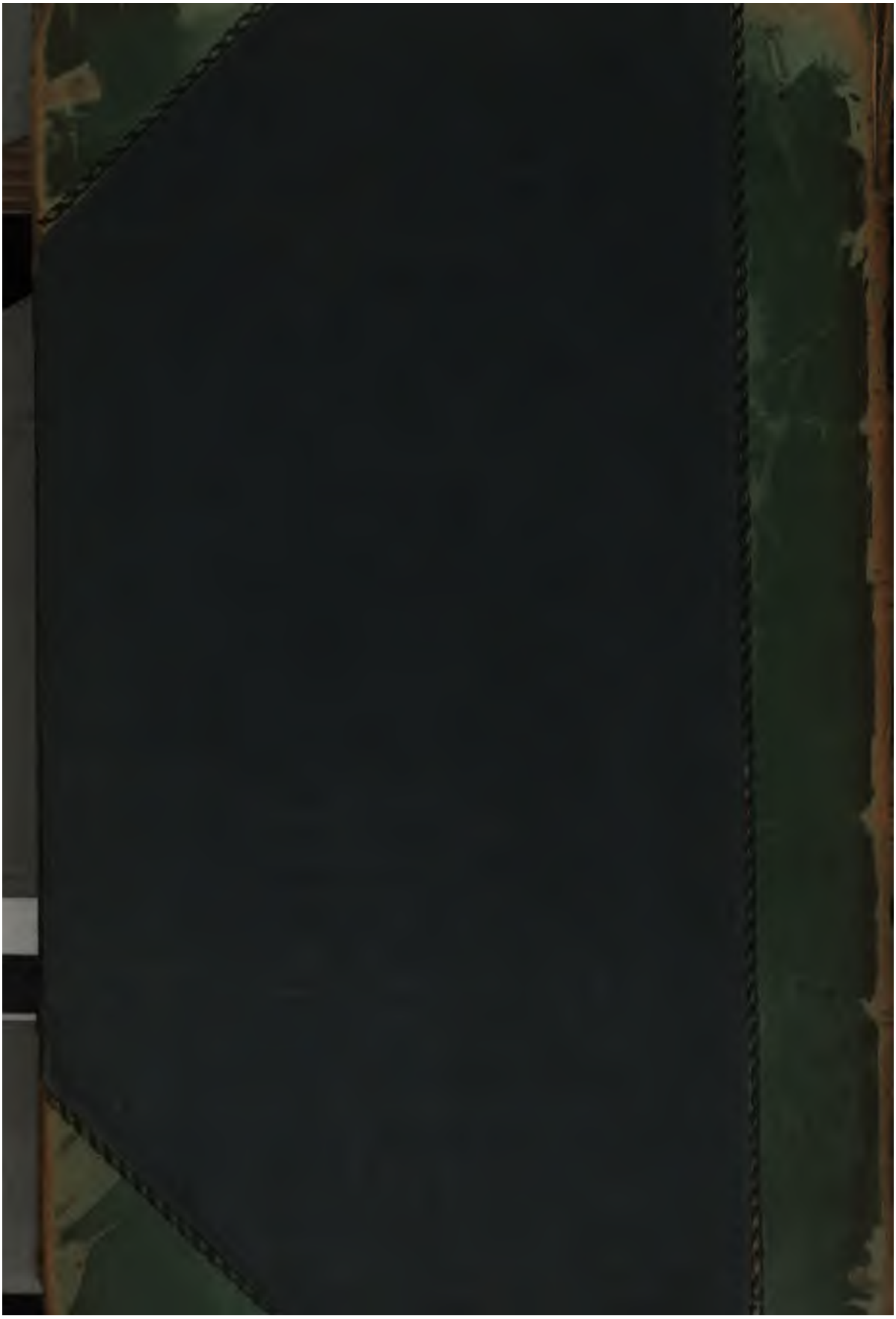
O.

Obere Halbkugel 203.
Oberfläche 203.
Objectiv 203.
Objectivdiopter 203.
Oblongum 203.
Occidens 203.
Octaeder 203.
Octaeder (Kryst.) 204.
Octaederecken 205.
Octaedralzahlen 205.
Octangel 205.
Octant 203.

Octogon 205.
Octogonalzahlen 205
Ocular 205.
Oculardiopter 205.
Oelmühle 205.
Opposition 216.
Ordinaten 216.
Ordnungen krummer Linien 217.
Organische Beschreibung einer krummen Linie 217.
Orientirboussole 218.
Orientirung eines grossen Dreiecksnetzes 218.
Ort, absoluter 219.
Ort, astronomischer 219.
Ort, geocentrischer 219.
Ort, geometrischer 219.
Ort, heliocentrischer 220.
Ort, optischer 220.
Ort, scheinbarer 220
Ort eines Planeten 220.
Orthobasisch 221.
Orthogon 221.
Orthographische Projectionen 221.
Orthotypes System 222.
Ortsänderung 221.
Ortsbestimmung 222.
Oscillation 222.
Osten 222
Ostwestlinie 222.
Ovale 222.

P.

π 223.
Paar 223
Pallas 223.
Pantograph 223.
Parabel 223.
Parabeln höherer Ordnung 234.
Parabolisch 235.
Parabolische Asymptote 235.
Parabolische Curve 235.
Parabolischer Hufabschnitt 235.
Parabolische Konchoide 236.
Parabolisches Konoid 236.
Parabolischer Spiegel 236.
Parabolische Spindel 236.
Paraboloide 236.
Parallaktisch 236.
Parallaktischer Winkel 236.
Parallaxe 236.
Parallelen 238.
Parallelen abstecken 240.
Parallele Himmelskugel 241.
Parallelebene 241.
Parallelepipedum 241.
Parallelepipedum der Kräfte 245.
Parallelflächig 245.
Parallelkreise 245.
Parallellineal 245.
Parallelogramm 245.
Parallelogramm der Geschwindigkeiten 246.
Parallelogramm der Hyperbel 246.
Parallelogramm der Kräfte 246
Parallelograph 246.
Paralleltrapez 246
Parameter 246.
Partialdivision, Partialdividend, Partialquotient 247.
Partialmultiplikation etc. 247.
Partielle Differenzen von Funktionen 247.
Partielle Differenzialgleichungen 248.
Pascals Dreieck 251.
Passageninstrument 252.
Pedometer 252.
Pendel 252.
Pendel, ballistisches 253
Pentaeder 253.
Pentagon 253.
Pentagonalzahlen 253.
Pentedekagon 253.
Perikaustika 253.
Perigeum 253.
Perihelium 253.
Perimeter 253.
Periodischer Decimalbruch 253.
Periodischer Kettenbruch 253.
Periodischer Monat 254
Periöci 254
Perioptrik 254.
Peripherie 254.
Peripheriewinkel 254.
Periscii, Umschattige 254.
Periscopische Brillen 254.
Permutationen 254.
Permutiren 255.
Perpendiculär 255
Perpendicularmethode 255.
Perpendikel 255.
Perpendikelwaage 255.
Perpetuum mobile 255.
Perturbationen 255.
Phasen 257.
Phorometrie 257.
Phoronomie 257.
Photometer 266.
Photometrie 267.
Physik 267.
Plan 267.
Planconcaves Glas 267.
Planconvexes Glas 267.
Planetarium 267.
Planeten 267.
Planetenbahn 271.
Planetenjahr 272.
Planetensystem 272.
Planetoiden 272.
Planetolabium 272.
Planimetrie 272.
Platonische Körper 272.
Platonisches Jahr 272.
Plus 272.

Pneumatik, Aerodynamik 272.
Pol 272.
Polabstand 273.
Polarcoordinaten 273.
Polardistanz 273.
Polardreieck 273.
Polargleichung 273
Polarkarte 273.
Polarkreise 273.
Polarprojection 273.
Polarstern 273.
Polarzirkel 273.
Polarzonen 273.
Polarisation des Lichts 273.
Polemoscop 273.
Polhöhe 273.
Polyeder 273.
Polyedralzahlen 289.
Polyedrometrie 289.
Polyedron 289.
Polygon 289.
Polygonalzahlen 299.
Polygonometrie 299.
Polynom 299
Polynomial-Coefficient 299
Polynomischer Satz 299.
Polynomium 306.
Ponton 306.
Porisma 306
Porosität 307.
Positiv 307
Positionswinkel eines Sterns 307
Postulat 307.
Potenotsche Aufgabe 307
Potenz 307.
Potenz der Hyperbel 308.
Potenzexponent 308.
Potenzrechnung 308.
Potenzzeichen 308.
Praktik, welsche 308.
Presse 308.
Primfactoren 308
Primzahlen 308.
Prisma 308.
Prisma, achromatisches 315.
Prisma (Optik) 315
Prisma (Kryst.) 315.
Prismatisches Krystallisationssystem 316.
Prismoid 316.
Probe, Rechnungsprobe 316.
Problem 316.
Problem von drei Körpern 316.
Problem, ballistisches 316.
Problem, beaunisches 316.
Product 317
Productionsmaschine 318.
Progression Reihe 318.
Pronische Zahl 318
Proportion 318.
Proportionale 319.
Proportionale Spirale 319.
Proportionalität 319.
Proportionalzirkel 320.
Pseudomorphosen 323.
Ptolemäischer Satz 323.
Punkt 323.
Punkt der mittleren Entfernung 323
Punkte kleinster Entfernung 328.
Pyramide 331.
Pyramide (Kryst.) 337.
Pyramidales Krystallisationssystem 337.
Pyramidalzahlen 337.
Pyramidenwürfel 337.
Pyramidenoctaeder 338.
Pyramide (rhomboedische) 338.
Pyramidentetraeder 338.
Pyrgoidalzahl 339.
Pyritoeder 339.
Pyrometer 339.
Pyrophor 339.
Pythagorischer Lehrsatz 339.
Pythagorische Rechentafel 339.

Druck von J. F. Starcke in Berlin